

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 物理科

080115

多力拔河之力平衡點意義深入探究

學校名稱：臺北縣樹林市文林國民小學

作者： 小六 葉芝琦 小六 葉芝婷	指導老師： 劉人仰
-----------------------------	------------------

關鍵詞：力平衡

多力拔河之力平衡點意義深入探究

摘要

本研究在於探討不同的力作用於一點，當力成平衡狀態時，不同力的大小與力之間的角度關係，以及施力點至力平衡點的距離總和，並深入探究此一力平衡點的特殊意義與應用。將三條繩子的一端綁在一起，另一端則往平面上三角形 A、B、C 三個定點方向上施力，調整三股力大小以及三角形三個邊長，觀察三股力成平衡時，任兩力之間的角度關係，以及此力平衡點到 A、B、C 三頂點之距離跟這三股力大小的關係。並將研究結果加以設計成一個實用的工具－「小心定位儀」。

壹、研究動機：

這學期自然課第一大單元是「生活中的力」。老師問我們有沒有玩過拔河遊戲，我們當然說：「有！」。我們很清楚繩子的中點會朝力量較大的那一方移動。可是老師問我們說：「現在老師在操場上畫三個圈圈，這三個圈圈不在同一直線上，請三位同學站在圈內，每人手執繩子的一端，而另一端將這三條繩子結在一起，然後進行拔河比賽，這會是什麼情形？」，我們想了半天也沒有具體的答案，剛好自然課第二大單元中有上到「簡單機械－輪軸及滑輪的應用」，於是我們便想動手建構這個模型來加以研究。

貳、研究目的：

- 一、探討不同形狀的三角形是否會影響三股拉力成力平衡時，力與力之間的角度。
- 二、改變三股力量的大小时，當成力平衡時，三股力量之間角度的變化情形。
- 三、力平衡點（三條繩子結在一起的那一點）到三角形三個頂點的距離總和和三力大小之間的關係。也就是此力平衡點的位置是否有特殊的意義，並且將研究成果工具化。

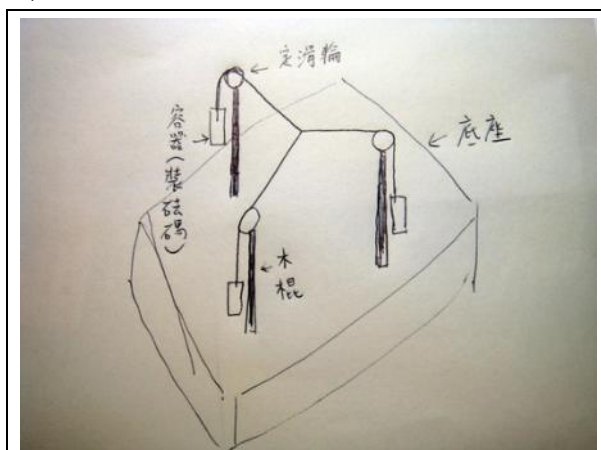
參、研究設備及器材：

紙	筆	尺	圓規	量角器	木棍
大頭釘	三秒膠	塑膠地墊	繩子	透明投影片	剪刀
彩色奇異筆	定滑輪	小塑膠袋	電子秤	5 元銅板	電腦

肆、研究過程：

一、多力拔河模型的建構：

(一)、模型草圖如下：



圖：多力拔河模型建構草圖

(二)、實際的製作過程及成品：

- 1、選定好定滑輪後，在定滑輪底部黏上大頭釘。
- 2、將木棍一端鑽孔，孔徑要比大頭釘還粗一些，爲是了讓黏貼了大頭釘的定滑輪可以隨著拉力方向的改變而旋轉。
- 3、將繩子一端和其它繩子結在一起，另一端則綁上小的塑膠袋。
- 4、將木棍底部捆上數圈膠帶，使其能固定於底座。



(1)



(2)



(3)



(4)

二、提高研究及測量的精確性

(一)、定滑輪的選擇

- 1、由於定滑輪的輪軸和輪子間依然有著摩擦力，爲了降低摩擦力對研究造成的影響，故要挑選摩擦力越小的定滑輪越好。
- 2、我們到五金行及百貨賣場找到了以下三種不同的定滑輪，並以下圖的方式在左右兩邊的塑膠袋中調整五元的硬幣數量，觀察其滑動情形。



圖：輪軸摩擦力測試

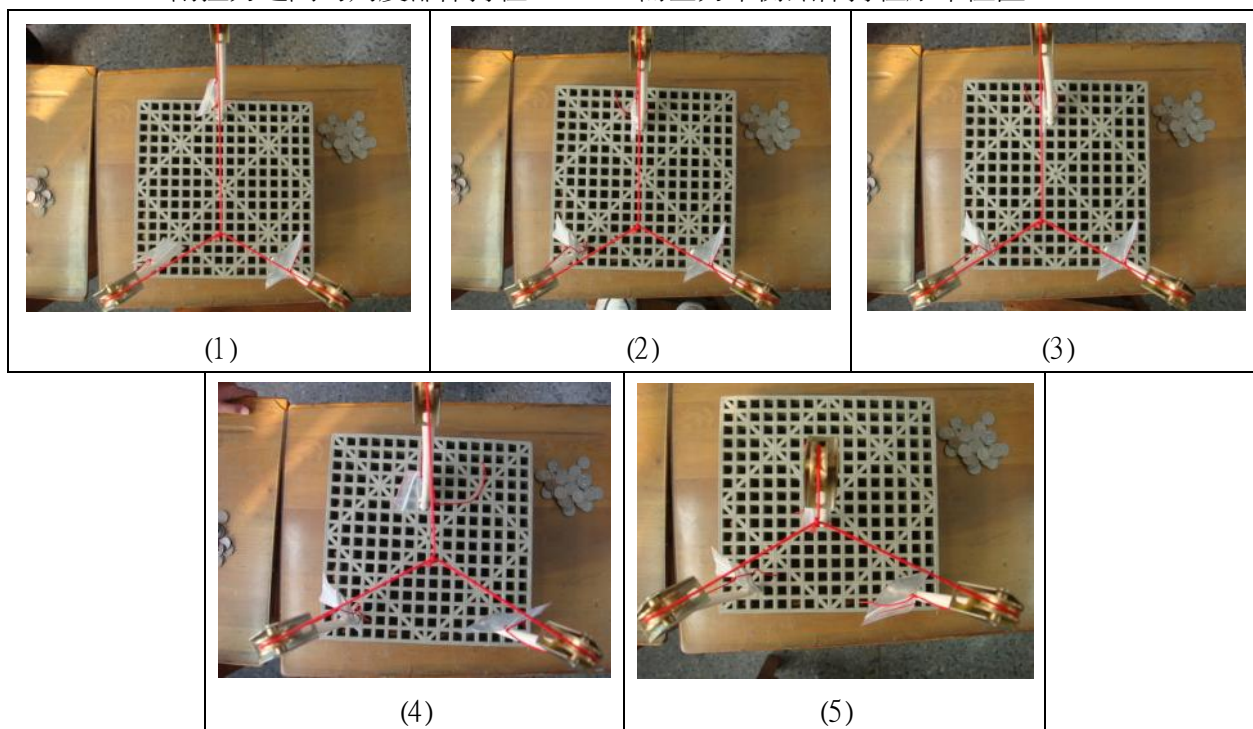
		
(1) 反應極限 左：4 枚 右：3 枚	(2) 反應極限 左：6 枚 右：5 枚	(3) 反應極限 左：10 枚 右：9 枚

3、經過反覆測試後，可得第三種金屬材質的定滑輪最為靈敏，輪軸的摩擦力最小

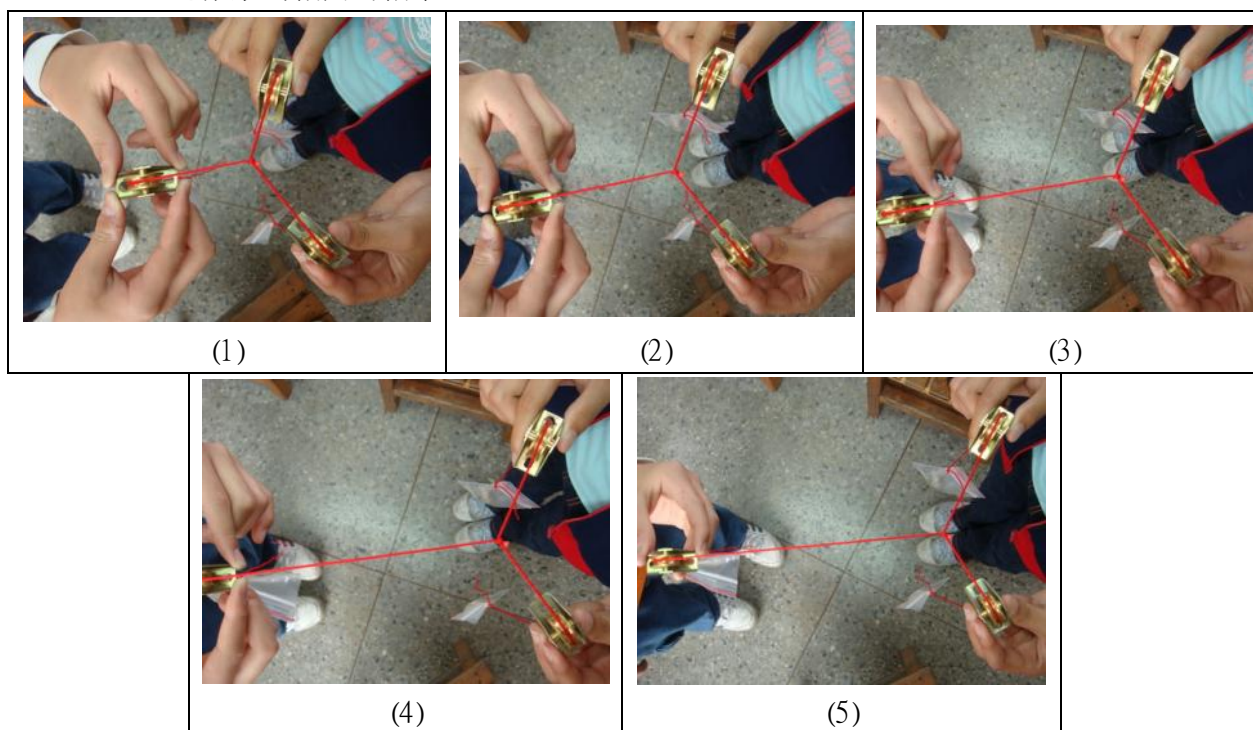
三、不同形狀的三角形是否會影響三股拉力成力平衡時力與力之間的角度

(一)、固定三角形中的兩點，順著力的方向移動第三點改變三角形的形狀，藉以觀察其力平衡角度是否有改變。

- 1、利用拔河模型進行，將三個塑膠袋各裝 10 枚硬五元幣硬，三股拉力成 1:1:1。
- 2、我們固定兩點，並將第三點以力的方向調整，發現力平衡的角度完全沒改變，兩兩拉力之間的角度都保持在 120° ，而且力平衡點保持在原來位置上。



