中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040416

凡走過必留下軌跡

學校名稱：臺北縣私立光仁高級中學

作者：	指導老師：
高二 李豪韋	翁立衛
高二 詹士緯	李明德
高一 謝明益	
高一 蔡政鋐	

關鍵詞：圓錐曲線、軌跡、五心

摘要

平面上有一線段$\overline{AB}$與圓錐曲線Γ，令 P 為Γ上的動點，本研究探討當 P 點沿著Γ移動時，ΔABP 的外心、重心、垂心、內心、傍心及費馬點的軌跡，我們發現重心軌跡具有複製性━重心的生成曲線是原軌跡的縮影；外心軌跡多為射線、線段或者是直線，也有可能退化成點；特別是 A,B 為橢圓焦點時，其垂心軌跡方程式是 y 為二次，x 為四次的曲線，在特別情況下會退化成橢圓或圓；內心軌跡為橢圓；傍心軌跡為橢圓及兩條切於橢圓長軸端點的直線；當 A,B 為雙曲線焦點時，其內心軌跡為切於雙曲線頂點的切線線段，其長度等於共軛軸長; 傍心軌跡為兩條雙曲線及四條射線。費馬點的軌跡均為兩上下對稱的圓弧。

我們試圖將條件推廣成一個定點及兩動點的情況，發現圓上雙動點的重心軌跡為玫瑰線，當兩動點以速率比為 1:k 時($k \in Z$)運動，順向時會產生向內的環，反向時則產生向外的環且會產生$|k-1|$個環。此外，我們將生成軌跡疊代時，發現：無限多次後，重心會收斂於一點；垂心則有對偶性。

凡走過必留下軌跡

壹、研究動機

某一堂數學課時，老師利用動態幾何軟體GSP講解三角形重心軌跡的問題：$\overline{AB}$為圓的弦，P是圓上動點，當P沿著圓弧移動時，ΔABP的重心軌跡為何？驚訝的是，其生成的圖形竟然也是一個圓！我們非常好奇，想知道動點軌跡在其他情況下所畫出的圖形為何？於是便開始了一連串的研究與討論。

貳、研究目的

平面上，給定一個線段$\overline{AB}$與曲線Γ，並令P為Γ上的動點。探討ΔABP，當P點沿著Γ運動時，其**內、外、重、垂、傍心及費馬點**所形成的軌跡。考慮Γ是圓錐曲線的情形，希望**找出生成曲線與Γ的關係**。除此之外我們會將定點變為一個，考慮**雙動點**的情況。

參、研究設備及器材

硬體部分：紙、筆
軟體部分：GSP4.06、Microsoft Word

肆、研究過程

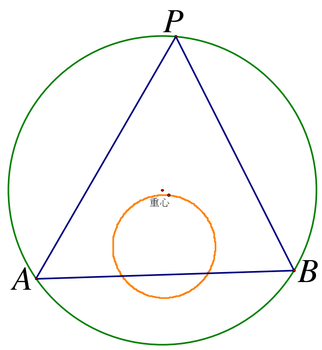
一、重心的軌跡問題

本研究擬探討：$\overline{AB}$ 為圓上一弦、$\overline{AB}$ 為圓的切線段、A,B 為橢圓的兩焦點、A,B 為雙曲線的兩焦點以及 A,B 為拋物線正焦弦的兩端點等五種情況下重心的軌跡問題。

(一)、Γ 為半徑 r 的圓，$\overline{AB}$ 為圓上一弦

P 為圓 O：$\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1$ 的動點，則ΔPAB 的重心軌跡為**圓**，其**圓心為ΔOAB 的重心**，**半徑為** $\dfrac{r}{3}$。

[証明]：$\overline{AB}$ 為圓 O 之一弦



G 可表示成 $(\dfrac{r\cos\theta}{3},\dfrac{r\sin\theta+2d}{3})$

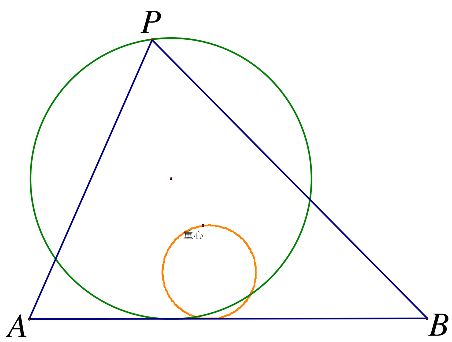
$\therefore$ 重心軌跡為 $x^2+(y-\dfrac{2d}{3})^2=(\dfrac{r}{3})^2$

因此重心軌跡為圓，其圓心為 ΔOAB 之重心，半徑為原來的三分之一

(二)、Γ 為半徑 r 的圓，$\overline{AB}$ 為圓之一切線段

P 為圓 O：$\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1$ 的動點，則ΔPAB 的重心軌跡為**圓**，其**圓心為ΔOAB 的重心**，**半徑為** $\dfrac{r}{3}$。

[証明]：G 為ΔPAB 的重心



$\overline{AB}$ 為圓 O 之切線段

G 可表示成 $(\dfrac{r\cos\theta+c-d}{3},\dfrac{r\sin\theta-2r}{3})$

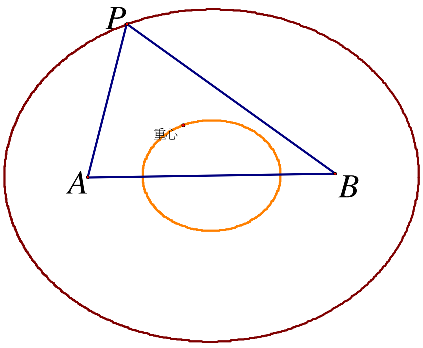
$\therefore$ 得重心軌跡為 $\left(x-\dfrac{c-d}{3}\right)^2+(y-\dfrac{-2r}{3})^2=(\dfrac{r}{3})^2$

$\Rightarrow$ 軌跡圓圓心為 ΔOAB 之重心，半徑為 $\dfrac{r}{3}$

(三)、Γ 為長軸為 2a，短軸為 2，焦距為 2c 的橢圓，A、B 為此橢圓的焦點

P 為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$的動點，A 與 B 為橢圓Γ的焦點，則ΔPAB 的重心軌跡為**橢圓**，其**中心不變**，**長短軸縮為原長短軸長的**$\dfrac{1}{3}$。

[證明]：設 P 為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$的動點，則 P 的座標為($a\cos\theta$，$\sin\theta$)。A 與 B 為橢圓Γ的焦點，座標分別為(-c,0)及(c,0)，則ΔPAB 的重心 G 座標為 G($\dfrac{a\cos\theta}{3}$,$\dfrac{\sin\theta}{3}$)，則 G 點軌跡方程式為$\dfrac{9x^2}{a^2}+\dfrac{9y^2}{1}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{(\frac{a}{3})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{3})^2}=1$。顯示此軌跡為一橢圓，中心不變但長短軸均縮為原長的$\dfrac{1}{3}$。



(四)、Γ 為貫軸為 2a，共軛軸為 2，焦距為 2c 的雙曲線，A,B 為雙曲線的焦點

P 為雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$的動點，A 與 B 為兩焦點，則ΔPAB 的重心軌跡為**雙曲線**，其**中心點不變**，**貫軸及共軛軸變為原長之**$\dfrac{1}{3}$。

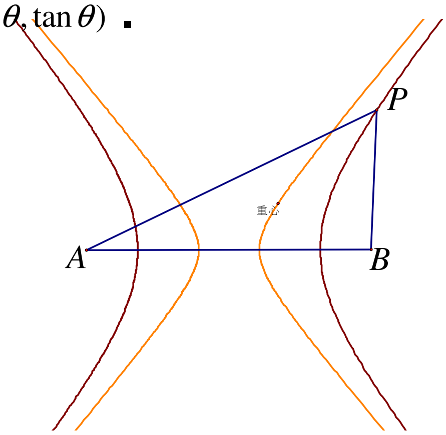
[証明]：令 P 為雙曲線Γ:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$上之動點，令其為$(a\sec\theta,\tan\theta)$。

探討 ΔPAB 之重心 G$(\dfrac{a\sec\theta}{3},\dfrac{\tan\theta}{3})$ 的軌跡。

藉由平方關係得重心軌跡為$\dfrac{x^2}{(\frac{a}{3})^2}-\dfrac{y^2}{(\frac{1}{3})^2}=1$

即重心軌跡為雙曲線，中心(0,0)

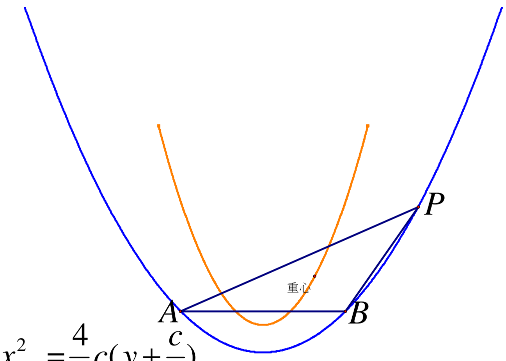
其貫軸、共軛軸均為原圖形之$\dfrac{1}{3}$



(五)、Γ 為拋物線：$x^2=4c(y+c)$，焦距為 c，$\overline{AB}$ 為正焦弦

P 為拋物線Γ：$x^2=4c(y+c)$ 的動點，A 與 B 為正焦弦兩端點，則ΔPAB 的重心軌跡為**拋物線**，其**焦點不變**，**頂點座標上移原焦距的** $\frac{2}{3}$，**正焦弦長縮為原長** $\frac{1}{3}$。

[証明]：焦點(0,0) 焦距 c(c>0)動點 P 在拋物線上



$x^2=4c(y+c)$

令 P$(t,\frac{t^2-4c^2}{4c})$

G$(\frac{t}{3},\frac{t^2-4c^2}{12c})$ 3x=t，12cy=t^2-4c^2

G 點軌跡方程式:$9x^2=12cy+4c^2=4c(3y+c)=12c(y+\frac{c}{3})\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}c(y+\frac{c}{3})$

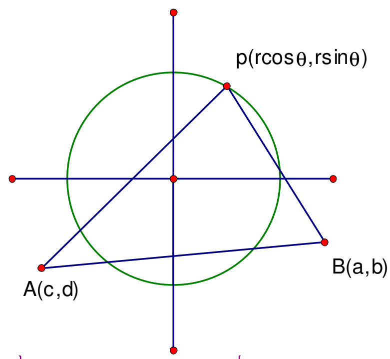
由此發現：拋物線的頂點與正焦弦長均變為原來的三分之一，但唯一不變的是焦點座標。

(六)、重心一般性的探討

前述討論 A,B 兩點在曲線上，現考慮 **A,B 兩點為平面上任兩點**的情況：

令 A,B 分別為(c,d),(a,b)

