中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040417

一段愛與堆疊的故事

學校名稱：國立板橋高級中學

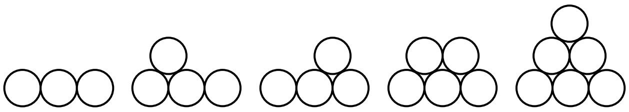
作者：	指導老師：
高二 林建甫 高二 柯凱仁 高二 陳瑞琳	呂又寧

關鍵詞：卡塔蘭數、n 階圓塔、奇偶性

作品名稱：一段愛與堆疊的故事

摘要

「n 階圓塔」為平面上以 n 個圓為底層的堆疊圖形，例如：


為 3 階圓塔之全部圖形。

本科展內容旨在研究平面中，用硬幣堆疊 n 階圓塔的圖形種類與個數。我們找到了一種有系統的圖形分類法，使得各類圖形互斥而不重複。利用此分類法，我們推導且證明出 n 階圓塔圖形總類數的遞迴式，並發現此遞迴數列與卡塔蘭數$\left(\frac{C_n^{2n}}{n+1}\right)$的遞迴關係相吻合。接著找出其中硬幣兩兩相連時，所能堆疊的圖形數，發現並證明與圖形總個數為 2 的倍數所能堆疊的圖形數相同。最後，觀察圖形總個數為 3 的倍數、4 的倍數……，發現硬幣總個數為 X 的倍數時，圖形種類數的遞迴式。

壹、研究動機

在學排列組合的時候，我們在書上看到了一個遊戲，叫做「堆硬幣」。就是將硬幣一層層疊在一起，唯一的條件就是：上一層的硬幣必須與下一層的兩個硬幣相切。在從最底層往上堆疊的過程中，我們便想到：在固定底層硬幣個數時，最多可以疊出多少種圖形呢？被好奇心所驅使，我們毅然決定從這個問題出發，踏入堆疊的世界！

貳、研究目的

一、 找出底層 n 枚硬幣時，堆疊法種類的一般式。

二、 找出硬幣兩兩相連時，堆疊法種類的一般式。

三、 找出硬幣總個數為 X 的倍數時，堆疊法種類的遞迴式。

參、研究設備及器材

硬幣、手、紙、筆、電腦、大腦、C 語言

肆、研究過程

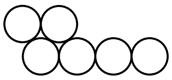
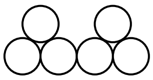
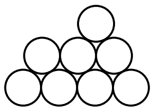
一、 文獻探討：

(一)、 這個研究其是原本出自於 Crux Mathematicorum 的第 1367 題。

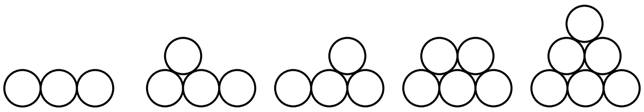
原本的題目為：在 n 個並列圓的圖形上，放置數個相同的圓，放置的要求為：

1. 為了使圖形中的圓穩固，上一列的圓必須與下一列的兩個圓相切。
2. 任一列的圓必須相連。

例如：左下的兩個圖是不被允許的，而右下圖則符合要求。

不正確： ；正確：

因此，當 n=3 時，共有下列 5 種不同的方式。



試問：令 a_n 為底座是 n 個並列圓的放置的方法數，求 a_n 的一般公式。

(二)、 在 45 屆以及 47 屆時的全國科展，有人曾經研究過這個題目，使用的方法是排列組合「走捷徑」的方法。而我們是使用另一種方法研究，我們所研究的部份是可不相連，而且推廣的方向也完全不同。

二、 研究：

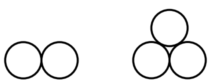
(一)、 定義：$\mathcal{S}_n$ 為底層為 n 的圖形集合。

S_n 為底層為 n 的圖形總數，且 S_0 為 1。

(二)、 計算出前幾項數據：

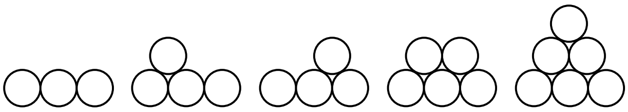
1. S_1 即底層為一個時所能組合出的圖形數，所以 $S_1=1$

2. S_2 即底層為二個時所能組合出的圖形數，如圖（一），有兩種，所以 $S_2=2$。



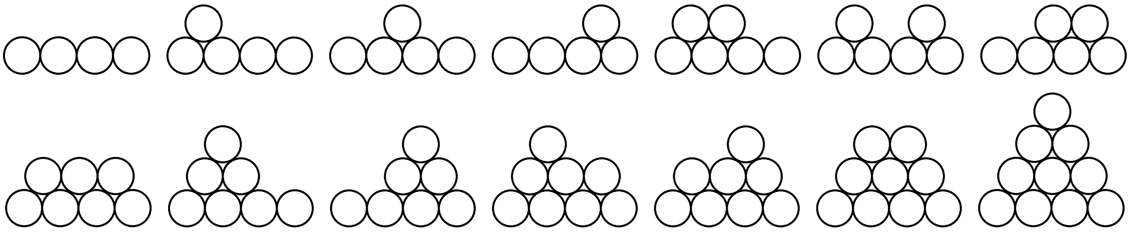
圖（一）$\mathcal{S}_2$ 所有排法

3. S_3即底層為三個時所能組合出的圖形數，如圖（二），有五種，所以 $S_3=5$。



圖（二）S_3所有排法

4. S_4即底層為四個時所能組合出的圖形數，如圖（三），有十四種，所以 $S_4=14$。

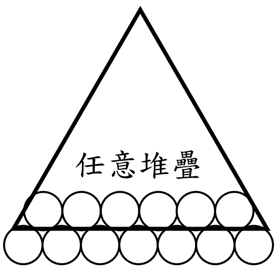
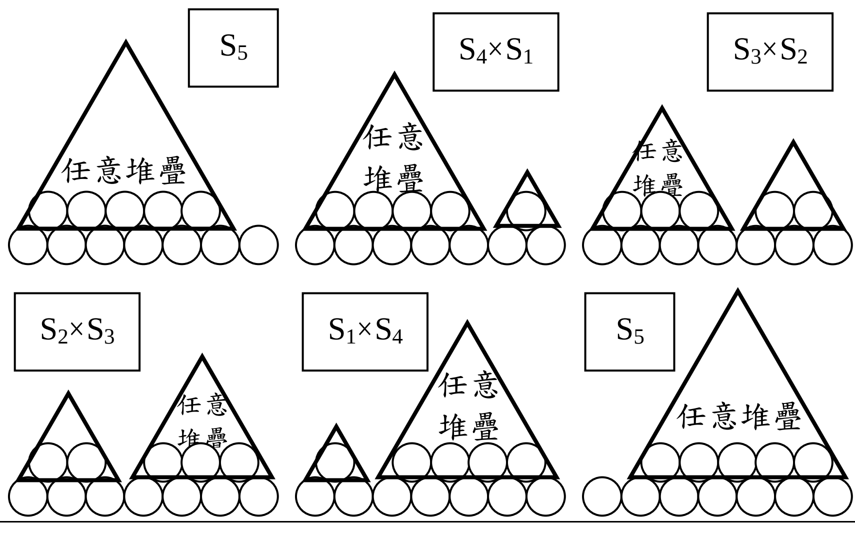


圖（三）S_4所有排法

(三)、 設法找出一般式或遞迴式：

在使用各種計算圖形總數的方法時，我們這組三個組員各使用不同的方法計算堆疊法，其中一位組員的計算方法中有兩個數據總是會一樣！

解釋：以七為底時，第二層（從底下算起）疊六枚硬幣（如圖（四））的堆疊種類數與第二層疊五枚硬幣時（如圖（五））的堆疊種類數有相同的數據。

	
圖（四）：由符號的定義，三角形部分排列總數為 S_6	圖（五）：第二層疊五枚硬幣

也就是說 $S_6 =S_0S_5+S_1S_4+S_2S_3+S_3S_2+S_4S_1+S_5S_0$。

而底為其他個數時，也有一樣的情形：

$S_7 = S_0S_6+S_1S_5+S_2S_4+S_3S_3+S_4S_2+S_5S_1+S_6S_0$，

$S_8 = S_0S_7+S_1S_6+S_2S_5+S_3S_4+S_4S_3+S_5S_2+S_6S_1+S_7S_0$，

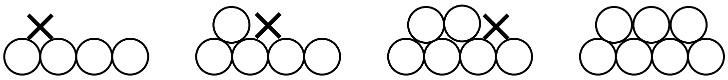
所以我們猜測遞迴關係為 $S_n = S_0S_{n-1}+S_1S_{n-2}+S_2S_{n-3}+\ldots\ldots+S_{n-3}S_2+S_{n-2}S_1+S_{n-1}S_0$。

(四)、 證明

1. 因為 $S_4=S_0S_3+S_1S_2+S_2S_1+S_3S_0$，$14=1\times5+1\times2+2\times1+5\times1=5+2+2+5$。