- 3、爲了讓移動的變化有連續性，我們以手拿著定滑輪來進行同上的實驗，可以明顯地觀察到相同的結果。



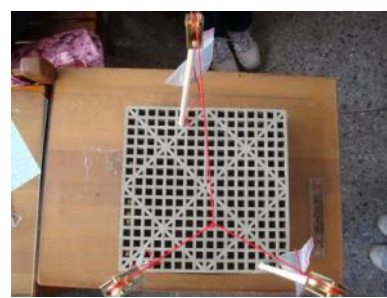
4、固定兩點，將第三點調整方向不同於該力方向，發現力平衡的角度還是沒改變，兩兩拉力之間的角度仍然保持在 120° ，但每次的力平衡點位置是不同的。



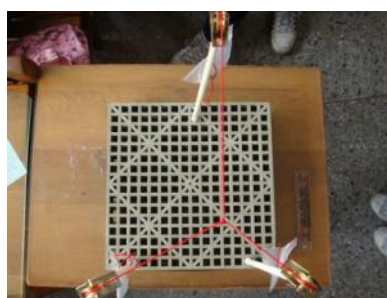
(1)



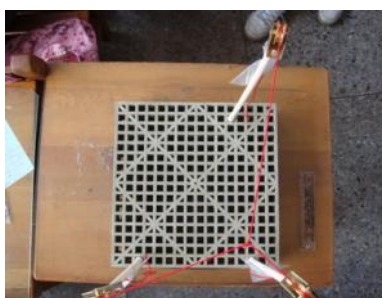
(2)



(3)



(5)

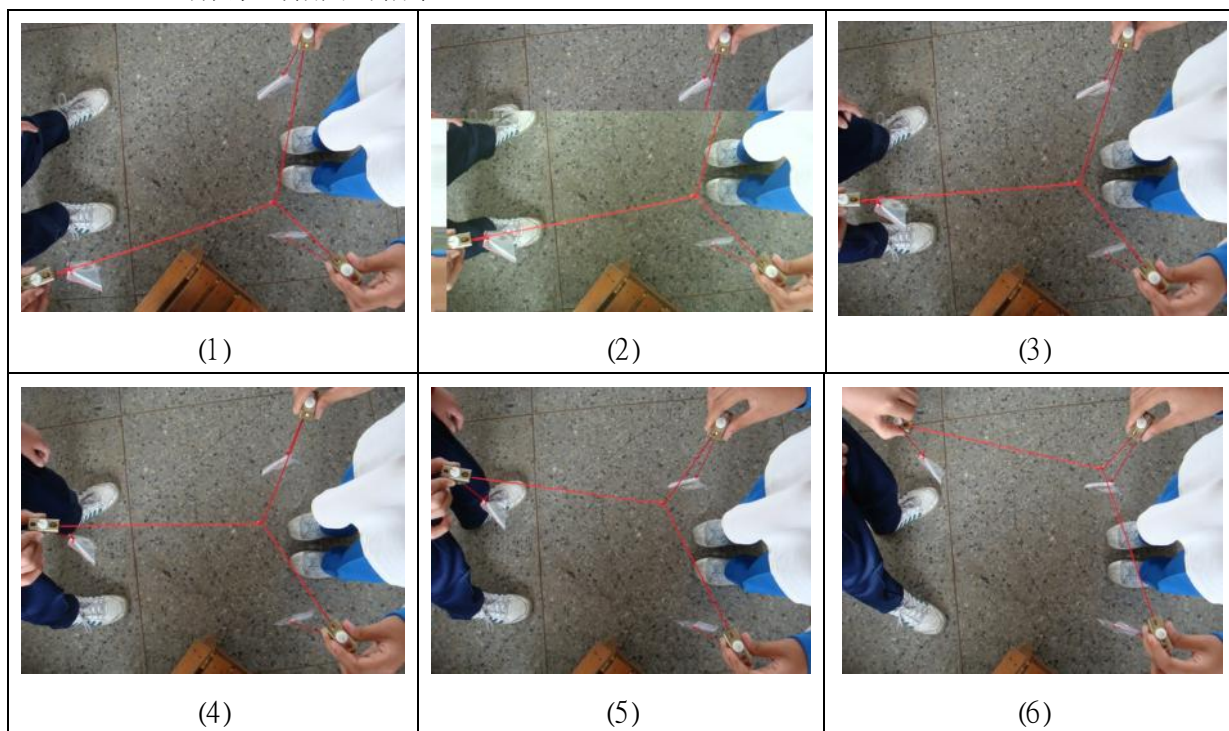


(5)



(6)

5、爲了讓移動的變化有連續性，我們以手拿著定滑輪來進行同上的實驗，可以明顯的觀察到相同的結果。



(二)、實驗可得：力平衡的角度和三角形形狀的改變無關。

四、改變三股力量的大小时，當成力平衡時，三股力量之間角度的變化情形。

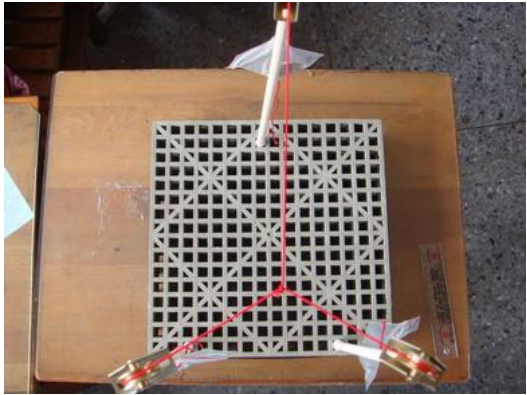
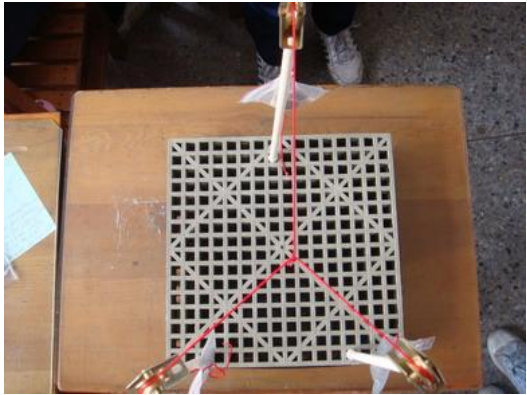
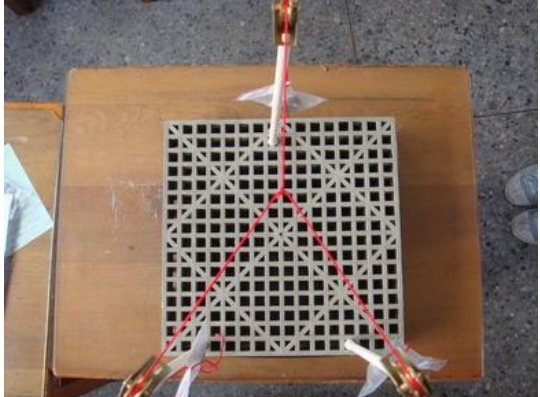
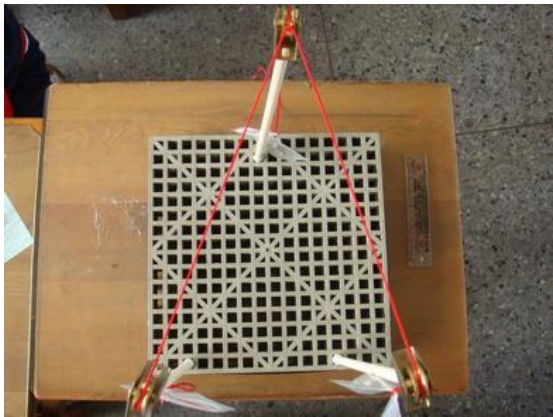
(一)、在拔河模型上，將木棍調整成等腰三角形，將朝兩底角的拉力固定爲 6 枚五元硬幣，調整朝頂角的拉力，測量並記錄，拉力之間角度變化的情形。

1、定義記錄之符號：

(1)、令這個等腰三角形頂角的頂點爲 A，左邊底角的頂點爲 B，右邊底角的頂點爲 C。

(2)、令力平衡點爲 Z。

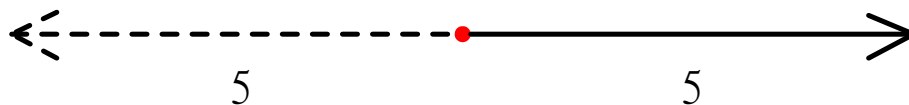
(3)、朝頂點 A 的拉力爲 a，朝頂點 B 的拉力爲 b，朝頂點 C 的拉力爲 c。