1.圓 Γ：$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$

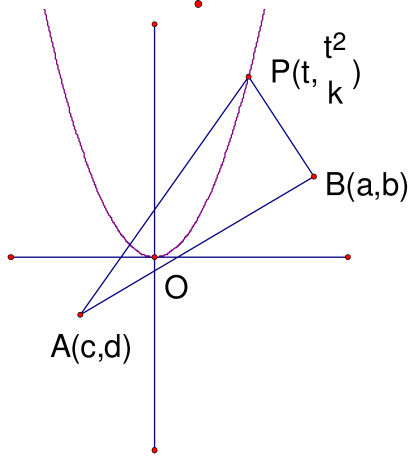


重心座標為$(\frac{a+c+r\cos\theta}{3},\frac{b+d+\sin\theta}{3})$

可得軌跡方程式:$(x-\frac{a+c}{3})^2+(y-\frac{b+d}{3})^2=(\frac{r}{3})^2$

$\Rightarrow$軌跡圖為**半徑** $\frac{r}{3}$，**圓心在 ΔOAB 重心上的圓**

2.拋物線 Γ：$x^2=ky$ 焦距 $\frac{k}{4}$



重心座標為$(\frac{a+c+t}{3},\frac{b+d+\frac{t^2}{k}}{3})$

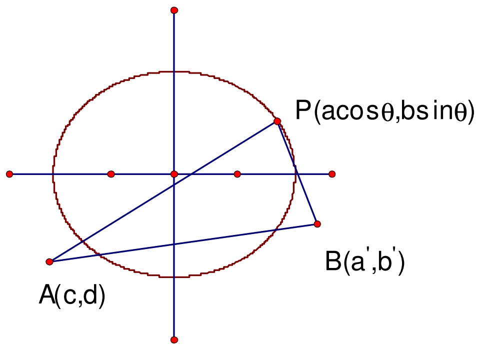
可得軌跡方程式$(x-\frac{a+c}{3})^2=\frac{k}{3}(y-\frac{b+d}{3})$

$\Rightarrow$軌跡圖為**頂點在 ΔOAB 重心**，**焦距為原本之** $\frac{1}{3}$ **的拋物線**

3.橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

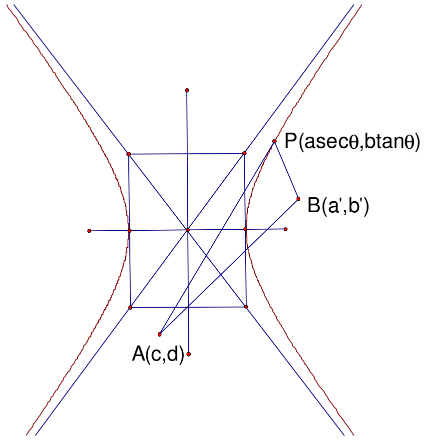
為了避免混淆令 B 座標為 (a',b')

重心座標為 $(\dfrac{a'+c+a\cos\theta}{3},\dfrac{b'+d+b\sin\theta}{3})$



可得軌跡方程式:$\dfrac{(x-\frac{a'+c}{3})^2}{(\frac{a}{3})^2}+\dfrac{(y-\frac{b'+d}{3})^2}{(\frac{b}{3})^2}=1$

$\Rightarrow$軌跡圖為**中心點在 ΔOAB 重心上，長短軸均為原本之$\frac{1}{3}$的橢圓**



4. 雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

避免混淆令 B 座標為 (a',b')

重心座標為 $(\dfrac{a'+c+a\sec\theta}{3},\dfrac{b'+d+b\tan\theta}{3})$

可得軌跡方程式:$\dfrac{(x-\frac{a'+c}{3})^2}{(\frac{a}{3})^2}-\dfrac{(y-\frac{b'+d}{3})^2}{(\frac{b}{3})^2}=1$

$\Rightarrow$軌跡為**中心點在 ΔOAB 重心上，貫、共軛軸均為原本之$\frac{1}{3}$的雙曲線**

二、外心軌跡問題

本研究擬探討：$\overline{AB}$ 為圓上一弦、$\overline{AB}$ 為圓之切線段、A,B 為橢圓的兩焦點、A,B 為雙曲線的兩焦點及 A,B 為正焦弦兩端點等五種情況下外心的軌跡問題。

(一)、Γ 為半徑 r 的圓，$\overline{AB}$ 為圓上一弦

當 P 在 Γ 上的運動時，因為ΔABP 恆為 Γ 的內接三角形，所以**其外心恆在 Γ 圓心**。

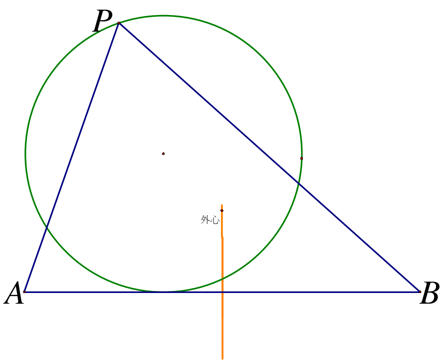
(二)、Γ 為半徑 r 的圓，$\overline{AB}$ 為圓之切線段

P 為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1$ 的動點，$\overline{AB}$ 為圓之切線段，則ΔPAB 的外心軌跡為**射線**。

[証明]：$\overline{AB}$ 中垂線：$x=\dfrac{c-d}{2}$

$\overline{PB}$ 中垂線可令為 $(r\cos\theta-c)x+(r\sin\theta+r)y=k$ 代入底邊可得

$$\mathrm{k}=(r\cos\theta-c)(\frac{r\cos\theta+c}{2})+(r\sin\theta+r)(\frac{r\sin\theta-r}{2})$$



$$=\frac{(r\cos\theta)^2-c^2+(r\sin\theta)^2-r^2}{2}=\frac{-c^2}{2}$$

$x=\dfrac{c-d}{2}$ 代入方程式求 y，得：

$$r(1-\sin\theta)y=\frac{-(c-d)r\cos\theta-cd}{2}$$

$$y=\frac{-2xr\cos\theta-cd}{2r(1+\sin\theta)}=x(\frac{\frac{-cd}{2x}-r\cos\theta}{r+r\sin\theta}) \quad 令\ \frac{-cd}{2x}=k \quad \phi=-\theta \quad 則 \quad y=x(\frac{k-r\cos\phi}{r-r\sin\phi})=\frac{x}{m}$$

當 m 為切線斜率時，y 有極值。

利用點線距離公式，可求出切線斜率：令 $m(x-k)=y-r \quad \Rightarrow mx-y-km+r=0$

$$\frac{|-km+r|}{\sqrt{m^2+1}}=r \quad \Rightarrow \quad (km-r)^2=r^2(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad m=0 \quad 或\ \frac{2rk}{k^2-r^2}$$

m=0 時 y 趨於負無窮大，$\mathrm{m}=\dfrac{2rk}{k^2-r^2}$ **為外心軌跡(射線)的起點之 y 座標**

(三)、Γ 為長軸為 2a，短軸為 2，焦距為 2c 的橢圓，A,B 為橢圓的焦點

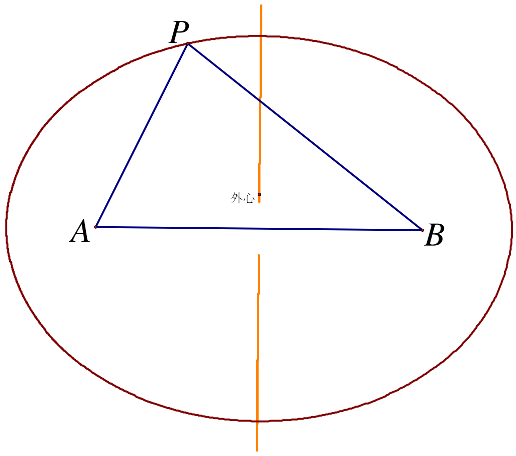
P 為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 的動點，A 與 B 為兩焦點，則ΔPAB 的外心軌跡為**兩射線**，其**起點為 $(0,\dfrac{1-c^2}{2})$ 及 $(0,\dfrac{c^2-1}{2})$**。

[証明]：在不失一般性的條件下，可將橢圓放在直角座標系內，使其方程為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1}=1\,(a^2>1)$

$\overline{AB}$ 中垂線: x=0，$\overline{PB}$ 中垂線可令為 $(a\cos\theta-c)x+(\sin\theta)y=k$

$$k=(a\cos\theta-c)(\frac{a\cos\theta+c}{2})+(\sin\theta)(\frac{\sin\theta}{2}) \quad =\frac{a^2\cos^2\theta-c^2+\sin^2\theta}{2}$$

$= \dfrac{(1+c^2)\cos^2\theta - c^2 + \sin^2\theta}{2} \quad = \dfrac{1-c^2\sin^2\theta}{2}$



$\therefore$ 外心座標為$(0, \dfrac{1-c^2\sin^2\theta}{2})$ $\qquad \sin\theta \neq 0$

令 t=$\dfrac{1-c^2\sin^2\theta}{2\sin\theta} = \dfrac{1}{2\sin\theta} - \dfrac{c^2\sin\theta}{2} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sin\theta} - c^2\sin\theta)$

當 $t' = 0$ **時有極值，此時的幾何意義為射線起點**

$t' = \dfrac{1}{2}(-\csc\theta\cot\theta - c^2\cos\theta) = 0$

$\csc\theta\cot\theta + c^2\cos\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + c^2\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(\dfrac{1}{\sin^2\theta} + c^2) = 0$

$\because \dfrac{1}{\sin^2\theta} + c^2$ 恆正 $\therefore \cos\theta = 0, \theta = 90^o or 270^o$

此時 $\sin\theta = \pm 1$ ，射線起點為 $(0, \dfrac{1-c^2}{2})$ & $(0, -\dfrac{1-c^2}{2})$

結論：

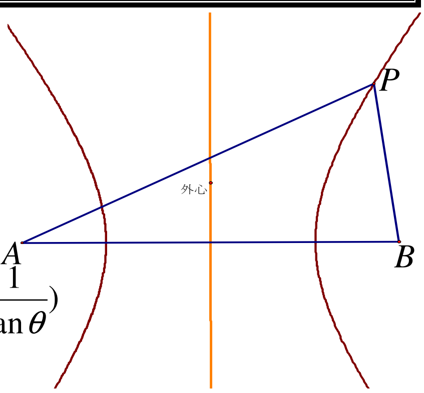
(1)當 $\theta = 90^0$ **時外心軌跡在向上射線的起點(0,** $\dfrac{1-c^2}{2}$**)上，當** $90^0 < \theta < 180^0$ **時，外心軌跡自(0,** $\dfrac{1-c^2}{2}$**)往正無窮大處運動，當** $180^0 < \theta < 270^0$ **時，外心軌跡自負無窮大處往原點運動，當** $\theta = 270^0$ **時，外心軌跡在向下射線的起點 (0,** $\dfrac{c^2-1}{2}$**)上，當** $270^0 < \theta < 360^0$ **時，外心軌跡自(0,** $\dfrac{c^2-1}{2}$**)往負無窮大處運動，當** $0^0 < \theta < 90^0$ **時，外心軌跡自正無窮大處往原點運動。**

(2)由於無法確定 1-c^2 是否大於 0，因此兩條射線可能有重疊之處特別是當 c^2 ＞1 時，軌跡看起來是一條直線，但實際上為兩射線部分重疊的結果

(四)、Γ 為貫軸為 2a 共軛短軸為 2，焦距為 2c 的橢圓，A,B 為雙曲線的焦點

P 為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{1} = 1$ 的動點，A 與 B 為焦點，則ΔPAB 的外心軌跡為**一直線，方程式為 x=0**。

[証明]：$\overline{AB}$ 中垂線: $x = 0$



$\overline{PB}$ 中垂線可令為 $(a\sec\theta - c)x + (\tan\theta)y = k$

k=$(a\sec\theta - c)(\dfrac{a\sec\theta + c}{2}) + (\tan\theta)(\dfrac{\tan\theta}{2}) \;=\; \dfrac{c^2\tan^2\theta - 1}{2}$

$\therefore$ 外心座標為 $(0, \dfrac{c^2\tan^2\theta - 1}{2\tan\theta})$ ，令 $t = \dfrac{c^2\tan^2\theta - 1}{2\tan\theta} = \dfrac{1}{2}(c^2\tan\theta - \dfrac{1}{\tan\theta})$