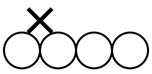
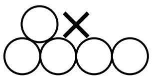
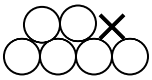
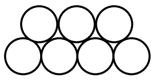
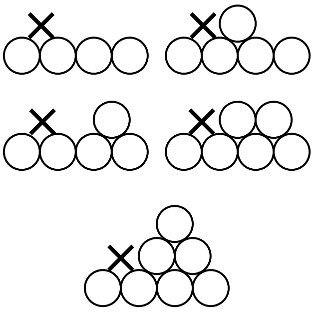
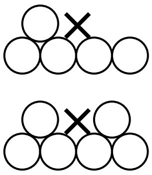
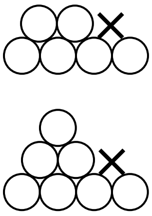
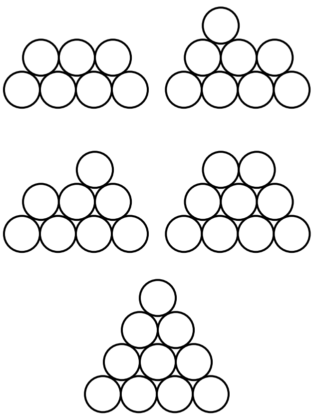
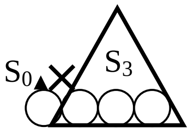
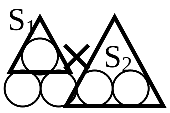
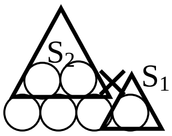
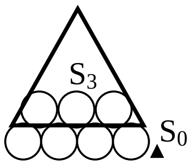
推測：將 S_4 總數分為 5、2、2、5 共四類可以找出其關係。

經過研究我們發現第二層可以分為以下這四類，而這四類是互斥的，如圖（六）（X 為不能放置的地方）



圖（六）：第二層可以分為這四類

於是我們將圖形列出而種類數正好是 5、2、2、5。如表（一）所示。

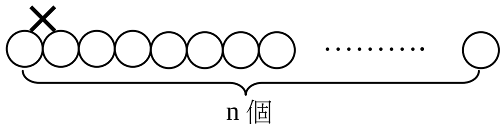
分類				
圖形				
種類數				

表（一）：所有圖形之分類與歸納

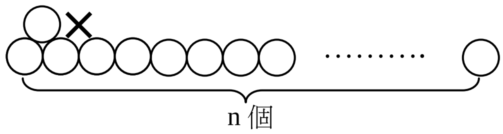
所以 $S_4=S_0S_3+S_1S_2+S_2S_1+S_3S_0$。

2. **定理：$S_n=S_0S_{n-1}+S_1S_{n-2}+S_2S_{n-3}+\ldots\ldots+S_{n-3}S_2+S_{n-2}S_1+S_{n-1}S_0$。**

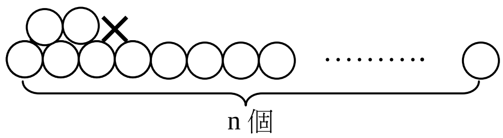
Proof：仿照前例，將底為 n 個的堆疊法分為以下 n 類，(X 為不可放置的地方，第二層 X 的左邊必全滿，X 的右邊任意堆疊。)如圖（七）所示：



1×底層為 n-1 的圖形總數$=S_0\times S_{n-1}$

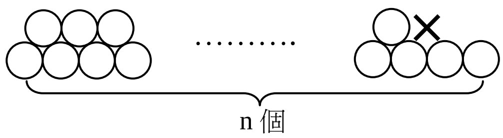


底層為 1 的圖形總數×底層為 n-2 的圖形總數$=S_1\times S_{n-2}$

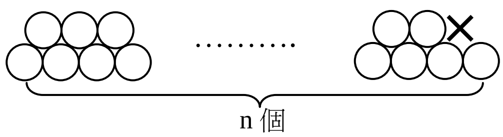


底層為 2 的圖形總數×底層為 n-3 的圖形總數$=S_2\times S_{n-3}$

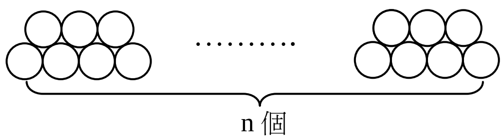
⋮



底層為 n-3 的圖形總數×底層為 2 的圖形總數$=S_{n-3}\times S_2$



底層為 n-2 的圖形總數×底層為 1 的圖形總數$=S_{n-2}\times S_1$



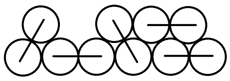
底層為 n-1 的圖形總數×1$=S_{n-1}\times S_0$

圖（七）：S_n 的所有表示法

所以推得 $S_n=S_0S_{n-1}+S_1S_{n-2}+S_2S_{n-3}+\ldots\ldots+S_{n-3}S_2+S_{n-2}S_1+S_{n-1}S_0$。

(五)、 推廣

1. 找出公式後，我們好奇將硬幣兩兩黏在一起的堆疊情形：

舉例：，並發現與圖形總個數為 2 的倍數時，所能堆疊的圖形數相同。

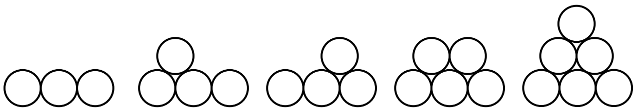
(1). 定義：$\mathcal{K}_n$ 為底層為 n，且兩兩相連的圖形集合，

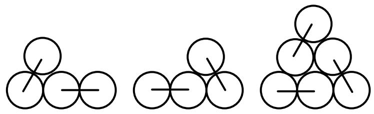
K_n 為底層為 n，且兩兩相連的圖形總數。

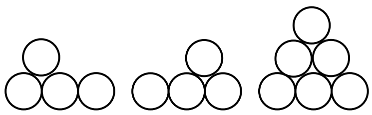
$\mathcal{E}_n$ 為底層為 n，且圖形總個數為 2 的倍數的圖形集合。

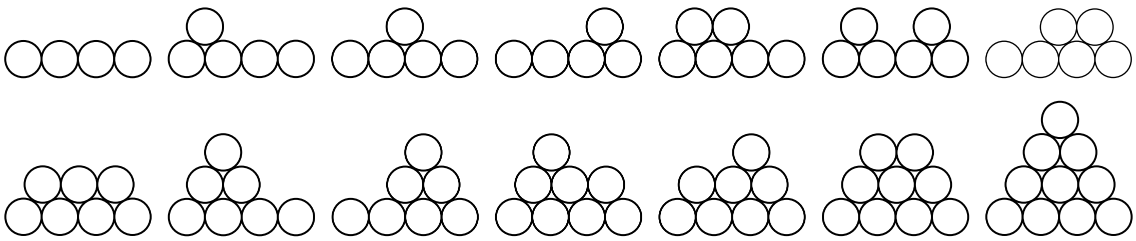
E_n 為底層為 n，且圖形總個數為 2 的倍數的圖形總數。

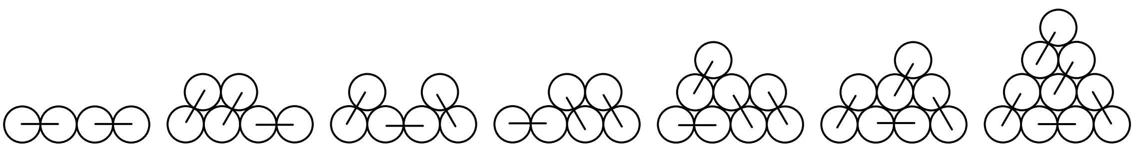
(2). 舉例：

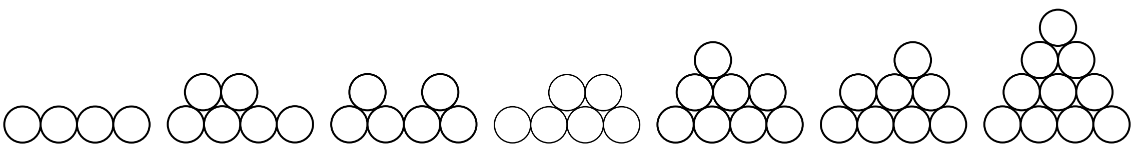
$\mathcal{S}_3$：

$\mathcal{K}_3$：

$\mathcal{E}_3$：

$\mathcal{S}_4$：

$\mathcal{K}_4$：

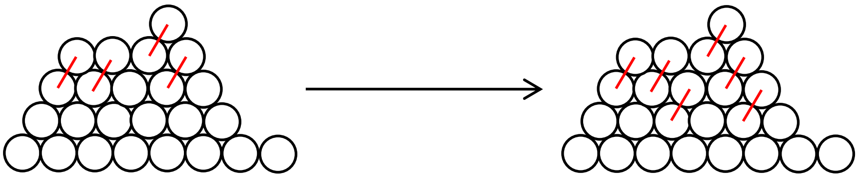
$\mathcal{E}_4$：

定理: $\mathcal{K}_n=\mathcal{E}_n$（所以 $K_n=E_n$）

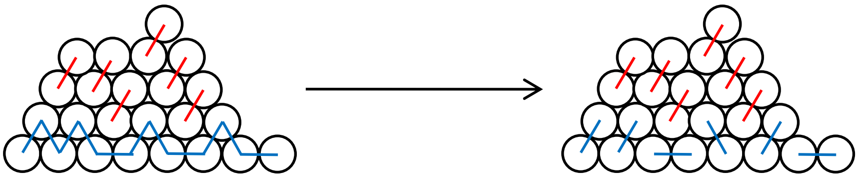
Proof：因為 $\mathcal{K}_n$ 中，任一圖形硬幣總個數必為 2 的倍數，即 $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{E}_n$ 。