	拉力模型	三股拉力	任兩力之角度
(1)		$a = 6$ $b = 6$ $c = 6$	$\angle AZB = 120^{\circ}$ $\angle AZC = 120^{\circ}$ $\angle BZC = 120^{\circ}$
(2)		$a = 8$ $b = 6$ $c = 6$	$\angle AZB = 132^{\circ}$ $\angle AZC = 132^{\circ}$ $\angle BZC = 96^{\circ}$
(3)		$a = 10$ $b = 6$ $c = 6$	$\angle AZB = 147^{\circ}$ $\angle AZC = 147^{\circ}$ $\angle BZC = 66^{\circ}$
(4)		$a = 12$ $b = 6$ $c = 6$	力平衡點「卡」在 A 點之上。

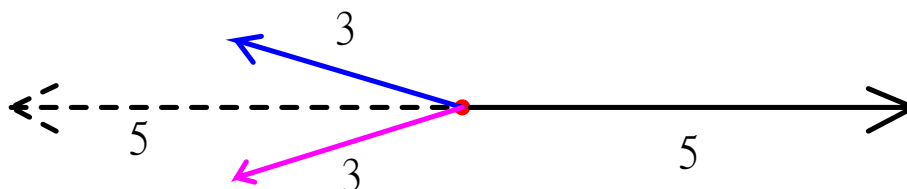
2、經實驗後發現當 a 逐步調整變大時， $\angle BZC$ 的角度會變小，於是我們想進一步分析所調整之力的大小和角度變化的關係。

3、先以推理的方式來進行，以 $a=5$ ， $b=3$ ， $c=3$ 為例

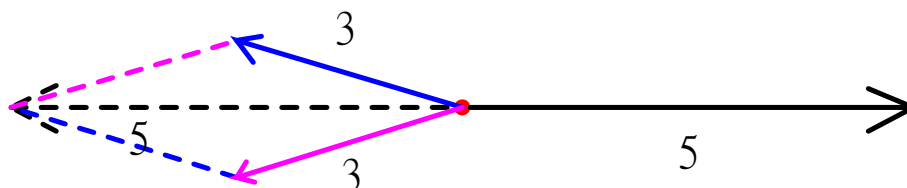
(1)、一個 $a=5$ 的拉力想要成力平衡時，必須要有一個大小相等但方向相反的拉力，此時稱其為 a' 。



(2)、所以 $b=3$ ， $c=3$ ，這兩股拉力合起來的作用要相等於虛線 5 的那股拉力。



(3)、而我們觀察到以力量的大小為該力作圖的長度時，若是連接 b 和 a' 的終點，以及 c 和 a' 的終點，我們發現這個四邊形似乎是平行四邊形。

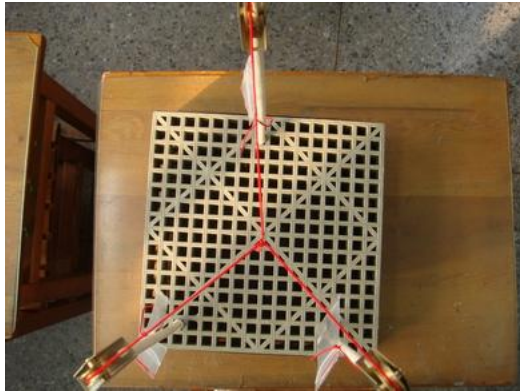


(4)、為了能夠快速計算三角形邊長為 3、3、5 的三個內角，我們利用了三角函數的公式， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ，再求其反函數便可得到對應的角度。並將其寫入試算軟體 EXCEL 之中，試算後得下表：

	A	B	C
三角形三邊長	3	3	5
三角形三邊對角角度	33.55730976	33.55730976	112.8853805

平行四邊形最右邊的角度為 $33.55730976 + 33.55730976 = 67.11461952$ ，這和我們實驗測量結果 $\angle BZC = 66^\circ$ 十分接近，於是我們初步的結論是，當三股拉力成平衡狀態，任兩力的合力等於反向的第三力，而這個合力可利用這兩力經過平移過程形成一個平行四邊形的對角線而得之。

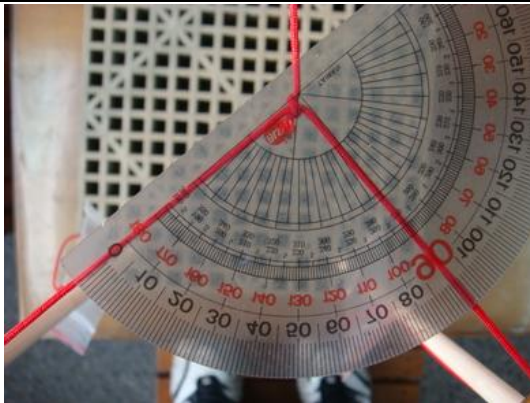
4、爲了驗證我們的結論，我們再以三股拉力比爲 3：4：5 來進行實驗。



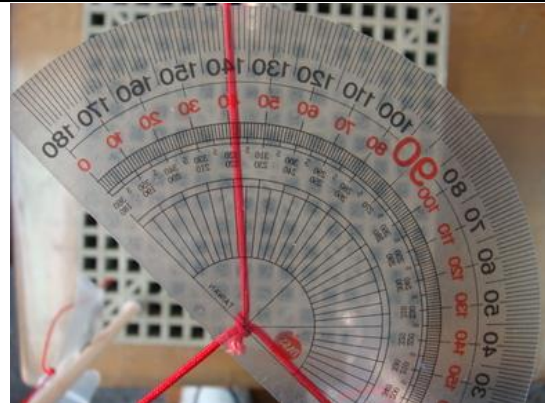
(1)三股拉力爲 3：4：5



(2)3、5 兩力的夾角爲 127°

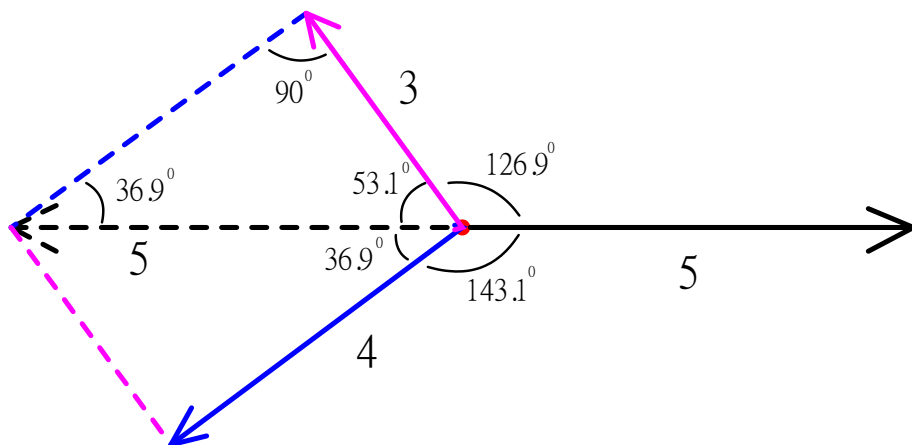


(3)3、5 兩力的夾角爲 90°



(4)4、5 兩力的夾角爲 143°

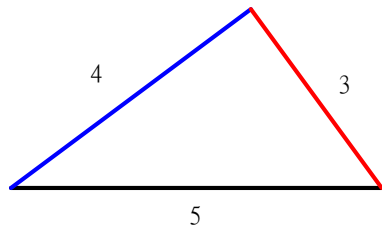
(1)、以我們先前推論的方式來建構力平構圖，先以 EXCEL 試算出三角形邊長爲 3、4、5 的三個內角分別大約爲 36.9° 、 53.1° 、 90° ，所以力平衡的三個角度分別三角形三個內角的補角，故爲 143.1° 、 126.9° 、 90° ，這和我們利用實作而測得的結果 143° 、 127° 、 90° 相當接近。



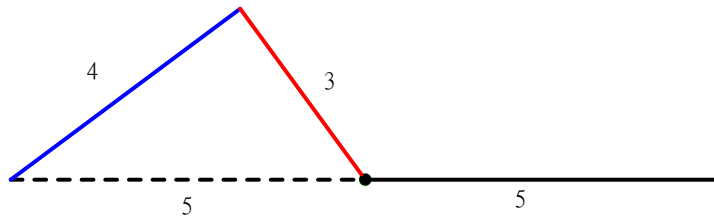
(2)、要了解三股拉力成力平衡時的角度時，我們可以直接以作圖的方式得到力平衡圖，整理步驟如下：(以三股拉力比為 3：4：5 為例說明)