當 $\tan\theta \to 0^{+}$ 時，外心在正無窮遠處；$\tan\theta \to 0^{-}$ 時，外心在負無窮遠處

$\therefore$軌跡為直線或兩射線。

當 $t'=0$ 時有極值，其幾何意義為射線的起點：

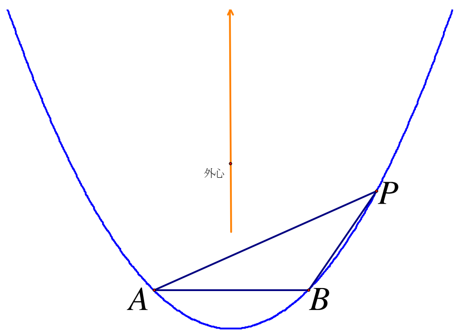
$$t'=\frac{1}{2}(-c^2\sec^2\theta+\csc^2\theta)=0 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{c^2}{\cos^2\theta}=0 \quad \Rightarrow 1=c^2\tan^2\theta \Rightarrow \tan\theta=\pm\frac{1}{c}$$

推得兩射線起點座標為 $(0,\dfrac{c^2\cdot\frac{1}{c^2}-1}{2\cdot\frac{1}{c}})$ 和 $(0,\dfrac{c^2\cdot\frac{1}{c^2}-1}{2\cdot\frac{-1}{c}})$ ，重合於(0,0)，表示軌跡為一直線。

(五)、Γ 為拋物線：$x^2=4c(y+c)$，焦距為 c，$\overline{AB}$ 為正焦弦

P 為拋物線Γ：$x^2=4c(y+c)$ 上動點，A 與 B 為正焦弦兩端點，則ΔPAB 的外心軌跡為**一往正無窮遠運動的射線，其起點為$(0,\frac{3}{2})$**。

[証明]：$\overline{AB}$ 為正焦弦，令 P 為 $(t,\dfrac{t^2-4c^2}{4c})$



$\overline{AB}$ 中垂線方程式為 x=0

令 $\overline{PB}$ 中垂線為 $(t-2c)x+(\dfrac{t^2-4c^2}{4c})y=k \quad t\in R\cap P\neq A,B$

$$k=(t-2c)(\frac{t+2c}{2})+(\frac{t^2-4c^2}{4c})(\frac{t^2-4c^2}{4c}\cdot\frac{1}{2})$$

$$=\frac{t^2-4c^2+(\frac{t^2-4c^2}{4c})^2}{2}$$

$$=\frac{t^4+8c^2t^2-48c^4}{32c^2} \quad =\frac{(t^2+12c^2)(t^2-4c^2)}{32c^2}$$

$\therefore$外心座標為 $(0,\dfrac{t^2+12c^2}{8c})$

$$t^2\geq 0 \quad \Rightarrow \frac{t^2+12c^2}{8c}\geq\frac{3}{2}c$$

當 $t^2\to 4c^2$ 時，外心軌跡接近 $(0,2c)$

但 $t^2=4c^2$ 時無外心

$\therefore$外心軌跡為 $\begin{cases} x=0 \\ y\geq\frac{3}{2}c\cap y\neq 2c \end{cases}$

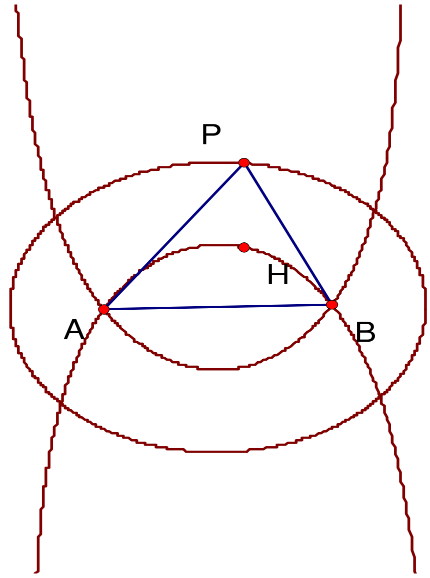
外心軌跡為一起點$(0,\frac{3}{2}c)$向正無窮遠的射線，但此射線不包含點$(0,2c)$

三、垂心的軌跡問題

擬探討 A,B 為**橢圓兩焦點**及**雙曲線兩焦點**兩種情況下垂心的軌跡問題。

(一)、Γ 為長軸 2a，短軸 2，焦距 2c 的橢圓，A, B 為橢圓焦點

> P 為橢圓Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1}=1$的動點，A 與 B 為兩焦點，則ΔPAB 的**垂心軌跡方程式為** $(\frac{x}{a})^2+(\frac{c^2-x^2}{y})^2=1$，**當** $y=0$ **時垂心落在(±c,0)**。



[証明]：$\overline{PB}$=(c- acosθ,-sinθ)

$\overline{PB}$上的高可令為(acosθ-c)x+(sinθ)y=k

代(-c,0)可得 k=c^2-cacosθ

$\overline{AB}$ 上的高為 x= acosθ

代入交點，得垂心座標為(acosθ,$\frac{c^2-x^2}{\sin\theta}$)

x= acosθ

y=$\frac{c^2-x^2}{\sin\theta}$$\Rightarrow$cos$\theta$=$\frac{c}{a}$，sin$\theta$= $\frac{c^2-x^2}{y}$(y≠0)

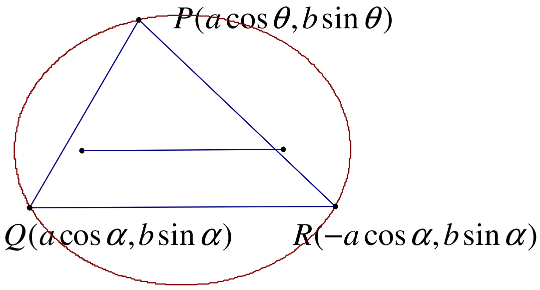
利用平方關係得$(\frac{c^2-x^2}{y})^2+(\frac{c}{a})^2=1$，其中 y≠0

在垂心的 y 分量為 0 時，垂心落在$\overline{AB}$上

此時三角形$\overline{AB}$為直角三角形，直角可為$\angle PAB$ 或$\angle PBA$

得結論$\begin{cases} y\neq 0, y=(\frac{x}{a})^2+(\frac{c^2-x^2}{y})^2=1 \\ y=0,交於(\pm c,0) \end{cases}$

我們試著將 A, B 為兩焦點的**條件放寬**，先考慮 A,B **在橢圓上**且 **A,B 兩點連線平行長軸**的情況。令動點 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 及橢圓上兩定點 $Q(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $R(-a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ ，a>b



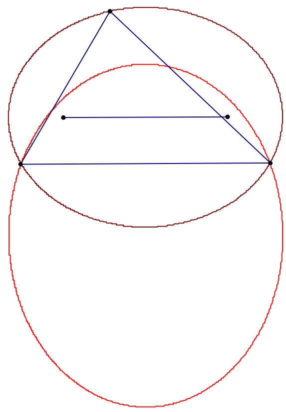
過 P 垂直 $\overline{QR}$ 之方程式

$x = a\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{x}{a}$

過 R 垂直 $\overline{PQ}$ 之方程式

$$a(\cos\theta - \cos\alpha)x + b(\sin\theta - \sin\alpha)y = -a^2(\cos\theta\cos\alpha - \cos^2\alpha) + b^2(\sin\theta sin\alpha - \sin^2\alpha)$$

解聯立得 $y = \dfrac{a^2}{b}\sin\theta + \dfrac{a^2+b^2}{b}\sin\alpha \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{y - \dfrac{a^2+b^2}{b} sin\alpha}{\dfrac{a^2}{b}}$



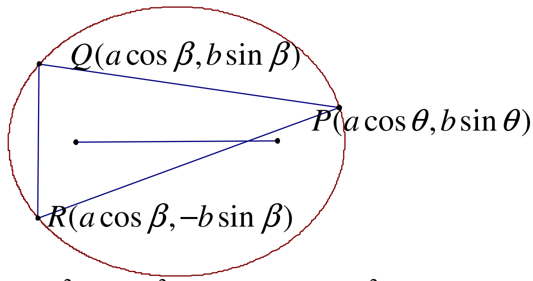
則垂心軌跡方程式為 $(\dfrac{x}{a})^2 + (\dfrac{y - \dfrac{a^2+b^2}{b} sin\alpha}{a \times \dfrac{a}{b}})^2 = 1$

和原橢圓方程式 $(\dfrac{x}{a})^2 + (\dfrac{y}{b})^2 = 1$ 比較的情況下發現：

由**橫橢變為直橢**，**短軸長為原來的長軸長**，而新的橢圓**短軸、長軸皆為原橢圓的 $\dfrac{a}{b}$ 倍**，

中心為 $(0, \dfrac{a^2+b^2}{b} sin\alpha)$

再討論橢圓上**兩點連線垂直長軸**的情況。如圖，設動點 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 及橢圓上兩定點 $Q(a\cos\beta, b\sin\beta)$, $R(a\cos\beta, -b\sin\beta)$ ，a>b



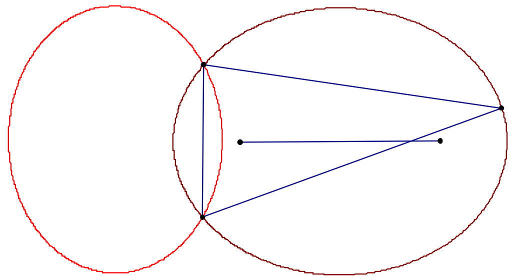
過 P 垂直 $\overline{QR}$ 之方程式為 $y = b\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{y}{b}$

過 R 垂直 $\overline{PQ}$ 之方程式

$$a(\cos\theta - \cos\beta)x + b(\sin\theta - \sin\beta)y = a^2(\cos\theta\cos\beta - \cos^2\beta) - b^2(\sin\theta sin\beta - \sin^2\beta)$$

解聯立得 $x = \dfrac{b^2}{a}\cos\theta + \dfrac{a^2+b^2}{a}\cos\beta \Rightarrow cos\theta = \dfrac{x - \dfrac{a^2+b^2}{a}\cos\beta}{\dfrac{b^2}{a}}$

則垂心軌跡方程式 $\left(\dfrac{x-\dfrac{a^2+b^2}{a}\cos\beta}{b\times\dfrac{b}{a}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$



與原橢圓方程式 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ 比較的情況下發現：

由**橫橢變為直橢**，**長軸長為原來的短軸長**，而新的橢圓**短軸、長軸皆為原橢圓的** $\dfrac{b}{a}$ **倍**，

中心為 $\left(0,\dfrac{a^2+b^2}{b}\sin\alpha\right)$

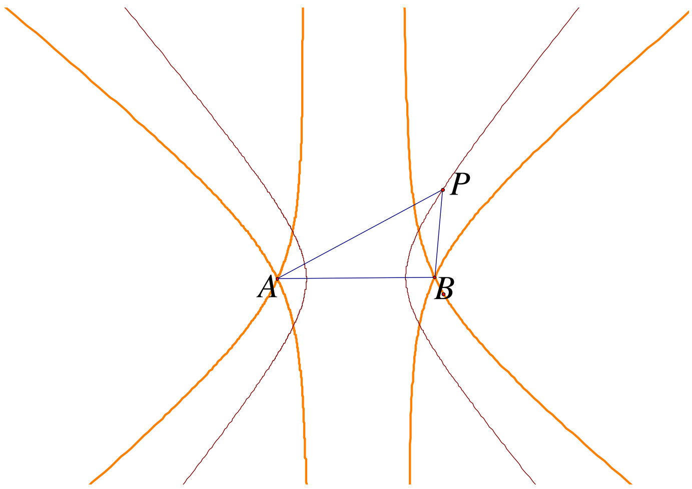
(二)、Γ 為貫軸為 2a，共軛軸為 2，焦距為 2c 的雙曲線，A,B 為橢圓的焦點

