中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040415

詭譎的 karprekar constant

學校名稱：基隆市立安樂高級中學

作者：	指導老師：
高二 李啟安	林俊傑
高二 張聖芬	

關鍵詞：固定數、卡布列克數

詭譎的 Kaprekar constant

摘要

當有一數字不完全一樣的四位數，進行 r 進位($r\geq 3$)Kaprekar’s operation 時至少有一 Kaprekar constant 或封閉迴路，經分析，若 Kaprekar constant 存在，則可分為 14 種情況討論，發現到只有當 $r=4$、5t 時才存在唯一的 Kaprekar constant。在尋找 Kaprekar constant 的一般性時，經研究發現：(一)當 r 為正偶數，一個 n 位數的 $h_M=(r-1,r-2,\cdots,1,0)$時，h_M-h_m 即為 Kaprekar constant；此外，當所有數字皆為 T 個時，亦有此一性質。(二)當 r 為正奇數，$h_M=(r-1,\cdots,r-1,r-2,\cdots,r-2,\cdots,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中 0 為 T 個，其餘數字皆為 2T 個，則 h_M-h_m 即為 Kaprekar constant；此外，0 為 T 個，$r-1$ 為 nT 個，其餘皆為 $2T(n-1)$個時，亦有此一性質。

壹、研究動機

在學校的數學專題課中，老師介紹有關 Kaprekar constant 之性質，其中任一四位數經重新排列後經最多七次的 Kaprekar’s operation，均可得到 6174。之後便開始尋找相關資料，發現十進位的 Kaprekar constant 已被探討，但對其他進位的討論卻寮寮無幾，因此我們即著手研究其他進位是否也有此一性質的 Kaprekar constant，希望能更深入探討數字所存在的秘密與規律。

貳、研究目的

一、在十進位的情況，探討三、四、五位數的 Kaprekar’s operation，結果應是如何。

二、在四位數 r 進位中，尋找 Kaprekar constant 的可能性。

三、在 r 進位中($r\in N$，$r\geq 3$)，試著尋找 Kaprekar constant 的一般性。

參、研究設備與器材

計算紙、筆

肆、研究過程與方法

一、定義

【定義 1】: 我們用$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示一個 n 位數，例：$(a,b,c,d)=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$

【定義 2】: 令 $H_n=X_n-\{\overbrace{(p,\cdots,p)}^{n}\mid p=0,1,\cdots,r-1\}$，其中 X_n 爲任意 n 位數(0 可以放前面)，而 H_n 表示爲所有數字不完全一樣的 n 位數。

【定義 3】: 若 $h\in H_n$，是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 所組成，將此 n 位數重新排列，所得的最大值爲 h_M，最小值爲 h_m，即 $h_M=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$h_m=(x_n,\cdots,x_2,x_1)$，其中 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$。

【定義 4】: 若 $h\in H_n$，h_M-h_m 所得的新數之過程稱之爲 Kaprekar's operation。

例如：當一個四位數十進位時：1746　由大到小　7641

由小到大　-1467

= 6174

$$\begin{array}{lr} \text{由大到小} & 7641 \\ \text{由小到大} & -1467 \\ \hline & =\ 6174 \end{array}$$

【定義 5】: 若 $h\in H_n$，滿足 $h=h_M-h_m$，我們稱 h 爲 Kaprekar constant。

二、探討四位數時 r 進位的 Kaprekar's operation

【命題 1】當 $h\in H_4$，由 a,b,c,d 所組成，若 $h_M=(a,b,c,d)$，當加入 1001n，$1\leq n\leq r-1-a$ 時，經由 Kaprekar's operation 所得之數與原四位數不變。

【證明 1】

(1)當 b>c

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline & (a-d) & (b-1-c) & (r-1+c-b) & (r+d-a) \end{array} \xrightarrow{+1001n} \begin{array}{rcccc} & (a+n) & b & c & (d+n) \\ - & (d+n) & c & b & (a+n) \\ \hline & (a-d) & (b-1-c) & (r-1+c-b) & (r+d-a) \end{array}$$

(2)當 b=c 時同(1)

【命題 2】當 $h\in H_4$，由 a,b,c,d 所組成，若 $h_M=(a,b,c,d)$，當加入 110n，$1\leq n\leq r-1-b$ 時，經由 Kaprekar's operation，所得之數與原四位數不變。

【證明 2】如上

【命題 3】當 h∈H_4，由 a,b,c,d 所組成，若 h_M＝(a,b,c,d)，令 p＝a－d，q＝b－c，則

(a,b,c,d)－(d,c,b,a)＝(p,q,0,0)－(0,0,q,p)爲方便討論，我們將

(p,q,0,0)－(0,0,q,p)表示爲＜p,q＞。

【證明 3】

(1)當 b>c

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline & (a-d) & (b-1-c) & (r-1+c-b) & (r+d-a) \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & p & q & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & q & p \\ \hline & (p) & (q-1) & (r-1-q) & (r-p) \end{array}$$