取 $\mathcal{E}_n$ 中任一圖形，

①. 由上往左下方式將圖形兩兩相連，至倒數第三層完全連到。



②. 因為剩下沒相連的硬幣數為偶數又必可連成一線，所以剩下沒相連的硬幣必可兩兩相連。



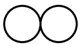
即 $\mathcal{K}_n \supset \mathcal{E}_n$ 。

而這種堆疊法硬幣個數為偶數，因此轉而研究總數是偶數的圖形數。
嘗試從圖形中找出硬幣總數是偶數的圖形數

2. 計算出前幾項數據：

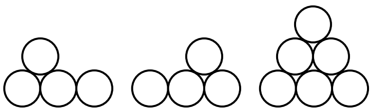
E_1 即 $\mathcal{S}_1$ 中硬幣總數為偶數的圖形數，所以 $E_1=0$。

E_2 即 $\mathcal{S}_2$ 中硬幣總數為偶數的圖形數，如圖（八）所示，所以 $E_2=1$。



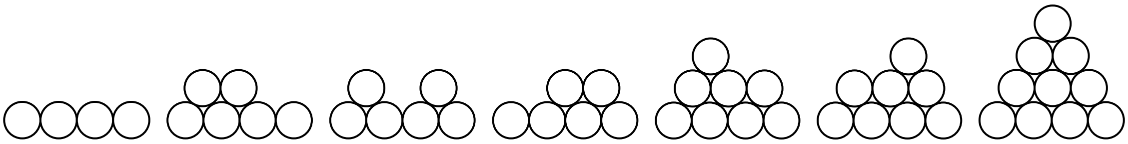
圖（八）：$\mathcal{E}_2$ 的所有排法

E_3 即 $\mathcal{S}_3$ 中硬幣總數為偶數的圖形數，如圖（九）所示，所以 $E_3=3$。



圖（九）：$\mathcal{E}_3$ 的所有排法

E_4 即 $\mathcal{S}_4$ 中硬幣總數為偶數的圖形數，如圖（十）所示，所以 $E_4=7$。



圖（十）：$\mathcal{E}_4$ 的所有排法

3. 找出一般式或遞迴式

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_n	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
E_n	0	1	3	7	20	66	217	715	2424
$E_n\times 2- S_n$	-1	0	1	0	-2	0	5	0	-14

表（二）：S_n、E_n 的數據

經由觀察 E_n 前幾項的數據，我們發現 E_n 與 S_n 之關係：

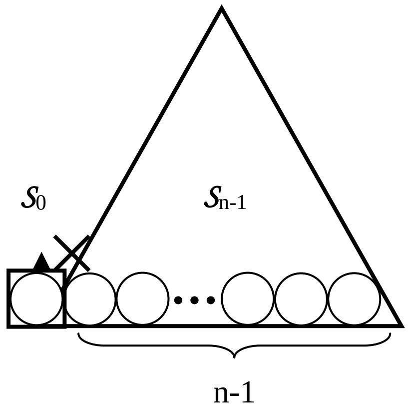
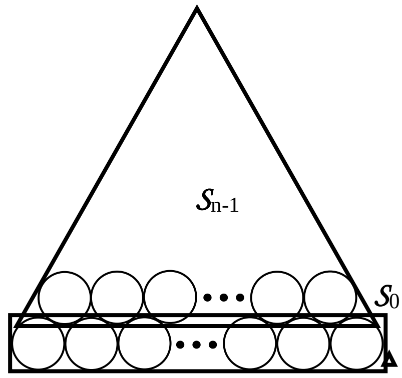
當 n 是偶數時，$E_n=\frac{S_n}{2}$；當 n 是奇數時，$E_n=\frac{S_n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\times S_{\frac{n-1}{2}}}{2}$。

4. 證明：

(1). $\boxed{\textbf{定理:當 n 是偶數時，}E_n=\frac{S_n}{2}\textbf{。}}$

Proof：如同前面的分類法，把它分成 n 類：$\mathcal{S}_0\mathcal{S}_{n-1}$、$\mathcal{S}_1\mathcal{S}_{n-2}$、…、$\mathcal{S}_{n-2}\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_{n-1}\mathcal{S}_0$，接著觀察第一類與最後一類、第二類與倒數第二類、……、第 $\frac{n}{2}$ 類與第 $\frac{n}{2}+1$ 類，總個數的奇偶關係：

首先，先以 S_0S_{n-1}、$S_{n-1}S_0$ 來比較，如表（三）所示。

S_0S_{n-1}：方框內的個數為 n-(n-1)=1。	$S_{n-1}S_0$：方框內的個數為 n-0=n=2k。
	

表（三）：S_0S_{n-1}、$S_{n-1}S_0$ 的比較

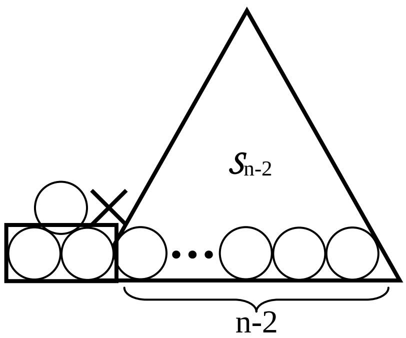
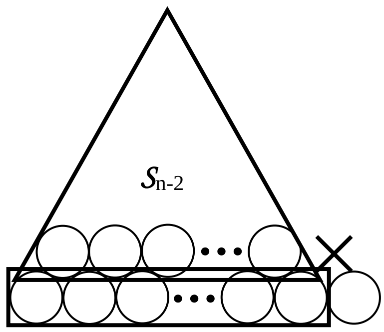
然後取 S_{n-1}（圖中的三角形）中的任一種組合，

①. 假設三角形中的個數為偶數（2m），則：
S_0S_{n-1} 中的總個數為 2m+1（奇數），
$S_{n-1}S_0$ 中的總個數為 2m+n=2m+2k=2(m+k)（偶數）。

②. 假設三角形中的個數為奇數(2m+1)，則：
S_0S_{n-1} 中的總個數為(2m+1)+1=2m+2=2(m+1)（偶數），
$S_{n-1}S_0$ 中的總個數為(2m+1)+n=(2m+1)+2k=2(m+k)+1（奇數）。

設 S_0S_{n-1} 所有種類的個數和中，偶數者為 A 個，奇數者為 B 個，然後因為都剛好是一奇一偶，所以 $S_{n-1}S_0$ 所有種類的個數和中，偶數者為 B 個，奇數者為 A 個，兩個加起來是 2A+2B，又偶數的部分為 A+B=S_0S_{n-1}。

接著，再以 S_1S_{n-2}、$S_{n-2}S_1$ 來比較，如表（四）所示。

S_1S_{n-2}：方框內的個數為 n-(n-2)=2。	$S_{n-2}S_1$：方框內的個數為 n-1=2k-1。
	

表（四）：S_1S_{n-2}、$S_{n-2}S_1$ 的比較

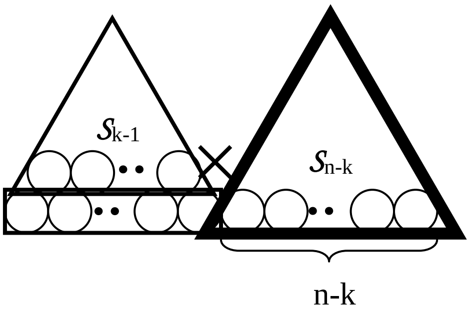
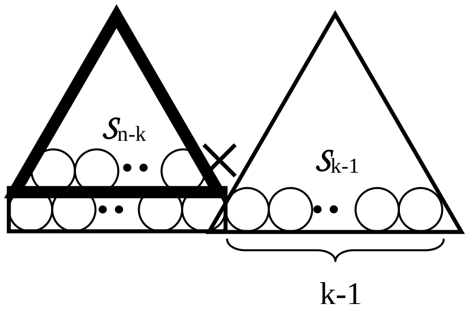
然後取 S_{n-2}（圖中的三角形）中的任一種組合，

①、假設三角形中的個數為偶數(2m)，則：
$\mathcal{S}_1\mathcal{S}_{n-2}$ 中的總個數為 2m+2+1=2m+3（奇數），
$\mathcal{S}_{n-2}\mathcal{S}_1$ 中的總個數為 2m+n-1+1=2m+2k=2(m+k)（偶數），

②、假設三角形中的個數為奇數(2m+1)，則：
$\mathcal{S}_1\mathcal{S}_{n-2}$ 中的總個數為(2m+1)+2+1=2m+4=2(m+2)（偶數），
$\mathcal{S}_{n-2}\mathcal{S}_1$ 中的總個數為(2m+1)+(n-1)+1=(2m+1)+(2k)=2(m+k)+1（奇數），

因此，此兩類的偶數部分為 S_1S_{n-2}。

依此類推，再以 $\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$、$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$ 來比較，如表（五）所示

$\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$：方框內的個數為 n-(n-k) =k。	$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$：方框內的個數為 n-(k-1) =n-k+1。
	

表（五）：$\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$、$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$ 的比較

①、假設粗框（底 n-k）三角形中的個數為偶數(2m)，細框（底 k-1）三角形中的個數為偶數(2p)，則：
$\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$ 中的總個數為 k+2m+2p=2(m+p)+(k)，
$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$ 中的總個數為 n-k+1+2m+2p=2(m+p-1)+(n-k+1)，