P 為雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$ 的動點，A 與 B 為兩焦點，則ΔPAB 的**垂心軌跡方程式為**

$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{c^2-x^2}{y}\right)^2=1$，**當 y=0 時垂心落在(±c,0)**。

[証明]：P 為雙曲線 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$ 上的動點

探討 ΔPAB 之垂心軌跡



$\overline{AB}$ 上的高: $x=a\sec\theta$

$\overline{PB}$ 上的高可令為 $(a\cos\theta-c)x+\tan\theta y=k$

k= $(a\sec\theta-c)(-c)=c^2-ac\sec\theta$

交點為垂心 H，代入 $x=a\sec\theta$

$a^2\sec^2\theta-ac\sec\theta+\tan\theta y=c^2-ac\sec\theta$

$$y=\frac{c^2-a^2\sec^2\theta}{\tan\theta}=\frac{c^2-x^2}{\tan\theta}\Rightarrow\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=\dfrac{c^2-x^2}{\tan\theta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sec\theta=\dfrac{x}{a}\\ \tan\theta=\dfrac{c^2-x^2}{y}=1\end{cases}$$

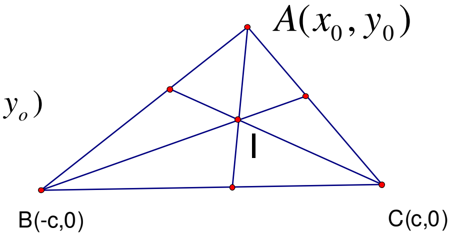
藉由平方關係得 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{c^2-x^2}{y}\right)^2=1$ ∴得軌跡方程式為 $\begin{cases}y\neq 0,\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{c^2-x^2}{y}\right)^2=1\\ y=0,\text{交於}(\pm c,0)\end{cases}$

四、內心的軌跡問題

擬探討 A,B 為**橢圓兩焦點**及**雙曲線兩焦點**等兩種情況下的內心軌跡問題。

不失一般性的情況下，可將任意 ΔABC 放在直角座標系上，令 $A(x_0, y_0)$，B、C 分別為(-c,0),(c,0)，I 為內心

E、F 為垂足，令 $\overline{AB}=l_1,\overline{AC}=l_2$



可由分點公式求出⇒得內心 I 為 $(\frac{l_1-l_2+2x_0}{l_1+l_2+2c}c, \frac{2c}{l_1+l_2+2c}y_o)$

$\because\ l_1=\sqrt{y_0+(x_0+c)^2}$ and $l_2=\sqrt{{y_0}^2+(x_0+c)^2}$

$\therefore 4cx_0=l_1^2-l_2^2$

$$\therefore \frac{l_1-l_2+2x_0}{l_1+l_2+2c}c=\frac{c(l_1-l_2)+2x_0c}{l_1+l_2+2c}=\frac{2c(l_1-l_2)+({l_1}^2-{l_2}^2)}{2(l_1+l_2+2c)}=\frac{(l_1-l_2)(l_1+l_2+2c)}{2(l_1+l_2+2c)}=\frac{l_1-l_2}{2}$$

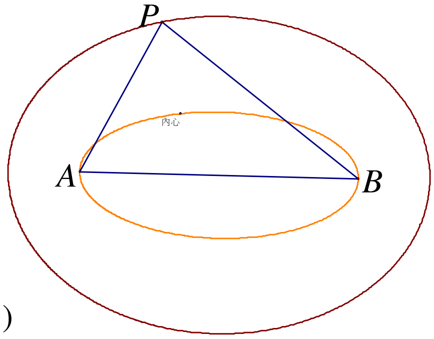
$$\therefore I(\frac{l_1-l_2}{2},\frac{2c}{l_1+l_2+2c}y_0)$$

(一)、Γ 為長軸為 2a，短軸為 2，焦距為 2c 的橢圓，A,B 為橢圓的兩焦點

P 為橢圓Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1}=1$的動點，A 與 B 為兩焦點，則ΔPAB 的內心軌跡為**橢圓**，**長軸為 2c**，**短軸為** $\frac{c}{a+c}$ **中心(0,0)**。

[証明]：$l_1+l_2=2a$

令 $l_1=a+k,l_2=a-k$



$l_1^2+l_2^2=(x_0+c)^2+y_0^2-(x_0-c)^2-y_0^2 \quad =4cx_0 \quad =4ak$

⇒得 $k=\frac{c}{a}x_0 \Rightarrow l_1-l_2=\frac{2c}{a}x_0$

由前證明可知 $I(\frac{2c\cos\theta}{2},\frac{2c}{2a+2c}y_0)$，化簡之後得 $I(\frac{c}{a}x_0,\frac{c}{a+c}y_0)$

又$\because (x_0,y_0)$ 在橢圓上，可將 P 令為 $(a\cos\theta,\sin\theta)$

$$\begin{cases} I_x = c\cos\theta \\ I_y = \dfrac{c\sin\theta}{a+c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{I_x}{c} = \cos\theta \\ \dfrac{a+c}{c} I_y = \sin\theta \end{cases}$$

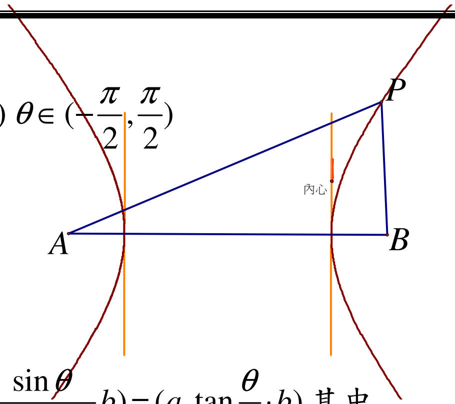
由平方關係得內心軌跡為 $(\dfrac{x}{c})^2 + (\dfrac{(a+c)y}{c})^2 = 1$

$\Rightarrow$ 內心軌跡為長軸 2c，短軸 $\dfrac{2c}{a+c}$ ，中心(0,0)橢圓

(二)、Γ 為貫軸為 2a 共軛軸為 2b 的雙曲線，A,B 為雙曲線的兩焦點

P 為雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的動點，A 與 B 為兩焦點，則ΔPAB 的內心軌跡為**兩鉛直切線段，長度為 2b**。

[証明]：先討論 P 點在右曲線上的情況。



F_1, F_2 為焦點，P 為雙曲線上動點，令其為 $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ $\theta \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

探討 ΔPF_1F_2 之內心軌跡

$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a \qquad \overline{PF_1} = a + c\sec\theta \qquad \overline{PF_2} = c\sec\theta - a$

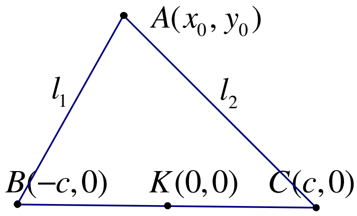
內心座標 $(a, \dfrac{2c}{2c\sec\theta + 2c} b\tan\theta) = (a, \dfrac{1}{\sec\theta + 1} b\tan\theta) = (a, \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} b) = (a, \tan\dfrac{\theta}{2} \cdot b)$ 其中 $\dfrac{\theta}{2} \in (-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4})$

$\therefore$ 得內心軌跡為 (a, t) ，其中 $t \in (-b, b)$ 且 $t \neq 0$ 表示軌跡為切頂點的鉛直線段，其長度為共軛軸長；同理，當 P 為左曲線上動點時，內心軌跡為 $(-a, t)$ ，其中 $t \in (-b, b)$ 且 $t \neq 0$

五、傍心的軌跡問題

擬探討 A,B 為**橢圓兩焦點**及**雙曲線兩焦點**等兩種情況下的傍心軌跡問題。

令 I_A, I_B, I_C 分別為 A,B,C 對面的傍心



$$l_1=\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}+c^2+2cx_0}$$

$$l_2=\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}+c^2-2cx_0}$$

可知在任意三角形中，滿足下列等式

$$\overline{\mathrm{OI}}=\frac{2\mathrm{c}}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OA}}+\frac{l_2}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OB}}+\frac{l_1}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OC}}$$

$$\overline{\mathrm{OI}_A}=\frac{-2\mathrm{c}}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OA}}+\frac{l_2}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OB}}+\frac{l_1}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OC}}$$

$$\overline{\mathrm{OI}_B}=\frac{2\mathrm{c}}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OA}}+\frac{-l_2}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OB}}+\frac{l_1}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OC}}$$

$$\overline{\mathrm{OI}_C}=\frac{2\mathrm{c}}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OA}}+\frac{l_2}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OB}}+\frac{-l_1}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}\overline{\mathrm{OC}}$$

(引自李豪韋、郭令波、詹士緯、余宥逵(民國 97 年))

其中 O 為任意點，當 O 為 $\overline{BC}$ 中點 K 時

$$\overline{\mathrm{KI}}=\frac{2\mathrm{c}}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}(x_0, y_0)+\frac{l_2}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}(\text{-c},0)+\frac{l_1}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}(\mathrm{c},0)$$

$$=(\frac{l_1-l_2+2x_0}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{2c}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}y_0)=(\frac{l_1-l_2}{2}, \frac{2c}{l_1+l_2+2\mathrm{c}}y_0)$$

$$\overline{\mathrm{KI}_A}=\frac{-2\mathrm{c}}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}(x_0, y_0)+\frac{l_2}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}(\text{-c},0)+\frac{l_1}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}(\mathrm{c},0)=(\frac{l_1-l_2-2x_0}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{-2c}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}y_0)$$

$$\overline{\mathrm{KI}_B}=\frac{2\mathrm{c}}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}(x_0, y_0)+\frac{-l_2}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}(\text{-c},0)+\frac{l_1}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}(\mathrm{c},0)=(\frac{l_1+l_2+2x_0}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{2c}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}y_0)$$

$$\overline{\mathrm{KI}_C}=\frac{2\mathrm{c}}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}(x_0, y_0)+\frac{l_2}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}(\text{-c},0)+\frac{-l_1}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}(\mathrm{c},0)=(\frac{-l_1-l_2+2x_0}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{2c}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}y_0)$$

結論:若 $\overline{BC}$ **中點為(0,0)**時

傍心 $\mathrm{I}_A=(\frac{l_1-l_2-2x_0}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{-2c}{l_1+l_2-2\mathrm{c}}y_0)$

傍心 $\mathrm{I}_B=(\frac{l_1+l_2+2x_0}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{2c}{l_1-l_2+2\mathrm{c}}y_0)$，傍心 $\mathrm{I}_c=(\frac{-l_1-l_2+2x_0}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}\mathrm{c}, \frac{2c}{-l_1+l_2+2\mathrm{c}}y_0)$

(一)、Γ 為長軸為 2a，短軸為 2，焦距為 2c 的橢圓，A,B 為橢圓的兩焦點

> P 為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$的動點，A 與 B 為兩焦點，則傍心 I_P 軌跡為一**長軸為 $\dfrac{2c}{a-c}$，短軸為 2c 的直橢**；傍心 I_A 軌跡為一**切橢圓長軸右端點的直線**；傍心 I_B 軌跡為一**切橢圓長軸左端點的直線**。

