# 中華民國 第49屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

高中組　數學科

## 第三名

## 最佳(鄉土)教材獎

040418

## 向日葵裡的黃金項鏈

學校名稱：國立彰化高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 周哲賢 | 蔡其南 |
| 高二 許冠章 | |
| 高二 盧俁智 | |
| 高二 陳重光 | |


關鍵詞：黃金角、對數螺線、螺旋結構

# 向日葵裏的黃金項鏈


## 摘　　要

我們就單純的數學方法研究向日葵原基排列的規則列出以下的研究目的:

一、費氏數列與原基緊密排列之關係

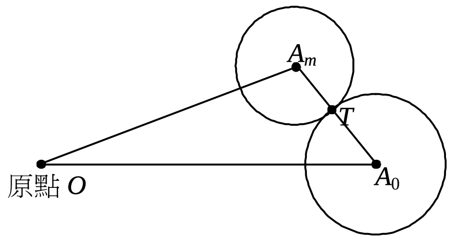
二、螺旋結構的產生、方向與螺線數目的關係

三、向日葵雙螺旋結構的特性

兩原基相切的關係式　$p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$

初始原基標示為 $A_0$，設 $A_m$ 為後續第 $m$ 個產生的原基，與 $A_0$ 相切，切點為 $T$，

則 $p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$　《以餘弦得證》




費氏數列與原基相切之關係如下：

(一)若生成螺線方程式為 $r=a^{\theta}$, $0<a<1$，則必存在 $n\in N$，使得 $Q(a)=P_a(F_n)$。

(三)原基相切會讓向日葵形成螺旋結構，而且螺線的數目必為費氏數列的某一項 $F_n$。

若 $n$ 為奇數，則螺旋方向為逆時針；若 $n$ 為偶數，則為順時針。

(四)原基緊密的排列形成雙螺旋結構，使向日葵花頭最密實。

# 壹、研究動機

一、二月的時候，路旁的田裡種滿了向日葵，準備來日作爲稻肥！一行人在欣賞眼前美景的同時，發現向日葵花盤上的種子出現兩條螺旋線，記得老師說過有關古希臘神殿和向日葵、鸚鵡螺皆與黃金比例和黃金螺線之間有著很美妙的關係，其實平時隨處可見的花朵都是大自然奇異規則的藏寶圖，我們決定一探究竟！

# 貳、研究目的

在向日葵花盤內，以「原基沿著生成螺線生長」爲已知的條件，用**數學模式建構與假設：**歸納出以下幾點研究目的：

一、費氏數列與原基緊密排列之關係

二、螺旋結構的產生、方向與螺線數目的關係

三、向日葵雙螺旋結構的特性

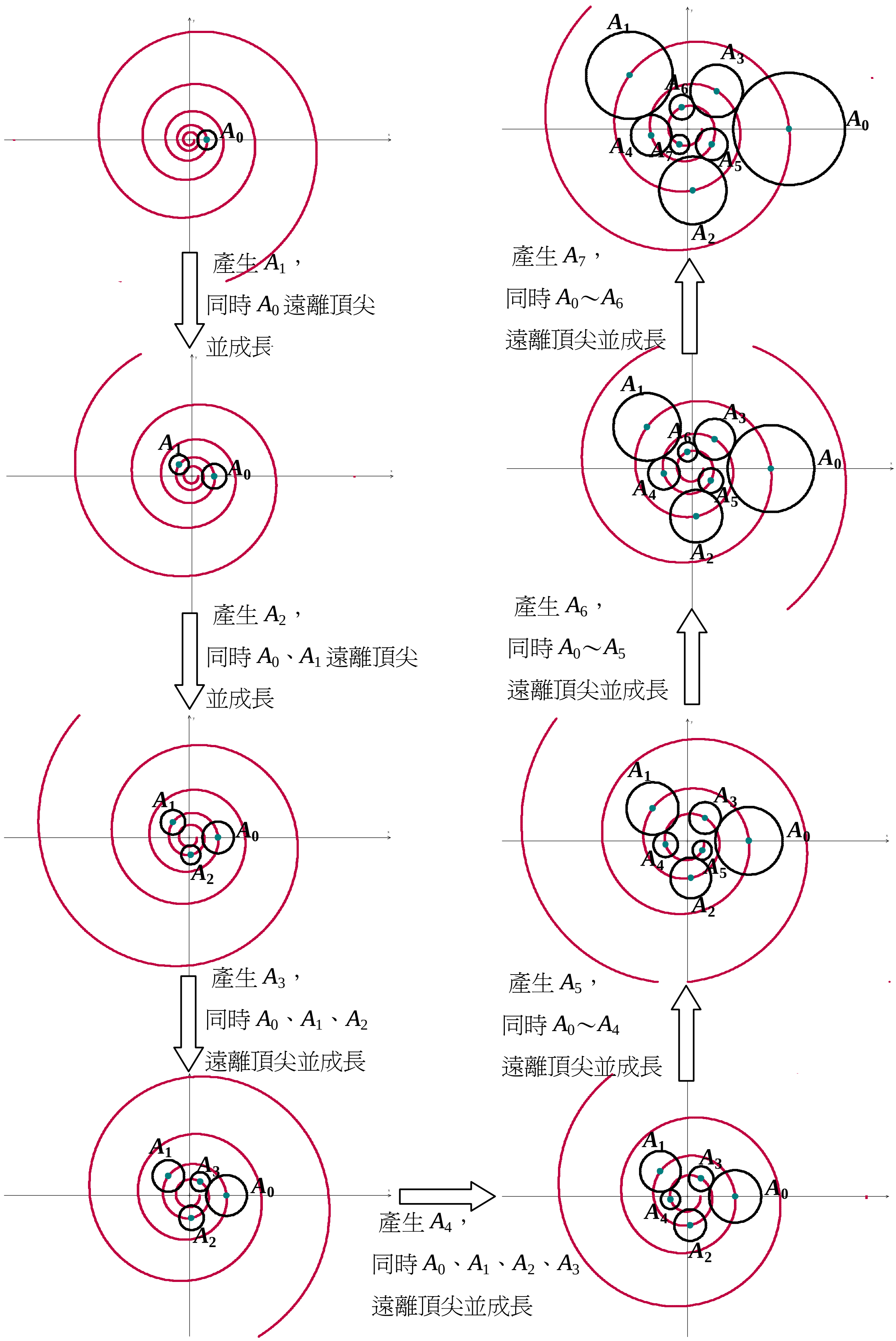
# 參、研究方法及過程

研究雙螺線結構之前勢必要先了解向日葵花盤生長的模式，我們做如下說明：

生成螺線

參考下頁圖形說明：編號 $A_0$ 是初始原基，經過一段時間後，在隔了 $(3-\sqrt{5})\pi$ 的角度上產生下一個原基編號 $A_1$ 號，同時 $A_0$ 原基遠離頂尖並成長；接下來的 $A_2$ 號、$A_3$ 號……所有順序的原基便依此方式繼續生長下去。

※下圖僅作為花盤上原基生長之解釋，實際上生成螺線應為一條捲繞得非常緊的螺線。



發散角

原基沿生成螺線呈間隔排列，兩個前後順序的原基之間的角度，共同值就稱為「發散角」。

本報告中以 137.5 為近似

黃金角 $\varphi=(3-\sqrt{5})\pi$

眾所皆知黃金數為$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\fallingdotseq 0.618033989$，而黃金角即為$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\times 2\pi\fallingdotseq 0.618033989\times 360°=222.49224°$，但是這個角大於 180°，所以要用 360°減掉，就得到 $\varphi=(3-\sqrt{5})\pi\fallingdotseq 137.50776°$

## 一、費氏數列與原基緊密排列之關係

原基緊密排列應是指：讓原基與原基之間在沿生成螺線呈間隔排列的模式之下，能夠儘可能相切；然而原基的大小與出現的先後次序有關，大小並非全部相等,為此我們做出以下假設：

① 向日葵生成螺線為對數螺線，極坐標方程式為 $r=a^{\theta}$, $0<a<1$；( $r$ 為原基與頂尖距離 )

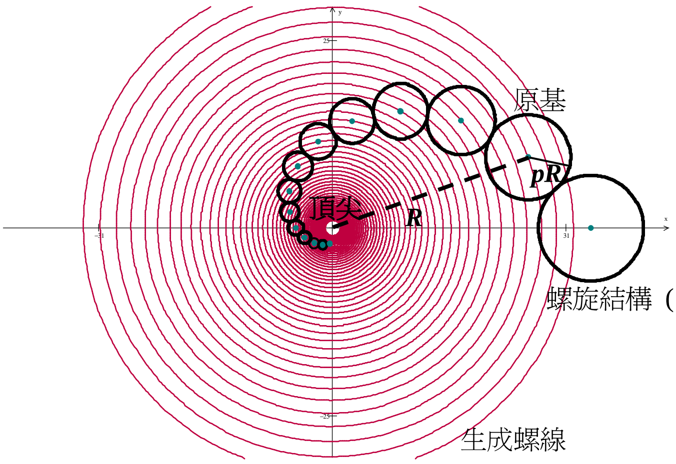
② 原基生長的發散角為黃金角 $\varphi$；

③ 原基的形狀為一圓形；

④ 原基的半徑與花盤中心點的距離成正比，比值為 $p$ ( $0<p<1$ )，
意即：原基的圓心與花盤中心的距離為 $R$，則原基的半徑為 $pR$；

⑤ 同一株向日葵的 $p$ 值應為相同的定值，不同株向日葵的 $p$ 值則可能不同。

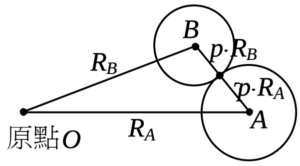
⑥ 不必考慮：向日葵大小、原基生長的位置及數量。研究的重點放在原基排列的結構。



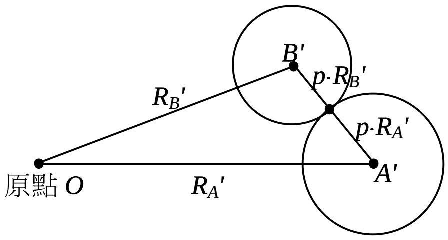
## 生成螺線是對數螺線的合理性

對數螺線又稱作「等角螺線」，它的特性是：輻角成等差時，向徑成等比。

假設兩顆相鄰的原基 $A$、$B$ 靠在一起(相切)，距離花盤中心 $O$ 分別為 $R_A$、$R_B$，且大小分別為 $p{\cdot}R_A$、$p{\cdot}R_B$，其中 $p$ 為一定值且 $0<p<1$，則繼續向外生長時，重新令其符號分別為 $A'$、$B'$，距離花盤中心 $O$ 分別為 $R_A'$、$R_B'$，且大小分別為 $p{\cdot}R_A'$、$p{\cdot}R_B'$，原基 $A'$、$B'$ 仍然相切，如圖所示，




$\Rightarrow$



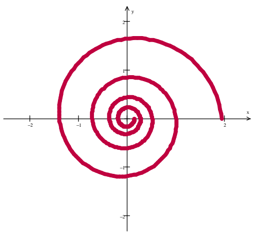

$\boxed{\text{證明}}$ 設生成螺線 $r=a^{\theta}$、兩原基夾角為 $u$ 且 $R_A=a^{v}\Rightarrow R_B=a^{u+v}$