②、假設粗框（底 n-k）三角形中的個數為偶數(2m)，細框（底 k-1）三角形中的個數為奇數(2p+1)，則：
$\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$ 中的總個數為 k+2m+2p+1=2(m+p)+(k+1)，
$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$ 中的總個數為 n-k+1+2m+2p+1= 2(m+p+1)+(n-k)，

③、假設粗框（底 n-k）三角形中的個數為奇數(2m+1)，細框（底 k-1）三角形中的個數為偶數(2p)，則：
$\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$ 中的總個數為 k+2m+1+2p=2(m+p)+(k+1)，
$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$ 中的總個數為 n-k+1+2m+1+2p=2(m+p+1)+(n-k)，

④、假設粗框（底 n-k）三角形中的個數為奇數(2m+1)，細框（底 k-1）三角形中的個數為奇數(2p+1)，則：

$\mathcal{S}_{k-1}\mathcal{S}_{n-k}$ 中的總個數為 k+2m+1+2p+1= 2(m+p+1)+(k)，

$\mathcal{S}_{n-k}\mathcal{S}_{k-1}$ 中的總個數為 n-k+1+2m+1+2p+1=2(m+p+1)+(n-k+1)，

(k)+(n-k+1)=n+1 為奇數，因此 k、n-k+1 必為一奇一偶，
所以，此兩類的偶數部分為 $S_{k-1}S_{n-k}$。

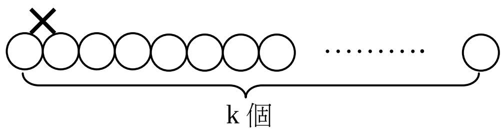
綜合以上分類觀察，所以，$E_n=S_0S_{n-1}+S_1S_{n-2}+\ldots\ldots+S_{\frac{n}{2}-1}S_{\frac{n}{2}}=\frac{S_n}{2}$ 。

(2). **定理：當 n 是奇數時，$E_n=\dfrac{S_n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\times S_{\frac{n-1}{2}}}{2}$ 。**

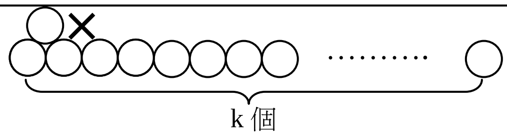
Proof：利用數學歸納法證明如下：

$E_n=\dfrac{S_n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\times S_{\frac{n-1}{2}}}{2}$ 假設 n<k 成立。

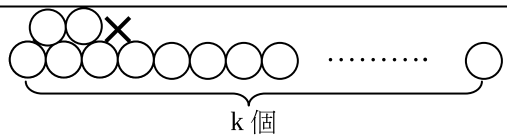
當 n=k 時，把排列法分為 k 類，如下頁之圖（十一）所示：



此部分的偶數部分為 $E_0(S_{k-1}-E_{k-1})+(S_0-E_0)E_{k-1}$。



此部分的偶數部分為 $\left[E_1E_{k-2}+(S_1-E_1)(S_{k-2}-E_{k-2})\right]$。



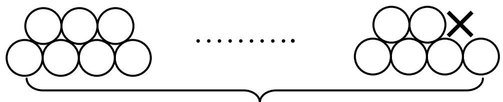
此部分的偶數部分為 $E_2(S_{k-3}-E_{k-3})+(S_2-E_2)E_{k-3}$。

⋮

$\vdots$

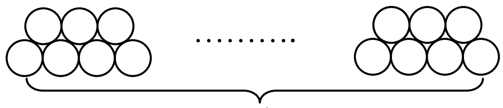
k 個

此部分的偶數部分為 $E_{k-3}(S_2-E_2)+(S_{k-3}-E_{k-3})E_2$。



k 個

此部分的偶數部分為$\left[E_{k-2}E_1+\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\left(S_1-E_1\right)\right]$。



k 個

此部分的偶數部分為 $E_{k-1}(S_0-E_0)+(S_{k-1}-E_{k-1})E_0$。

圖（十一）：$\mathcal{E}_k$ 的表示法。

$$
\begin{aligned}
E_k &= \left[E_0\left(S_{k-1}-E_{k-1}\right)+\left(S_0-E_0\right)E_{k-1}\right]+\left[E_1E_{k-2}+\left(S_1-E_1\right)\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\right]\\
&+\left[E_2\left(S_{k-3}-E_{k-3}\right)+\left(S_2-E_2\right)E_{k-3}\right]+\left[E_3E_{k-4}+\left(S_3-E_3\right)\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\right]+\dots\\
&\dots+\left[E_{k-4}E_3+\left(S_3-E_3\right)\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\right]+\left[E_{k-3}\left(S_2-E_2\right)+\left(S_{k-3}-E_{k-3}\right)E_2\right]\\
&+\left[E_{k-2}E_1+\left(S_1-E_1\right)\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\right]+\left[E_{k-1}\left(S_0-E_0\right)+\left(S_{k-1}-E_{k-1}\right)E_0\right]\\
&=\left(E_0E_{k-1}+E_0E_{k-1}\right)+\left[E_1E_{k-2}+\left(S_1-E_1\right)\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\right]+\left(E_2E_{k-3}+E_2E_{k-3}\right)\\
&+\left[E_3E_{k-4}+\left(S_3-E_3\right)\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\right]+\dots\dots+\left[E_{k-4}E_3+\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\left(S_3-E_3\right)\right]\\
&+\left(E_{k-3}E_2+E_{k-3}E_2\right)+\left[E_{k-2}E_1+\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\left(S_1-E_1\right)\right]+\left(E_{k-1}E_0+E_{k-1}E_0\right)\\
&=\left(\frac{S_0S_{k-1}}{4}+\frac{S_0S_{k-1}}{4}\right)+\left[E_1E_{k-2}+\left(S_1-E_1\right)\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\right]+\left(\frac{S_2S_{k-3}}{4}+\frac{S_2S_{k-3}}{4}\right)\\
&+\left[E_3E_{k-4}+\left(S_3-E_3\right)\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\right]+\dots\dots+\left[E_{k-4}E_3+\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\left(S_3-E_3\right)\right]\\
&+\left(\frac{S_{k-3}S_2}{4}+\frac{S_{k-3}S_2}{4}\right)+\left[E_{k-2}E_1+\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\left(S_1-E_1\right)\right]+\left(\frac{S_{k-1}S_0}{4}+\frac{S_{k-1}S_0}{4}\right)\\
&=\frac{S_{k-1}S_0}{2}+\left[E_1E_{k-2}+\left(S_1-E_1\right)\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\right]+\frac{S_{k-3}S_2}{2}+\left[E_3E_{k-4}+\left(S_3-E_3\right)\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\right]+\dots\\
&\dots+\left[E_{k-4}E_3+\left(S_{k-4}-E_{k-4}\right)\left(S_3-E_3\right)\right]+\frac{S_2S_{k-3}}{2}+\left[E_{k-2}E_1+\left(S_{k-2}-E_{k-2}\right)\left(S_1-E_1\right)\right]+\frac{S_0S_{k-1}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{S_{k\text{-}1}S_0}{2}+\left[\frac{S_{k-2}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\times S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\times\frac{S_1+(-1)^{\frac{1+1}{2}}\times S_0}{2}+\left(S_{k-2}-\frac{S_{k-2}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\times S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\right)\left(S_1-\frac{S_1+(-1)^{\frac{1+1}{2}}\times S_0}{2}\right)\right]
$$

$$
+\frac{S_{k\text{-}3}S_2}{2}+\left[\frac{S_{k-4}+(-1)^{\frac{k-3}{2}}\times S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\times\frac{S_3+(-1)^{\frac{3+1}{2}}\times S_1}{2}+\left(S_{k-4}-\frac{S_{k-4}+(-1)^{\frac{k-3}{2}}\times S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\right)\left(S_3-\frac{S_3+(-1)^{\frac{3+1}{2}}\times S_1}{2}\right)\right]+\ldots
$$

$$
\ldots+\left[E_3E_{k\text{-}4}+\left(S_3\text{-}E_3\right)\left(S_{k\text{-}4}\text{-}E_{k\text{-}4}\right)\right]+\frac{S_2S_{k\text{-}3}}{2}+\left[E_1E_{k\text{-}2}+\left(S_1\text{-}E_1\right)\left(S_{k\text{-}2}\text{-}E_{k\text{-}2}\right)\right]+\frac{S_0S_{k\text{-}1}}{2}
$$

$$
=\frac{S_{k\text{-}1}S_0}{2}+\left[\frac{S_{k-2}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\times S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\times\frac{S_1+(-1)^{\frac{1+1}{2}}\times S_0}{2}+\frac{S_{k-2}+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\times\frac{S_1+(-1)^{\frac{1+3}{2}}\times S_0}{2}\right]
$$

$$
+\frac{S_{k\text{-}3}S_2}{2}+\left[\frac{S_{k-4}+(-1)^{\frac{k-3}{2}}\times S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\times\frac{S_3+(-1)^{\frac{3+1}{2}}\times S_1}{2}+\frac{S_{k-4}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\times S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\times\frac{S_3+(-1)^{\frac{3+3}{2}}\times S_1}{2}\right]+\ldots
$$

$$
\ldots+\left[E_3E_{k\text{-}4}+\left(S_3\text{-}E_3\right)\left(S_{k\text{-}4}\text{-}E_{k\text{-}4}\right)\right]+\frac{S_2S_{k\text{-}3}}{2}+\left[E_1E_{k\text{-}2}+\left(S_1\text{-}E_1\right)\left(S_{k\text{-}2}\text{-}E_{k\text{-}2}\right)\right]+\frac{S_0S_{k\text{-}1}}{2}
$$