[証明]：可令 $\overline{PA}=a+c\cos\theta$，$\overline{PB}=a-c\cos\theta$

傍心 $I_P=(\dfrac{\overline{PA}-\overline{PB}-2a\cos\theta}{\overline{PA}+\overline{PB}-2c}c,\dfrac{-2c}{\overline{PA}+\overline{PB}-2c}\sin\theta)=(\dfrac{2c\cos\theta-2a\cos\theta}{2a-2c}c,\dfrac{-2c}{2a-2c}\sin\theta)$

$=(-c\cos\theta,\dfrac{-c}{a-c}\sin\theta)$，推得傍心 I_P 軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{(a-c)^2y^2}{c^2}=1$

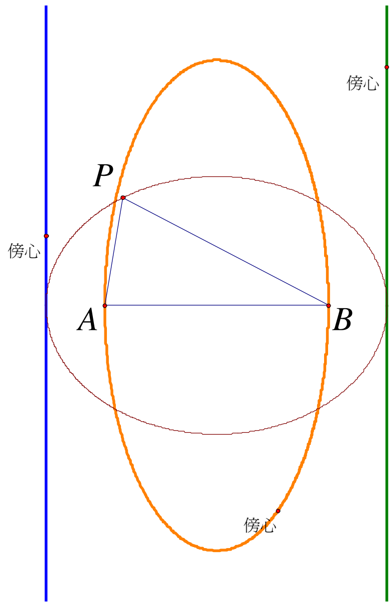
$\because a^2-c^2=b^2=1$，$a+c=\dfrac{1}{a-c}>b=1$，$\therefore \dfrac{c}{a-c}>c$

傍心 $I_A=(\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}+2a\cos\theta}{\overline{PA}-\overline{PB}+2c}c,\dfrac{2c}{\overline{PA}-\overline{PB}+2c}\sin\theta)=(\dfrac{2a(\cos\theta+1)}{2c(\cos\theta+1)}c,\dfrac{2c}{2c(\cos\theta+1)}\sin\theta)$

$=(a,\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+1})=(a,\tan\dfrac{\theta}{2})$，推得傍心 I_A 軌跡方程式為 $x=a$

傍心 $I_B=(\dfrac{-\overline{PA}-\overline{PB}+2a\cos\theta}{-\overline{PA}+\overline{PB}+2c}c,\dfrac{2c}{-\overline{PA}+\overline{PB}+2c}\sin\theta)=(\dfrac{2a(-1+\cos\theta)}{2c(-\cos\theta+1)}c,\dfrac{2c}{2c(-\cos\theta+1)}\sin\theta)$

$=(-a,\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta})=(a,\cot\dfrac{\theta}{2})$，推得傍心 I_B 軌跡方程式為 $x=-a$



(二)、Γ 為貫軸為 2a 共軛軸為 2b 的雙曲線，A,B 為雙曲線的兩焦點

P 為雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的動點，A 與 B 為兩焦點，則傍心 I_P 軌跡為**四條平行共軛軸的射線，起點為** $(\pm1,1)$ **和** $(\pm1,-1)$；傍心 I_A 軌跡為 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{(c\pm a)^2y^2}{c^2}=1$ 的**右曲線**；傍心 I_B 軌跡為 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{(c\pm a)^2y^2}{c^2}=1$ 的**左曲線**。

[証明]：可令 $\overline{PA}=a+c\sec\theta$ ，$\overline{PB}=c\sec\theta-a$ ，先討論右曲線

$$\text{傍心 } I_P=\left(\frac{\overline{PA}-\overline{PB}-2a\sec\theta}{\overline{PA}+\overline{PB}-2c}c,\frac{-2c}{\overline{PA}+\overline{PB}-2c}\tan\theta\right)=\left(\frac{2a(1-\sec\theta)}{2c(\sec\theta-1)}c,\frac{-2c}{2c(\sec\theta-1)}\tan\theta\right)$$

$$=\left(-a,\frac{\tan\theta}{1-\sec\theta}\right)=\left(-a,\cot\frac{\theta}{2}\right)\cap\frac{\theta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

推得傍心 I_P 軌跡方程式為 $x=-a,\ y\notin[1,-1]$

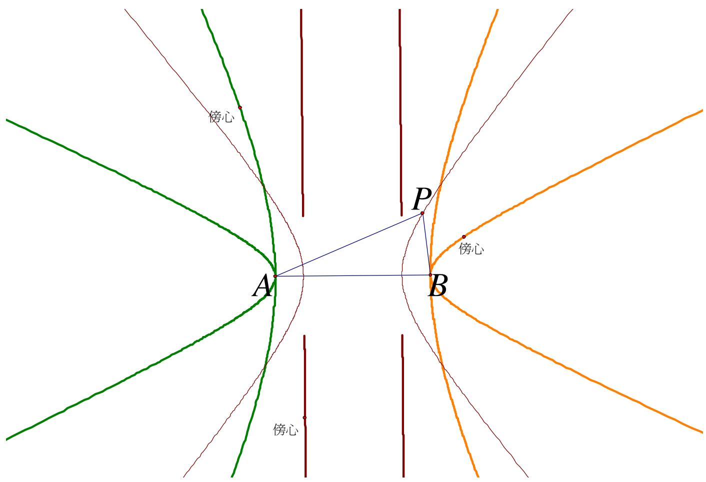
$$\text{傍心 } I_A=\left(\frac{\overline{PA}+\overline{PB}+2a\sec\theta}{\overline{PA}-\overline{PB}+2c}c,\frac{2c}{\overline{PA}-\overline{PB}+2c}\tan\theta\right)=\left(\frac{\sec\theta(2c+2a)}{2a+2c}c,\frac{2c}{2a+2c}\tan\theta\right)$$

$=\left(c\sec\theta,\dfrac{c}{a+c}\tan\theta\right)$ ，推得傍心 I_A 軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{(a+c)^2y^2}{c^2}=1$

$$\text{傍心 } I_B=\left(\frac{-\overline{PA}-\overline{PB}+2a\sec\theta}{-\overline{PA}+\overline{PB}+2c}c,\frac{2c}{-\overline{PA}+\overline{PB}+2c}\tan\theta\right)=\left(\frac{\sec\theta(-2c+2a)}{-2a+2c}c,\frac{2c}{-2a+2c}\tan\theta\right)$$

$=\left(-c\sec\theta,\dfrac{c}{c-a}\tan\theta\right)$，推得傍心 I_B 軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{(c-a)^2y^2}{c^2}=1$

傍心 I_P 軌跡為四條平行共軛軸的射線，起點為 $(\pm1,1)$ 和 $(\pm1,-1)$；傍心 I_A 恆在 $\overline{PB}$ 右側、傍心 I_B 恆在 $\overline{PA}$ 左側，故傍心 I_A 軌跡為此兩條雙曲線的右曲線、傍心 I_B 軌跡為此兩條雙曲線左曲線



六、費馬點的軌跡問題

ΔOAB 中，固定 A 點、B 點，以 O 點為平面上的任意動點時，研究費馬點所形成的軌跡。
由於費馬點的特殊性，我們僅討論**三角形最大角小於 120°的費馬點軌跡問題**。F 為費馬點，則 $\angle AFB = 120°$

$\overline{AF} = (x+c, y)$

$\overline{BF} = (x-c, y)$ $\cos 120^\circ = \dfrac{(x+c,y)\cdot(x-c,y)}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \Rightarrow \dfrac{-1}{2} = \dfrac{x^2+y^2-c^2}{\sqrt{(x^2+c^2+y^2)-(2cx)^2}}$

$$\Rightarrow 4(x^2+y^2-c^2) = (x^2+c^2+y^2)^2 - 4c^2x^2$$

$$\Rightarrow 3x^4 + 3y^4 + 3c^4 + 6x^2y^2 - 10y^2c^2 - 6x^2c^2 = 0$$

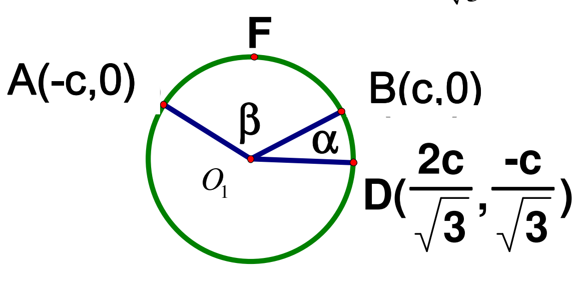
$$\Rightarrow 3(x^2+y^2-c^2)^2 = 4y^2c^2 \Rightarrow x^2 + (y \pm \frac{c}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4c^2}{3}$$

由推論可知費馬點與兩頂點夾角 120°時，其軌跡方程式為兩圓，
因為∠A、∠B 與∠C 均小於 120°，所以其軌跡為**兩圓弧**(右圖紅線)。

設兩圓 $O_1 : x^2 + (y + \frac{c}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4c^2}{3}$ ，$O_2 : x^2 + (y - \frac{c}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4c^2}{3}$

1. $O_1 : x^2 + (y - \frac{c}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4c^2}{3}$

O₁ 為費馬點軌跡圓方程式的圓心 $(0, \frac{c}{\sqrt{3}})$，α 為 $\angle BO_1D$，β 為 $\angle AO_1B$



$\overline{O_1D} = (\frac{2c}{\sqrt{3}}, 0)$

$\overline{O_1C} = (c, \frac{c}{\sqrt{3}})$

$\overline{O_1B} = (-c, \frac{c}{\sqrt{3}})$

$$\cos\alpha = \frac{(c, \frac{c}{\sqrt{3}})\cdot(\frac{2c}{\sqrt{3}}, 0)}{\sqrt{(c)^2 + (\frac{c}{\sqrt{3}})^2}\cdot\sqrt{(\frac{2c}{\sqrt{3}})^2 + 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

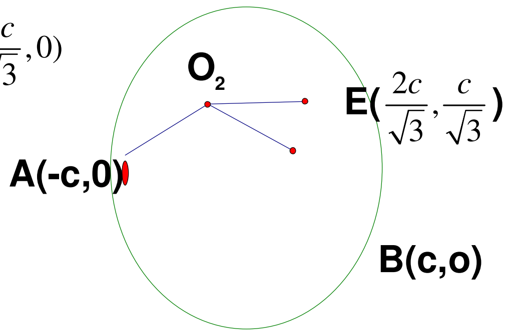
$$\cos\beta = \frac{(-c, \frac{c}{\sqrt{3}})\cdot(c, \frac{c}{\sqrt{3}})}{\sqrt{(-c)^2 + (\frac{c}{\sqrt{3}})^2}\cdot\sqrt{c^2 + (\frac{c}{\sqrt{3}})^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 120^\circ$$

$\therefore$ 軌跡：$x^2 + (y - \frac{c}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4c^2}{3} (30^\circ \le \theta \le 150^\circ)$

$2.O_2: x^2+(y+\frac{c}{\sqrt{3}})^2=\frac{4c^2}{3}$

O_2為費馬點軌跡圓方程式的圓心$(0,\frac{c}{\sqrt{3}})$，γ 為$\angle AO_2B$，φ 為$\angle EO_2B$

$\overline{O_2B}=(c,\frac{-c}{\sqrt{3}})$，$\overline{O_2A}=(-c,\frac{-c}{\sqrt{3}})$，$\overline{O_2E}=(\frac{2c}{\sqrt{3}},0)$