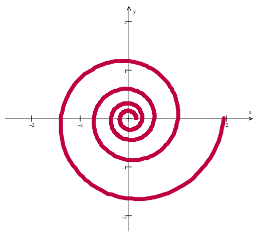
當原基繼續向外生長時，若 $R_A'=a^{v-w},\ w\in\mathbf{R}\Rightarrow R_B'=a^{u+v-w}\Rightarrow\dfrac{R_B'}{R_B}=\dfrac{R_A'}{R_A}=\dfrac{p{\cdot}R_A'+p{\cdot}R_B'}{p{\cdot}R_A+p{\cdot}R_B}=\dfrac{1}{a^{w}}$

所以原基 $A'$、$B'$ 仍然相切。

對數螺線 $r=a^{\theta}$：$\begin{cases}\text{若 } 0<a<1 \text{ 時，} & \text{圖形從中心點往外順時針旋轉}\\ \text{若 } a>1 \text{ 時，} & \text{圖形從中心點往外逆時針旋轉}\end{cases}$。

例如： $r=(\dfrac{9}{10})^{\theta}$ $r=(\dfrac{10}{9})^{\theta}$



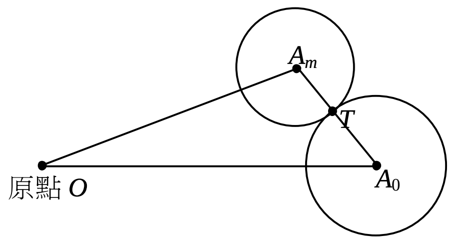


所以我們僅考慮 $0<a<1$ 的對數螺線即可。

### (一)兩原基相切的關係式 $p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$

選定一初始原基標示為 $A_0$，假設 $A_m$ 為後續第 $m$ 個產生的原基，並與 $A_0$ 相切，切點為 $T$；

則 $p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$




**證明**

令$\overline{OA_0}=a^{\theta}$　$A_m$ 爲沿生成螺線逆時針旋轉 $m\varphi$ 產生的第 $m$ 個原基 $\therefore\overline{OA_m}=a^{\theta+m\varphi}$ $=a^{\theta}\times a^{m\varphi}$

$\because$原基的半徑與原點的距離成正比　　$\therefore\overline{A_0T}=p\overline{OA_0}=pa^{\theta}$、$\overline{A_mT}=p\overline{OA_m}=pa^{\theta}\times a^{m\varphi}$

餘弦定理　$(pa^{\theta}+pa^{\theta}\times a^{m\varphi})^2=a^{2\theta}+a^{2\theta}\times a^{2m\varphi}-2\times a^{\theta}\times(a^{\theta}\times a^{m\varphi})\times\cos m\varphi$

$\Rightarrow p^2a^{2\theta}(1+a^{m\varphi})^2=a^{2\theta}(1+a^{2m\varphi}-2\times a^{m\varphi}\times\cos m\varphi)$

$$\Rightarrow p^2=\frac{1+a^{2m\varphi}-2\times a^{m\varphi}\times\cos m\varphi}{(1+a^{m\varphi})^2}=\frac{(1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi})-2\times a^{m\varphi}\times\cos m\varphi-2a^{m\varphi}}{(1+a^{m\varphi})^2}$$

$$=\frac{(1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi})-2a^{m\varphi}(\cos m\varphi+1)}{1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi}}=1-2\times\frac{a^{m\varphi}(\cos m\varphi+1)}{1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi}}=1-2\times\frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$$

① 原基間的相切與選定的初始原基 $A_0$ 無關，即$\forall\ i\in\boldsymbol{N}$，原基 $A_i$ 與原基 $A_{m+i}$ 也會相切，也就是每間隔 $m$ 個原基序的兩原基必相切。

## (二) $p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$的進一步研究

原基 $A_0$ 與原基 $A_m$ 相切所產生的關係式 $p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$當中的 $p$、$a$、$m$ 都是未定之數,於是我們決定用 *Excel* 程式來測試一下。

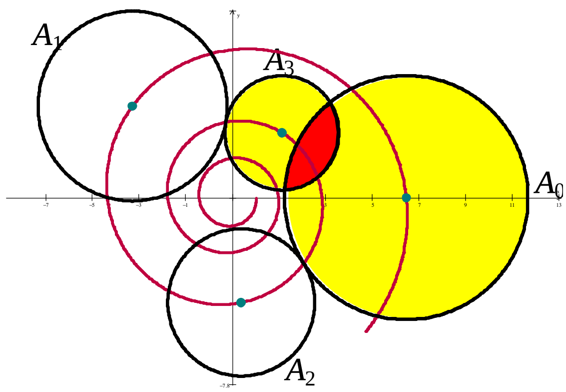
假設生成螺線 $r=0.9^{\theta}$，即 $a=0.9$。黃金角 $\varphi\doteqdot 2.399963$，$m$ 值依序從 1～24 所得 $p^2$ 值如下

| $m$ | $a^{m\varphi}$ | $a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2$ | $\cos m\varphi+1$ | $p^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.776576 | 4.064280 | 0.262631 | 0.870761 |
| 2 | 0.603070 | 4.261253 | 1.087426 | 0.489622 |
| 3 | 0.468329 | 4.603580 | 1.608439 | 0.301223 |
| 4 | 0.363693 | 5.113265 | 0.015287 | 0.994021 |
| 5 | 0.282435 | 5.823073 | 1.843755 | 0.366741 |
| 6 | 0.219332 | 6.778628 | 0.740396 | 0.781550 |
| 7 | 0.170328 | 8.041355 | 0.539093 | 0.865920 |
| 8 | 0.132273 | 9.692422 | 1.939321 | 0.599827 |
| 9 | 0.102720 | 11.837959 | 0.075654 | 0.987218 |
| 10 | 0.079770 | 14.615884 | 1.423846 | 0.805165 |
| 11 | 0.061947 | 18.204761 | 1.299284 | 0.857259 |
| 12 | 0.048107 | 22.835285 | 0.134789 | 0.988195 |
| 13 | 0.037358 | 28.805106 | 1.976676 | 0.862755 |
| 14 | 0.029012 | 36.497967 | 0.424871 | 0.976718 |
| 15 | 0.022530 | 46.408368 | 0.871489 | 0.962443 |
| 16 | 0.017496 | 59.173350 | 1.764649 | 0.940357 |
| 17 | 0.013587 | 75.613451 | 0.000854 | 0.999977 |
| 18 | 0.010551 | 96.785445 | 1.708829 | 0.964688 |
| 19 | 0.008194 | 124.050274 | 0.953809 | 0.984622 |
| 20 | 0.006363 | 159.160529 | 0.359291 | 0.995485 |
| 21 | 0.004941 | 204.373105 | 1.991069 | 0.980515 |
| 22 | 0.003837 | 262.594282 | 0.179142 | 0.998636 |
| 23 | 0.002980 | 337.566531 | 1.219481 | 0.992775 |
| 24 | 0.002314 | 434.109090 | 1.497181 | 0.993102 |

分析此一表格數據：選定一初始原基 $A_0$，若 $A_1$ 與 $A_0$ 相切可得 $p^2=0.870761$、若 $A_2$ 與 $A_0$ 相切可得 $p^2=0.489622$、若 $A_3$ 與 $A_0$ 相切可得 $p^2=0.301223$………，以此類推。

得出 $p^2$ 的值之後，發現：如果 $p$ 值過大，勢必會重疊到其他原基的生長空間。

比如下圖：在此 p 值之下原基有重疊發生,則不合理.




因此向日葵的 $p^2$ 值應爲 $A_0$ 與 $A_m$, $\forall m\in N$ 相切最小的那一個

定義函數 $P_a(m)$與 $Q(a)$

$$P_a(m)=1-2\times\frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2}\text{、}Q(a)=min\{P_a(m)\mid m\in N\}$$

我們要強調的是它們在本研究中的意義：

向日葵的生成螺線方程式爲 $r=a^{\theta}$，$0<a<1$ ：$\begin{cases} P_a(m)\text{：原基 } A_0 \text{ 與原基 } A_m \text{ 相切所產生的 } p^2 \text{ 值} \\ Q(a)\text{：}\forall m\in N\text{，}P_a(m) \text{ 值中最小的，令作 } Q(a) \end{cases}$

例如：生成螺線 $r=0.9^{\theta}$，即 $a=0.9$。

**定理一**　費氏數列 $\langle F_n \rangle$。$F_1\varphi=F_2\varphi=\beta^2\cdot 2\pi$、　$n\geq 3$，$F_n\varphi=F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi+\beta^n\cdot 2\pi$，其中 $\beta=$ 。

**證明**　令 $\alpha=$ 、$\beta=$ ，則 $\alpha$、$\beta$ 爲 $x^2-x-1=0$ 的兩根

所以 $\alpha+\beta=1$、$\alpha\beta=-1$、$\alpha-\beta=$ 、$\alpha^2-\alpha-1=0$、$\beta^2-\beta-1=0$

$\varphi=2\pi-\cdot 2\pi=(1+\beta)\cdot 2\pi=\beta^2\cdot 2\pi$、$F_n=(\alpha^n-\beta^n)$

很明顯的：$F_1\varphi=F_2\varphi=1\cdot\varphi=\beta^2\cdot 2\pi$

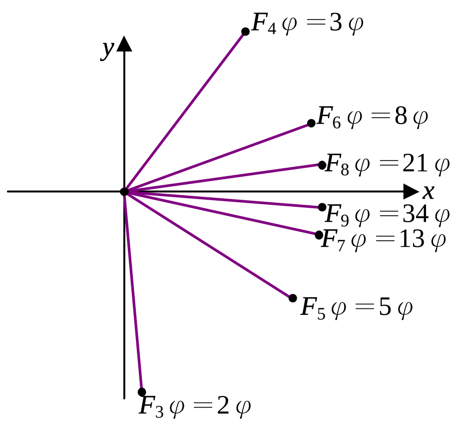
$n\geq 3$ 時，$F_n\varphi=(\alpha^n-\beta^n)\times\beta^2\cdot 2\pi=(\alpha^n\beta^2-\beta^{n+2})\cdot 2\pi=(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}+\beta^{n-2}-\beta^{n+2})\cdot 2\pi$

$=(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})\cdot 2\pi+(\beta^{n-2}-\beta^{n+2})\cdot 2\pi=F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi+\cdot\beta^n\cdot(-\beta^2)\cdot 2\pi=F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi+\cdot\beta^n\cdot(\alpha^2-\beta^2)\cdot 2\pi$

$=F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi+\cdot\beta^n\cdot(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\cdot 2\pi=F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi+\cdot\beta^n\cdot(\alpha-\beta)\cdot 2\pi=F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi+\beta^n\cdot 2\pi$

我們根據**定理一**列舉幾個 $F_n\varphi$ 如下：

| $F_n\varphi$ | $2\varphi=$ 275.02°＝ $2\pi+\beta^3\cdot 2\pi$ | $3\varphi=$ 412.52°＝ $2\pi+\beta^4\cdot 2\pi$ | $5\varphi=$ 687.54°＝ $4\pi+\beta^5\cdot 2\pi$ | $8\varphi=$ 1100.06°＝ $6\pi+\beta^6\cdot 2\pi$ | $13\varphi=$ 1787.60°＝ $10\pi+\beta^7\cdot 2\pi$ | $21\varphi=$ 2887.66°＝ $16\pi+\beta^8\cdot 2\pi$ | $34\varphi=$ 4675.26＝ $26\pi+\beta^9\cdot 2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| －180°～180° 的同界角 | －84.98° | 52.52° | －32.46° | 20.06° | －12.40° | 7.66° | －4.74° |




**結論**　① $n\geq 3$ 時，旋轉 $F_n\varphi$ 角就是旋轉 $F_{n\text{-}2}$ 圈 $(F_{n\text{-}2}\cdot 2\pi)$ 後，再轉 $\beta^n\cdot 2\pi$。

② 若 $n\geq 3$ 且 $n$ 爲奇數，則 $-\frac{\pi}{2}<\beta^n\cdot 2\pi<0$，所以 $F_n\varphi$ 落在第四象限；