$$
=\frac{S_{k\text{-}1}S_0}{2}+\left[\frac{S_{k-2}S_1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-3}{2}}+(-1)^{\frac{1+1}{2}}S_0S_{k-2}+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{4}+\frac{S_{k-2}S_1+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-3}{2}}+(-1)^{\frac{1+3}{2}}S_0S_{k-2}+(-1)^{\frac{k+1+4}{2}}\times S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{4}\right]
$$

$$
+\frac{S_{k\text{-}3}S_2}{2}+\left[\frac{S_{k-4}S_3+(-1)^{\frac{k-3}{2}}\times S_3S_{\frac{k-5}{2}}+(-1)^{\frac{3+3}{2}}S_1S_{k-4}+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{4}+\frac{S_{k-4}S_3+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\times S_3S_{\frac{k-5}{2}}+(-1)^{\frac{3+3}{2}}S_1S_{k-4}+(-1)^{\frac{k+3+2}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{4}\right]+\ldots
$$

$$
\ldots+\left[E_3E_{k\text{-}4}+\left(S_3\text{-}E_3\right)\left(S_{k\text{-}4}\text{-}E_{k\text{-}4}\right)\right]+\frac{S_2S_{k\text{-}3}}{2}+\left[E_1E_{k\text{-}2}+\left(S_1\text{-}E_1\right)\left(S_{k\text{-}2}\text{-}E_{k\text{-}2}\right)\right]+\frac{S_0S_{k\text{-}1}}{2}
$$

$$
=\frac{S_{k\text{-}1}S_0}{2}+\left\{\frac{2S_{k-2}S_1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\left[S_1S_{\frac{k-3}{2}}+(-1)^{\frac{2}{2}}\times S_1S_{\frac{k-3}{2}}\right]+(-1)^{\frac{1+1}{2}}\left[S_0S_{k-2}+(-1)^{\frac{2}{2}}\times S_0S_{k-2}\right]+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\left[S_1S_{\frac{k-3}{2}}+(-1)^{\frac{4}{2}}\times S_1S_{\frac{k-3}{2}}\right]}{4}\right\}
$$

$$
+\frac{S_{k\text{-}3}S_2}{2}+\left\{\frac{2S_{k-4}S_3+(-1)^{\frac{k-3}{2}}\left[S_3S_{\frac{k-5}{2}}+(-1)^{\frac{2}{2}}\times S_3S_{\frac{k-5}{2}}\right]+(-1)^{\frac{3+1}{2}}\left[S_1S_{k-4}+(-1)^{\frac{2}{2}}\times S_1S_{k-4}\right]+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\left[S_1S_{\frac{k-5}{2}}+(-1)^{\frac{4}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}\right]}{4}\right\}+\ldots
$$

$$
\ldots+\left[E_3E_{k\text{-}4}+\left(S_3\text{-}E_3\right)\left(S_{k\text{-}4}\text{-}E_{k\text{-}4}\right)\right]+\frac{S_2S_{k\text{-}3}}{2}+\left[E_1E_{k\text{-}2}+\left(S_1\text{-}E_1\right)\left(S_{k\text{-}2}\text{-}E_{k\text{-}2}\right)\right]+\frac{S_0S_{k\text{-}1}}{2}
$$

$$=\frac{S_{k-1}S_0}{2}+\left[\frac{2S_{k-2}S_1+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times 2S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{4}\right]+\frac{S_{k-3}S_2}{2}+\left[\frac{2S_{k-4}S_3+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times 2S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{4}\right]+\dots$$

$$\dots+\left[E_3E_{k-4}+(S_3-E_3)(S_{k-4}-E_{k-4})\right]+\frac{S_2S_{k-3}}{2}+\left[E_1E_{k-2}+(S_1-E_1)(S_{k-2}-E_{k-2})\right]+\frac{S_0S_{k-1}}{2}$$

$$=\frac{S_{k-1}S_0}{2}+\left[\frac{S_{k-2}S_1+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\right]+\frac{S_{k-3}S_2}{2}+\left[\frac{S_{k-4}S_3+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\right]+\dots$$

$$\dots+\left[\frac{S_{k-4}S_3+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\right]+\frac{S_2S_{k-3}}{2}+\left[\frac{S_{k-2}S_1+(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\right]+\frac{S_0S_{k-1}}{2}$$

$$=\frac{S_{k-1}S_0}{2}+\frac{S_{k-2}S_1}{2}+\frac{S_{k-3}S_2}{2}+\frac{S_{k-4}S_3}{2}+\dots\dots+\frac{S_3S_{k-4}}{2}+\frac{S_2S_{k-3}}{2}+\frac{S_1S_{k-2}}{2}+\frac{S_0S_{k-1}}{2}$$

$$+\left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\right]+\left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\right]+\dots\dots+\left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_1S_{\frac{k-5}{2}}}{2}\right]+\left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\times S_0S_{\frac{k-3}{2}}}{2}\right]$$

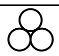
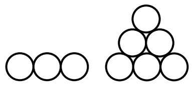
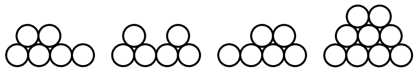
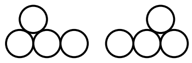
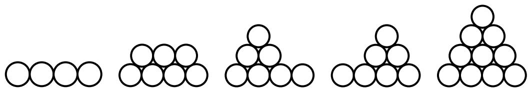
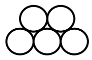
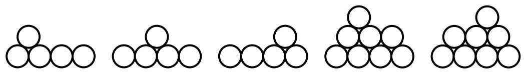
$$=\frac{S_n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\times S_{\frac{n-1}{2}}}{2}$$ ，∴原式亦成立，由數學歸納法得證。

伍、討論

一、 嘗試從圖形中找出硬幣總數是 3 的倍數、3 的倍數加 1、3 的倍數加 2 的圖形數：

(一)、 定義 S_n 中符合上述條件的為 $T_n^{(0)}$ 、 $T_n^{(1)}$ 、 $T_n^{(2)}$ 。

(二)、 計算出前幾項數據，如表（六）、表（七）所示。

n	0	1	2	3	4	……
$T_n^{(0)}$						……
$T_n^{(1)}$						……
$T_n^{(2)}$						……

表（六）：圖形

n	0	1	2	3	4	5	6
$T_n^{(0)}$	因為圖形硬幣總數為零，定義為 1	0	1	2	4	15	44
$T_n^{(1)}$	0	1	0	2	5	13	45
$T_n^{(2)}$	0	0	1	1	5	14	43

表（七）：數據

(三)、 設法找出一般式或遞迴式

我們列出 T_4 、 T_5 、 T_6 ，嘗試歸納出 T_n 之遞迴式：

$$T_4^{(0)} = T_3^{(2)} + \left[T_1^{(1)}T_2^{(0)} + T_1^{(2)}T_2^{(2)} + T_1^{(0)}T_2^{(1)}\right] + \left[T_2^{(1)}T_1^{(2)} + T_2^{(0)}T_1^{(0)} + T_2^{(2)}T_1^{(1)}\right] + T_3^{(2)}$$

$$T_4^{(1)} = T_3^{(0)} + \left[T_1^{(1)}T_2^{(1)} + T_1^{(2)}T_2^{(0)} + T_1^{(0)}T_2^{(2)}\right] + \left[T_2^{(1)}T_1^{(0)} + T_2^{(2)}T_1^{(2)} + T_2^{(0)}T_1^{(1)}\right] + T_3^{(0)}$$

$$T_4^{(2)} = T_3^{(1)} + \left[T_1^{(0)}T_2^{(0)} + T_1^{(1)}T_2^{(2)} + T_1^{(2)}T_2^{(1)}\right] + \left[T_2^{(2)}T_1^{(0)} + T_2^{(1)}T_1^{(1)} + T_2^{(0)}T_1^{(2)}\right] + T_3^{(1)}$$

$$T_5^{(0)} = T_4^{(2)} + \left[T_1^{(1)}T_3^{(0)} + T_1^{(2)}T_3^{(2)} + T_1^{(0)}T_3^{(1)}\right] + \left[T_2^{(1)}T_2^{(2)} + T_2^{(0)}T_2^{(0)} + T_2^{(2)}T_2^{(1)}\right] + \left[T_3^{(2)}T_1^{(0)} + T_3^{(1)}T_1^{(1)} + T_3^{(0)}T_1^{(2)}\right] + T_4^{(1)}$$

$$T_5^{(1)}=T_4^{(0)}+\left[T_1^{(1)}T_3^{(1)}+T_1^{(2)}T_3^{(0)}+T_1^{(0)}T_3^{(2)}\right]+\left[T_2^{(1)}T_2^{(0)}+T_2^{(2)}T_2^{(2)}+T_2^{(0)}T_2^{(1)}\right]+\left[T_3^{(0)}T_1^{(0)}+T_3^{(2)}T_1^{(1)}+T_3^{(1)}T_1^{(2)}\right]+T_4^{(2)}$$