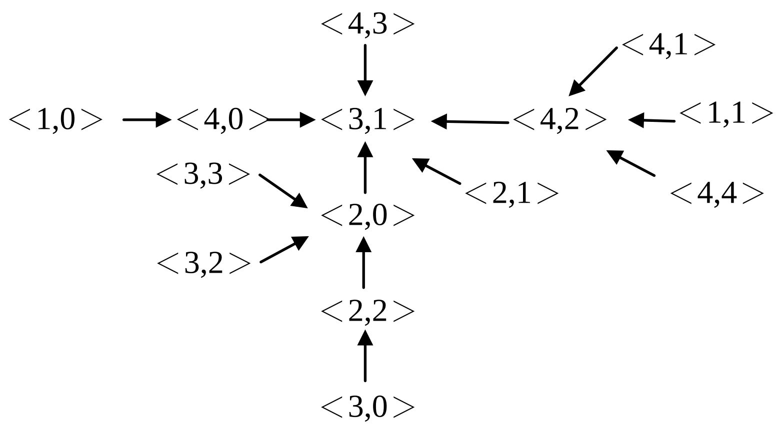
將 p＝a-d，q＝b-c 代入，即得證。

(2)當 b=c 時同(1)

例如：當五進位時，令一數 h=2031，則 h_M=3210，h_M 加上 1001 再加上 220 即爲 4431，因此 2031 可被歸納爲 4431 此一類。(3210－0123 = 4431－1344＝＜3,1＞)

所以所有的四位數五進位時的情況下即可歸類出下列 14 種情況：

4443，4442，4441，4440，4433，4432，4431，4430，4422，4421，4420，4411，4410，4400。



所以當 3210 = <3,1>時，可輕易推得一最終值 3032，即爲四位數五進位的 Kaprekar constant。

三、在三、四位數時 r 進位的 Kaprekar constant

【命題 4】對任意三位數，則只有當 r 爲正偶數時(r≥4)，存在 Kaprekar constant，且是唯一。

【證明 4】

令此三位數 h_M=(a,b,c)，h_m=(c,b,a)，若 $h = h_M - h_m$ 則 h 即爲 Kaprekar constant。

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline & (a-1-c) & (r-1) & (r+c-a) \end{array}$$

abc 經排列後有 6 種可能性，因為 $a \neq a-1-c$ 又 $c \neq r+c-a$，所以可得到①cab、②cba 這 2 種可能性。

我們分別就這 2 種情況，一一討論其可能性：

① 當 h = (c,a,b)，則 $\begin{cases} a-1-c=c \\ r-1=a \\ r+c-a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=r-1 \\ b=\dfrac{r}{2} \\ c=\dfrac{r-2}{2} \end{cases} \Rightarrow r=2t(t\geq 2)$

② 當 h=(c,b,a)時，則 $\begin{cases} a-1-c=c \\ r-1=b \\ r+c-a=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2r-1}{3} \\ b=r-1 \\ c=\dfrac{r-2}{3} \end{cases} \Rightarrow r=2$ (不合)

因此我們得知當 $h \in H_3$，只有當 r 為偶數，才有唯一的 Kaprekar constant。

【命題 5】對任意四位數，則只有 4、5t (t∈N)進位，存在 Kaprekar constant，且是唯一。

【證明 5】

令此四位數 h_M=(a,b,c,d)，h_m＝(d,c,b,a)，若 $h=h_M-h_m$ 則 h 即為 Kaprekar constant。

(1)當 b＞c 時，r≥3

	a	b	c	d
－	d	c	b	a
	(a-d)	(b-1-c)	(r-1+c-b)	(r+d-a)

abcd 經排列後有 24 種可能性，因為 $b \neq b-1-c$ 又 $d \neq r+d-a$，所以可得到①acdb、②adbc、③adcb、④badc、⑤bcda、⑥bdac、⑦bdca、⑧cabd、⑨cdab、⑩cdba、⑪dabc、⑫dacb、⑬dcab、⑭dcba 這 14 種可能性。

我們分別就這 14 種情況，一一討論其可能性：

① 當 h = (a,c,d,b)，則 $\begin{cases} a-d=a \\ b-1-c=c \\ r-1+c-b=d \\ r+d-a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-r+3 \\ b=2r-3 \\ c=r-2 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow r=2$(不合)

② 當 h = (a,d,b,c)，則$\begin{cases} a-d=a \\ b-1-c=d \\ r-1+c-b=b \\ r+d-a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=r-2 \\ c=r-3 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow r=\begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases}$

當 r = 4 時，(a,b,c,d) = 3210，所以 h = (a,d,b,c) = 3021

當 r = 5 時，(a,b,c,d) = 3320，所以 h = (a,d,b,c) = 3032

③ 當 h = (a,d,c,b)，則$\begin{cases} a-d=a \\ b-1-c=d \\ r-1+c-b=c \\ r+d-a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=r-1 \\ c=r-2 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow r=2$(不合)

④ 當 h = (b,a,d,c)，則$\begin{cases} a-d=b \\ b-1-c=a \\ r-1+c-b=d \\ r+d-a=c \end{cases} \Rightarrow c+d=-1$ (不合)

⑤ 當 h = (b,c,d,a)，則$\begin{cases} a-d=b \\ b-1-c=c \\ r-1+c-b=d \\ r+d-a=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=r-1 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=r-2 \end{cases} \Rightarrow r=2$(不合)

⑥ 當 h = (b,d,a,c)，則$\begin{cases} a-d=b \\ b-1-c=d \\ r-1+c-b=a \\ r+d-a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{5}r-1 \\ b=\frac{3}{5}r \\ c=\frac{2}{5}r \\ d=\frac{r}{5}-1 \end{cases} \Rightarrow r=5t$ ， $t \in N$

⑦ 當 h = (b,d,c,a)，則$\begin{cases} a-d=b \\ b-1-c=d \\ r-1+c-b=c \\ r+d-a=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=r-1 \\ c=2r-4 \\ d=2-r \end{cases} \Rightarrow r=2$(不合)