若 $n\geq 3$ 且 $n$ 爲偶數，則 $0<\beta^n\cdot 2\pi<\frac{\pi}{2}$，所以 $F_n\varphi$ 落在第一象限。

③ $\frac{\pi}{2}<\beta^2\cdot 2\pi<\pi$；$n\geq 3$ 時，$-\frac{\pi}{2}<\beta^n\cdot 2\pi<\frac{\pi}{2}$ 。

④ $\cos F_n\varphi=\cos\beta^n\cdot 2\pi$ 且 $\cos F_n\varphi<\cos F_{n+1}\varphi$, $\forall n\geq 2$。

**定理二**　設 $m$、$n$ 爲正整數且 $n\geq 4$。若 $1\leq m<F_n$，則 $\cos m\varphi\leq\cos F_{n-1}\varphi$ 。

**證明**

①當 $n=4$ 時，$1\leq m<F_4\Rightarrow m=1$ 或 2 且 $F_3=2\Rightarrow\cos\varphi=\cos\beta^2\cdot 2\pi\leq\cos\beta^3\cdot 2\pi=\cos 2\varphi$ ，

所以 $\cos m\varphi\leq\cos F_3\varphi$ 上式成立。

②設 $n=k\geq 4$ 時，$1\leq m<F_k$，則 $\cos m\varphi\leq\cos F_{k-1}\varphi$ 成立

則 $n=k+1$ 時，$1\leq m<F_{k+1}$

(*i*)若 $1\leq m<F_k$，則 $\cos m\varphi\leq\cos F_{k-1}\varphi<\cos F_k\varphi$

(*ii*)若 $m=F_k$，則 $\cos m\varphi=\cos F_k\varphi$

(*iii*)若 $F_k<m<F_{k+1}$，則 $m=F_k+t$，其中 $1\leq t<F_{k-1}$，則 $\cos t\varphi\leq\cos F_{k-2}\varphi$

1) 若 $k$ 爲奇數 $\Rightarrow$ 存在 $q_k\in\mathbf{Z}$ 使得 $-\beta^{k-2}\cdot 2\pi+2q_k\pi\leq t\varphi\leq\beta^{k-2}\cdot 2\pi+2(q_k+1)\pi$

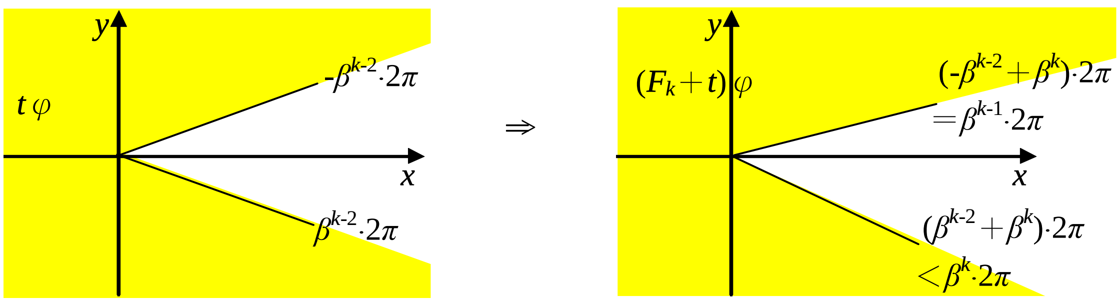
$\Rightarrow(-\beta^{k-2}+\beta^k)\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2})\pi\leq(F_k+t)\varphi\leq(\beta^{k-2}+\beta^k)\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2}+1)\pi$

$\Rightarrow\beta^{k-1}\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2})\pi\leq(F_k+t)\varphi<\beta^k\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2}+1)\pi$

$\Rightarrow-\beta^k\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2})\pi<(F_k+t)\varphi<\beta^k\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2}+1)\pi$

$\Rightarrow\cos[(F_k+t)\varphi]<\cos F_k\varphi$　　[補充　$-\beta^{k-2}+\beta^k=\beta^{k-2}(-1+\beta^2)=\beta^{k-2}(-1+1+\beta)=\beta^{k-1}$]

參考附圖：




2) 若 $k$ 爲偶數 $\Rightarrow$ 存在 $q_k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\beta^{k-2}\cdot 2\pi+2q_k\pi\leq t\varphi\leq-\beta^{k-2}\cdot 2\pi+2(q_k+1)\pi$

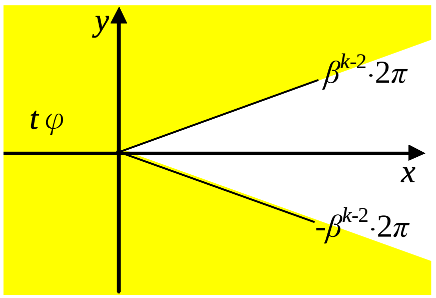
$\Rightarrow(\beta^{k-2}+\beta^k)\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2})\pi\leq(F_k+t)\varphi\leq(-\beta^{k-2}+\beta^k)\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2}+1)\pi$

$\Rightarrow\beta^k\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2})\pi<(F_k+t)\varphi\leq\beta^{k-1}\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2}+1)\pi$

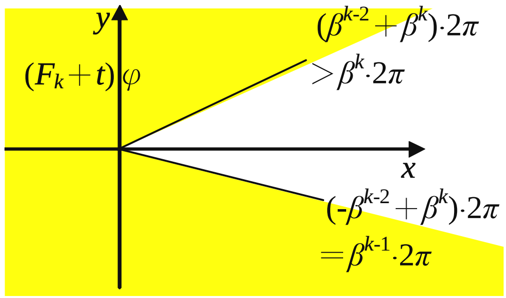
$\Rightarrow\beta^k\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2})\pi<(F_k+t)\varphi<-\beta^k\cdot 2\pi+2(q_k+F_{k-2}+1)\pi$

$\Rightarrow\cos[(F_k+t)\varphi]<\cos F_k\varphi$

參考附圖：




$\Rightarrow$




由 1) 2)得 $\cos m\varphi<\cos F_k\varphi$

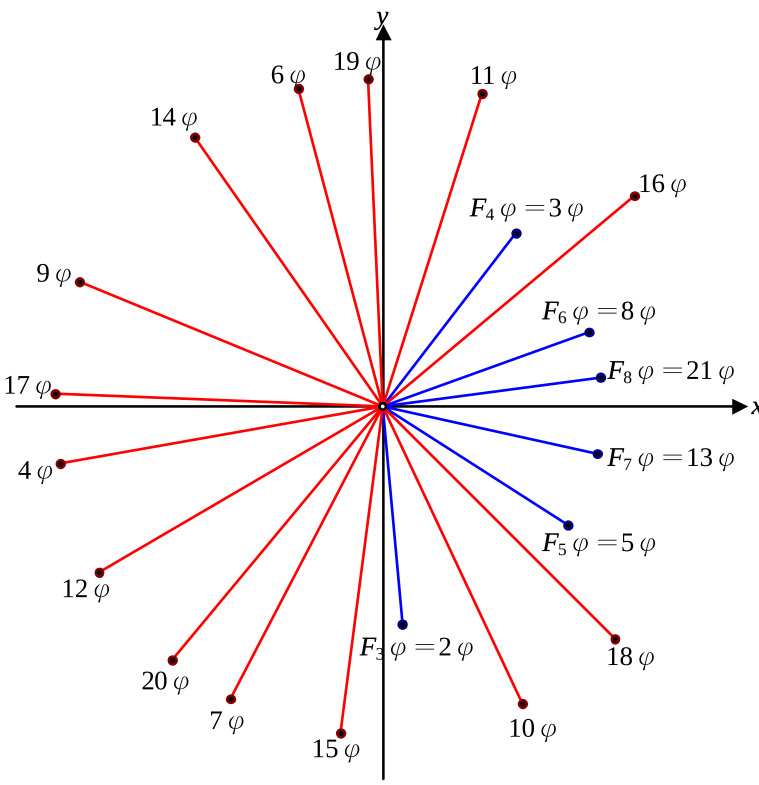
由(*i*) (*ii*) (*iii*) $1\le m<F_{k+1}$，則 $\cos m\varphi\le\cos F_k\varphi$ 成立

③由數學歸納法，若 $m$ 爲正整數且 $1\le m<F_n$，則$\forall n\ge 4$　$\cos m\varphi\le\cos F_{n-1}\varphi$ 恆成立。

**定理三**　若 $m$、$n$ 爲正整數且 $n\ge 5$。若 $F_{n-1}<m<F_n$，則 $\cos m\varphi<\cos F_{n-1}\varphi$。

**證明**　由 **定理二**　$F_{n-1}<m<F_n\Rightarrow 1\le m<F_n$ 且 $m\ne F_{n-1}\Rightarrow\cos m\varphi<\cos F_{n-1}\varphi$

事實上，由**定理一**得 $\cos F_{n-1}\varphi<\cos F_n\varphi$，所以 $F_{n-1}<m<F_n\Rightarrow\cos m\varphi<\cos F_{n-1}\varphi<\cos F_n\varphi$




$3\varphi<4\varphi<5\varphi\ \Rightarrow\cos 4\varphi<\cos 3\varphi$

$5\varphi<6\varphi<8\varphi\ \Rightarrow\cos 6\varphi<\cos 5\varphi$
$5\varphi<7\varphi<8\varphi\ \Rightarrow\cos 7\varphi<\cos 5\varphi$

$8\varphi<9\varphi<13\varphi\ \Rightarrow\cos 9\varphi<\cos 8\varphi$
$8\varphi<10\varphi<13\varphi\ \Rightarrow\cos 10\varphi<\cos 8\varphi$
$8\varphi<11\varphi<13\varphi\ \Rightarrow\cos 11\varphi<\cos 8\varphi$
$8\varphi<12\varphi<13\varphi\ \Rightarrow\cos 12\varphi<\cos 8\varphi$

$13\varphi<14\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 14\varphi<\cos 13\varphi$
$13\varphi<15\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 15\varphi<\cos 13\varphi$
$13\varphi<16\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 16\varphi<\cos 13\varphi$
$13\varphi<17\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 17\varphi<\cos 13\varphi$
$13\varphi<18\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 18\varphi<\cos 13\varphi$
$13\varphi<19\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 19\varphi<\cos 13\varphi$
$13\varphi<20\varphi<21\varphi\ \Rightarrow\cos 20\varphi<\cos 13\varphi$

我們可以發現只要 $m$ 值不是費氏數列中的一項，$m\varphi$ 終邊大都離 $x$ 軸正向很遠(夾角大)。

(三)$Q(a)$值存在且等於 $P_a(F_n)$

承如肆、一、(三)項所述：向日葵的 $p^2$ 值應取作 $Q(a)$才不會有任何原基重疊的現象！下列諸定理便要證明 $Q(a)$值存在且等於 $P_a(F_n)$，$F_n$ 是費氏數列中的一項。$m$ 是正整數，存在 $F_n$ 是費氏數列的一項使得 $P_a(m)\geq P_a(F_n)$

---

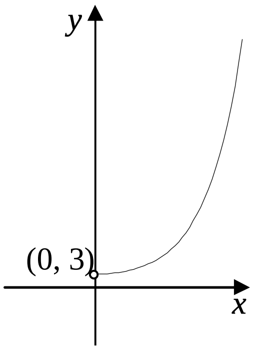
**引理四**　設 $a\in\mathbf{R}$ 且 $0<a<1$，定義在$\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$的函數 $f(x)=a^x+\frac{1}{a^x}+2$ 爲嚴格遞增函數。