$$T_5^{(2)}=T_4^{(1)}+\left[T_1^{(0)}T_3^{(0)}+T_1^{(1)}T_3^{(2)}+T_1^{(2)}T_3^{(1)}\right]+\left[T_2^{(2)}T_2^{(0)}+T_2^{(1)}T_2^{(1)}+T_2^{(0)}T_2^{(2)}\right]+\left[T_3^{(1)}T_1^{(0)}+T_3^{(0)}T_1^{(1)}+T_3^{(2)}T_1^{(2)}\right]+T_4^{(0)}$$

$$T_6^{(0)}=T_5^{(2)}+\left[T_1^{(1)}T_4^{(0)}+T_1^{(2)}T_4^{(2)}+T_1^{(0)}T_4^{(1)}\right]+\left[T_2^{(1)}T_3^{(2)}+T_2^{(0)}T_3^{(0)}+T_2^{(2)}T_3^{(1)}\right]$$

$$+\left[T_3^{(2)}T_2^{(0)}+T_3^{(1)}T_2^{(1)}+T_3^{(0)}T_2^{(2)}\right]+\left[T_4^{(1)}T_1^{(0)}+T_4^{(2)}T_1^{(2)}+T_4^{(0)}T_1^{(1)}\right]+T_5^{(0)}$$

$$T_6^{(1)}=T_5^{(0)}+\left[T_1^{(1)}T_4^{(1)}+T_1^{(2)}T_4^{(0)}+T_1^{(0)}T_4^{(2)}\right]+\left[T_2^{(1)}T_3^{(0)}+T_2^{(2)}T_3^{(2)}+T_2^{(0)}T_3^{(1)}\right]$$

$$+\left[T_3^{(0)}T_2^{(0)}+T_3^{(2)}T_2^{(1)}+T_3^{(1)}T_2^{(2)}\right]+\left[T_4^{(1)}T_1^{(1)}+T_4^{(2)}T_1^{(0)}+T_4^{(0)}T_1^{(2)}\right]+T_5^{(1)}$$

$$T_6^{(2)}=T_5^{(1)}+\left[T_1^{(0)}T_4^{(0)}+T_1^{(1)}T_4^{(2)}+T_1^{(2)}T_4^{(1)}\right]+\left[T_2^{(2)}T_3^{(0)}+T_2^{(1)}T_3^{(1)}+T_2^{(0)}T_3^{(2)}\right]$$

$$+\left[T_3^{(1)}T_2^{(0)}+T_3^{(0)}T_2^{(1)}+T_3^{(2)}T_2^{(2)}\right]+\left[T_4^{(0)}T_1^{(0)}+T_4^{(1)}T_1^{(2)}+T_4^{(2)}T_1^{(1)}\right]+T_5^{(2)}$$

經由一番努力整理，可得：

$$T_n^{(0)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(T_{(n-1-k)}^{((1-k)\bmod 3)}\times T_k^{(1)}+T_{(n-1-k)}^{((-k)\bmod 3)}\times T_k^{(2)}+T_{(n-1-k)}^{((2-k)\bmod 3)}\times T_k^{(0)}\right)$$

$$T_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(T_{(n-1-k)}^{((2-k)\bmod 3)}\times T_k^{(1)}+T_{(n-1-k)}^{((1-k)\bmod 3)}\times T_k^{(2)}+T_{(n-1-k)}^{((3-k)\bmod 3)}\times T_k^{(0)}\right)$$

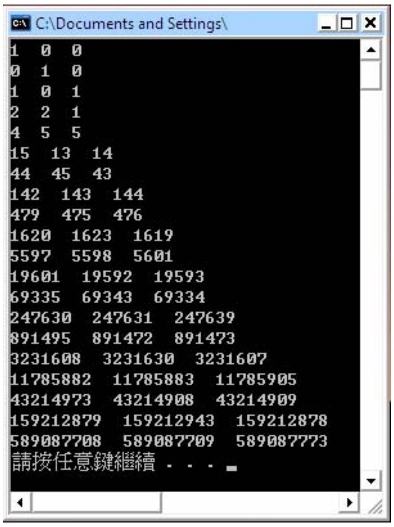
$$T_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(T_{(n-1-k)}^{((3-k)\bmod 3)}\times T_k^{(1)}+T_{(n-1-k)}^{((2-k)\bmod 3)}\times T_k^{(2)}+T_{(n-1-k)}^{((4-k)\bmod 3)}\times T_k^{(0)}\right)$$

因此， $T_n^{(s)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(T_{(n-1-k)}^{((s+1-k)\bmod 3)}\times T_k^{(1)}+T_{(n-1-k)}^{((s-k)\bmod 3)}\times T_k^{(2)}+T_{(n-1-k)}^{((s+2-k)\bmod 3)}\times T_k^{(0)}\right)$

藉由此遞迴式，我們可以用電腦程式（C 語言，如圖（十二）、附錄）算出 $T_n^{(0)}$ 、 $T_n^{(1)}$ 、 $T_n^{(2)}$ 的所有數據，如表（八）。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_n^{(0)}$	1	0	1	2	4	15	44	142	479	1620	5597	19601	69335
$T_n^{(1)}$	0	1	0	2	5	13	45	143	475	1623	5598	19592	69343
$T_n^{(2)}$	0	0	1	1	5	14	43	144	476	1619	5601	19593	69334
最大與最小值之差	0	0	1	1	1	2	2	2	4	4	4	9	9

差 S_1　差 S_2　差 S_3



圖（十二）

n	13	14	15	16	17	18	19
$T_n^{(0)}$	247630	891495	3231608	11785882	43214973	159212879	589087708
$T_n^{(1)}$	247631	891472	3231630	11785883	43214908	159212943	589087709
$T_n^{(2)}$	247639	891473	3231607	11785905	43214909	159212878	589087773
最大與最小值之差	9	23	23	23	65	65	65

差 S_4　差 S_5

表（七）：$T_n^{(0)}$、$T_n^{(1)}$、$T_n^{(2)}$的所有數據及比較

觀察表（七）中各個數字之關係，我們發現T_n的最大值與最小值會依一定的規律依序發生在$T_n^{(0)}$、$T_n^{(1)}$、$T_n^{(2)}$中。將 n 分類成 3k+1、3k+2、3k，發現 k 值的變化與最大最小值之差的變化有關，我們由圖表發現：$T_0^{(1)}-T_0^{(2)}=0$，$T_3^{(1)}-T_3^{(2)}=1$，$T_6^{(1)}-T_6^{(2)}=1+S_1$，

$T_9^{(1)}-T_9^{(2)}=1+S_1+S_2$，$T_{12}^{(1)}-T_{12}^{(2)}=1+S_1+S_2+S_3$，

當$k\geq 2$時，$T_{3k}^{(1)}-T_{3k}^{(2)}=1+S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_{k-1}$，且$T_{3k}^{(0)}-T_{3k}^{(2)}=1$，又$T_{3k}^{(0)}+T_{3k}^{(1)}+T_{3k}^{(2)}=S_{3k}$，

因此$(T_{3k}^{(2)}+1)+(\sum_{n=1}^{k-1}S_n+1+T_{3k}^{(2)})+T_{3k}^{(2)}=S_{3k}$，$3T_{3k}^{(2)}+2+\sum_{n=1}^{k-1}S_n=S_{3k}$，$T_{3k}^{(2)}=\dfrac{S_{3k}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n-2}{3}$，

$$T_{3k}^{(0)}=1+T_{3k}^{(2)}=1+\frac{S_{3k}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n-2}{3}=\frac{S_{3k}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n+1}{3},$$

$$T_{3k}^{(1)}=1+\sum_{n=1}^{k-1}S_n+T_{3k}^{(2)}=1+\sum_{n=1}^{k-1}S_n+\frac{S_{3k}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n-2}{3}=\frac{S_{3k}+2\sum_{n=1}^{k-1}S_n+1}{3},$$

同理，$T_1^{(2)}-T_1^{(0)}=0$，$T_4^{(2)}-T_4^{(0)}=1$，$T_7^{(2)}-T_7^{(0)}=1+S_1$，$T_{10}^{(2)}-T_{10}^{(0)}=1+S_1+S_2$，

當$k\ge 2$時，$T_{3k+1}^{(2)}-T_{3k+1}^{(0)}=1+S_1+S_2+S_3+......+S_{k-1}$，且$T_{3k+1}^{(1)}-T_{3k+1}^{(0)}=1$，又

$T_{3k+1}^{(0)}+T_{3k+1}^{(1)}+T_{3k+1}^{(2)}=S_{3k+1}$，因此，$T_{3k+1}^{(0)}+(T_{3k+1}^{(0)}+1)+(\sum_{n=1}^{k-1}S_n+1+T_{3k+1}^{(0)})=S_{3k+1}$，

$$T_{3k+1}^{(0)}=\frac{S_{3k+1}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n-2}{3},\quad T_{3k+1}^{(1)}=1+T_{3k+1}^{(0)}=1+\frac{S_{3k+1}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n-2}{3}=\frac{S_{3k+1}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n+1}{3},$$

$$T_{3k+1}^{(2)}=1+\sum_{n=1}^{k-1}S_n+T_{3k+1}^{(0)}=1+\sum_{n=1}^{k-1}S_n+\frac{S_{3k+1}-\sum_{n=1}^{k-1}S_n-2}{3}=\frac{S_{3k+1}+2\sum_{n=1}^{k-1}S_n+1}{3},$$

同理，$T_2^{(0)}-T_2^{(1)}=1$，$T_5^{(0)}-T_5^{(1)}=1+S_1$，$T_8^{(0)}-T_8^{(1)}=1+S_1+S_2$，當$k\ge 2$時，