⑧ 當 h = (c,a,b,d)，則$\begin{cases} a-d=c \\ b-1-c=a \\ r-1+c-b=b \\ r+d-a=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{5}r-1 \\ b=\dfrac{4}{5}r-1 \\ c=\dfrac{r}{5} \\ d=\dfrac{2}{5}r-1 \end{cases} \Rightarrow r \le -5$(不合)

⑨ 當 h = (c,d,a,b)，則$\begin{cases} a-d=c \\ b-1-c=d \\ r-1+c-b=a \\ r+d-a=b \end{cases} \Rightarrow a-b=-1$(矛盾)

⑩ 當 h = (c,d,b,a)，則$\begin{cases} a-d=c \\ b-1-c=d \\ r-1+c-b=b \\ r+d-a=a \end{cases} \Rightarrow a-b=-1$(矛盾)

⑪ 當 h = (d,a,b,c)，則$\begin{cases} a-d=d \\ b-1-c=a \\ r-1+c-b=b \\ r+d-a=c \end{cases} \Rightarrow a=-2$(矛盾)

⑫ 當 h = (d,a,c,b)，則$\begin{cases} a-d=d \\ b-1-c=a \\ r-1+c-b=c \\ r+d-a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=r-1 \\ c=r-4 \\ d=1 \end{cases}$ (不合)

⑬ 當 h = (d,c,a,b)，則$\begin{cases} a-d=d \\ b-1-c=c \\ r-1+c-b=a \\ r+d-a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3}r-2 \\ b=\dfrac{2}{3}r+1 \\ c=\dfrac{r}{3} \\ d=\dfrac{r}{3}-1 \end{cases} \Rightarrow a<b$(矛盾)

⑭ 當 h = (d,c,b,a)，則$\begin{cases} a-d=d \\ b-1-c=c \\ r-1+c-b=b \\ r+d-a=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3}r \\ b=\frac{2}{3}r-1 \\ c=\frac{r}{3}-1 \\ d=\frac{r}{3} \end{cases} \Rightarrow c<d$ (不合)

(2)當 b=c 時，$r \geq 3$

	a	b	c	d
—	d	c	b	a
	(a-1-d)	(r-1)	(r-1)	(r+d-a)

abcd 經排列後有 24 種可能性，因爲 a-1-d≠a 又 r-1≠d 又 r+d-a≠d，所以可得到①dabc、②dacb、③dbac、④dbca、⑤dcab、⑥dcba 這 6 種可能性。

① 當 h = (d,a,b,c)，則$\Rightarrow \begin{cases} a-1-d=d \\ r-1=a \\ r-1=b \\ r+d-a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=r-1 \\ b=r-1 \\ c=\frac{r}{2} \\ d=\frac{r}{2}-1 \end{cases} \Rightarrow c=d+1$(矛盾)

② 當 h = (d,a,c,b)，則$\Rightarrow \begin{cases} a-1-d=d \\ r-1=a \\ r-1=c \\ r+d-a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=r-1 \\ b=\frac{r}{2} \\ c=r-1 \\ d=\frac{r}{2}-1 \end{cases} \Rightarrow b=r$ (不合)

③ 當 h = (d,b,a,c)，則$\Rightarrow \begin{cases} a-1-d=d \\ r-1=b \\ r-1=a \\ r+d-a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=r-1 \\ b=r-1 \\ c=\frac{r}{2} \\ d=\frac{r}{2}-1 \end{cases} \Rightarrow r=2$ (不合)

④ 當 h = (d,b,c,a)，則$\Rightarrow\begin{cases}a-1-d=d\\r-1=b\\r-1=c\\r+d-a=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}r-\frac{1}{3}\\b=r-1\\c=r-1\\d=\frac{r}{3}-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow r\le 2$(不合)

⑤ 當 h = (d,c,a,b)，則$\Rightarrow\begin{cases}a-1-d=d\\r-1=c\\r-1=a\\r+d-a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=r-1\\b=\frac{r}{2}\\c=r-1\\d=\frac{r}{2}-1\end{cases}\Rightarrow b=r$(不合)

⑥ 當 h = (d,c,b,a)，則$\Rightarrow\begin{cases}a-1-d=d\\r-1=c\\r-1=b\\r+d-a=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}r-\frac{1}{3}\\b=r-1\\c=r-1\\d=\frac{r}{3}-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow r=2$(不合)

因此我們得知當 $h\in H_4$，只有 r＝4,5t，$t\in N$ 才有唯一的 Kaprekar constant，只要依照這個方法，當 $h\in H_4$ 皆可以找到 Kaprekar constant，但如此一一討論實在太費時，因此我們希望是否能透過特定方式，找到 Kaprekar constant 的一般性。

四、n 位數時 r 進位的 Kaprekar constant

【命題 6】若 $h\in H_n$ 爲 Kaprekar constant，則 h_M＝((r－1),⋯,(r－1),x_1,⋯,x_s,y_s,⋯,y_1)，其中可分成兩種情況：