**證明**　若 $0<x<y\Rightarrow y-x>0\Rightarrow a^{y-x}<1\Rightarrow 1-a^{y-x}>0$

又 $-y<0<x\Rightarrow a^{-y}>a^x\Rightarrow a^{-y}(1-a^{y-x})>a^x(1-a^{y-x})\Rightarrow a^{-y}-a^{-x}>a^x-a^y\Rightarrow a^x+\frac{1}{a^x}<a^y+\frac{1}{a^y}$

$\Rightarrow a^x+\frac{1}{a^x}+2<a^y+\frac{1}{a^y}+2\Rightarrow$函數 $f(x)=a^x+\frac{1}{a^x}+2$ 爲嚴格遞增函數

函數 $f(x)=a^x+\frac{1}{a^x}+2$ 的圖形如右




---

**定理五**　若生成螺線方程式 $r=a^{\theta}$，且 $m$ 爲正整數，則存在某一正整數 $n$，使得 $F_n \le m < F_{n+1}$，且 $P_a(m) \ge P_a(F_n)$。

**證明**　很顯然的，存在某一正整數 $n$，使得 $F_n \le m < F_{n+1}$

① 若 $m=F_n$，則 $P_a(m)=P_a(F_n)$

② 若 $F_n < m < F_{n+1}$，則由**定理三** $\cos m\varphi < \cos F_n\varphi \Rightarrow \cos m\varphi+1 < \cos F_n\varphi+1$

又 $F_n < m \Rightarrow F_n\varphi < m\varphi \Rightarrow a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2 < a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2$（由 **引理四**）

$$\therefore \frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2} < \frac{\cos F_n\varphi+1}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2} \Rightarrow 1-2\times\frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2} > 1-2\times\frac{\cos F_n\varphi+1}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2} \Rightarrow$$

$P_a(m) > P_a(F_n)$

由①②得 $P_a(m) \ge P_a(F_n)$。

**結論**　① 若 $Q(a)$存在，則 $Q(a)=min\{P_a(m) \mid m\in \boldsymbol{N}\}=min\{P_a(F_n) \mid n\in \boldsymbol{N}\}$。

② 我們只需從費氏數列$\langle F_n\rangle$中去尋找 $Q(a)$。

1.$Q(a)$存在性（固定生成螺線後，$p$ 値有最小値的存在性）

雖然由**定理五**可知 $Q(a)$要從費氏數列中去尋找，但是$\langle F_n\rangle$是一個發散數列，那麼會不會費氏數列在有限項內 $P_a(F_n)$不存在最小値呢？

再來試一試 *Excel* 程式測試不同 $a$ 值的結果。

(1)

$a = 0.7$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.778598 | 0.262631 | 0.890080 |
| 2 | 7.720607 | 1.087426 | 0.718306 |
| 3 | 15.116670 | 1.608439 | 0.787197 |
| 5 | 74.25672 | 1.843755 | 0.950341 |
| 8 | 944.0470 | 1.939321 | 0.995891 |
| 13 | 68058.11 | 1.976676 | 0.999942 |
| 21 | 64111979.4 | 1.991069 | 0.99999994 |

$Q(0.7) = P_{0.7}(2)$，原基 $A_0$ 與原基 $A_2$ 相切的時候

(2)

$a = 0.9$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.064280 | 0.262631 | 0.870761 |
| 2 | 4.261253 | 1.087426 | 0.489622 |
| 3 | 4.603580 | 1.608439 | 0.301223 |
| 5 | 5.823073 | 1.843755 | 0.366741 |
| 8 | 9.692422 | 1.939321 | 0.599827 |
| 13 | 28.805106 | 1.976676 | 0.862755 |
| 21 | 204.373105 | 1.991069 | 0.980515 |
| 34 | 5418.94017 | 1.996586 | 0.999263 |
| 55 | 1096218.200 | 1.998695 | 0.999996 |

$Q(0.9) = P_{0.9}(3)$，原基 $A_0$ 與原基 $A_3$ 相切的時候

(3)

$a = 0.99$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.000581824 | 0.262631122 | 0.868704 |
| 2 | 4.002327633 | 1.087425725 | 0.456603 |
| 3 | 4.005238444 | 1.608438861 | 0.196832 |
| 5 | 4.014562524 | 1.843755295 | 0.081466 |
| 8 | 4.037350589 | 1.939321296 | 0.03931 |
| 13 | 4.099131702 | 1.976675774 | 0.035564 |
| 21 | 4.262104686 | 1.991069413 | 0.065687 |
| 34 | 4.711105069 | 1.996585674 | 0.152392 |
| 55 | 6.033671779 | 1.998695385 | 0.337486 |
| 89 | 10.67360332 | 1.999501614 | 0.625337 |
| 144 | 34.2753639 | 1.999809624 | 0.883309 |
| 233 | 277.910032 | 1.999927281 | 0.985607 |
| 377 | 8898.42306 | 1.999972224 | 0.99955 |
| 610 | 2454582.09 | 1.99998939 | 0.999998 |

$Q(0.99)=P_{0.99}(13)$，原基 $A_0$ 與原基 $A_{13}$ 相切的時候

不同的 $a$ 值會對應出不同的 $Q(a)$，究竟要如何證明 $Q(a)$的存在？經過不斷的嘗試與思索，

我們從 $\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}$ 與 $\dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}$ 兩比值的大小上看出了一些端倪。

(4)

$a = 0.7$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ | $\dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}$ | | $\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.778598 | 0.262631 | 0.890080 | | | |
| 2 | 7.720607 | 1.087426 | 0.718306 | 0.618941 | > | 0.241516 |
| 3 | 15.116670 | 1.608439 | 0.787197 | 0.510735 | < | 0.676075 |
| 5 | 74.25672 | 1.843755 | 0.950341 | 0.203573 | | 0.872371 |
| 8 | 944.0470 | 1.939321 | 0.995891 | 0.078658 | | 0.950722 |
| 13 | 68058.11 | 1.976676 | 0.999942 | 0.013871 | | 0.981102 |
| 21 | 64111979.4 | 1.991069 | 0.99999994 | 0.001062 | | 0.992771 |

$Q(0.7)=P_{0.7}(2)$，原基 $A_0$ 與原基 $A_2$ 相切的時候

(5)

$a=0.9$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ | $\frac{a^{F_{n-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}$ | $\frac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.064280 | 0.262631 | 0.870761 | | |
| 2 | 4.261253 | 1.087426 | 0.489622 | 0.953776 | 0.241516 |
| 3 | 4.603580 | 1.608439 | 0.301223 | 0.925639 ＞ | 0.676075 |
| 5 | 5.823073 | 1.843755 | 0.366741 | 0.790576 ＜ | 0.872371 |
| 8 | 9.692422 | 1.939321 | 0.599827 | 0.600786 | 0.950722 |
| 13 | 28.805106 | 1.976676 | 0.862755 | 0.336483 | 0.981102 |
| 21 | 204.373105 | 1.991069 | 0.980515 | 0.140944 | 0.992771 |
| 34 | 5418.94017 | 1.996586 | 0.999263 | 0.037715 | 0.997237 |
| 55 | 1096218.200 | 1.998695 | 0.999996 | 0.004943 | 0.998945 |

$Q(0.9)=P_{0.9}(3)$，原基 $A_0$ 與原基 $A_3$ 相切的時候

(6)

$a=0.99$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ | $\frac{a^{F_{n-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}$ | $\frac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.000581824 | 0.262631122 | 0.868704 | | |
| 2 | 4.002327633 | 1.087425725 | 0.456603 | 0.999564 | 0.241516 |
| 3 | 4.005238444 | 1.608438861 | 0.196832 | 0.999273 | 0.676075 |
| 5 | 4.014562524 | 1.843755295 | 0.081466 | 0.997677 | 0.872371 |
| 8 | 4.037350589 | 1.939321296 | 0.03931 | 0.994356 | 0.950722 |
| 13 | 4.099131702 | 1.976675774 | 0.035564 | 0.984928 ＞ | 0.981102 |
| 21 | 4.262104686 | 1.991069413 | 0.065687 | 0.961762 ＜ | 0.992771 |
| 34 | 4.711105069 | 1.996585674 | 0.152392 | 0.904693 | 0.997237 |
| 55 | 6.033671779 | 1.998695385 | 0.337486 | 0.780802 | 0.998944 |
| 89 | 10.67360332 | 1.999501614 | 0.625337 | 0.565289 | 0.999597 |
| 144 | 34.2753639 | 1.999809624 | 0.883309 | 0.311407 | 0.999846 |
| 233 | 277.910032 | 1.999927281 | 0.985607 | 0.123333 | 0.999941 |
| 377 | 8898.42306 | 1.999972224 | 0.99955 | 0.031231 | 0.999978 |
| 610 | 2454582.09 | 1.99998939 | 0.999998 | 0.999564 | 0.241516 |

$Q(0.99)=P_{0.99}(13)$，原基 $A_0$ 與原基 $A_{13}$ 相切的時候

數列$<\dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}>$、$<\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}>$不但分別嚴格遞減與嚴格遞增($n\geq 2$ 時)，而當兩值大小比較改變的時候，$Q(a)$就產生了.

---

**引理六**　若 $n\in\boldsymbol{N}$ 且 $n\geq 3$，則 $\cos(F_{n+1}+F_{n-1})\varphi<\cos 2F_n\varphi$ 。

**證明**　$\because \beta+\dfrac{1}{\beta}<-2$　$\therefore\begin{cases}\text{若 } n \text{ 為偶數時，}\beta^{n}(\beta+\dfrac{1}{\beta})\cdot 2\pi<-2\beta^{n}\cdot 2\pi\\ \text{若 } n \text{ 為奇數時，}\beta^{n}(\beta+\dfrac{1}{\beta})\cdot 2\pi>-2\beta^{n}\cdot 2\pi\end{cases}$

$\therefore\cos(F_{n+1}+F_{n-1})\varphi=\cos(\beta^{n+1}+\beta^{n-1})\cdot 2\pi=\cos\beta^{n}\cdot(\beta+\dfrac{1}{\beta})\cdot 2\pi<\cos(-2\beta^{n}\cdot 2\pi)=\cos 2F_n\varphi$

---

**引理七**　若 $a, b, c, d>0$ 且 $b\neq c$ 且 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{c}$，則 $\dfrac{b+d}{a+d}>\dfrac{a+d}{c+d}$。

**證明**　$\because\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{c}$　$\therefore bc>a^2$

$(b+d)(c+d)=bc+d(b+c)+d^2>bc+d(2\sqrt{bc})+d^2>a^2+d(2\sqrt{a^2})+d^2=a^2+2ad+d^2=(a+d)^2$

$\Rightarrow\dfrac{b+d}{a+d}>\dfrac{a+d}{c+d}$

---

**定理八**　求證：若 $n\in\boldsymbol{N}$ 且 $n\geq 3$，數列$<\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}>$嚴格遞增至 1。

**證明**　① 先證 $\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi}{\cos F_n\varphi}<\dfrac{\cos F_n\varphi}{\cos F_{n+1}\varphi}$

由**引理六**可得

$2\cos F_{n+1}\varphi\cdot\cos F_{n-1}\varphi=\cos(F_{n+1}+F_{n-1})\varphi+\cos(F_{n+1}-F_{n-1})\varphi<\cos 2F_n\varphi+1=2\cos^2F_n\varphi$

$\Rightarrow\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi}{\cos F_n\varphi}<\dfrac{\cos F_n\varphi}{\cos F_{n+1}\varphi}$