$T_{3k+2}^{(0)}-T_{3k+2}^{(1)}=1+S_1+S_2+S_3+......+S_k$，且$T_{3k+2}^{(2)}-T_{3k+2}^{(1)}=1$，又$T_{3k+2}^{(0)}+T_{3k+2}^{(1)}+T_{3k+2}^{(2)}=S_{3k+2}$，因此$(\sum_{n=1}^{k}S_n+1+T_{3k+2}^{(1)})+T_{3k+2}^{(1)}+(T_{3k+2}^{(1)}+1)=S_{3k+2}$，$T_{3k+2}^{(1)}=\frac{S_{3k+2}-\sum_{n=1}^{k}S_n-2}{3}$，

$$T_{3k+2}^{(2)}=1+T_{3k+2}^{(1)}=1+\frac{S_{3k+2}-\sum_{n=1}^{k}S_n-2}{3}=\frac{S_{3k+2}-\sum_{n=1}^{k}S_n+1}{3},$$

$$T_{3k+2}^{(0)}=1+\sum_{n=1}^{k}S_n+T_{3k+2}^{(1)}=1+\sum_{n=1}^{k}S_n+\frac{S_{3k+2}-\sum_{n=1}^{k}S_n-2}{3}=\frac{S_{3k+2}+2\sum_{n=1}^{k}S_n+1}{3}。$$

即 $T_{3k+1}-T_{3(k+1)+1}=S_k$。

由此關係我們能將其轉成一般式：

當 n=3k 時，$T_n^{(0)}=\dfrac{S_n+1-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]}S_k}{3}$，$T_n^{(1)}=\dfrac{S_n+1+2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]}S_k}{3}$，$T_n^{(2)}=\dfrac{S_n-2-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]}S_k}{3}$。

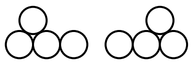
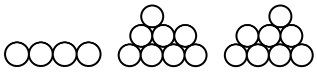
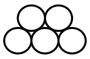
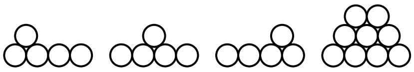
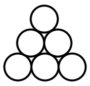
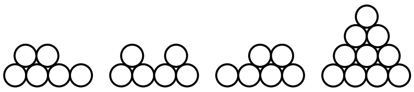
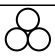
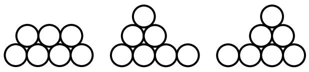
當 n=3k+1 時，$T_n^{(0)}=\dfrac{S_n-2-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-4}{3}\right]}S_k}{3}$，$T_n^{(1)}=\dfrac{S_n+1-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-4}{3}\right]}S_k}{3}$，$T_n^{(2)}=\dfrac{S_n+1+2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-4}{3}\right]}S_k}{3}$。

當 n=3k+2 時，$T_n^{(0)}=\dfrac{S_n+1+2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]}S_k}{3}$，$T_n^{(1)}=\dfrac{S_n-2-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]}S_k}{3}$，$T_n^{(2)}=\dfrac{S_n+1-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]}S_k}{3}$。

二、 嘗試從圖形中找出硬幣總數是 4 的倍數、4 的倍數加 1、4 的倍數加 2、4 的倍數加 3 的圖形數：

(一)、 定義 S_n 中符合上述條件的為 $G_n^{(0)}$ 、 $G_n^{(1)}$ 、 $G_n^{(2)}$ 、 $G_n^{(3)}$ 。

(二)、 計算出前幾項數據，如表（九）、表（十）所示。

n	0	1	2	3	4	……
$G_n^{(0)}$						……
$G_n^{(1)}$						……
$G_n^{(2)}$						……
$G_n^{(3)}$						……

表（九）：圖形

n	0	1	2	3	4	5
$G_n^{(0)}$	因為圖形硬幣總數為零，定義為 1	0	0	2	3	10
$G_n^{(1)}$	0	1	0	1	4	10
$G_n^{(2)}$	0	0	1	1	4	10
$G_n^{(3)}$	0	0	1	1	3	12

表（十）：數據

(三)、 設法找出一般式或遞迴式

我們列出 T_5 、 G_5 並做比較，推論出 G_n 之遞迴式：

$$T_5^{(0)}=T_4^{(2)}+\left[T_1^{(1)}T_3^{(0)}+T_1^{(2)}T_3^{(2)}+T_1^{(0)}T_3^{(1)}\right]+\left[T_2^{(1)}T_2^{(2)}+T_2^{(0)}T_2^{(0)}+T_2^{(2)}T_2^{(1)}\right]+\left[T_3^{(2)}T_1^{(0)}+T_3^{(1)}T_1^{(1)}+T_3^{(0)}T_1^{(2)}\right]+T_4^{(1)}$$

$$T_5^{(1)}=T_4^{(0)}+\left[T_1^{(1)}T_3^{(1)}+T_1^{(2)}T_3^{(0)}+T_1^{(0)}T_3^{(2)}\right]+\left[T_2^{(1)}T_2^{(0)}+T_2^{(2)}T_2^{(2)}+T_2^{(0)}T_2^{(1)}\right]+\left[T_3^{(0)}T_1^{(0)}+T_3^{(2)}T_1^{(1)}+T_3^{(1)}T_1^{(2)}\right]+T_4^{(2)}$$

$$T_5^{(2)}=T_4^{(1)}+\left[T_1^{(0)}T_3^{(0)}+T_1^{(1)}T_3^{(2)}+T_1^{(2)}T_3^{(1)}\right]+\left[T_2^{(2)}T_2^{(0)}+T_2^{(1)}T_2^{(1)}+T_2^{(0)}T_2^{(2)}\right]+\left[T_3^{(1)}T_1^{(0)}+T_3^{(0)}T_1^{(1)}+T_3^{(2)}T_1^{(2)}\right]+T_4^{(0)}$$

$$G_5^{(0)}=G_4^{(3)}+\left[G_3^{(2)}G_1^{(0)}+G_3^{(1)}G_1^{(1)}+G_3^{(0)}G_1^{(2)}+G_3^{(3)}G_1^{(3)}\right]+\left[G_2^{(1)}G_2^{(0)}+G_2^{(0)}G_2^{(1)}+G_2^{(3)}G_2^{(2)}+G_2^{(2)}G_2^{(3)}\right]$$
$$+\left[G_1^{(0)}G_3^{(0)}+G_1^{(3)}G_3^{(1)}+G_1^{(2)}G_3^{(2)}+G_1^{(1)}G_3^{(3)}\right]+G_4^{(3)}$$

$$G_5^{(1)}=G_4^{(0)}+\left[G_3^{(3)}G_1^{(0)}+G_3^{(2)}G_1^{(1)}+G_3^{(1)}G_1^{(2)}+G_3^{(0)}G_1^{(3)}\right]+\left[G_2^{(2)}G_2^{(0)}+G_2^{(1)}G_2^{(1)}+G_2^{(0)}G_2^{(2)}+G_2^{(3)}G_2^{(3)}\right]$$
$$+\left[G_1^{(1)}G_3^{(0)}+G_1^{(0)}G_3^{(1)}+G_1^{(3)}G_3^{(2)}+G_1^{(2)}G_3^{(3)}\right]+G_4^{(0)}$$

$$G_5^{(2)}=G_4^{(1)}+\left[G_3^{(0)}G_1^{(0)}+G_3^{(3)}G_1^{(1)}+G_3^{(2)}G_1^{(2)}+G_3^{(1)}G_1^{(3)}\right]+\left[G_2^{(3)}G_2^{(0)}+G_2^{(2)}G_2^{(1)}+G_2^{(1)}G_2^{(2)}+G_2^{(0)}G_2^{(3)}\right]$$
$$+\left[G_1^{(2)}G_3^{(0)}+G_1^{(1)}G_3^{(1)}+G_1^{(0)}G_3^{(2)}+G_1^{(3)}G_3^{(3)}\right]+G_4^{(1)}$$

$$G_5^{(3)}=G_4^{(2)}+\left[G_3^{(1)}G_1^{(0)}+G_3^{(0)}G_1^{(1)}+G_3^{(3)}G_1^{(2)}+G_3^{(2)}G_1^{(3)}\right]+\left[G_2^{(0)}G_2^{(0)}+G_2^{(3)}G_2^{(1)}+G_2^{(2)}G_2^{(2)}+G_2^{(1)}G_2^{(3)}\right]$$
$$+\left[G_1^{(3)}G_3^{(0)}+G_1^{(2)}G_3^{(1)}+G_1^{(1)}G_3^{(2)}+G_1^{(0)}G_3^{(3)}\right]+G_4^{(2)}$$

可得： $G_n^{(s)}=$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(G_{(n-1-k)}^{((s+3-k)\bmod 4)}\times G_k^{(0)}+G_{(n-1-k)}^{((s+2-k)\bmod 4)}\times G_k^{(1)}+G_{(n-1-k)}^{((s+1-k)\bmod 4)}\times G_k^{(2)}+G_{(n-1-k)}^{((s-k)\bmod 4)}\times G_k^{(3)}\right)$$