(1) $x_i+y_i=r-1$，$1\le i\le s$

(2) 存在唯一的 i 與 j，使得 $x_i+y_i=r-2$，$x_j+y_j=r$，且 $x_t+y_t=r-1$，$t\ne i,j$

【證明 6】

令 $h \in H_n$，由 $a_1,\cdots,a_s,a_{s+1},\cdots,a_{n-s},a_{n-s+1},\cdots,a_n$ 所組成，若 $a_1 \geq \cdots \geq a_s \geq a_{s+1}$,，$a_{s+1}=\cdots=a_{n-s}$，$a_{n-s} \geq a_{n-s+1} \geq \cdots \geq a_n$，$a_1 \neq a_n$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
h_M = & a_1 \cdots\cdots & a_r \cdots\cdots\cdots & a_s & \overbrace{a_{s+1} \cdots a_{n-s}}^{T} & a_{n-s+1} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{n-r} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_n \\
h_m = & a_n \cdots\cdots & a_{n-r} \cdots\cdots\cdots & a_{n-s+1} & a_{n-s} \cdots a_{s+1} & a_s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_r \cdots\cdots\cdots\cdots & a_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(a_1-a_n)\cdots(a_r-a_{n-r})\cdots(a_s-a_{n-s+1}-1)(r-1)\cdots(r-1)\ (r-1+a_{n-s+1}-a_s)\cdots(r-1+a_{n-r}-a_r)\cdots(r+a_n-a_1)$$

和為 r-2

和為 r-1

和為 r

所以 $h_M-h_m=b_1\cdots b_r\cdots b_s(r-1)\cdots(r-1)(r-2-b_s)\cdots(r-1-b_r)\cdots(r-b_1)$，其中 $b_r=a_r-a_{n-r}$

令 $t_1=\max\{b_1,r-b_1\}$，$t_s=\max\{b_s,r-2-b_s\}$，$t_r=\max\{b_r,r-1-b_r\}$，$2 \leq r \leq s-1$

將 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 按大小重新排列為 $x_1,x_2,\cdots,x_s$

將 $r-b_1,r-2-t_s,r-1-t_2,\cdots,r-1-t_{s-1}$ 按大小重新排列成 $y_s,\cdots,y_2,y_1$

因為 h 為 Kaprekar constant，因此 $h_M=((r-1),\cdots,(r-1),x_1,\cdots,x_s,y_s,\cdots,y_1)$的型式。

(1) 當 $b_1=b_s+1$時，則 $r-1+a_{n-s+1}-a_r = r-2-b_s < r-1-b_s = r-b_1 = r+a_n-a_1$

因此重新排列後，除原先和為 r－1 依然為 r－1，而和為 r－2 與 r 因相互調換位置，和全變成 r－1

(2) 當 $b_1 \neq b_s+1$，

①$b_1 > b_s+1$ 時，$r-1+a_{n-s+1}-a_r = r-2-b_s > r-1-b_1 > r-b_1 = r+a_n-a_1$

②$b_1 \leq b_s$ 時，$r+a_n-a_1 = r-b_1 \geq r-b_s > r-2-b_s = r-1+a_{n-s+1}-a_r$

因此 b_1，b_s，$r-2-b_s$，$r-b_1$，這四個數依大小排列可能只有下列情況

b_1，b_s，$r-2-b_s$，$r-b_1$　或 $r-b_1$，$r-2-b_s$，b_s，b_1　或

b_s，b_1，$r-b_1$，$r-2-b_s$　或 $r-2-b_s$，$r-b_1$，b_1，b_s

因此存在唯一的 i 與 j，使得 $x_i+y_i=r-2$，$x_j+y_j=r$，且 $x_t+y_t=r-1$，$t \neq i,j$

現在，我們思考是否能找到在任何進位 Kaprekar constant 所擁有的型式，基於【命題 5】，如果 $a_{\frac{n}{2}} \neq a_{\frac{n}{2}+1}$ 的情況下，那 $\overbrace{(r-1)\cdots(r-1)}^{T}$ 的情況就不會發生，那又需滿足那些條件，能符合上述【命題 5】 (1)的部份，使得 $x_i + y_i = r-1$，如此，若此數為 Kaprekar constant，那經大小排列後，會呈現前後和為 r－1

我們考慮 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_r \geq \cdots \geq x_n > x_{n+1} \geq \cdots \geq x_{2n-r+1} \geq \cdots \geq x_{2n-1} \geq x_{2n}$ 且 $x_1 = r-1,\ \ x_{2n} = 0$，$x_n = x_{n+1} + 1$，

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & x_1 & \cdots & x_r & \cdots & x_n & & x_{n+1} & \cdots & x_{2n-r+1} & \cdots & x_{2n} & \\
 & x_{2n} & \cdots & x_{2n-r+1} & \cdots & x_{n+1} & & x_n & \cdots & x_r & \cdots & x_1 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$(x_1-x_{2n})\cdots(x_r-x_{2n-r+1})\cdots(x_n-x_{n+1}-1)\ \ (r-1+x_{n+1}-x_n)\cdots(r-1+x_{2n-r+1}-x_r)\cdots(r+x_{2n}-x_1)$$

和為 r-2

和為 r-1

和為 r

因為 $x_1 - x_{2n} = r-1$；$r-1+x_{n+1}-x_n = r-1+x_{n+1}-(x_{n+1}+1) = r-2$

由【命題 5】，知道前後的和必為 r－1，因此

因此若此數 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n})$ 為 Kaprekar constant，則重新排列後，最大值減最小值必為 $(y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y_n, (r-1-y_n), (r-1-y_{n-1}), \cdots, (r-1-y_2), (r-1-y_1))$ 的類型。

【命題 7】若 r 為正偶數，h 為 Kaprekar constant，由 r－1,r－2,⋯,1,0 所組成，則
$h_M = (r-1, r-2, \cdots, 1, 0)$