② 由**引理七**　$\because\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi}{\cos F_n\varphi}<\dfrac{\cos F_n\varphi}{\cos F_{n+1}\varphi}$　$\therefore\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}<\dfrac{\cos F_n\varphi+1}{\cos F_{n+1}\varphi+1}$

$\therefore n\geq 3$，數列$<\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}>$遞增

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\beta^{n-1}\cdot 2\pi+1}{\cos\beta^{n}\cdot 2\pi+1}=\dfrac{\cos 0+1}{\cos 0+1}=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

**引理九**　若 $n\in\boldsymbol{N}$ 且 $n\geq 2$，則 $F_{n+1}+F_{n-1}>2F_n$。

**證明**　$F_{n-1}>F_{n-2}\Rightarrow F_{n+1}-F_n>F_n-F_{n-1}\Rightarrow F_{n+1}+F_{n-1}>2F_n$

**定理十一**　若生成螺線方程式為 $r=a^{\theta}$，則必存在 $m\in\boldsymbol{N}$，使得 $Q(a)=P_a(F_m)$。

**證明**

① 若 $\dfrac{a^{F_2\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_2\varphi}}+2}{a^{F_3\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_3\varphi}}+2}\leq\dfrac{\cos F_2\varphi+1}{\cos F_3\varphi+1}$

所以 $\dfrac{\cos F_k\varphi+1}{\cos F_{k+1}\varphi+1}<\dfrac{\cos F_{k+1}\varphi+1}{\cos F_{k+2}\varphi+1}<\cdots<\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}$

$$\leq\frac{a^{F_{m-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}<\cdots<\frac{a^{F_{k+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k+1}\varphi}}+2}{a^{F_{k+2}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k+2}\varphi}}+2}<\frac{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}{a^{F_{k+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k+1}\varphi}}+2}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos F_k\varphi+1}{\cos F_{k+1}\varphi+1}\times\frac{\cos F_{k+1}\varphi+1}{\cos F_{k+2}\varphi+1}\times\cdots\times\frac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}<\frac{a^{F_{m-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}\times\cdots\times\frac{a^{F_{k+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k+1}\varphi}}+2}{a^{F_{k+2}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k+2}\varphi}}+2}\times\frac{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}{a^{F_{k+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k+1}\varphi}}+2}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos F_k\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}<\frac{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}\Rightarrow\frac{\cos F_m\varphi+1}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}>\frac{\cos F_k\varphi+1}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}$$

$$\Rightarrow 1-2\times\frac{\cos F_m\varphi+1}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}<1-2\times\frac{\cos F_k\varphi+1}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}\Rightarrow P_a(F_m)<P_a(F_k)$$

2) 假設 $k\in\boldsymbol{N}$ 且 $k>m$，

則因為數列$<\dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}>$嚴格遞減、$<\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}>$嚴格遞增

$$\text{所以}\ \frac{a^{F_{k-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k-1}\varphi}}+2}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}<\cdots<\frac{a^{F_{m+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}{a^{F_{m+2}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m+2}\varphi}}+2}<\frac{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}{a^{F_{m+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}$$

$$\leq\frac{\cos F_m\varphi+1}{\cos F_{m+1}\varphi+1}<\frac{\cos F_{m+1}\varphi+1}{\cos F_{m+2}\varphi+1}<\cdots<\frac{\cos F_{k-1}\varphi+1}{\cos F_k\varphi+1}$$

$$\Rightarrow\frac{a^{F_{k-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{k-1}\varphi}}+2}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}\times\cdots\times\frac{a^{F_{m+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}{a^{F_{m+2}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m+2}\varphi}}+2}\times\frac{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}{a^{F_{m+1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}<\frac{\cos F_m\varphi+1}{\cos F_{m+1}\varphi+1}\times\frac{\cos F_{m+1}\varphi+1}{\cos F_{m+2}\varphi+1}\times\cdots\times\frac{\cos F_{k-1}\varphi+1}{\cos F_k\varphi+1}$$

$$\Rightarrow\frac{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}<\frac{\cos F_m\varphi+1}{\cos F_k\varphi+1}\Rightarrow\frac{\cos F_m\varphi+1}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}>\frac{\cos F_k\varphi+1}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}$$

$$\Rightarrow 1-2\times\frac{\cos F_m\varphi+1}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}<1-2\times\frac{\cos F_k\varphi+1}{a^{F_k\varphi}+\frac{1}{a^{F_k\varphi}}+2}\Rightarrow P_a(F_m)<P_a(F_k)$$

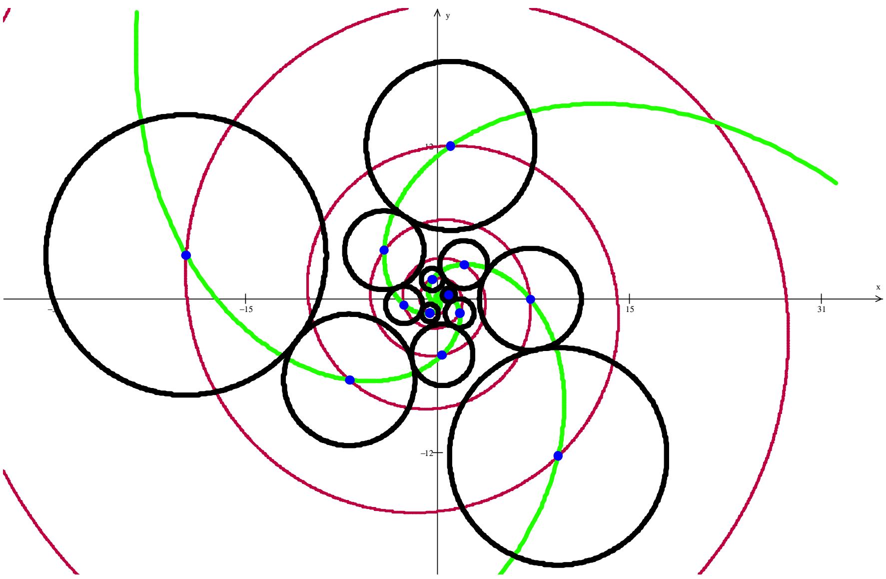
由 1)、2)　存在 $m\in\mathbf{N}$，使得 $Q(a)=P_a(F_m)$

## 二螺旋結構的產生、方向與螺線數目的關係

向日葵的螺旋結構是生成螺線上相鄰的原基所形成。

我們已經知道：向日葵的螺旋結構產生的螺線數目便為 $F_n$ 條，且 $n$ 為奇數時，螺旋方向為逆時針；$n$ 為偶數時，螺旋方向為順時針。

例一：生成螺線 $r=0.9^{\theta}$、向日葵選擇 $Q(0.9)=P_{0.9}(3)=0.301223$，則每間隔 3 個原基序的兩原基必相切，所以螺旋結構產生的螺線數目便為 3 條。

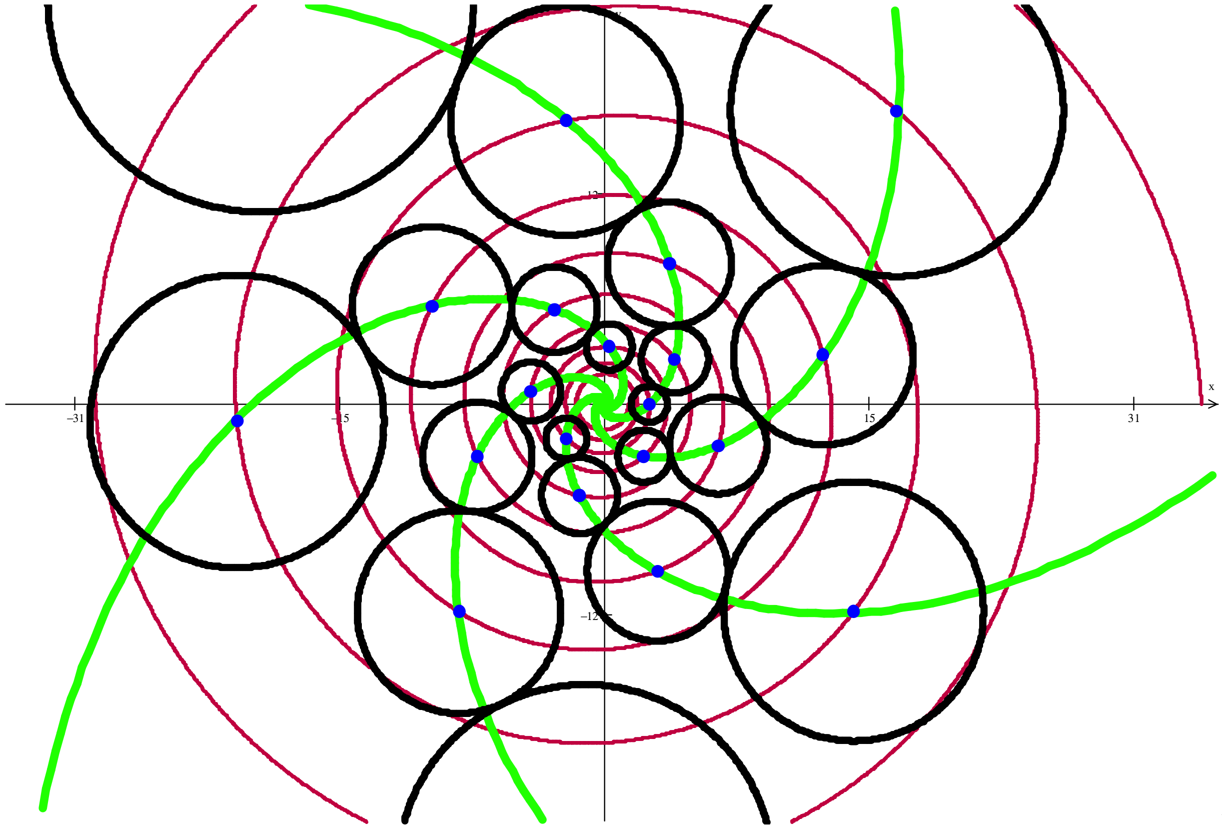


例二：生成螺線 $r=0.95^{\theta}$、向日葵選擇 $Q(0.95)=P_{0.95}(5)=0.160205$，則每間隔 5 個原基序的兩原基必相切，所以螺旋結構產生的螺線數目便爲 5 條。

$a=0.95$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ | $\dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}$ | | $\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.015173 | 0.262631 | 0.869181 | | | |
| 2 | 4.060923 | 1.087426 | 0.464444 | 0.988734 | | 0.241516 |
| 3 | 4.137944 | 1.608439 | 0.222590 | 0.981387 | | 0.676075 |
| 5 | 4.390966 | 1.843755 | 0.160205 | 0.942377 | ＞ | 0.872371 |
| 8 | 5.050828 | 1.939321 | 0.232078 | 0.869356 | ＜ | 0.950722 |