藉由此遞迴式，我們一樣可以算出$G_n^{(0)}$、$G_n^{(1)}$、$G_n^{(2)}$、$G_n^{(3)}$的所有數據，如表（十一）。

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$G_n^{(0)}$	1	0	0	2	3	10	34	107	359	1212	4196	14712	51998
$G_n^{(1)}$	0	1	0	1	4	10	34	106	356	1222	4196	14686	52008
$G_n^{(2)}$	0	0	1	1	4	10	32	110	356	1212	4202	14702	52008
$G_n^{(3)}$	0	0	1	1	3	12	32	106	359	1216	4202	14686	51998
最大與次大值之差		1		1		2		3		6		10	

n	13	14	15	16	17	18	19
$G_n^{(0)}$	185692	668620	2423801	8839435	32410840	119409640	441817076
$G_n^{(1)}$	185748	668620	2423604	8839400	32411590	119409640	441814582
$G_n^{(2)}$	185692	668600	2423836	8839400	32410840	119409710	441816950
$G_n^{(3)}$	185768	668600	2423604	8839435	32411520	119409710	441814582
最大與次大值之差	20		35		70		126

表（十一）：$G_n^{(0)}$、$G_n^{(1)}$、$G_n^{(2)}$、$G_n^{(3)}$的所有數據及比較

其中當 n 為偶數時，我們發現G_n的大值與小值會依一定的規律依序發生在$G_n^{(0)}$、$G_n^{(1)}$、$G_n^{(2)}$、$G_n^{(3)}$中；當 n 為奇數時，G_n的最大與次大值之差會和S_k有一定的倍數關係。

1. $G_{4k}^{(1)}=G_{4k}^{(2)}$，$G_{4k}^{(0)}=G_{4k}^{(3)}$，$G_{4k}$的大值與小值之差為$S_{k-1}\times(2k-1)$，

2. $G_{4k+2}^{(0)}=G_{4k+2}^{(1)}$，$G_{4k+2}^{(2)}=G_{4k+2}^{(3)}$，$G_{4k+2}$的大值與小值之差為$S_{k-1}\times 2\times(2k-1)$，

3. $G_{4k+3}^{(1)}=G_{4k+3}^{(3)}$，$G_{4k+3}^{(2)}-G_{4k+3}^{(0)}=S_k\times\left(2k+1\right)$，也就是說，$G_{4k+3}$的最大與次大值之差

為$S_k \times (2k+1)$，

4. $G_{4k+1}^{(0)} = G_{4k+1}^{(2)}$，$G_{4k+1}^{(3)} - G_{4k+1}^{(1)} = S_{k-1} \times 2 \times (2k+1)$，也就是說，$G_{4k+1}$的最大與次大值之差為$S_{k-1} \times 2 \times (2k-1)$。

(四)、 定義$X_n^{(s)}$是底為 n 時硬幣個數除以 X 餘 s 時的個數，由$E_n^{(s)}$、$T_n^{(s)}$、$G_n^{(s)}$的遞迴式導出

$$X_n^{(s)} = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(X_{(n-1-k)}^{((s+n-1-k)\bmod(X))} \times X_k^{(0)} + X_{(n-1-k)}^{((s+n-2-k)\bmod(X))} \times X_k^{(1)} + \dots$$
$$\dots + X_{(n-1-k)}^{((s+1-k)\bmod(X))} \times X_k^{(n-2)} + X_{(n-1-k)}^{((s-k)\bmod(X))} \times X_k^{(n-1)} \Big)$$ 。

陸、結論

一、我們找出底層 n 枚硬幣時，堆疊法種類的遞迴式，且發現與卡塔蘭數($\dfrac{C_n^{2n}}{n-1}$)相吻合。

$S_n = S_0S_{n-1}+S_1S_{n-2}+S_2S_{n-3}+\dots\dots+S_{n-3}S_2+S_{n-2}S_1+S_{n-1}S_0$，

且也找出其中硬幣兩兩相連時，所能堆疊的圖形數，發現與圖形總個數為 2 的倍數所能堆疊的圖形數相同。

當 n 是偶數時，$E_n = \dfrac{S_n}{2}$；當 n 是奇數時，$E_n = \dfrac{S_n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \times S_{\frac{n-1}{2}}}{2}$。

二、推導出總個數為三的倍數時，新的數列與原數列的關係式，導出一般式尚未證明。

當 n=3k 時，$T_n^{(0)} = \dfrac{S_n + 1 - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]} S_k}{3}$，$T_n^{(1)} = \dfrac{S_n + 1 + 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]} S_k}{3}$，$T_n^{(2)} = \dfrac{S_n - 2 - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]} S_k}{3}$。

當 n=3k+1 時，$T_n^{(0)} = \dfrac{S_n - 2 - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-4}{3}\right]} S_k}{3}$，$T_n^{(1)} = \dfrac{S_n + 1 - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-4}{3}\right]} S_k}{3}$，$T_n^{(2)} = \dfrac{S_n + 1 + 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-4}{3}\right]} S_k}{3}$。

當 n=3k+2 時，$T_n^{(0)} = \dfrac{S_n + 1 + 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} S_k}{3}$，$T_n^{(1)} = \dfrac{S_n - 2 - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} S_k}{3}$，$T_n^{(2)} = \dfrac{S_n + 1 - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} S_k}{3}$。

三、發現總個數為四的倍數時，

(一)、 $G_{4k+1}^{(0)}=G_{4k+1}^{(2)}$ ，$G_{4k+1}^{(3)}-G_{4k+1}^{(1)}=S_{k-1}\times 2\times\left(2k+1\right)$，也就是說，$G_{4k+1}$的最大與次大值之差為$S_{k-1}\times 2\times(2k+1)$ ，

(二)、 $G_{4k}^{(1)}=G_{4k}^{(2)}$ ，$G_{4k}^{(0)}=G_{4k}^{(3)}$ ，G_{4k}的大值與小值之差為$S_{k-1}\times(2k-1)$，

(三)、 $G_{4k+3}^{(1)}=G_{4k+3}^{(3)}$ ，$G_{4k+3}^{(2)}-G_{4k+3}^{(0)}=S_k\times\left(2k+1\right)$，也就是說，$G_{4k+3}$的最大與次大值之差為$S_k\times(2k+1)$，

(四)、 $G_{4k+2}^{(0)}=G_{4k+2}^{(1)}$ ，$G_{4k+2}^{(2)}=G_{4k+2}^{(3)}$ ，G_{4k+2}的大值與小值之差為$S_{k-1}\times 2\times(2k-1)$ 。

四、導出總個數為 X 的倍數時，其遞迴式的表示法。

$$X_n^{(s)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{(n-1-k)}^{((s+n-1-k)\bmod(X))}\times X_k^{(0)}+X_{(n-1-k)}^{((s+n-2-k)\bmod(X))}\times X_k^{(1)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+X_{(n-1-k)}^{((s+1-k)\bmod(X))}\times X_k^{(n-2)}+X_{(n-1-k)}^{((s-k)\bmod(X))}\times X_k^{(n-1)}\right)\text{ 。}$$

五、我們試圖做出立體的圖形排列，也嘗試導出公式，但因公式太過複雜所以不予討論。

柒、參考資料與其他

一、 卡塔蘭數 - 維基百科，自由的百科全書。(2009 年 2 月 17 日)。取自：
http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=Catalan_number&variant=zh-tw

二、 Catalan Numbers（無日期）。
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/CatalanNumbers/catalan.html

三、 11.27 Catalan Numbers (§3.4-2) (PDF)
http://www.cis.nctu.edu.tw/~wuuyang/Lecture.DiscMath/Handout/Catalan050409.pdf

四、 許志農（2008）。普通高級中學 數學 4。載於第 2 章－排列、組合（78-155 頁）。台北縣：龍騰。

五、 中華民國 第 45 屆中小學科學展覽會 參展作品專輯-040416 發現凱特蘭數
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/senior/0404/040416.pdf

六、 中華民國 第 47 屆中小學科學展覽會 參展作品專輯-040411 酒瓶堆堆堆－堆出卡塔那數 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040411.pdf

七、 $T_n^{(0)}$ 、$T_n^{(1)}$ 、$T_n^{(2)}$的所有數據之程式碼（接下頁）：

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#define MAX 19
int main(void)
{
    int T[100][4],i,j,l,n,o,p,k,s;
    for(i=1;i<=60;i++){
        for(j=0;j<=3;j++)T[i][j]=0;
    }
    T[0][0]=1;T[0][1]=0;T[0][2]=0;
    T[1][0]=0;T[1][1]=1;T[1][2]=0;
    T[2][0]=1;T[2][1]=0;T[2][2]=1;
    for(n=3;n<=MAX;n++){
        for(s=0;s<=2;s++){
            for(k=0;k<n;k++){
                l=(s+1)%3-k%3;
                if(l<0) l=l+3;
                o=s%3-k%3;
                if(o<0) o=o+3;
                p=(s+2)%3-k%3;
                if(p<0) p=p+3;
                T[n][s]=T[n-1-k][l]*T[k][1]
                    +T[n-1-k][o]*T[k][2]+T[n-1-k][p]*T[k][0]+T[n][s];
            }
        }
    }
    for(i=0;i<=MAX;i++){
        for(j=0;j<=2;j++)
            printf("%d    ",T[i][j]);
        printf("\n");
    }
    system("pause");
    return 0;
}
```

【評語】040417

1、 此作品討論圓塔堆疊方法，進而推導出若干個計算堆疊方法個數之公式，並透過電腦程式來協助計算某些較複雜之公式。

2、 以其中一情形為例，其所推導出之方法數與某個卡特蘭數相同，也就是說，或許由組合的觀點來討論堆疊方法，應可與某些卡特蘭數一致。