【證明 7】

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
h_M = & r-1 & r-2 & r-3 & \cdots & \frac{r}{2}+1 & \frac{r}{2} & \frac{r}{2}-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\
h_m = & 0 & 1 & 2 & \cdots & \frac{r}{2}-2 & \frac{r}{2}-1 & \frac{r}{2} & \cdots & r-3 & r-2 & r-1 \\
\hline
h\ = & \underbrace{r-1 \quad r-3 \quad r-5 \quad \cdots \quad 3}_{\text{奇數}} & & & & & 0 & \underbrace{r-2 \qquad 4 \quad 2}_{\text{偶數}} & & & & 1
\end{array}
$$

很明顯可看出h的組成與 h_M 一樣，因此 $(r-1, r-2, \cdots, \frac{r}{2}+1, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}-1, \cdots 2, 1, 0)$ 為 Kaprekar constant。

我們繼續深入探討，試著找出更一般式的結果：依【命題 5】，

$h_M=(r-1,\cdots,r-1,r-2,\cdots r-2,\ \cdots\cdots\cdots\ ,\frac{r}{2},\cdots,\frac{r}{2},\frac{r}{2}-1,\cdots\frac{r}{2}-1,\ \cdots\cdots\cdots\ ,1,\cdots,1,0,\cdots0)$

每個數字皆有 T 個，$T>0$

證明如同上述，不再重複。

例如：在六進位中，$h_M=543210$，則 $h=h_M-h_m=543210-012345=530421$ 爲 Kaprekar constant。

在八進位中，$h_M=7766554433221100$，則 $h=7755331066442201$ 爲 Kaprekar constant。

但在十進位中，當 $h_M=9988775544221100$，則 $h=9977551088442201$ 及當 $h_M=$ 987665433210，則 $h=975330866421$ 都是 Kaprekar constant。

因此我們想說每個數字個數不一定要相同。

考慮：$h_M=(\overbrace{r-1,\cdots,r-1}^{T_0},\overbrace{r-2,\cdots r-2}^{T_1},\ \cdots\cdots\cdots\ ,\overbrace{\frac{r}{2},\cdots,\frac{r}{2}}^{T_{\frac{r}{2}-1}},\overbrace{\frac{r}{2}-1,\cdots\frac{r}{2}-1}^{T_{\frac{r}{2}-1}},\ \cdots\cdots\cdots\ ,\overbrace{1,\cdots,1}^{T_1},\overbrace{0,\cdots0}^{T_0})$

依照【命題 6】的證明方式，我們可以找出：

當四進位時：$h_M=(\overbrace{3,\cdots,3}^{V},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1\cdots,1}^{T},\overbrace{0\cdots0}^{V})$，$V>0$，$T>0$

當六進位時：$h_M=(\overbrace{5,\cdots,5}^{V},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{T},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$，$V>0$，$T>0$

當八進位時：$h_M=(\overbrace{7,\cdots,7}^{V},\overbrace{6,\cdots,6}^{T},\overbrace{5,\cdots,5}^{T},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{T},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$，$V>0$，$T>0$

當十進位時：$h_M=(\overbrace{9,\cdots,9}^{V},\overbrace{8,\cdots,8}^{T},\overbrace{7,\cdots,7}^{T},\overbrace{6,\cdots,6}^{S},\overbrace{5,\cdots,5}^{T},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{S},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$

$V>0$，$T>0$，$S\geq 0$

當十二進位時：$h_M=(\overbrace{B,\cdots,B}^{V},\overbrace{A,\cdots,A}^{T},\overbrace{9,\cdots,9}^{T},\overbrace{8,\cdots,8}^{T},\overbrace{7,\cdots,7}^{T},\overbrace{6,\cdots,6}^{T}$

$\overbrace{5,\cdots,5}^{T},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{T},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$，$V>0$，$T>0$

當十四進位時：$h_M=(\overbrace{D,\cdots,D}^{V},\overbrace{C,\cdots,C}^{T},\overbrace{B,\cdots,B}^{T},\overbrace{A,\cdots,A}^{T},\overbrace{9,\cdots,9}^{T},\overbrace{8,\cdots,8}^{T},\overbrace{7,\cdots,7}^{T}$

$\overbrace{6,\cdots,6}^{T},\overbrace{5,\cdots,5}^{T},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{T},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$，$V>0$，$T>0$

當十六進位時：$h_M=$ $(\overbrace{F,\cdots,F}^{V},\overbrace{E,\cdots,E}^{T},\overbrace{D,\cdots,D}^{T},\overbrace{C,\cdots,C}^{S},\overbrace{B,\cdots,B}^{T},\overbrace{A,\cdots,A}^{S},\overbrace{9,\cdots,9}^{S},\overbrace{8,\cdots,8}^{T}$
$\overbrace{7,\cdots,7}^{T},\overbrace{6,\cdots,6}^{S},\overbrace{5,\cdots,5}^{S},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{S},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$，$V>0$，$T>0$，$S\geq 0$

當十八進位時：$h_M=$ $(\overbrace{H,\cdots,H}^{V},\overbrace{G,\cdots,G}^{T},\overbrace{F,\cdots,F}^{T},\overbrace{E,\cdots,E}^{S},\overbrace{D,\cdots,D}^{T},\overbrace{C,\cdots,C}^{S},\overbrace{B,\cdots,B}^{S},\overbrace{A,\cdots,A}^{S},\overbrace{9,\cdots,9}^{T}$
$\overbrace{8,\cdots,8}^{T},\overbrace{7,\cdots,7}^{S},\overbrace{6,\cdots,6}^{S},\overbrace{5,\cdots,5}^{S},\overbrace{4,\cdots,4}^{T},\overbrace{3,\cdots,3}^{S},\overbrace{2,\cdots,2}^{T},\overbrace{1,\cdots,1}^{T},\overbrace{0,\cdots,0}^{V})$