$Q(0.95)=P_{0.95}(5)$，每間隔 5 個原基序的兩原基必相切，螺旋方向爲逆時針



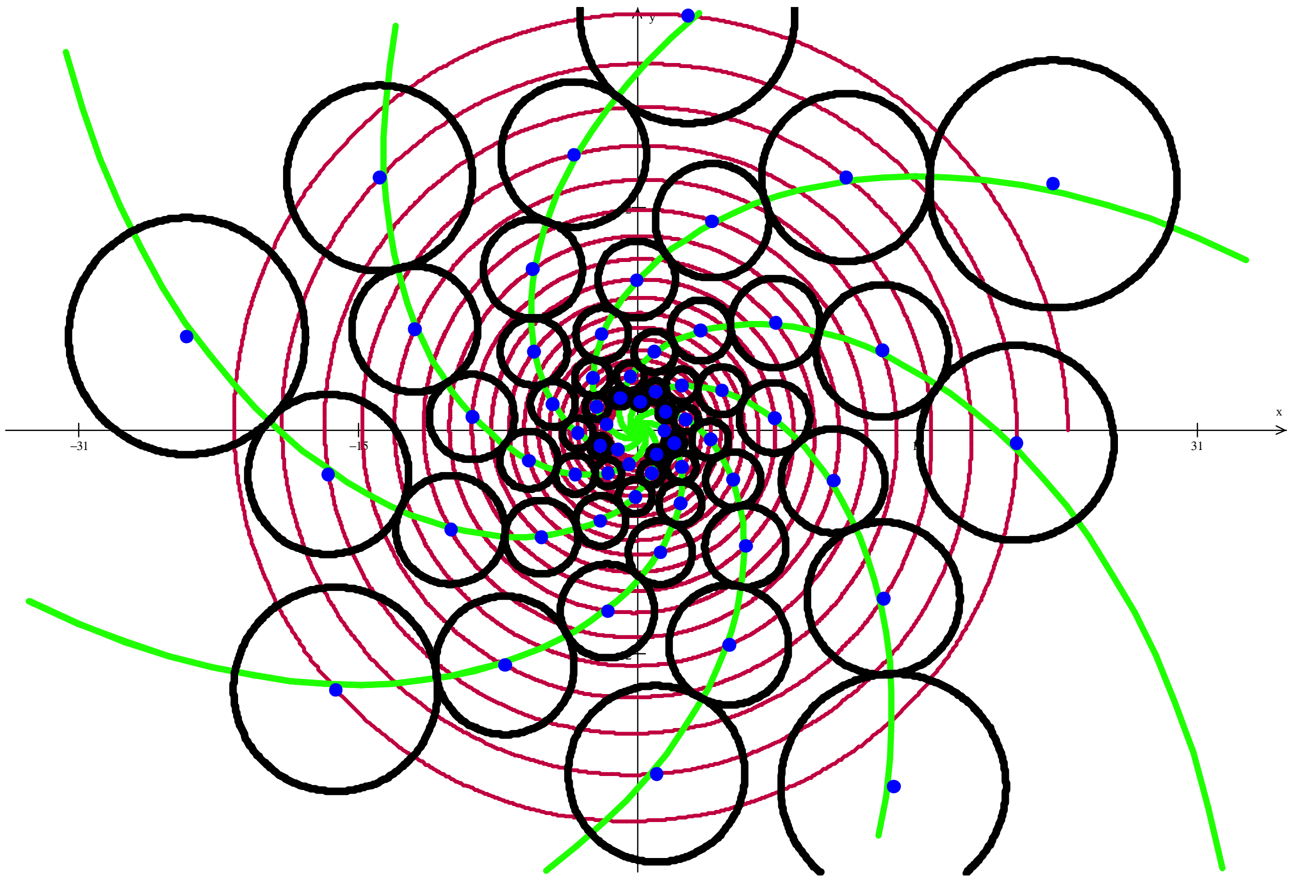
例

三：生成螺線 $r=0.98^{\theta}$、向日葵選擇 $Q(0.98)=P_{0.98}(8)=0.065917$，則每間隔 8 個原基序的兩原基必相切，所以螺旋結構產生的螺線數目便爲 8 條。

$a = 0.98$

| $F_n$ | $a^{F_n\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_n\varphi}}+2$ | $\cos F_n\varphi+1$ | $p^2$ | $\dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\frac{1}{a^{F_n\varphi}}+2}$ | $\dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.002351 | 0.262631 | 0.868762 | | |
| 2 | 4.009411 | 1.087426 | 0.457563 | 0.998239 | 0.241516 |
| 3 | 4.021195 | 1.608439 | 0.200019 | 0.997069 | 0.676075 |
| 5 | 4.059060 | 1.843755 | 0.091536 | 0.990671 | 0.872371 |
| 8 | 4.152351 | 1.939321 | 0.065917 | 0.977533 ＞ | 0.950722 |
| 13 | 4.410626 | 1.976676 | 0.103676 | 0.941443 ＜ | 0.981102 |

$Q(0.98)=P_{0.98}(8)$，每間隔 8 個原基序的兩原基必相切，螺旋方向爲順時針



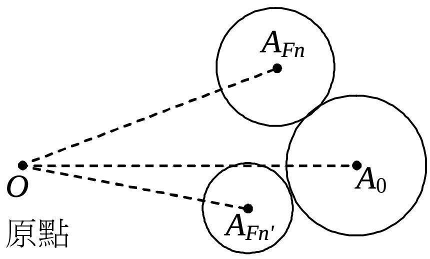

## 二、向日葵雙螺旋結構的特性

### (一)雙螺旋結構使向日葵花頭最密實

發散角等於黃金角的時候，如何使花頭最密實、最有效的堆排呢？

如果原基 $A_0$ 除了與原基 $A_{F_n}$ 相切之外，又可以在另一方向與原基 $A_{F_n'}$ 相切，那麼原基能夠儘可能相切，向日葵花頭就有最密實結構，也會產生兩組不同方向的螺旋，雙螺線的數目

分別為 $F_n$、$F_{n'}$。




## (二)具有雙螺旋結構的向日葵的生成螺線方程式

我們已證得「生成螺線方程式 $r=a^{\theta}$，$Q(a)=P_a(F_n)$必存在，使得每間隔 $F_n$ 個原基序的兩原基必相切」，亦即必能形成一個螺旋結構，但是卻不一定能形成雙螺旋結構。

接下來我們便要試著去尋找具有雙螺旋結構的向日葵的生成螺線。

從**定理十一**證明中可窺探：原基的相切與兩數列$\left\langle \dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_n\varphi}}+2} \right\rangle$、$\left\langle \dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1} \right\rangle$

的大小比較具有非常重要的相關性，因此延伸出**定理十二**。

**定理十二**　若生成螺線方程式 $r=a^{\theta}$，設 $m\in \mathbf{N}$ 且 $m\geq 3$。若 $\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}=\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}$，

則 $Q(a)=P_a(F_{m-1})=P_a(F_m)$。

**證明**　因為數列$\left\langle \dfrac{a^{F_{n-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{n-1}\varphi}}+2}{a^{F_n\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_n\varphi}}+2} \right\rangle$嚴格遞減、$\left\langle \dfrac{\cos F_{n-1}\varphi+1}{\cos F_n\varphi+1} \right\rangle$嚴格遞增

所以 $\dfrac{\cos F_m\varphi+1}{\cos F_{m+1}\varphi+1}>\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}=\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}>\dfrac{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}{a^{F_{m+1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}$

即滿足 $m\in \mathbf{N}$ 使得 $\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}\geq\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}$ 且 $\dfrac{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}{a^{F_{m+1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}\leq\dfrac{\cos F_m\varphi+1}{\cos F_{m+1}\varphi+1}$

由**定理十一**證明中(∗)式中的條件，因此原基 $A_0$ 與原基 $A_{Fm}$ 相切的時候，產生的 $p$ 值為最小

，又 $\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}=\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}\Rightarrow\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{a^{F_{m-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}=\dfrac{\cos F_m\varphi+1}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}$

$$\Rightarrow 1-2\times\frac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{a^{F_{m-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}=1-2\times\frac{\cos F_m\varphi+1}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}\Rightarrow P_a(F_{m-1})=P_a(F_m)$$

$A_0$ 與 $A_{Fm}$ 相切和 $A_0$ 與 $A_{Fm-1}$ 相切產生的 $p$ 值會相等，所以原基 $A_0$ 同時與原基 $A_{Fm-1}$、$A_{Fm}$ 相切。

**結論** ① 向日葵選擇 $Q(a)=P_a(F_{m-1})=P_a(F_m)$ 表示每間隔 $F_{m-1}$ 個原基序的兩原基相切，又另一方每間隔 $F_m$ 個原基序的兩原基相切，向日葵形成了雙螺旋結構。

② 雙螺旋結構中的兩螺旋數目必爲費氏數列相鄰的兩項。

③ 尋找具有雙螺旋結構向日葵的生成螺線，必先解得方程式

$$\frac{a^{F_{m-1}\varphi}+\frac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\frac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}=\frac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}$$

中的未知數 $a$，便能得到生成螺線方程式。

例如：螺線數目 8 與 13 的雙螺旋結構向日葵，它的生成螺線方程式爲何？

解析：解方程式 $\dfrac{a^{8\varphi}+\frac{1}{a^{8\varphi}}+2}{a^{13\varphi}+\frac{1}{a^{13\varphi}}+2}=\dfrac{\cos 8\varphi+1}{\cos 13\varphi+1}$。令 $x=a^{\varphi}$、$k=\dfrac{\cos 8\varphi+1}{\cos 13\varphi+1}$

則 $\dfrac{x^8+\frac{1}{x^8}+2}{x^{13}+\frac{1}{x^{13}}+2}=k\Rightarrow x^8+\dfrac{1}{x^8}+2=k(x^{13}+\dfrac{1}{x^{13}}+2)\Rightarrow x^{21}+x^5+2x^{13}=kx^{26}+k+2kx^{13}$

$\Rightarrow kx^{26}-x^{21}+2(k-1)x^{13}-x^5+k=0$ $\because\dfrac{\cos 8\varphi+1}{\cos 13\varphi+1}\doteqdot 0.981102$ $\therefore k=0.981102$ 代入

得 $0.981102x^{26}-x^{21}-0.037796x^{13}-x^5+0.981102=0$ 利用勘根定理可得 $x=0.973309$

$$a^{\varphi}=0.973308\Rightarrow a=0.988790\Rightarrow P_a(8)=1-2\times\frac{\cos 8\varphi+1}{a^{8\varphi}+\frac{1}{a^{8\varphi}}+2}=0.041607$$

## (三)雙螺旋結構向日葵的生成螺線唯一性

所謂的生成螺線方程式，在第 4 頁裡定義爲 $r=a^{\theta}, 0<a<1$，所以 $a$ 在開區間 (0, 1) 是否

有兩個以上的解，決定生成螺線是否唯一。以螺線數目 8 與 13 的雙螺旋結構向日葵爲例，上例算得生成螺線方程式 $r=0.988790^{\theta}$ 是利用勘根定理找出來的，但不能保證沒有其他的解！以下利用導函數方法證明生成螺線的唯一性：

**定理十三**　若 $k\in\boldsymbol{R}$ 且 $0<k<1$，$m$、$n\in\boldsymbol{N}$ 且 $m>n$，則方程式 $kx^{2m}-x^{m+n}+(2k-2)x^{m}-x^{m-n}+k=0$ 在開區間 $(0, 1)$ 有唯一解。

**證明**

① 令 $f(x)=kx^{2m}-x^{m+n}+(2k-2)x^{m}-x^{m-n}+k$

$\because f(0)=k>0$、$f(1)=k-1+(2k-2)-1+k=4k-4<0$　$\therefore f(x)=0$ 在開區間 $(0, 1)$ 至少有一解

② $f'(x)=2mkx^{2m-1}-(m+n)x^{m+n-1}+(2k-2)mx^{m-1}-(m-n)x^{m-n-1}$

$=x^{m-n-1}\{2mkx^{m+n}-(m+n)x^{2n}+(2k-2)mx^{n}-(m-n)\}$

$=x^{m-n-1}\{[2mkx^{m-n}-(m+n)]\cdot x^{2n}-(m-n)+2m(k-1)x^{n}\}$

$\because$ $0<x<1\Rightarrow 0<x^{m-n-1}\le 1$、$2m(k-1)x^{n}<0$、$x^{m-n}<1$、$x^{2n}<1$