$\cos\varphi=\frac{(\frac{2c}{\sqrt{3}},0)\cdot(c,\frac{-c}{\sqrt{3}})}{\sqrt{(\frac{2c}{\sqrt{3}})^2+0}\cdot\sqrt{c^2+(\frac{-c}{\sqrt{3}})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ$ $\cos\gamma=\frac{(c,\frac{-c}{\sqrt{3}})\cdot(-c,\frac{-c}{\sqrt{3}})}{\sqrt{c^2+(\frac{-c}{\sqrt{3}})^2}\cdot\sqrt{(-c)^2+(\frac{-c}{\sqrt{3}})^2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\gamma=120^\circ$

$\therefore$軌跡: $x^2+(y+\frac{c}{\sqrt{3}})^2=\frac{4c^2}{3}(210^\circ\le\theta\le330^\circ)$

∴以 O 點為平面上的任意動點在平面移動其軌跡:

$$\left\{x^2+(y-\frac{c}{\sqrt{3}})^2=\frac{4c^2}{3}(30^\circ\le\theta\le150^\circ),x^2+(y-\frac{c}{\sqrt{3}})^2=\frac{4c^2}{3}(210^\circ\le\theta\le330^\circ)\right\}$$

小結：

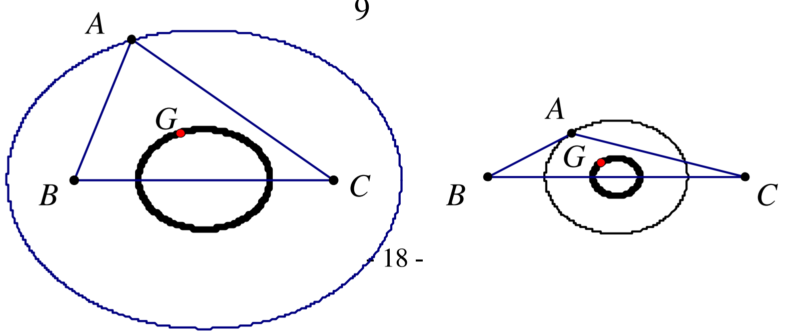
當三角形 OAB 的動點 O 在平面上任意移動，其費馬點軌跡為**兩圓弧**。

七、動點在生成曲線上運動時，其生成軌跡的探討

做完了橢圓外、重、垂，我們希望更進一步知道，若定點不變，而動點改為在**第一次得出的軌跡**，則結果各會如何？

1.重心的討論

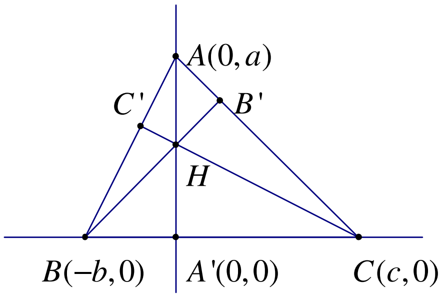
由先前研究可知：當兩定點 B、C 為橢圓焦點與橢圓上一動點 P，重心所形成的軌跡為一長短軸長度為$\frac{1}{3}$倍，中心不變之橢圓(請見 p.5)。因此當定點不變，改以此較小橢圓上一動點作重心軌跡，可得中心不變，長短軸長度為原橢圓$\frac{1}{9}$倍之橢圓。如此一來，重複無限多次之後軌跡將**退化成中心點**。



2.垂心的討論

由先前研究可知：當兩定點 B、C 為橢圓焦點與橢圓上一動點 A，ΔABC 之垂心 H 軌跡為一四次曲線。發現：則當定點 B、C 不變，改以此四次曲線上一動點 H 作垂心，則可得軌跡為原橢圓。這是因為垂心的「**對偶性**」：若 H 為△ABC 之垂心，則△HBC 之垂心為 A

【證明】令 H 為△ABC 之垂心，則△HBC 之垂心為 A。



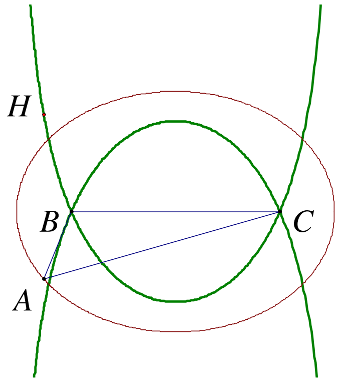
令 A' 為原點，$\overline{AA'}=a$，$\overline{BA'}$=b，$\overline{A'C}$=c

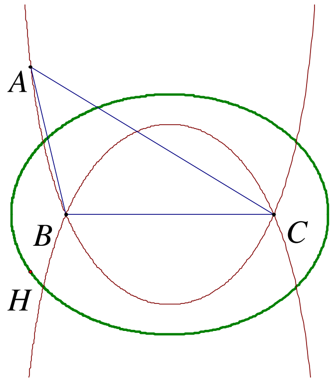
設 $\overleftrightarrow{B'B}$ 之方程式為 cx-ay=－bc

而 $\overleftrightarrow{AA'}$ 方程式為 x=0

H 為 $\overleftrightarrow{AA'}$ 與 $\overleftrightarrow{B'B}$ 之交點⇒ $H(0,\dfrac{bc}{a})$

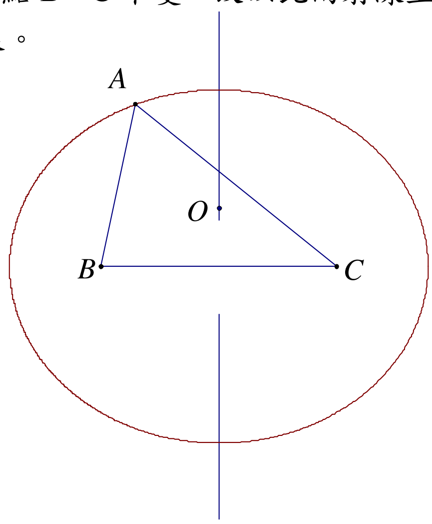
考慮△HBC 之垂心：在 b,c 不變，a 變成 $\dfrac{bc}{a}$ 的情況下，△HBC 之垂心 H 變成 $(0,a)$ 與 A 點相同。因此當兩定點 B、C 為橢圓焦點，A 為橢圓上動點，H 為△ABC 之垂心，若重新以橢圓焦點 B、C 為定點， A 為上動點，可得垂心為 H 之生成曲線為原橢圓，因此產生**軌跡互換的對偶性質**。

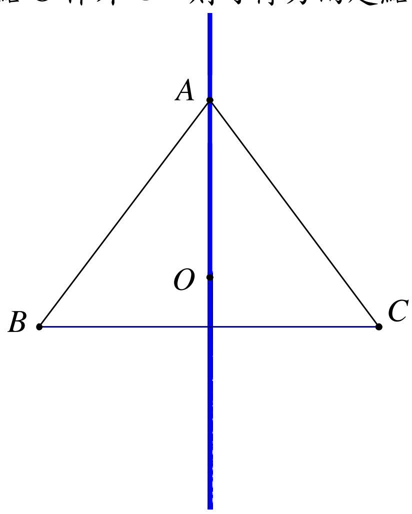




3.外心的討論

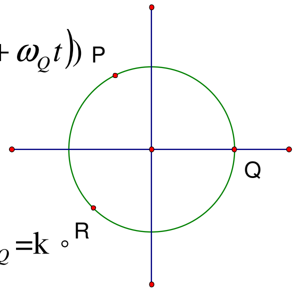
由先前研究可知：當兩定點 B、C 為橢圓焦點與橢圓上一動點 A，ΔABC 之外心 O 軌跡為兩射線。發現：則當定點 B、C 不變，改以此兩射線上一動點 O 作外心，則可得另兩起點不同的且部分重疊的兩射線。





八、圓上雙動點的討論

考慮半徑為 r 的圓，R 為圓上的固定點，P,Q 為圓上的動點，探討當 P,Q 運動時，ΔPQR 的特殊定點所形成之軌跡與角速度比 ω_P ： ω_Q 的關係。將 R 點座標設為(c,d)，P 與 Q 點座標可用參數表示：P $(r\cos(\theta_P+\omega_P t), r\sin(\theta_P+\omega_P t))$ ，Q $(r\cos(\theta_Q+\omega_Q t), r\sin(\theta_Q+\omega_Q t))$



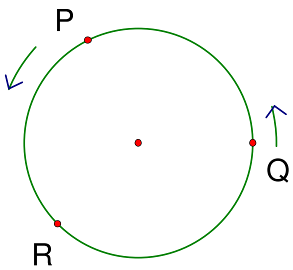
不失一般性令 $\theta_Q=0$

為了簡化條件，把 P,Q 兩動點的角速度比值 $\dfrac{\omega_Q}{\omega_P}$ 定為 k，若再令 ω_P =1，則 ω_Q =k。

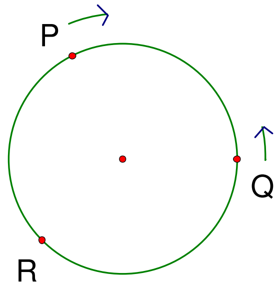
雙動點的情形分兩種：

(一)**順向型**： $\omega_P\cdot\omega_Q>0$，設其為逆時針轉(下圖二)

(二)**逆向型**： $\omega_P\cdot\omega_Q<0$，設為 P 順時針、Q 為逆時針轉(下圖三)



(圖二)



(圖三)

1.順向雙動點重心軌跡的探討

不失一般性的情況下，令 P 為 $(r\cos(\theta+t), r\sin(\theta+t))$ 、Q 為 $(r\cos kt, r\sin kt)$ ，討論 k∈ $N/\{1\}$ 的情況，探討 ΔPQR 重心座標 $\left(\dfrac{c+r\cos(\theta+t)+r\cos kt}{3}, \dfrac{d+r\sin(\theta+t)+r\sin kt}{3}\right)$ 利用和差化積

可得= $\left(\dfrac{c+2r\cos\frac{\theta+(k+1)t}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2}}{3}, \dfrac{d+2r\sin\frac{\theta+(k+1)t}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2}}{3}\right)$

則軌跡方程式為⇒ $\begin{cases} x-\dfrac{c}{3}=\dfrac{2r\cos\frac{\theta+(k+1)t}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2}}{3} \\ y-\dfrac{d}{3}=\dfrac{2r\sin\frac{\theta+(k+1)t}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2}}{3} \end{cases}$

化簡為 $(x-\frac{c}{3})^2+(y-\frac{d}{3})^2=(\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2})^2$

(1)**環結點**的探討(下述有解釋環結點的定義)

環結就是**兩個 t 對一個座標**，故令$G_{t_1}=G_{t_2}$，且$t_1\neq t_2$

$$c+2r\cos\frac{\theta+(k+1)t_1}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t_1}{2}=c+2r\cos\frac{\theta+(k+1)t_2}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t_2}{2}$$

$$c+2r\cos\frac{\theta+(k+1)t_1}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t_1}{2}=c+2r\cos\frac{\theta+(k+1)t_2}{2}\cos\frac{\theta-(k-1)t_2}{2}$$

$\Rightarrow\tan\dfrac{\theta+(k+1)t_1}{2}=\tan\dfrac{\theta+(k+1)t_2}{2}$，又 y=tanx 的週期為$180^o$

$$\Rightarrow\frac{\theta+(k+1)t_1}{2}=\frac{\theta+(k+1)t_2}{2}+180^o\Rightarrow t_1-t_2=\frac{360^o}{k+1}$$