$V>0$，$T>0$，$S\geq 0$

其中 $A=10$，$B=11$，$C=12$，$D=13$，$E=14$，$F=15$，$G=16$ $H=17$

【命題 8】若 r 爲正奇數，h 爲 Kaprekar constant，由 r－1,r－2,⋯,1,0 所組成，則 h_M＝(r－1,⋯,r－1,r－2,⋯,r－2,⋯,1,⋯,1,0,⋯,0)，其中 0 爲 T 個，r－1 爲 nT 個，其餘皆爲 2T(n－1)個。

【證明 8】

$$h_M=\ r-1\ \cdots\cdots\ r-1\quad r-2\ \cdots\cdots\ r-2\cdots\cdots\frac{r+1}{2}\cdots\cdots\cdots\frac{r+1}{2}\ \frac{r-1}{2}\cdots\cdots\cdots\frac{r-1}{2}\ \frac{r-3}{2}\ \cdots\cdots 1\cdots\cdots 1\quad 0\cdots 0$$

$$h_m=\ 0\cdots 0\quad 1\cdots 1\quad 1\cdots 1\quad 2\cdots 2\ \cdots\cdots\frac{r-3}{2}\cdots\frac{r-3}{2}\ \frac{r-1}{2}\cdots\frac{r-1}{2}\ \frac{r-1}{2}\cdots\frac{r-1}{2}\ \frac{r+1}{2}\cdots\frac{r+1}{2}\ \frac{r+1}{2}\cdots\frac{r+1}{2}\cdots r\text{-}1\cdots r\text{-}1\ r\text{-}1\cdots r\text{-}1$$

$$r\text{-}1\cdots r\text{-}1\ r\text{-}2\cdots r\text{-}2\ r\text{-}3\cdots r\text{-}3\ r\text{-}4\cdots r\text{-}4\cdots\cdots 2\cdots\cdots 2\quad 1\cdots\cdots 1\ 0\quad r\text{-}1\cdots r\text{-}1\quad r\text{-}2\cdots r\text{-}2\quad r\text{-}3\cdots r\text{-}3\cdots\cdots 1\cdots\cdots 1\quad 0\cdots 0\ 1$$

因此明顯得證。

例如：在五進位中，h_M＝443322110，則 h=h_M -hm＝432043211 爲 Kaprekar constant。

在九進位中，h_M＝8887777666655554444333322221110，則

$h=877665544332210887766554433221111$ 爲 Kaprekar constant。

但在七進位中，當 h_M＝66554332110，則 $h=65430653211$ 爲 Kaprekar constant。

並不符合【命題 8】的型式。

如同偶進位的情況，我們考慮

考慮：

$$h_M=(\overbrace{r-1,\cdots,r-1}^{nT},\overbrace{r-2,\cdots r-2}^{T_{r-2}},\ \cdots,\overbrace{\frac{r+1}{2},\cdots,\frac{r+1}{2}}^{T_{\frac{r+1}{2}}},\overbrace{\frac{r-1}{2},\cdots,\frac{r-1}{2}}^{2T(n-1)},\overbrace{\frac{r-3}{2},\cdots\frac{r-3}{2}}^{T_{\frac{r-3}{2}}},\ \cdots\ ,\overbrace{1,\cdots,1}^{T_1},\overbrace{0,\cdots 0}^{T})$$

當三進位：$h_M=(\overbrace{2,\cdots,2}^{nT},\overbrace{1\cdots,1}^{2T(n-1)},\overbrace{0,\cdots,0}^{T})$ ，T>0

當五進位：$h_M=(\overbrace{4,\cdots,4}^{nT},\overbrace{3,\cdots,3}^{R},\overbrace{2,\cdots,2}^{2T(n-1)},\overbrace{1,\cdots,1}^{R},\overbrace{0,\cdots,0}^{T})$ ，T>0，R=2T(n-1)

當七進位：$h_M=(\overbrace{6,\cdots,6}^{nT},\overbrace{5,\cdots,5}^{R},\overbrace{4,\cdots,4}^{S},\overbrace{3,\cdots,3}^{2T(n-1)},\overbrace{2,\cdots,2}^{S},\overbrace{1,\cdots,1}^{R},\overbrace{0,\cdots,0}^{T})$ ，T>0，R=2T(n-1)，S ≥ 0

當九進位：$h_M=(\overbrace{8,\cdots,8}^{nT},\overbrace{7,\cdots,7}^{V},\overbrace{6,\cdots,6}^{R},\overbrace{5,\cdots,5}^{S},\overbrace{4,\cdots,4}^{2T(n-1)},\overbrace{3,\cdots,3}^{S},\overbrace{2,\cdots,2}^{R},\overbrace{1,\cdots,1}^{V},\overbrace{0,\cdots,0}^{T})$ ，

T>0，V=R=S=2T(n-1)

我們希望能找出變數與 r 進位之間的關係，但從上面的例子中，似乎還看不出有什麼規律，而這部分正是我們想要繼續研究的目標。

伍、研究成果

一、當 h∈H_4，由 a,b,c,d 所組成，若 h_M＝(a,b,c,d)皆可轉換成（r－1，r－1，x，y），(r－1 ≥ x ≥ y)

（一）當 h∈H_4，由 a,b,c,d 所組成，若 h_M＝(a,b,c,d)當加入 1001n，1≤ n ≤ r-1-a 時，又加入 110n，1≤ n ≤ r-1-b，經由 Kaprekar’s operation，所得之數與原四位數不變。