步驟 1、先考慮這三股力量是否會成平衡狀態，計算的方式為較小的兩股力之和要大於最大的那個力。 $3+4>5$ ，故可以成力平衡狀態。

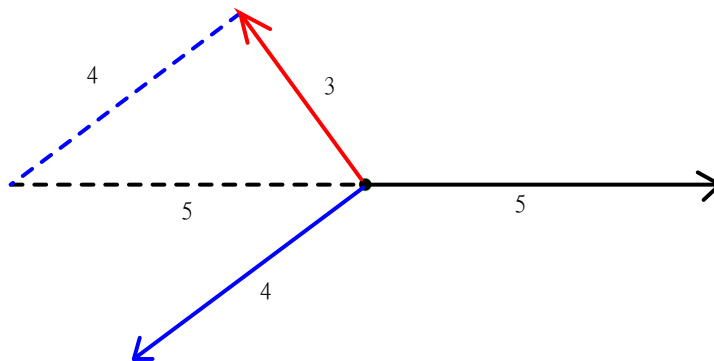
步驟 2、以這三股力的大小為三邊長畫出一個三角形



步驟 3、在三頂點中任意選一頂點當基準點，並將其中一線段作橫移到基準點的另一邊。本例以線段 3、5 的交點為基準點，將線段 5 做橫移。



步驟 4、將基準點對面的線段在不改變其方向下作平行移動，使得該線段的一端連接到基準點上，力平衡圖即完成。

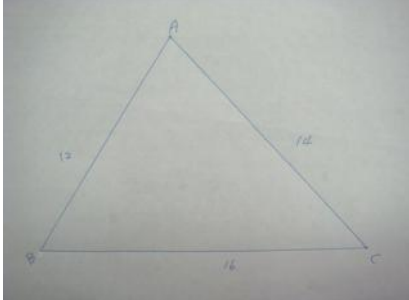
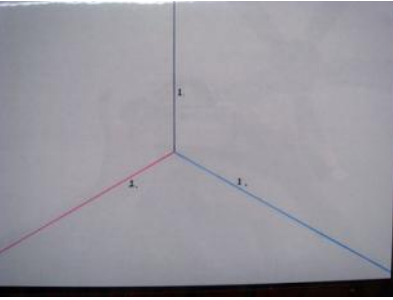
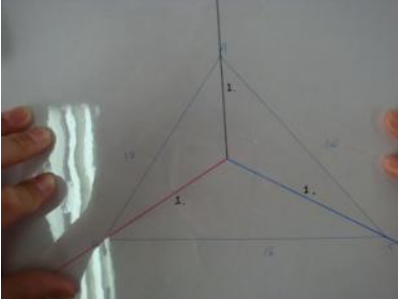
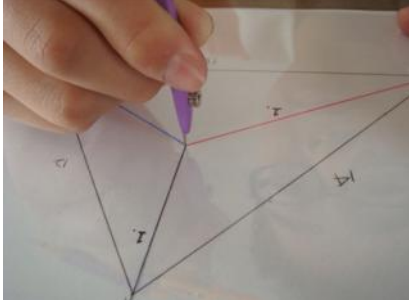
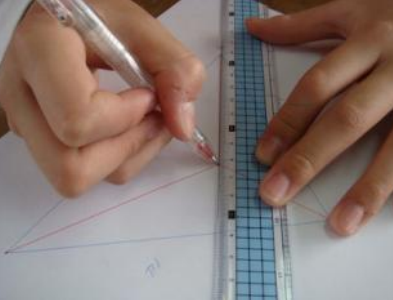
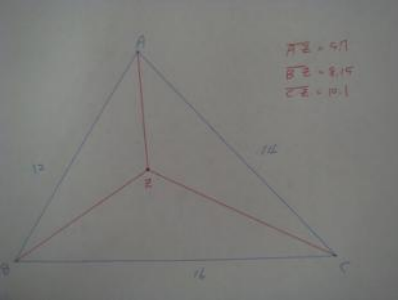


六、力平衡點到三角形三個頂點的距離總和與三力大小之間的關係

(一)、猜想：由於三股力量都想使這個力平衡點朝自己靠近，所以當成力平衡狀態時，此力平衡點到三角形三頂點距離之總和會不會是三角形內所有點到三頂點之距離的最小值？我們初步的猜想是此力平衡點到三頂點距離總和為最小。

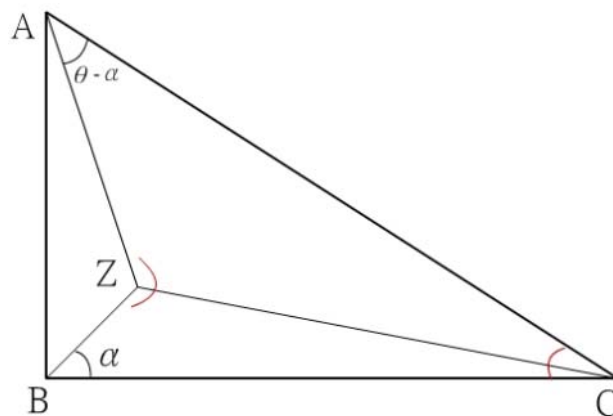
(二)、當三股力量相等時：

1、我們利用先前的研究作圖並加以測量，步驟如下：

		
(1)準備好一個三角形	(2)畫好力平衡圖在透明片上	(3)調整透明片讓三力通過三角形三個頂點
		
(4)以圓規軸心戳在力平衡點上	(5)連接先前戳記到三角形三頂點上	(6)測量力平衡點到三頂點的距離並加以記錄

2、此力平衡點是有唯一性的，已知三角形的三邊長和三股力兩兩之間的角度，便可以經由數學上的計算而得出力平衡到三角形各頂點的準確距離。

3、得出準確值的計算方式，將公式計算寫入 EXCEL 之中，讓我們可以很快的查得精確值。

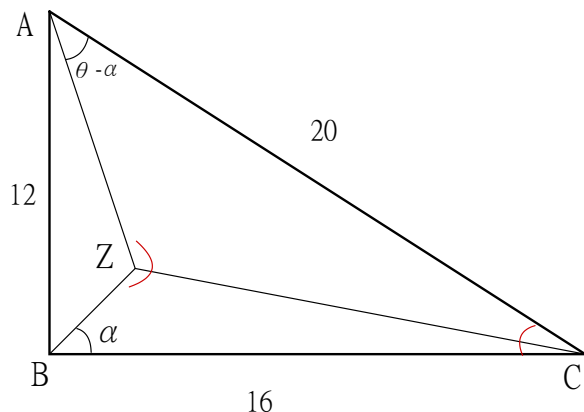


設 $\angle ZBC = \alpha$ 而 $\angle ACB$ 和 $\angle AZB$ (紅色弧度的部分) 均為知的常數
 所以可得 $\angle ZAC = \theta - \alpha$ ，而其中 $\theta = 360^\circ - (\angle ACB + \angle AZB)$ ，亦為一常數
 再利用三角函數公式

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\overline{CZ}} = \frac{\sin(\angle BZC)}{\overline{BC}} \\ \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\overline{CZ}} = \frac{\sin(\angle AZC)}{\overline{AC}} \end{cases}$$

上面兩個算式中 $\overline{CZ}$ 和 $\sin \alpha$ 是未知數，而其它皆是已知的常數，所以解出上面的聯立方程即可。

以三邊長為 12 公分、16 公分、20 公分，且三股力相等，也就是任兩力張開之角度為 120° 來做實例：



$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\overline{CZ}} = \frac{\sin(\angle BZC)}{\overline{BC}} \\ \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\overline{CZ}} = \frac{\sin(\angle AZC)}{\overline{AC}} \end{cases}$$

由三角函數餘弦定理可知 $\angle ACB \doteq 36.86989765^\circ$

所以 $\theta = 360^\circ - (\angle ACB + \angle AZB)$

$\doteq 83.13010235^\circ$

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\overline{CZ}} = \frac{\sin(120^\circ)}{16} \\ \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\overline{CZ}} = \frac{\sin(120^\circ)}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \overline{CZ} * \frac{\sqrt{3}}{32} \\ \sin(\theta - \alpha) = \overline{CZ} * \frac{\sqrt{3}}{40} \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{4} * \sin(\theta - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{4} * (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)$$

$$\frac{4}{5} = \sin \theta \cot \alpha - \cos \theta$$

$$\cot \alpha = (\frac{4}{5} + \cos \theta) / \sin \theta \quad (\cos \theta \doteq 0.119615242 \quad \sin \theta \doteq 0.992820323)$$

$$\cot \alpha \doteq 0.92626553 \quad \text{所以} \quad \sin \alpha \doteq 0.733636457$$

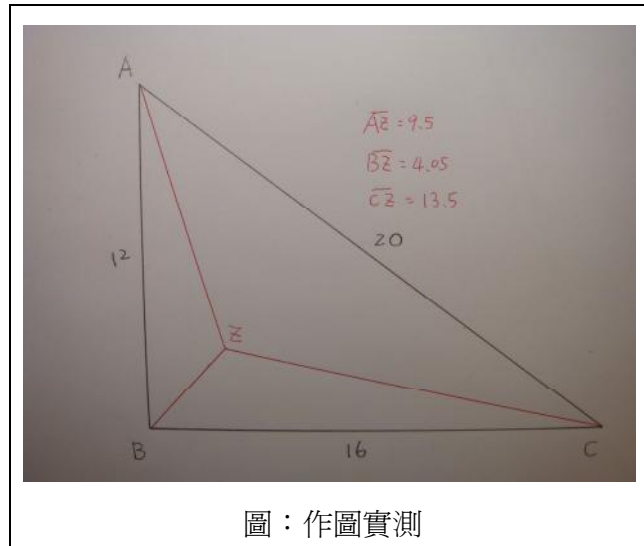
$$\overline{CZ} \doteq 0.733636457 * \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

$$\doteq 13.55408659$$

$$\text{同理可得} \quad \overline{AZ} \doteq 9.416012394 \quad \overline{BZ} \doteq 4.095631286$$