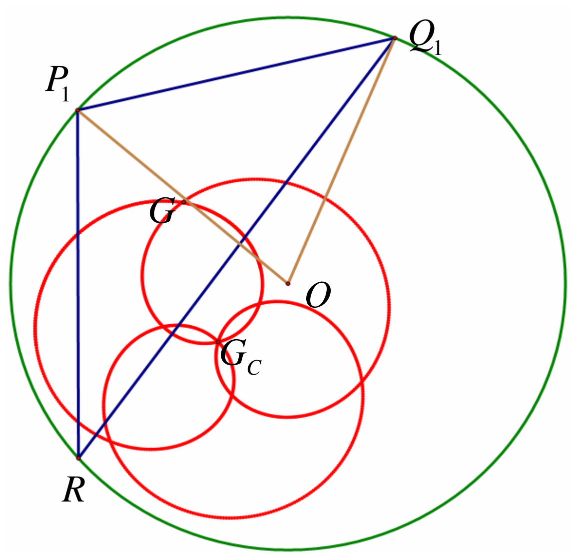
當**給定三角形一點及其重心即可決定一個圓內接三角形**

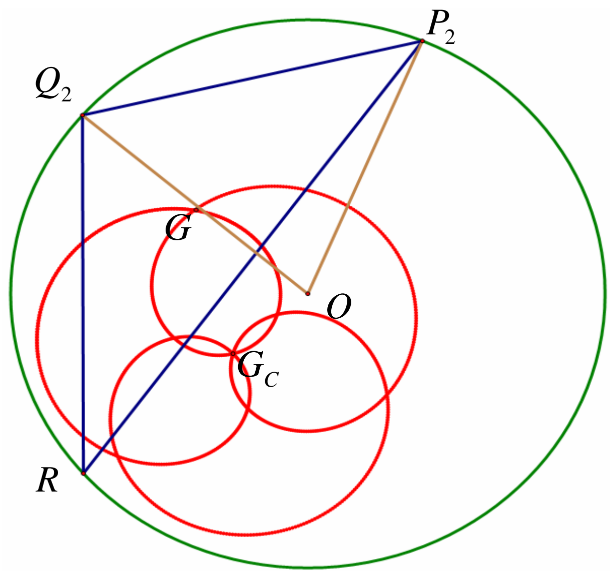
t_1時$P_1(r\cos(\theta+t_1),r\sin(\theta+t_1)),Q_1(r\cos kt_1,r\sin kt_1),R(c,d)$

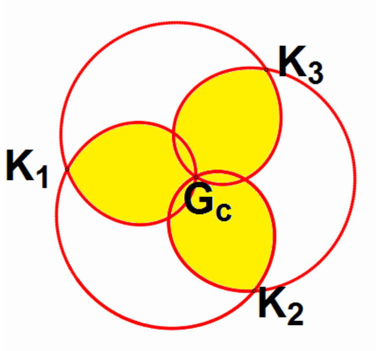
t_2時$P_2(r\cos(\theta+t_2),r\sin(\theta+t_2)),Q_1(r\cos kt_2,r\sin kt_2),R(c,d)$

$\because t_1\neq t_2$，$\therefore P_1\neq P_2,Q_1\neq Q_2$，又$\Delta P_1Q_1R$與$\Delta P_2Q_2R$是**同一個三角形**(如下圖)

故推得當$\angle P_1OP_2=\angle P_1OQ_1=(\theta+t_1)-(\theta+t_2)=t_1-t_2=\dfrac{360^o}{k+1}$時，重心位於環結點







重心軌跡圖會以類似左圖的方式呈現，軌跡圖中心$G_C(\frac{c}{3},\frac{d}{3})$，將

命名為「**環**」，且每個 K 點稱為「**環結**」，當

$\left|\dfrac{2}{3}r\cos\dfrac{\theta-(k-1)t}{2}\right|$=0 時 G 所在的點稱為「**環頂點**」，也就是G_C。

(2)環的數量與 k 之關係

環的數量與重心經過G_C的次數相同，當重心移到G_C時表示$\left|\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2}\right|$=0

$\Rightarrow\cos\frac{\theta-(k-1)t}{2}=0$，$0\le t\le 360^o$，$k\in Z\Rightarrow\frac{\theta-(k-1)t}{2}=(2n+1)90^o$，$n\in Z$

$\Rightarrow 0\le t=\frac{\theta-(2n+1)180^o}{k-1}\le 360^o$

$\frac{\theta}{k-1}+\frac{-(2n+1)180^o}{k-1}\le 360^O\Rightarrow\frac{-2n-1}{k-1}<2\Rightarrow -2n-1<2k-2\Rightarrow -n<k-\frac{1}{2}$

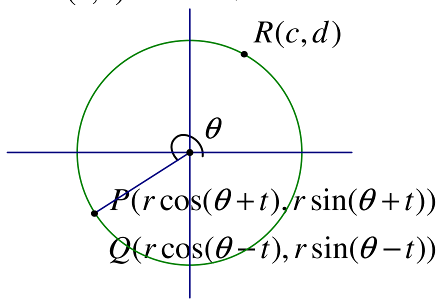
$\frac{\theta}{k-1}+\frac{-(2n+1)180^o}{k-1}\ge 0^O\Rightarrow\theta\ge(2n+1)180^o$，又$0^o\le\theta\le 180^o$

$\therefore -n\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le -n<k-\frac{1}{2}$，又$n\in Z$，推得當$\frac{\omega_Q}{\omega_P}=k$時，軌跡有**(k-1)個環。**

2.討論完同向動兩點的情況，接著討論反向動兩點的情況，先考慮角速度相同的情況，在不失一般性的情況下，可令兩動點**在同一位置上開始運動**。

令 P(rcos(θ+t), rsin(θ+t)) ，Q(rcos(θ-t), rsin(θ-t)) ， R(c,d)，0≦t＜2π

則重心軌跡 G(x,y)



x=$\frac{r\cos(\theta+t)+r\cos(\theta-t)+c}{3}=\frac{2r\cos\theta\cos(t)+c}{3}$

y=$\frac{r\sin(\theta+t)+r\sin(\theta-t)+d}{3}=\frac{2r\sin\theta\cos(t)+d}{3}$

$$\frac{y-\frac{d}{3}}{x-\frac{c}{3}}=\frac{\frac{2r\sin\theta\cos(t)}{3}}{\frac{2r\cos\theta\cos(t)}{3}}=\tan\theta\Rightarrow \text{y-x}\tan\theta-\frac{d}{3}+\frac{c}{3}\tan\theta=0$$

又$\because$0≦t＜2π $\therefore\frac{-2r\cos\theta+c}{3}\le x\le\frac{2r\cos\theta+c}{3}$，$\frac{-2r\sin\theta+d}{3}\le y\le\frac{2r\sin\theta+d}{3}$

重心軌跡為**一線段**

發現：

(1)**重心軌跡的長度為**$\frac{4r}{3}$

$$\sqrt{(\frac{2r\cos\theta+c}{3}-\frac{-2r\cos\theta+c}{3})^2+(\frac{2r\sin\theta+d}{3}-\frac{-2r\sin\theta+d}{3})^2}=\sqrt{(\frac{4r}{3})^2\cos^2\theta+(\frac{4r}{3})^2\sin^2\theta}=\frac{4r}{3}$$

(2)軌跡的**中心**為$(\frac{c}{3},\frac{d}{3})$

(3)軌跡到 **R 點的距離** d=$\left|\frac{2r}{3}\sin(\theta-\alpha)\right|$ 其中$\alpha=\tan^{-1}\frac{d}{c}$

$$\text{d}=\frac{\left|\text{y-xtan}\theta-\frac{d}{3}+\frac{c}{3}\tan\theta=0\right|}{\sqrt{1^2+(-\tan\theta)^2}}=\frac{\left|\frac{2d}{3}-\frac{2c}{3}\tan\theta\right|}{\sqrt{\sec^2\theta}}=\sqrt{\frac{(\frac{2d}{3})^2-\frac{4cd}{9}\tan\theta+(\frac{2c}{3})^2\tan^2\theta}{\sec^2\theta}}$$

$$=\sqrt{(\frac{2d}{3})^2\cos^2\theta-\frac{4cd}{9}\sin\theta\cos\theta+(\frac{2c}{3})^2\sin^2\theta}=\sqrt{(\frac{2c}{3}\sin\theta-\frac{2d}{3}\cos\theta)^2}$$

$$(\frac{2c}{3}\sin\theta-\frac{2d}{3}\cos\theta)=\frac{2r}{3}(\frac{c}{r}\sin\theta-\frac{d}{r}\cos\theta)=\frac{2r}{3}(\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\cos\theta)$$

(其中 $\alpha=\tan^{-1}\frac{b}{a}$)$=\frac{2r}{3}\sin(\theta-\alpha)$，d=$\frac{2r}{3}\left|\sin(\theta-\alpha)\right|$

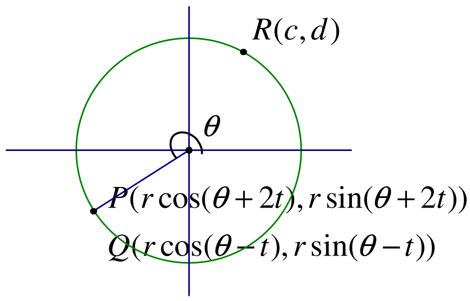
小結:此線段為一以($\frac{c}{3},\frac{d}{3}$)為**圓心**，**半徑為**$\frac{2r}{3}$，R 為圓上一點，與**此線段距離**$\frac{2r}{3}\left|\sin(\theta-\alpha)\right|$

接著討論動反向兩點的情況，角速度 1:2 的情況，同理，令兩動點在未動時位於同一位置。

令 P(rcos(θ+2t),rsin(θ+2t)) ，Q(rcos(θ-t),rsin(θ-t)) ，R(c,d)，0≤t＜2π

則重心軌跡 G(x,y)

$$\text{x}=\frac{r\cos(\theta+2t)+r\cos(\theta-t)+c}{3}=\frac{2r\cos(\theta+\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2})+c}{3}$$



$$\text{y}=\frac{r\sin(\theta+2t)+r\sin(\theta-t)+d}{3}=\frac{2r\sin(\theta+\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2})+d}{3}$$

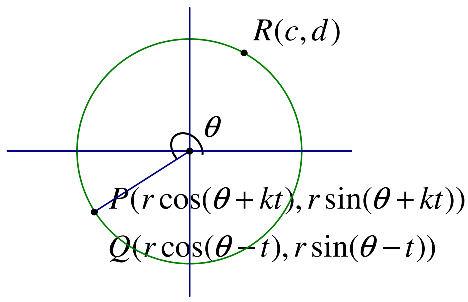
$$(\text{x-}\frac{\text{c}}{3})^2+(y-\frac{\text{d}}{3})^2=(\frac{2\text{r}}{3}\cos(\frac{3\text{t}}{2}))^2$$

推廣至角速度 1:k 的情況，同理，令兩動點在未動時位於同一位置

令 P(rcos(θ+kt),rsin(θ+kt)) ，Q(rcos(θ-t),rsin(θ-t)) ，R(c,d)，0≤t＜2π

則重心軌跡 G(x,y)

$$\text{x}=\frac{2r\cos(\theta+\frac{k-1}{2}t)\cos(\frac{k+1}{2}t)+c}{3}$$



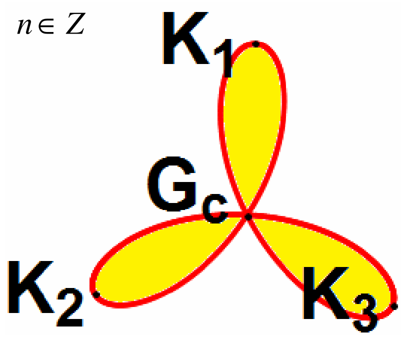
$$\text{y}=\frac{2r\sin(\theta+\frac{k-1}{2}t)\cos(\frac{k+1}{2}t)+d}{3}$$

$$(\text{x-}\frac{\text{c}}{3})^2+(y-\frac{\text{d}}{3})^2=(\frac{2\text{r}}{3}\cos(\frac{\text{k+1}}{2}\text{t}))^2$$