1)若 $2mkx^{m-n}-(m+n)\le 0$，則 $x^{m-n-1}\{[2mkx^{m-n}-(m+n)]\cdot x^{2n}-(m-n)+2m(k-1)x^{n}\}<0$

$\Rightarrow\forall x\in(0, 1)$　$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$在開區間 $(0, 1)$ 爲遞減函數

2)若 $2mkx^{m-n}-(m+n)>0$，

則 $x^{m-n}<1\Rightarrow 2mkx^{m-n}<2mk\Rightarrow 0<2mkx^{m-n}-(m+n)<2mk-(m+n)$

$\Rightarrow[2mkx^{m-n}-(m+n)]\cdot x^{2n}<2mk-(m+n)$

$\Rightarrow[2mkx^{m-n}-(m+n)]\cdot x^{2n}-(m-n)<2mk-(m+n)-(m-n)=2m(k-1)<0$

$\Rightarrow\forall x\in(0, 1)$　$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$在開區間 $(0, 1)$ 爲遞減函數

由① ②可得證。

欲求螺線數目 $F_{m-1}$ 與 $F_m$ 的雙螺旋結構向日葵的生成螺線，即爲解方程式

$$\frac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}=\frac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}$$

令 $x=a^{\varphi}$、$k=\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}$ $(0<k<1)$，則原方程式可整理成

$$kx^{2F_m}-x^{F_m+F_{m-1}}+(2k-2)x^{F_m}-x^{F_m-F_{m-1}}+k=0$$

由**定理十三**得 $x$ 在開區間 $(0, 1)$ 的解是唯一的，又 $x=a^{\varphi}$，所以 $a$ 在開區間 $(0, 1)$ 的值亦是唯一的。

### (四)牛頓一次近似法

解方程式 $f(x)=kx^{2Fm}-x^{Fm+Fm\text{-}1}+(2k-2)x^{Fm}-x^{Fm\text{-}Fm\text{-}1}+k=0$ 的時候，用勘根定理求 $x$ 的解總是需要花費許多功夫，尤其 $x$ 的值往往要求到精確到小數點後好幾位才能使用，所以老師介紹了牛頓一次近似法，可以更迅速求得方程式的根。

$\boxed{\text{牛頓一次近似法}}$ $x_1=1-\dfrac{f(1)}{f'(1)}=1-\dfrac{4k-4}{4kF_m-4F_m}=1-\dfrac{1}{F_m}$、$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\forall n\geq 1$

在若干項後 $x_n$ 值便能精確到小數點後好幾位。

例如：求螺線數目 8 與 13 的雙螺旋結構向日葵的生成螺線方程式須解方程式

$f(x)=kx^{26}-x^{21}+2(k-1)x^{13}-x^5+k=0$，其中 $x=a^{\varphi}$、$k=\dfrac{\cos 8\varphi+1}{\cos 13\varphi+1}\fallingdotseq 0.981102$

$f'(x)=26kx^{25}-21x^{20}+26(k-1)x^{12}-5x^4$

| $x_1=1-\frac{1}{13}=0.923076923$ | | | |
|---|---|---|---|
| $n$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ |
| 1 | 0.23380036277882 | -4.60582746484550 | 0.973838782 |
| 2 | -0.00216564890169 | -4.06462386114059 | 0.973305977 |
| 3 | 0.00000855538234 | -4.09658547529453 | 0.973308066 |
| 4 | 0.00000000012895 | -4.09646198243592 | 0.973308066 |
| 5 | 0.00000000000000 | -4.09646198057443 | 0.973308066 |

解得 $x$ 値爲 0.973309 $\Rightarrow a=0.988790$

# 肆、研究結果與討論

## 一、基礎假設：

① 向日葵生成螺線爲對數螺線，極坐標方程式爲 $r=a^{\theta}$, $0<a<1$；

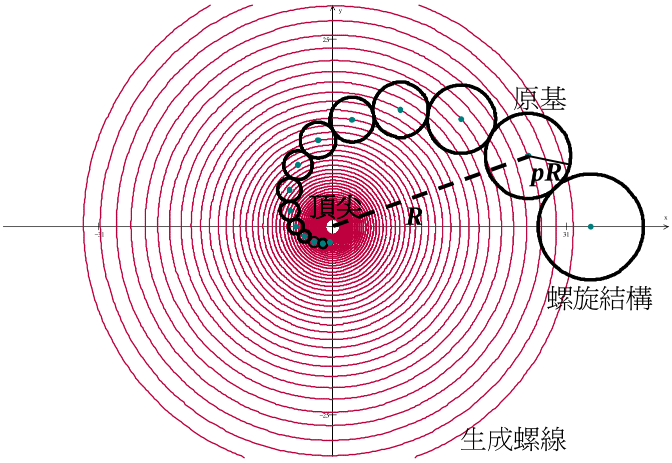
② 原基生長的發散角爲黃金角 $\varphi$；

③ 原基的形狀爲一圓形；

④ 原基的半徑與花盤中心點的距離成正比，比值爲 $p$ ( $0<p<1$ )；

⑤ 同一株向日葵的 $p$ 值應爲相同的定值，不同株向日葵的 $p$ 值則可能不同。

⑥ 不必考慮：向日葵大小、原基生長的位置及數量。研究的重點放在原基排列的結構。




二、<$F_n$>爲費氏數列、$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$、黃金角 $\varphi$ ，則

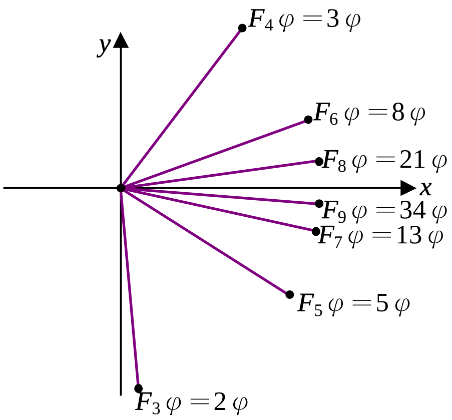
(一)$F_1\varphi=F_2\varphi=\beta^2$、$F_n\varphi=F_{n-2}\cdot 2\pi+\beta^n\cdot 2\pi$。

(二)若 $n\geq 3$ 且 $n$ 爲奇數，則$-\dfrac{\pi}{2}<\beta^n\cdot 2\pi<0$，所以 $F_n\varphi$ 落在第四象限；

若 $n\geq 3$ 且 $n$ 爲偶數，則 $0<\beta^n\cdot 2\pi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $F_n\varphi$ 落在第一象限。

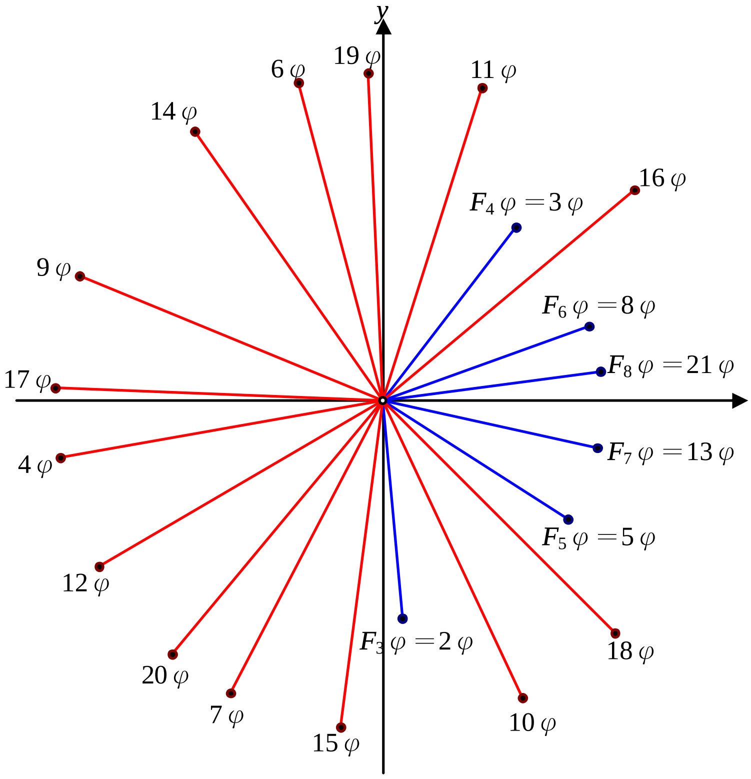
(三)$\cos F_n\varphi<\cos F_{n+1}\varphi,\ \forall n\geq 2$。

例如：




(四)若 $m$、$n$ 爲正整數且 $n\geq 5$。若 $F_{n-1}<m<F_n$，則 $\cos m\varphi<\cos F_{n-1}\varphi$。

例如：




$3\varphi < 4\varphi < 5\varphi \Rightarrow \cos 4\varphi < \cos 3\varphi$

$5\varphi < 6\varphi < 8\varphi \Rightarrow \cos 6\varphi < \cos 5\varphi$
$5\varphi < 7\varphi < 8\varphi \Rightarrow \cos 7\varphi < \cos 5\varphi$

$8\varphi < 9\varphi < 13\varphi \Rightarrow \cos 9\varphi < \cos 8\varphi$
$8\varphi < 10\varphi < 13\varphi \Rightarrow \cos 10\varphi < \cos 8\varphi$
$8\varphi < 11\varphi < 13\varphi \Rightarrow \cos 11\varphi < \cos 8\varphi$
$8\varphi < 12\varphi < 13\varphi \Rightarrow \cos 12\varphi < \cos 8\varphi$

$13\varphi < 14\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 14\varphi < \cos 13\varphi$
$13\varphi < 15\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 15\varphi < \cos 13\varphi$
$13\varphi < 16\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 16\varphi < \cos 13\varphi$
$13\varphi < 17\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 17\varphi < \cos 13\varphi$
$13\varphi < 18\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 18\varphi < \cos 13\varphi$
$13\varphi < 19\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 19\varphi < \cos 13\varphi$
$13\varphi < 20\varphi < 21\varphi \Rightarrow \cos 20\varphi < \cos 13\varphi$

## 三、費氏數列與原基相切之關係

生成螺線極坐標方程式爲 $r=a^{\theta}, 0<a<1$，考慮兩原基相切：

(一) $m\in \mathbf{N}$，原基 $A_0$ 與原基 $A_m$ 相切的關係式：$p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$。

(二)在向日葵中，必須要去取用 $\forall m\in \mathbf{N}$，原基 $A_0$ 與原基 $A_m$ 相切所計算出來的 $p^2$ 值中最小的那一個，才不會有任何原基重疊的現象！

(三)定義 $P_a(m)=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$、$Q(a)=min\{P_a(m)\mid m\in \mathbf{N}\}$

強調它們在本研究中的意義：若向日葵的生成螺線方程式爲 $r=a^{\theta}, 0<a<1$，
$P_a(m)$：原基 $A_0$ 與原基 $A_m$ 相切所產生的 $p^2$ 值；
$Q(a)$：$\forall m\in \mathbf{N}$，$P_a(m)$值中最小的，令作 $Q(a)$。

(四)若生成螺線方程式爲 $r=a^{\theta}, 0<a<1$，則必存在 $n\in \mathbf{N}$，使得 $Q(a)=P_a(F_n)$。

若生成螺線方程式為 $r=a^{\theta}$, $0<a<1$，且 $m\in\boldsymbol{N}$ 使得 $\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}\geq\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}$ 且

$\dfrac{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}{a^{F_{m+1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m+1}\varphi}}+2}\leq\dfrac{\cos F_m\varphi+1}{\cos F_{m+1}\varphi+1}$，則 $Q(a)=P_a(F_m)$。