$$\text{而} \overline{AZ} + \overline{BZ} + \overline{CZ} \doteq 27.06573027$$

4、我們也以三邊長為 12 公分、16 公分、20 公分，且三股力相等，也就是任兩力張開之角度為 120° 來作圖進行實測。



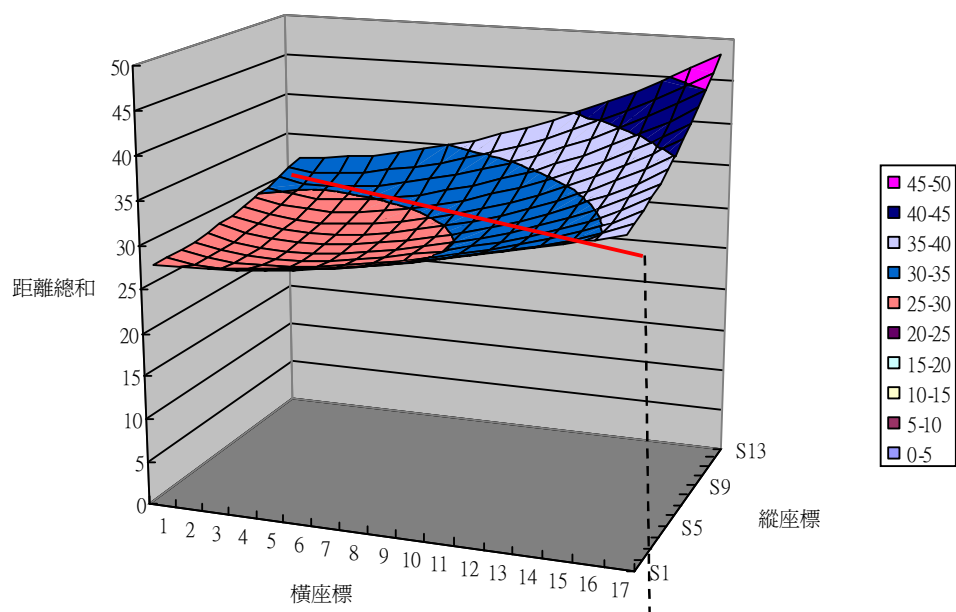
經過作圖實測得 $\overline{AZ}=9.5$ 、 $\overline{BZ}=4.05$ 、 $\overline{CZ}=13.5$ ，所以三段距離的總和為 $\overline{AZ} + \overline{BZ} + \overline{CZ} = 27.05$ ，和之前用數學方法所得的精確值非常貼近。

(三)、檢驗所得力平衡點 Z 到三頂點距離總和，是否為三角形內所有點至三頂點距離總和之最小值。

- 1、經過討論若是想要以數學的方式來證明，可能不是我們目前可以做到的。所以我們想利用電腦來幫忙，決定以 EXCEL 最上面的橫軸欄位 0 到 100 共 101 個欄位，來當成 X 座標(橫座標)，而最左邊的縱軸欄位 0 到 100 共 101 個欄位，來當成 Y 座標(座標)，來進行整數座標點的蒐尋，看哪一個座標點到三頂點的距離為最小，而這是第一步的蒐尋，所找到的座標點並不是非常精確的座標。
- 2、以實例三邊長為 12 公分、16 公分、20 公分的三角形來做蒐尋，先定出三個座標點，其中 A(0,12)、B(0,0)、C(16,0)，然後在 EXCEL 中寫好所有整數座標點距離 A、B、C 這三個定點的距離總和公式即可進行蒐尋工作。

0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	28	28.041595	28.165525	28.369317	28.649111	29	29.416408	29.892444	30.422205
1	28.03122	27.492871	27.452077	27.602437	27.8694	28.227427	28.662602	29.164858	29.725986
2	28.124515	27.41869	27.168602	27.198804	27.407991	27.745845	28.184498	28.70621	29.298671
3	28.278821	27.514721	27.142917	27.071138	27.218175	27.528336	27.965164	28.50436	29.129602
4	28.492423	27.709538	27.278567	27.145474	27.250237	27.541805	27.981432	28.541261	29.202252
5	28.763055	27.981476	27.531343	27.375113	27.465382	27.756439	28.210134	28.79745	29.498108
6	29.088007	28.321019	27.880657	27.734229	27.838613	28.150463	28.632467	29.255743	30
7	29.464249	28.723033	28.317751	28.211548	28.357826	28.711798	29.23635	29.903574	30.694273
8	29.888544	29.185363	28.842863	28.808341	29.023331	29.438576	30.017351	30.733998	31.571689
9	30.35756	29.710518	29.468413	29.540862	29.848858	30.339252	30.978482	31.745449	32.627193
10	30.867962	30.3137	30.231117	30.447077	30.862965	31.431573	32.128595	32.94029	33.858708

觀察這些數字的變化可以發現，在找到每一直行或每一橫列的最小值後，越往兩端其值遞增，所以可以推論這是一個下凹的曲面，而我們便是要找出這個一下凹曲面的極小值，而從上表中初步的極小值發生的座標點為(3,3)。



圖：三角形距三頂點距離總和曲面圖

- 3、經過 EXCEL 的計算初步得到座標點(3,3)是最佳點，且距離約為 27.071138，和準確值 27.06573027 相去不遠。
- 4、因為這是單一極限的曲面，所以我們以(3,3)為中心，上下左右外擴 1，也就是上表中黃色的區域，此區必定是極小值發生的熱區，所以我們從(2,2)到(4,4)這個區域再進行細切，也就是把它看成(20,20)和(40,40)，所以又有 400 個新的整數座標點可以

進行二次蒐尋，反覆運用這個方法就可以進行更精確的蒐尋。

0	23	24	25	26	27	28	29	30	31
24	271.04461	270.99707	270.974	270.97443	270.99747	271.04226	271.10798	271.1939	271.29928
25	270.97748	270.91884	270.88505	270.87517	270.88831	270.92361	270.98028	271.05757	271.15474
26	270.93137	270.86207	270.81796	270.79812	270.80167	270.82779	270.87566	270.94454	271.03373
27	270.90541	270.82589	270.77188	270.74246	270.73677	270.754	270.79336	270.8541	270.93551
28	270.89881	270.80953	270.74603	270.70741	270.69285	270.70152	270.73267	270.78553	270.85942
29	270.91082	270.81224	270.73967	270.69226	270.66919	270.66965	270.69289	270.73817	270.80481
30	270.94074	270.83332	270.75212	270.69633	270.66511	270.65771	270.67337	270.71138	270.77103
31	270.98792	270.87212	270.78273	270.71895	270.67999	270.66508	270.6735	270.70454	270.75751
32	271.05175	270.92803	270.83089	270.75954	270.71321	270.69117	270.69269	270.71708	270.76367
33	271.13168	271.00048	270.89602	270.81751	270.76421	270.7354	270.73038	270.74845	270.78897
34	271.22716	271.08895	270.97759	270.89234	270.83246	270.79726	270.78604	270.79813	270.83289
35	271.33772	271.19294	271.07511	270.98352	270.91745	270.87623	270.85917	270.86562	270.89495
36	271.4629	271.31198	271.1881	271.09057	271.01871	270.97184	270.94931	270.95046	270.97468

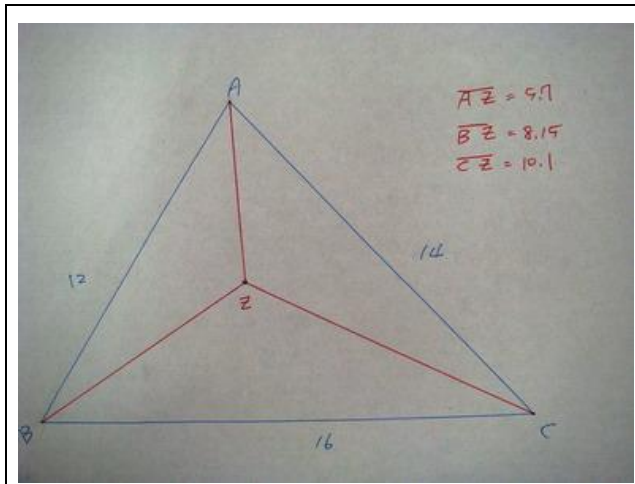
5、將這三次的電腦蒐尋的數據資料，與精確值與來做比較：

	電腦第一次蒐尋	電腦第二次蒐尋	電腦第三次蒐尋	精確值
	最佳座標(3, 3)	最佳座標(2.8, 3.0)	最佳座標(2.78, 3.00)	
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ}$ =9.486832981 $\overline{BZ}$ =4.242640687 $\overline{CZ}$ =13.34166406 總和= 27.07113773	$\overline{AZ}$ =9.425497334 $\overline{BZ}$ =4.103656906 $\overline{CZ}$ =13.53661701 總和=27.06577125	$\overline{AZ}$ =9.419575362 $\overline{BZ}$ =4.090036675 $\overline{CZ}$ =13.55612039 總和=27.06573243	$\overline{AZ}$ =9.416012394 $\overline{BZ}$ =4.095631286 $\overline{CZ}$ =13.55408659 總和=27.06573027
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB$ =116.5650512 $\angle BZC$ =122.0053832 $\angle AZC$ =121.4295656	$\angle AZB$ =119.6934356 $\angle BZC$ =120.2207999 $\angle AZC$ =120.0857644	$\angle AZB$ =120.0144185 $\angle BZC$ =120.0347118 $\angle AZC$ =119.9508697	$\angle AZB$ =120 $\angle BZC$ =120 $\angle AZC$ =120

6、經過越多次的蒐尋，發現電腦蒐尋的距離總和最小值會越來越朝精確值靠近，此時 Z 至三頂點三段距離，以及以 Z 為頂點的三個角度都會朝精確值逼近，由此可知我們的力平衡點即是距離總和最小值之點。