（二）對任一四位數 r 進位只需分成 $\frac{(r+2)(r-1)}{2}$ 個來探討，求出其 Kaprekar constant 或封閉迴路。

二、四位數 r 進位時是否有 Kaprekar constant？

（一）h∈H3，由 a,b,c 組成，abc 經排列後有 6 種可能性，經分析，只有 2 種可能性，因此 r 為正偶數時(r≥4)，存在 Kaprekar constant，且是唯一。

（二）h∈H4，由 a,b,c,d 組成，abcd 經排列後有 24 種可能性，當 b＞c 時，會有 14 種可能性。而 b＝c 時，會有 6 種可能性。經分析，只有 r＝4、5t (t∈N)(r≥3)，存在 Kaprekar constant，且是唯一。

三、n 位數 r 進位時是否存在一般性的 Kaprekar constant？

（一）若 $h \in H_n$ 爲 Kaprekar constant，則 $h_M=((r-1),\cdots,(r-1),x_1,\cdots,x_s,y_s,\cdots,y_1)$，其中可分成兩種情況：

(1) $x_i+y_i=r-1$，$1\leq i\leq s$

(2) 存在唯一的 i 與 j，使得 $x_i+y_i=r-2$，$x_j+y_j=r$，且 $x_t+y_t=r-1$，$t\neq i$,

（二）當 r 爲正偶數時，

$$h_M=(r-1,\cdots,r-1,r-2,\cdots r-2,\ \cdots\cdots\cdots\ ,\frac{r}{2},\cdots,\frac{r}{2},\frac{r}{2}-1,\cdots\frac{r}{2}-1,\ \cdots\cdots\cdots\ ,1,\cdots,1,0,\cdots0)$$

每個數字皆有 T 個，$T>0$，則 h_M-h_m 爲 Kaprekar constant。

(三) 當 r 爲正奇數時，$h_M=(r-1,\cdots,r-1,r-2,\cdots,r-2,\cdots,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中 0 爲 T 個，其餘數字皆爲 2T 個，則 h_M-h_m 即爲 Kaprekar constant；此外，0 爲 T 個，r-1 爲 nT 個，其餘數字皆爲 2T(n-1)個時，亦有此一性質。

陸、討論

一、n 位數 r 進位時，h_M-h_m 其中的數字之個數不需完全相同，尚未找出其規律。

二、n 位數 r 進位時，無法判斷有幾個封閉迴路或每一封閉迴路中有多少個數。

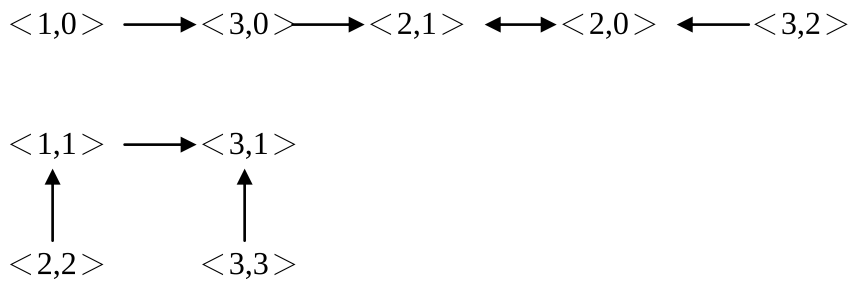
柒、參考資料

一、在積空間 A^n 之函數 $F(h)=h_M-h_m$ 的固定點，網址：http://www.chit.edu.tw/mathmet/fix.pdf

二、第 18 屆中小學科展優勝作品專輯(高中教師組)