討論：反向動時，環的數量與 k 關係

環的數量與重心經過 G_C 的次數相同，當重心移到 G_C 時表示 $\left|\frac{2}{3}r\cos\frac{(k+1)t}{2}\right|$=0

$\Rightarrow\ \cos\dfrac{(k+1)t}{2}=0$，$0\le t\le 360^o$，$k\in Z \Rightarrow \dfrac{(k+1)t}{2}=(n+\dfrac{1}{2})180^o$，$n\in Z$



$\Rightarrow 0\le t=\dfrac{(2n-1)180^o}{k-1}\le 360^o$

$0\le\dfrac{(2n+1)180^o}{k+1}\le 360^o \Rightarrow 0\le 2n+1\le 2k+2 \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le n\le k+\dfrac{1}{2}$

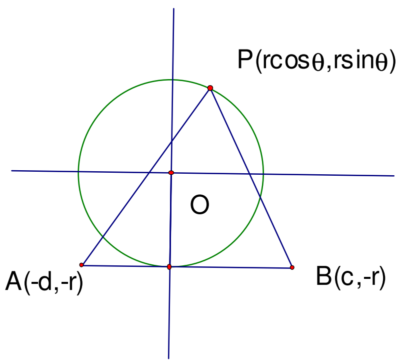
故推得當 $\dfrac{\omega_Q}{\omega_P}=k$ 時，軌跡圖有**(k+1)個環**

(k=1 時，動點雖經 G_C 過兩次，但**圖形已退化為線段**，**故沒有環**)

(二)雙動點之圓上切線上各一動點

P 為圓上動點，令其為 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$

Q 為線段上動點，令其為 $(t,-r)$ 且 $t\in[c,-d]$



重心 G $(\dfrac{r\cos\theta+t-d}{3},\dfrac{r\sin\theta-2r}{3})$

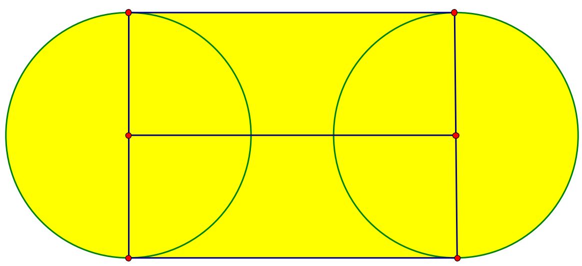
$t-d\in[c-d,-2d]$

可得參數式 $\begin{cases} x=\dfrac{r\cos\theta+t-d}{3} \\ y=\dfrac{r\sin\theta-2r}{3} \end{cases}$

因此推得軌跡方程式為 $(x-\dfrac{t-d}{3})^2+(y-\dfrac{-2r}{3})^2=(\dfrac{r}{3})^2$

小結：其軌跡為**一圓拖曳的結果**，圓心自 $(\dfrac{c-d}{3},\dfrac{-2r}{3})$ 拖曳到 $(\dfrac{-2d}{3},\dfrac{-2r}{3})$

面積為 $(\dfrac{r}{3})^2\pi+\dfrac{c+d}{3}\cdot\dfrac{2r}{3}=\dfrac{r^2}{9}\pi+\dfrac{2r(c+d)}{9}=\dfrac{r(r\pi-2c-2d)}{9}$



九、尤拉線的探討

圓內接三角形動一點的重心軌跡與垂心軌跡的圓半徑比為 1：3，而外心與重心連線長，及外心與垂心連線長，比例也是 1：3，故推論尤拉線上的點與外心的距離固定，則軌跡亦為圓。

> P 為一圓內接三角形 ABC 之尤拉線上的一點，A($r\cos\theta, r\sin\theta$)為圓上動點，B(c,d)、C(–c,d)為定點，則發現當 P 為 $t(\frac{r\cos\theta}{3},\frac{r\sin\theta+2d}{3})$ 時，軌跡為一**圓**，其**圓心在** $(0,\frac{2t}{3}d)$ **且半徑為** $\frac{|t|}{3}r$ 。

[証明]： O 為原點，G 是 ΔABC 之重心，P 在尤拉線上，令 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OG}$ ，則 P 可表示成

$$t(\frac{r\cos\theta}{3},\frac{r\sin\theta+2d}{3})$$

$$\Rightarrow x=t\frac{r\cos\theta}{3}, y=(\frac{r\sin\theta+2d}{3})t \Rightarrow \frac{3x}{t}=r\cos\theta, \frac{3y}{t}-2d=r\sin\theta$$

$$\therefore (\frac{3x}{t})^2+(\frac{3y}{t}-2d)^2=r^2 \Rightarrow (3x)^2+(3y-2dt)^2=t^2r^2 \Rightarrow x^2+(y-\frac{2t}{3}d)^2=(\frac{t}{3})^2r^2$$

圓心在 $(0,\frac{2t}{3}d)$ 且半徑為 $\frac{|t|}{3}r$ 的圓上

伍、結論

本研究主要探討圓錐曲線上**兩定點**、**一動點之五心及費馬點軌跡**，有以下發現：

(1)重心的軌跡有「**複製性**」─重心的生成曲線是**原運動軌跡的縮影**，某些**特定值**會縮為$\frac{1}{3}$，例如：運動軌跡為**圓**，則生成曲線的**半徑**會變為原半徑的$\frac{1}{3}$；運動軌跡為**拋物線**，則生成曲線的**焦距**會變為原焦距的$\frac{1}{3}$。

(2)當$\overline{AB}$是圓上之弦時，其外心軌跡為點(圓心)；其他情況，外心軌跡大多為**射線**、**線段**或者是**直線**。

(3)當$\overline{AB}$是圓上之弦，其垂心軌跡為一**等大之圓**；當 A,B 為橢圓焦點，其垂心軌跡方程式是 **y 為二次方，x 為四次方的曲線**；當 A,B 為橫橢上平行或垂直長軸之兩點時，其垂心軌跡為一**直橢**。此外，垂心具有「**對偶性**」，將 P 置換在生成曲線上運動時，垂心軌跡則是**原本的運動軌跡**。

(4)當 A,B 為橢圓焦點，其內心軌跡為**長軸 2c**，**短軸**$\frac{2c}{a+c}$**的橢圓**；當 A,B 為雙曲線焦點，其內心軌跡為**切於雙曲線頂點的切線線段**，其**長度等於共軛軸長**。

(5)傍心僅討論圓錐曲線─當 A,B 為橢圓焦點，其生成曲線分別為**長軸**$\frac{2c}{a-c}$，**短軸 2c 的直橢**及**兩條切於橢圓長軸端點的直線**；當 A,B 為雙曲線焦點，其生成曲線分別為**貫軸 2c**，**共軛軸分別為**$\frac{2c}{c+a}$**、**$\frac{2c}{c-a}$**的兩條雙曲線**及**四條起點分別為**$(\pm1,1)$**、**$(\pm1,-1)$**且平行共軛軸的射線**。

(6)費馬點因其特性：費馬點**與頂點連線的夾角**恆為 120°，因此軌跡為**兩上下對稱的圓弧**。

(7)圓上雙動點的重心軌跡為**玫瑰線(請參見參考資料四)**。當速率比為 1:k 時($k \in Z$)，順向會產生向**內**的環，反向則產生向**外**的環；且會產生$|k-1|$個環。

(8)將生成軌跡**疊代**時，無限多次後，重心會**收斂於一點**；垂心則有**對偶性**。

陸、展望

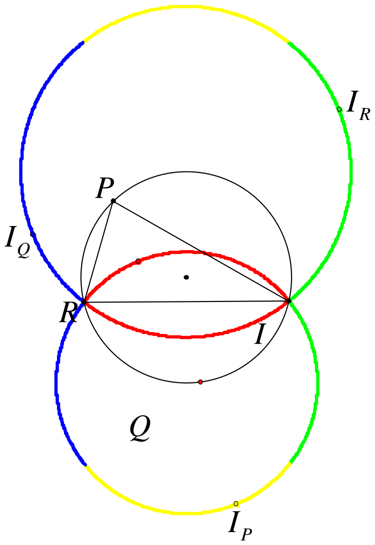
希望能推廣下列結果：

一、**特殊的點**不只有上述幾個點，之前我們試過讓圓內接三角形跑耐吉爾點的軌跡(如下圖二)，發現了一個很特殊的曲線，還有反向雙動點($k=-2$)時傍心的軌跡(如下圖三)，但尚未發現代數關係式。

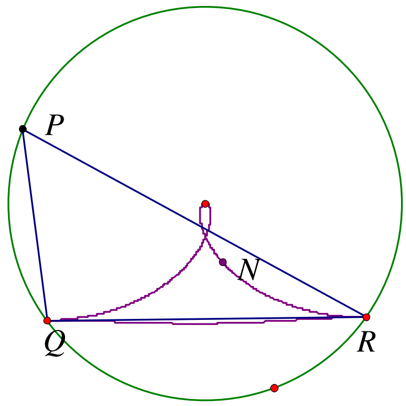
二、我們已經畫出圓內單動點的**內心及傍心軌跡**，也得到參數式，但是尚未推出方程式；從 GSP 實驗中已得知內心與傍心軌跡合起來是兩個圓(如下圖一)，只是還沒有正式的證明。

三、我們將橢圓上兩定點推廣到平行長軸或平行短軸的情況，希望可以將兩定點推廣到**任一弦或任兩點**。

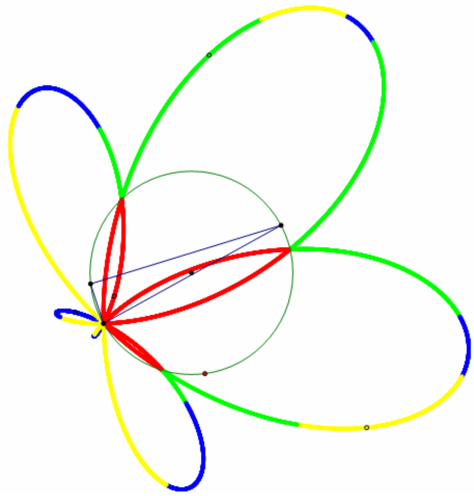
四、**圓的雙動點**目前只有討論重心軌跡，有實驗過其他特殊心，其中很特殊的為傍心，但尚未正式證明，未來希望有所突破，進一步寫出軌跡方程式。



(圖一)



(圖二)


(圖三)

柒、參考資料

1.南一版數學課本第四冊第一章「圓錐曲線」。

2.顏貽隆(民國 93 年)兩直角三角形族的各心軌跡─GSP 數學實驗舉隅。數學傳播 29 卷 3 期，p.27~p.37。

3. 李豪韋、郭令波、詹士緯、佘宥逵(民國 97 年)四十九屆中小學科學展覽作品說明書《截斷鐵三角─平行與垂直的作圖異想》

4.http://mathworld.wolfram.com/Rose.html

【評語】040416

1、 此作品旨在討論平面上三角形之某些頂點移動產生之若干心的移動軌跡，然而作者群所涉獵之類型過多，導致其所得結論較為鬆散，失去焦點。

2、 就作品主題而言，作者群可進行反向思考來討論，在某些情形之下，某類心之移動軌跡不為曲線或直線之情形。