7、為了確認上述結論是正確的，而上面的三角形是直角三角形，我們決定再找銳角三角形和鈍角三角形來檢驗。

(1)、以三邊長為 12 公分、14 公分、16 公分的銳角三角形，且三股力相等來進行研究。

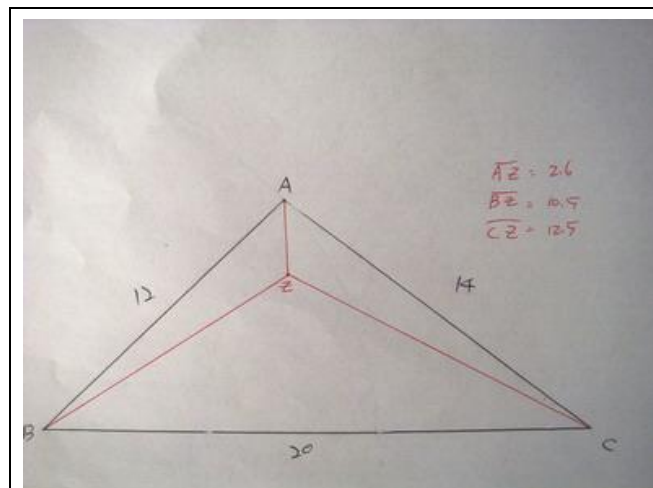


圖：作圖實測

	作圖測量	電腦蒐尋	精確值
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ} = 5.7$	最佳座標(6.76,4.53)	$\overline{AZ} = 5.644800314$
	$\overline{BZ} = 8.15$	$\overline{AZ} = 5.649714468$	$\overline{BZ} = 8.136713496$
	$\overline{CZ} = 10.1$	$\overline{BZ} = 8.137475038$	$\overline{CZ} = 10.29637159$
	總和= 23.95	$\overline{CZ} = 10.290699681$	總和=24.0778854
		總和=24.07788919	
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB = 120$	$\angle AZB = 119.9193136$	$\angle AZB = 120$
	$\angle BZC = 120$	$\angle BZC = 120.0563818$	$\angle BZC = 120$
	$\angle AZC = 120$	$\angle AZC = 120.0243046$	$\angle AZC = 120$

當電腦蒐尋精確到小數點第二位，此時電腦的 Z 點和力平衡的 Z 點幾乎重疊。

(2)、以三邊長為 12 公分、14 公分、20 公分的鈍角三角形，其中鈍角約為 100.3° ，且三股力相等來進行研究。

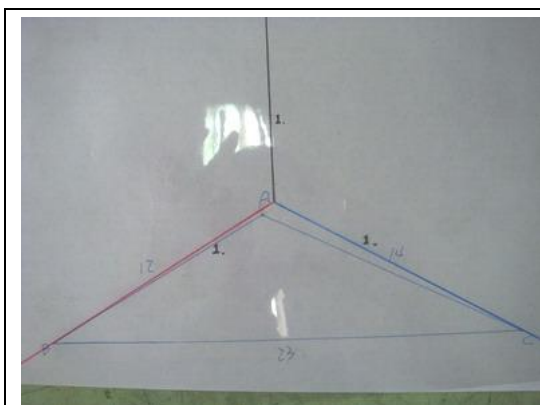


圖：作圖實測

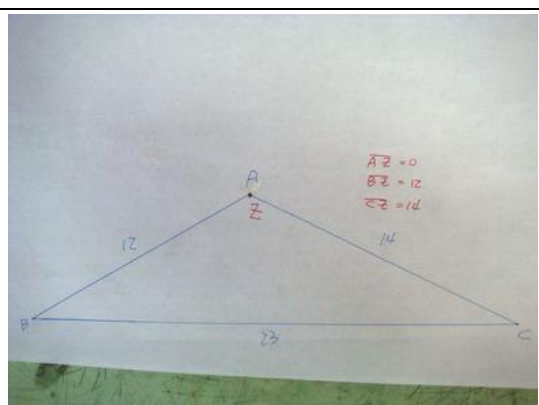
	作圖測量	電腦蒐尋	精確值
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ}=2.6$	最佳座標(8.83,5.71)	$\overline{AZ}=2.554241782$
	$\overline{BZ}=10.5$	$\overline{AZ}=2.558291509$	$\overline{BZ}=10.51723737$
	$\overline{CZ}=12.5$	$\overline{BZ}=10.5153697$	$\overline{CZ}=12.54702055$
	總和= 25.6	$\overline{CZ}=12.54483958$	總和=25.6184997
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB=120$	$\angle AZB=119.9763484$	$\angle AZB=120$
	$\angle BZC=120$	$\angle BZC=120.0352076$	$\angle BZC=120$
	$\angle AZC=120$	$\angle AZC=119.9884441$	$\angle AZC=120$

當電腦蒐尋精確到小數點第二位，此時電腦的 Z 點和力平衡的 Z 點幾乎重疊。

(3)、以三邊長為 12 公分、14 公分、23 公分的鈍角三角形，其中鈍角約為 124.2° ，且三股力相等來進行研究。



圖：力平衡點落在三角形外



圖：作圖實測

由於力平衡圖的中力平衡點無法落在三角形內，故在進行拉力實驗時我們知道此平衡點會「卡」在 A 點的位置上，故距離總和的最小值應該會發生在三角形頂點 A 的位置。

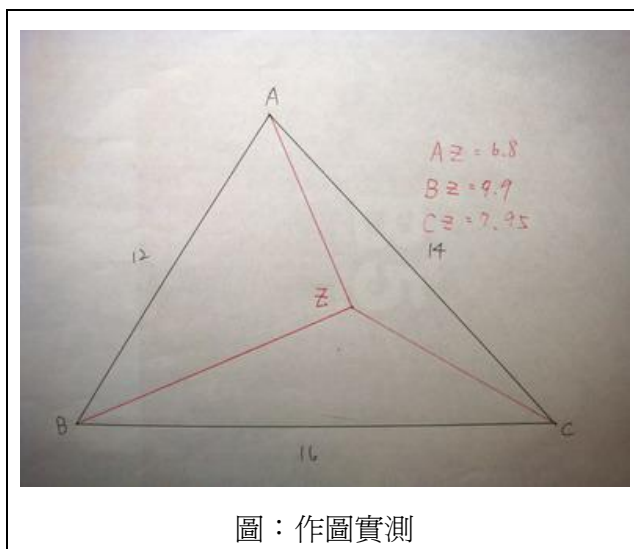
	作圖測量	電腦蒐尋
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ}=0$	最佳座標(10.370,6.038)
	$\overline{BZ}=12$	$\overline{AZ}=0.001290402$
	$\overline{CZ}=14$	$\overline{BZ}=11.99976433$
	總和= 26	$\overline{CZ}=13.99908368$
		總和=26.00013842

而經由電腦蒐尋距離總和最小值精確至小數第三位時，此時可看到電腦所找到的點幾乎和 A 點十分貼近，由此可知當力平衡圖之力平衡點落在圖外時，此時距離總和最小值便會發生在該鈍角的頂點。

(四)、至此我們可以利用力平衡的觀念來找出距離三角形三頂點距離總和最小之點，這個成果令我們非常興奮，我們打算把這個距三頂點總和為最小之點稱之為「小心」，這個名稱還真是名副其實呢！

(五)、當三股拉力不同時：

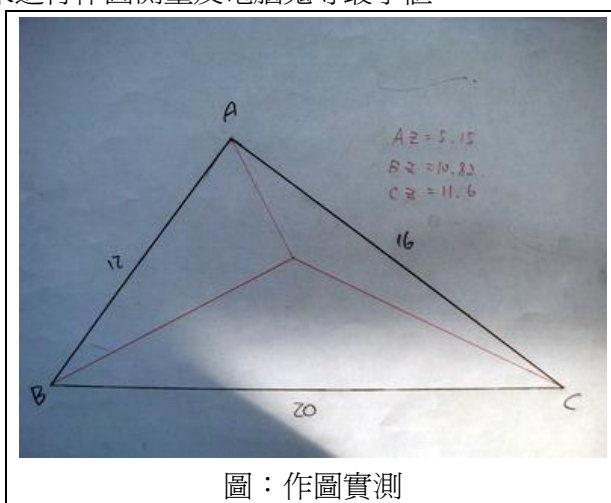
- 1、先前的研究使我們了解「小心」是有唯一性的，所以當三股拉力不同時，自然力平衡點的位置就不同於「小心」的位置了。那新的力平衡點又代表什麼意義呢？
- 2、根據先前的研究，我們直覺的猜想：當三股拉力不同時所產生的力平衡點也是另一種「小心」，但不同的是這個「小心」是包含了不同的加權，而其中不同的權值即是那三股不完全相同的力量。假設 a 、 b 、 c 是朝三角形三頂點 A 、 B 、 C 不同的拉力，而 Z 是力平衡點，所以我們的猜想是：在拉力為 a 、 b 、 c 且各自朝三頂點 A 、 B 、 C 的方向，此時力平衡點 Z 會使得 $\overline{AZ} \cdot a + \overline{BZ} \cdot b + \overline{CZ} \cdot c$ 的值為最小。
- 3、舉例驗證以上的猜想：
 - (1)、以三邊長為 12 公分、14 公分、16 公分的銳角三角形，且三股拉力 $a=4$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ 來進行作圖測量及電腦蒐尋最小值。



	作圖測量	電腦蒐尋	精確值
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ} = 6.8$	最佳座標(9.08,3.94)	$\overline{AZ} = 6.786337795$
	$\overline{BZ} = 9.9$	$\overline{AZ} = 6.788765682$	$\overline{BZ} = 9.896747917$
	$\overline{CZ} = 7.95$	$\overline{BZ} = 9.897979592$	$\overline{CZ} = 7.965720653$
	加權總和= 96.65	$\overline{CZ} = 7.963039621$	加權總和=96.6641982
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB = 90$	加權總和=96.66419961	$\angle AZB = 89.97555393$
	$\angle BZC = 127$	$\angle AZB = 89.97555393$	$\angle BZC = 126.8873442$
	$\angle AZC = 143$	$\angle BZC = 126.8873442$	$\angle AZC = 143.1371019$
		$\angle AZC = 143.1371019$	$\angle AZC = 143.1301024$