四、原基相切形成螺旋結構，而且螺線的數目必為費氏數列的某一項 $F_n$。若 $n$ 為奇數，則螺旋方向為逆時針；若 $n$ 為偶數，則螺旋方向為順時針。

五、原基緊密的排列形成雙螺旋結構，使向日葵花頭最密實。

六、若 $m\in\boldsymbol{N}$ 且 $m\geq3$，利用$\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}=\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}$ 和牛頓一次近似法可以求得具有雙螺旋結構，且螺線數目分別為費氏數列相鄰的兩項 $F_{m-1}$ 及 $F_m$ 的花盤的生成螺線方程式。

# 伍、結論與應用

本研究在數學方法上做基礎假設之下，成功的印證向日葵雙螺旋結構的形成原理。從一開始眾多未知變數的條件下考慮原基相切，循序漸進的證明出原基相切的可行性，且必能形成螺旋結構，但是卻不一定具有雙螺旋結構，所以接下來再去尋找什麼樣的生成螺線能夠使雙螺旋結構產生？結果依然令人振奮：只要去解方程式 $\dfrac{\cos F_{m-1}\varphi+1}{\cos F_m\varphi+1}=\dfrac{a^{F_{m-1}\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_{m-1}\varphi}}+2}{a^{F_m\varphi}+\dfrac{1}{a^{F_m\varphi}}+2}$ 中的 $a$ 值即可！

然而研究尚有未竟之處：考慮旋轉其他角度，雖然可以用 *Excel* 處理資料，再以 *winplot* 繪圖檢驗其可以產生螺旋結構，但無法產生雙螺旋結構，目前尚且無法有效證明。

例如：發散角為 $\omega=\sqrt{5}\doteqdot2.36068$ 弳，在 $1\cdot\omega\sim300\cdot\omega$ 角度內，$\cos1\omega<\cos2\omega<\cos3\omega<\cos14\omega<\cos45\omega<\cos59\omega<\cos281\omega$，仿**定理五**：$1\leq m\leq300$ 且 $m\in\boldsymbol{N}$，原基 $A_0$ 與原基 $A_m$ 相切所產生的 $p^2$ 值最小會出現在 $m=1$ 或 2 或 3 或 14 或 45 或 59 或 281 當中。

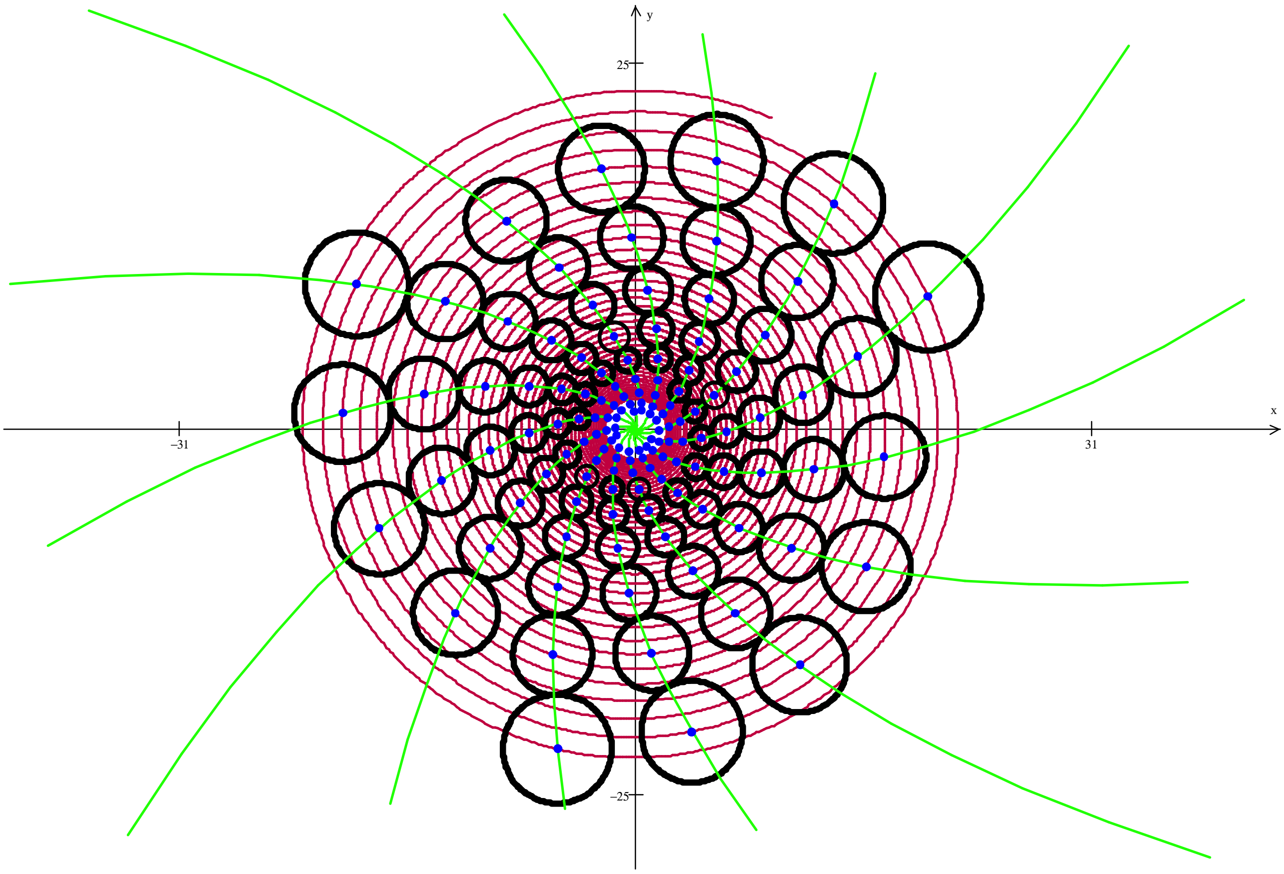
令 $L_1=1$、$L_2=2$、$L_3=3$、$L_4=14$、$L_5=45$、$L_6=59$、$L_7=281$。

螺旋結構：生成螺線 $r=0.99^{\theta}$，*Excel* 資料如下：

$a=0.99$

| $L_n$ | $a^{L_n\omega}+\frac{1}{a^{L_n\omega}}+2$ | $\cos L_n\omega+1$ | $p^2$ | $\frac{a^{L_{n-1}\omega}+\frac{1}{a^{L_{n-1}\omega}}+2}{a^{L_n\omega}+\frac{1}{a^{L_n\omega}}+2}$ | $\frac{\cos L_{n-1}\omega+1}{\cos L_n\omega+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.000505068 | 0.3827271 | 0.8086606 | | |
| 2 | 4.002020525 | 0.7620516 | 0.6191666 | 0.999621327 | 0.502232552 |
| 3 | 4.004547138 | 1.9110311 | 0.0455695 | 0.999369064 | 0.398764639 |
| 14 | 4.099808334 | 1.9938486 | 0.0273455 | 0.976764476 ＞ | 0.958463469 |
| 45 | 5.112907775 | 1.9957623 | 0.2193239 | 0.801854544 ＜ | 0.999041104 |
| 59 | 6.031209546 | 1.9998218 | 0.3368422 | 0.84774169 | 0.997970106 |
| 281 | 554.7921505 | 1.9998627 | 0.9927906 | 0.010871115 | 0.999979528 |

$p^2$ 最小值 0.0273455，每間隔 14 個原基序的兩原基必相切，螺旋方向爲逆時針




由於數列＜$\frac{a^{L_{n-1}\omega}+\frac{1}{a^{L_{n-1}\omega}}+2}{a^{L_n\omega}+\frac{1}{a^{L_n\omega}}+2}$＞不爲遞減、數列＜$\frac{\cos L_{n-1}\omega+1}{\cos L_n\omega+1}$＞不爲遞增，所以不能類似

**定理十一**去證明 $p^2$ 值有最小的存在性。

一、雙螺旋結構可能不存在：假設雙螺旋結構螺線數目分別為 14、45，解方程式

$$\frac{\cos 14\omega+1}{\cos 45\omega+1}=\frac{a^{14\omega}+\frac{1}{a^{14\omega}}+2}{a^{45\omega}+\frac{1}{a^{45\omega}}+2}$$ 得 $a=0.999352 \Rightarrow$ 生成螺線 $r=0.999352^{\theta}$，仍然形成單螺旋結構。

$a=0.999352$

| $L_n$ | $a^{L_n\omega}+\frac{1}{a^{L_n\omega}}+2$ | $\cos L_n\omega+1$ | $p^2$ | $\frac{a^{L_{n-1}\omega}+\frac{1}{a^{L_{n-1}\omega}}+2}{a^{L_n\omega}+\frac{1}{a^{L_n\omega}}+2}$ | $\frac{\cos L_{n-1}\omega+1}{\cos L_n\omega+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.000002099 | 0.3827271 | 0.8086365 | | |
| 2 | 4.000008394 | 0.7620516 | 0.618975 | 0.999998426 | 0.502232552 |
| 3 | 4.000018887 | 1.9110311 | 0.044489 | 0.999997377 | 0.398764639 |
| 14 | 4.000411322 | 1.9938486 | 0.0031782 | 0.999901901 | 0.958463469 |
| 45 | 4.004250983 | 1.9957623 | 0.0031782 | 0.999041104 ＝ | 0.999041104 |
| 59 | 4.007309354 | 1.9998218 | 0.001913 | 0.999236802 ＞ | 0.997970106 |
| 281 | 4.168001003 | 1.9998627 | 0.0403732 | 0.961446351 ＜ | 0.999979528 |

$p^2$ 最小值 0.001913，並非螺線數目分別為 14、45 的 0.0031782

# 陸、參考文獻


高中數學康熙版第二冊第三章第六節複數的極式

高中數學龍騰版選修 *II* 導函數

Mario Livio（2004）。**黃金比例：1.61803......的祕密**。臺北市：遠流。

Jan Stewart（1998）。**大自然的數學遊戲**。臺北市：天下文化。

Jan Stewart（2000）。**生物世界的數學遊戲**。臺北市：天下文化。

趙文敏。等角螺線及其他。**科學月刊，第二十卷第九期、第十期**
取自：http://tepiste.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/page2.html

曹亮吉。兔子、鳳梨、向日葵、帕德能廟、正十邊形、鸚鵡螺。**科學月刊，第二卷第八期**，
取自：http://tepiste.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_02_08_1/index.html

維基百科 — 對數螺線
http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E7%AD%89%E8%A7%92%E8%9E%BA%E7%B7%9A&variant=zh-tw

*Fibonacci Numbers and how they are related to flowers, pine cones, pineapples, palm trees, suspension bridges, spider webs, dripping taps, CDs, your savings account, and quite a few other things*.(2000, October 26). From http://www.branta.connectfree.co.uk/fibonacci.htm

Matt Anderson, & Jeffrey Frazier, & Kris Popendorf.(1999). *The Fibonacci Series_Applications_ Nature*. Form http://library.thinkquest.org/27890/applications5.html

## 【評語】040418

1、 有關向日葵花花辦數的文獻，多以其與費氏數列之關連性居多，而此件作品則建構在「原基沿著某螺旋線生長」之觀點上，為一個跨領域研究之好題目。

2、 作者群雖引用參考文獻中的「黄金角」，但能利用極坐標討論出兩原基相切之充要條件，並推導出雙螺旋結構與費氏數列之關連性，頗具創見。

3、 此件作品之推導方法多在高中數學的教材範疇內，值得鼓勵，惟作者群應進一步了解「黄金角」的涵意，方能了解其重要性。