由上面的表格的數據可得知電腦蒐尋精確到小數點第二位時，此時加權總和已經非常接近於精確值，而電腦找到的座標點也會和力平衡點 Z 十分貼近。

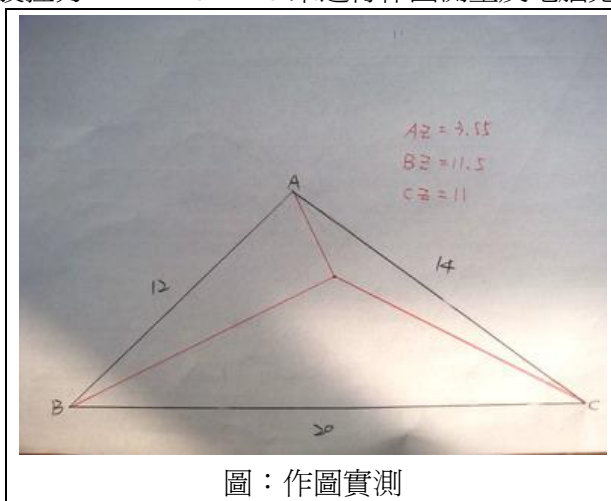
(2)、以三邊長為 12 公分、16 公分、20 公分的直角三角形，且三股拉力 $a=4$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ 來進行作圖測量及電腦蒐尋最小值。



	作圖測量	電腦蒐尋	精確值
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ} = 5.15$	最佳座標(9.60,4.99)	$\overline{AZ} = 5.192772811$
	$\overline{BZ} = 10.82$	$\overline{AZ} = 5.197316615$	$\overline{BZ} = 10.81827669$
	$\overline{CZ} = 11.6$	$\overline{BZ} = 10.81943159$	$\overline{CZ} = 11.53949514$
	加權總和= 111.06	$\overline{CZ} = 11.53516797$	加權總和=110.923397
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB=90$	$\angle AZB=89.96321708$	$\angle AZB=90$
	$\angle BZC=127$	$\angle BZC=126.9029151$	$\angle BZC=126.8698976$
	$\angle AZC=143$	$\angle AZC=143.1338678$	$\angle AZC=143.1301024$

由上面的表格的數據可得知電腦蒐尋精確到小數點第二位時，此時加權總和已經非常接近於精確值，而電腦找到的座標點也會和力平衡點 Z 十分貼近。

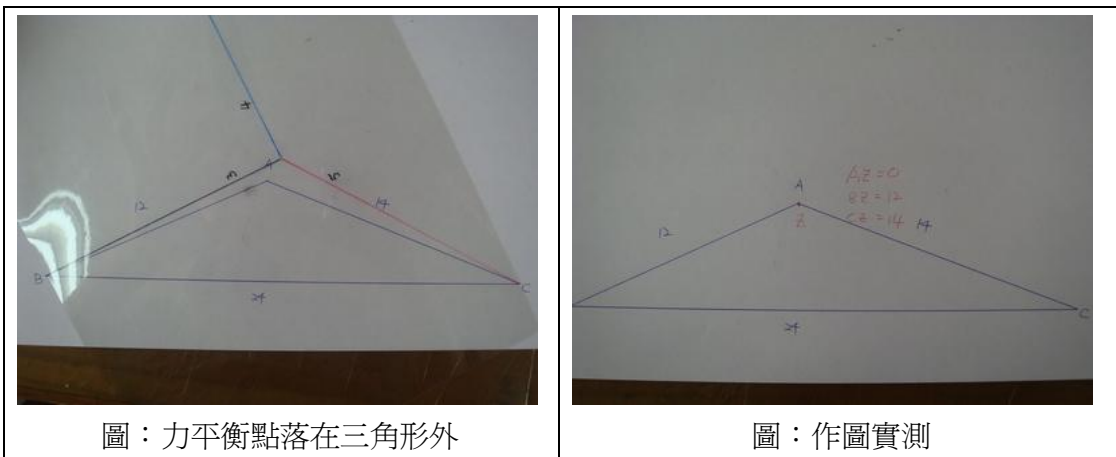
(3)、以三邊長為 12 公分、14 公分、20 公分的鈍角三角形，其鈍角約為 100.3° ，且三股拉力 $a=4$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ 來進行作圖測量及電腦蒐尋最小值。



	作圖測量	電腦蒐尋	精確值
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ}=3.55$ $\overline{BZ}=11.5$ $\overline{CZ}=11$ 加權總和= 103.7	最佳座標(9.60,4.99) $\overline{AZ}=3.631561113$ $\overline{BZ}=11.44045891$ $\overline{CZ}=10.92172605$ 加權總和=103.45625141	$\overline{AZ}=3.633412403$ $\overline{BZ}=11.43670907$ $\overline{CZ}=10.92249251$ 加權總和=103.4562394
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB=90$ $\angle BZC=127$ $\angle AZC=143$	$\angle AZB=89.95012177$ $\angle BZC=126.8390463$ $\angle AZC=143.2108319$	$\angle AZB=90$ $\angle BZC=126.8698976$ $\angle AZC=143.1301024$

由上面的表格的數據可得知電腦蒐尋精確到小數點第二位時，此時加權總和已經非常接近於精確值，而電腦找到的座標點也會和力平衡點 Z 十分貼近。

(4)、以三邊長為 12 公分、14 公分、24 公分的鈍角三角形，三股拉力 $a=4$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ ，且力平衡點無法落在其三角形中的情況下來進行研究。



由於力平衡圖的中力平衡點無法落在三角形內，故在進行拉力實驗時我們知道此平衡點會「卡」在 A 點的位置上，故距離總和的最小值應該會發生在三角形頂點 A 的位置。

	作圖測量	電腦蒐尋
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ}=0$ $\overline{BZ}=12$ $\overline{CZ}=14$ 加權總和= 106	最佳座標(10.917,4.982) $\overline{AZ}=0.000693943$ $\overline{BZ}=12.00005054$ $\overline{CZ}=13.99947188$ 加權總和=106.0002868

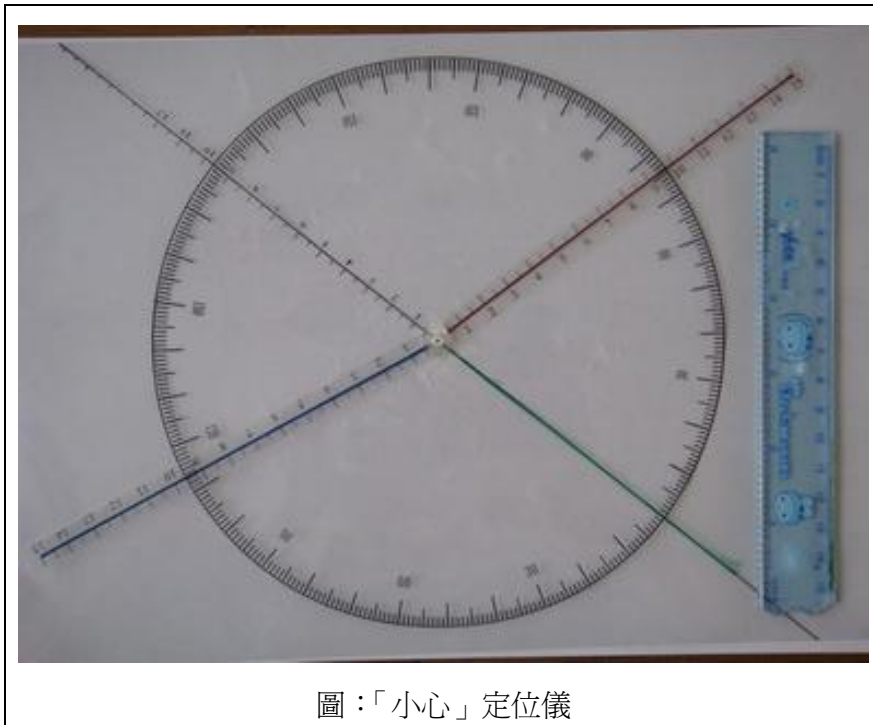
而經由電腦蒐尋距離總和最小值精確至小數第三位時，此時可看到電腦所找到的 Z 點幾乎和 A 點十分貼近，由此可知當力平衡圖之力平衡點落在圖外時，此時距離加權總和最小值便會發生在頂點之上。

(六)、由以上各情況可驗證得：當三股拉力不同產生的力平衡點亦發生距離上的極小值，只是這個極小值必須以各個不同的力來當權值，分別與力平衡 Z 至三頂點的距離做乘積後再加總。所以當三股拉力不同時所得的力平衡點我們稱之為「加權小心」。

伍、研究成果：

「小心」定位儀

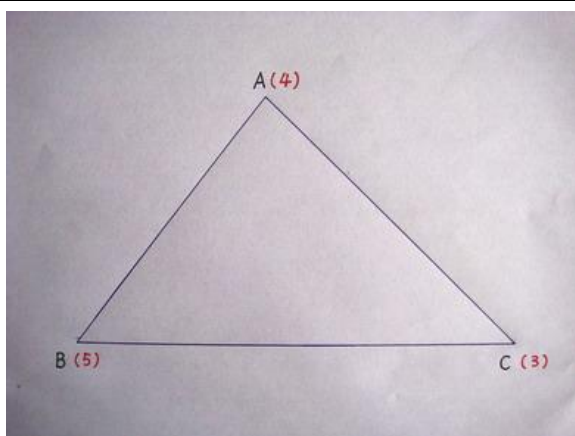
- (一)、藉由在透明片上畫出力平衡圖，再將透明片覆蓋在所指定的三角形，加以調整後，我們便可以得到三角形的「小心」或是「加權小心」。但是如果每次改變了三股拉力的大小，便要重新在新的透明片上畫新的力平衡圖，讓我們覺得不是很方便，而且浪費資源，所以讓我們思考是否能設計出一個便利的工具來完成定位工作。
- (二)、經過反覆研究繪製力平衡的步驟及多次改良設計，最後完成了「小心」定位儀。
- (三)、「小心」定位儀的外觀如圖所示



紅、藍、綠分別代表不同的三股拉力，其中綠色的力為基準線，黑色標有刻度的直線為輔助線，尺為必備的輔助工具，利用輔助線及尺來進行紅色指針及藍色指針角度的調整。

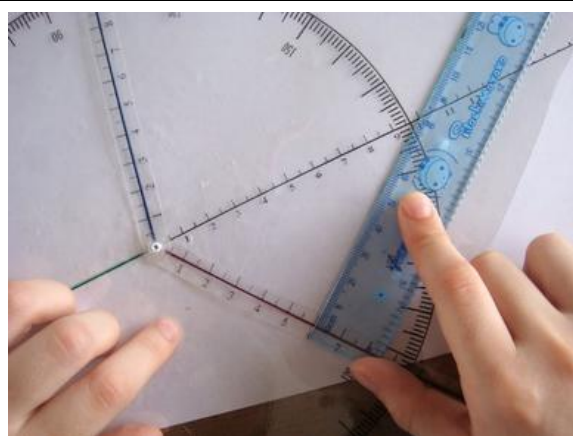
(三)、「小心」定位儀的使用步驟及方法解說：

(以三角形 ABC，其中 $\overline{AB}=14$ 、 $\overline{BC}=20$ 、 $\overline{AC}=16$ 而三股拉力 $a=4$ ， $b=5$ ， $c=3$ 為例)



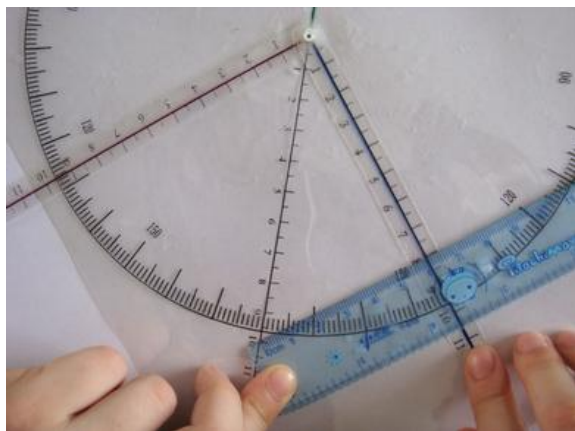
步驟一：

準備好三角形 ABC，並確定各朝頂點拉力的大小。



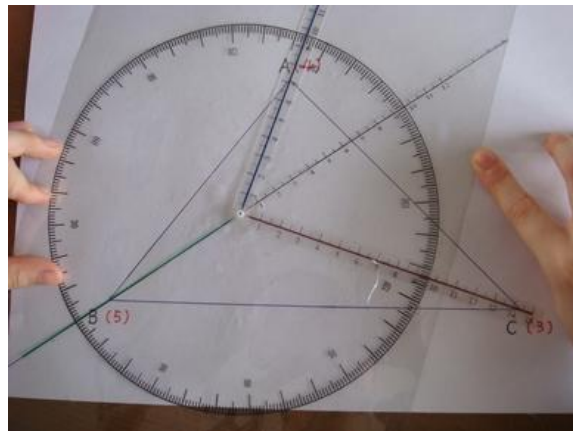
步驟二：

任意選一力為基準線，在此選 $b=5$ 為基準線，因為此三股力為 $4:5:3$ ，我們在比例不變的原則之下調整成 $8:10:6$ ，以提高精確性。調整尺的位置及旋轉紅色指針，讓尺的刻度為 8 公分，紅色指針刻度到 6，而黑色輔助線刻度為 10，即完成紅色指針(代表 $c=3$)角度的調整。



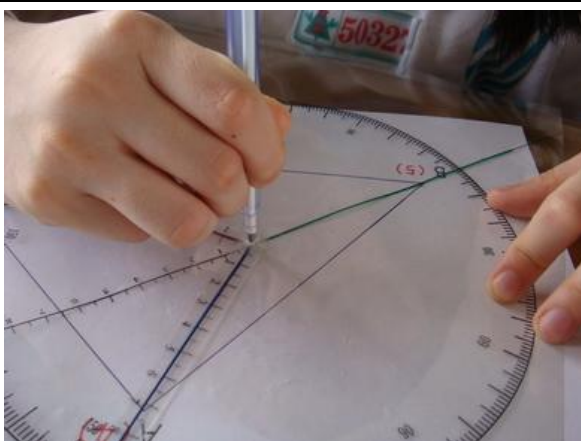
步驟三：

調整尺的位置及旋轉藍色指針，讓尺的刻度為 6 公分，藍色指針刻度到 8，而黑色輔助線刻度為 10，即完成藍色指針(代表 $a=4$)角度的調整

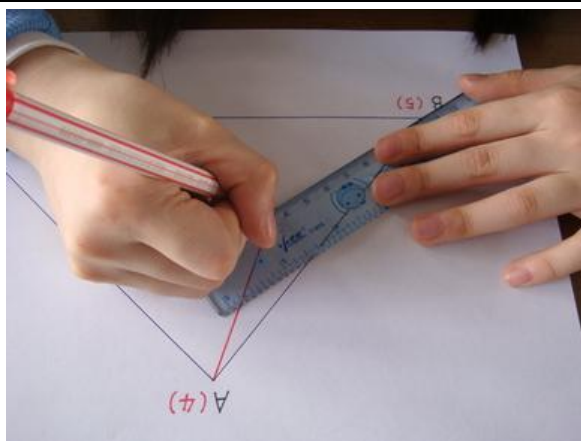


步驟四：

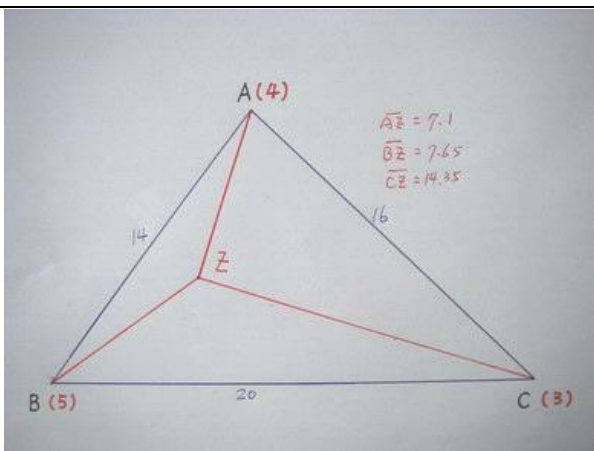
利用移動及旋轉來調整定位儀，使得三股拉力的方向通過指定的頂點。



步驟五：
利用筆尖垂直地在定位儀中央的小孔作上記號，此點即是力平衡點。



步驟六：
移開定位儀後，連接力平衡點至三角形的三個頂點。



步驟七：
測量並記錄所得的結果

(四)、「小心」定位儀的測量所得的數據：

以三角形 ABC，其中 $\overline{AB}=14$ 、 $\overline{BC}=20$ 、 $\overline{AC}=16$ 而三股拉力 $a=4$ ， $b=5$ ， $c=3$ 為例，我們將所測得的數據整於下表中，並和精確值加以比較。

	作圖測量	精確值
Z 至三頂點距離及總和	$\overline{AZ}=7.1$	$\overline{AZ}=7.020316947$
	$\overline{BZ}=7.65$	$\overline{BZ}=7.735055516$
	$\overline{CZ}=14.35$	$\overline{CZ}=14.37759194$
	加權總和= 109.7	加權總和=109.8893212
Z 為頂點的三個角度	$\angle AZB=90$	$\angle AZB=90$
	$\angle BZC=127$	$\angle BZC=126.8698976$
	$\angle AZC=143$	$\angle AZC=143.1301024$

「小心」定位儀得到相關數據和精確值很接近，所產生微小的差距是在測量誤差範圍內。這結果十分成功，至此不禁想令人振臂疾呼——「小心定位儀」，成功！。

陸、討論：

- 一、以上的研究我們了解到三角形內的「小心」和「加權小心」的幾何意義以及找尋到快速定位的方法和工具，但是這個研究結果可以應用到實際生活中的哪些層面？經過思考及討論後這樣的研究成果可以運用在「都市規畫」方面。
- 二、例如有甲、乙、丙三個不同的村落，現在要蓋一所學校，讓三個村落的學生來就讀，那這所學校應蓋在哪個位置是最恰當的呢？研究結果告訴我們，以三個村落的人口數來當三股拉力來進行拔河，當呈現力平衡時，該力平衡點即是設立學校的最佳位置。因為該點是讓所有學生移動的距離總和為最小。

柒、結論：

我們從「力」的拔河研究出發，研發出「小心」定位儀，最後竟然可以和「都市規畫」相連結，這些都是我們一開始研究這個題目時始料未及的。原來看似平凡無奇的拔河遊戲產生的力平衡現象，背後卻蘊含著這麼多奧妙的道理在裡頭。經過這整個研究下來，讓我們稍微可以體會出偉大的科學家——牛頓，當時在樹下被掉落蘋果打到的感覺呢！

捌、參考資料：

- 一、自然與生活科技第十二冊第一單元：「生活中的力」。(翰林版)
- 二、自然與生活科技第十二冊第二單元：「簡單機械」。(翰林版)
- 三、數學科第十二冊第三單元：「統計量與圓形百分圖」。(翰林版)
- 四、數學三角函數公式網站：維基百科 <http://zh.wikipedia.org/wiki/> 搜尋「三角函數」

【評語】 080115

題材具深度，兼具物理與數學內涵，頗值得深入探討，關於理論闡釋及方法原理部分需再加強。