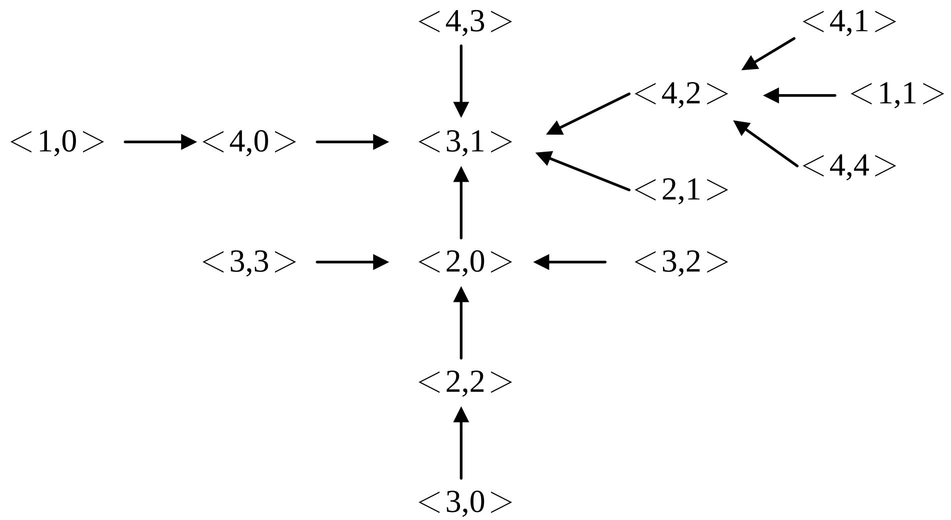
三、第 43 屆中小學科展…「數的黑洞」

4 位數 4 進位



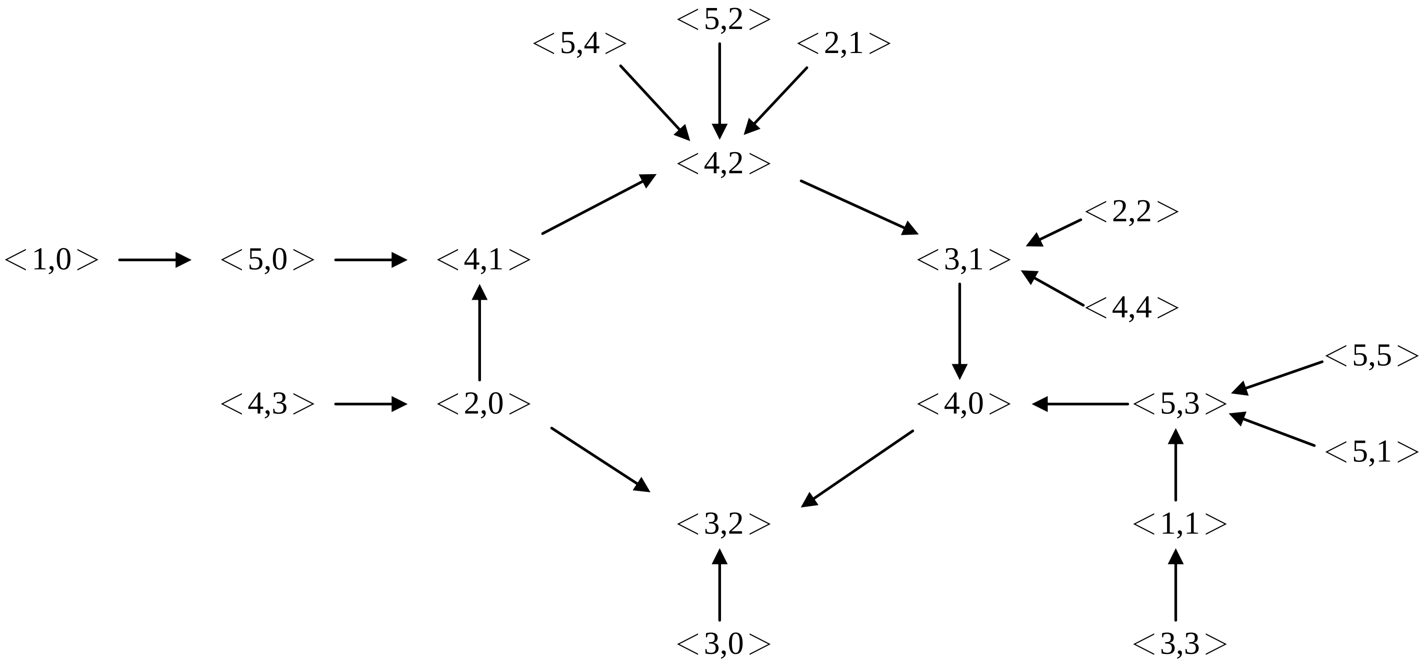
因此 3021 爲 Kaprekar constant，且有一個封閉迴路：2022 ↔ 1332。

4 位數 5 進位



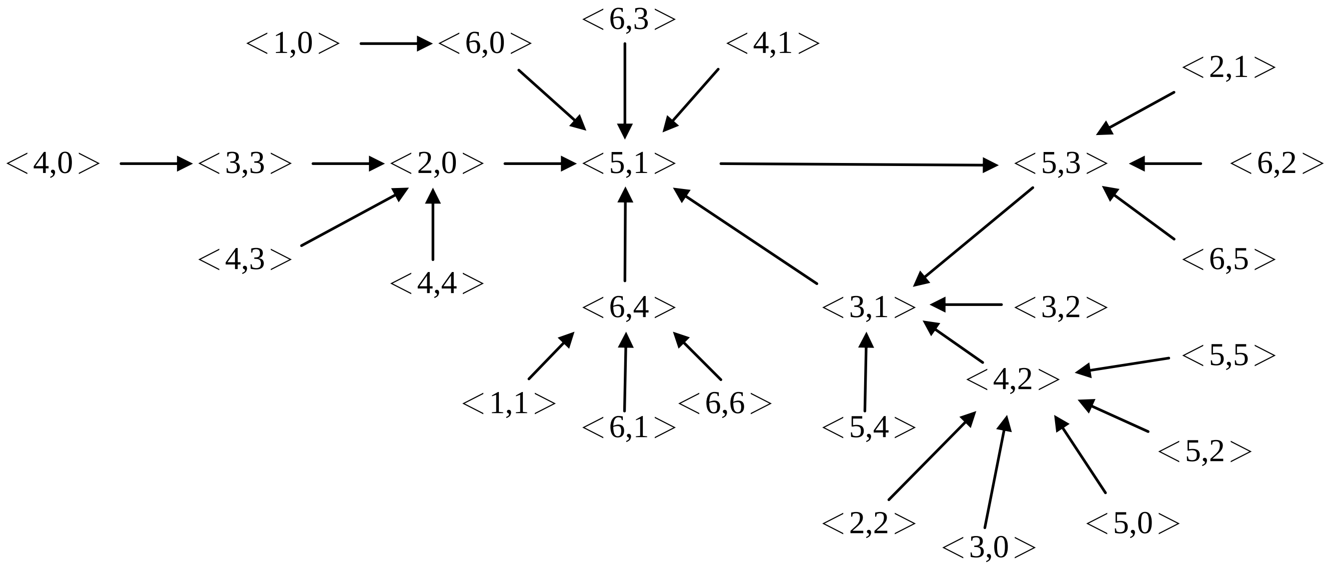
因此 3032 爲 Kaprekar constant。

4 位數 6 進位



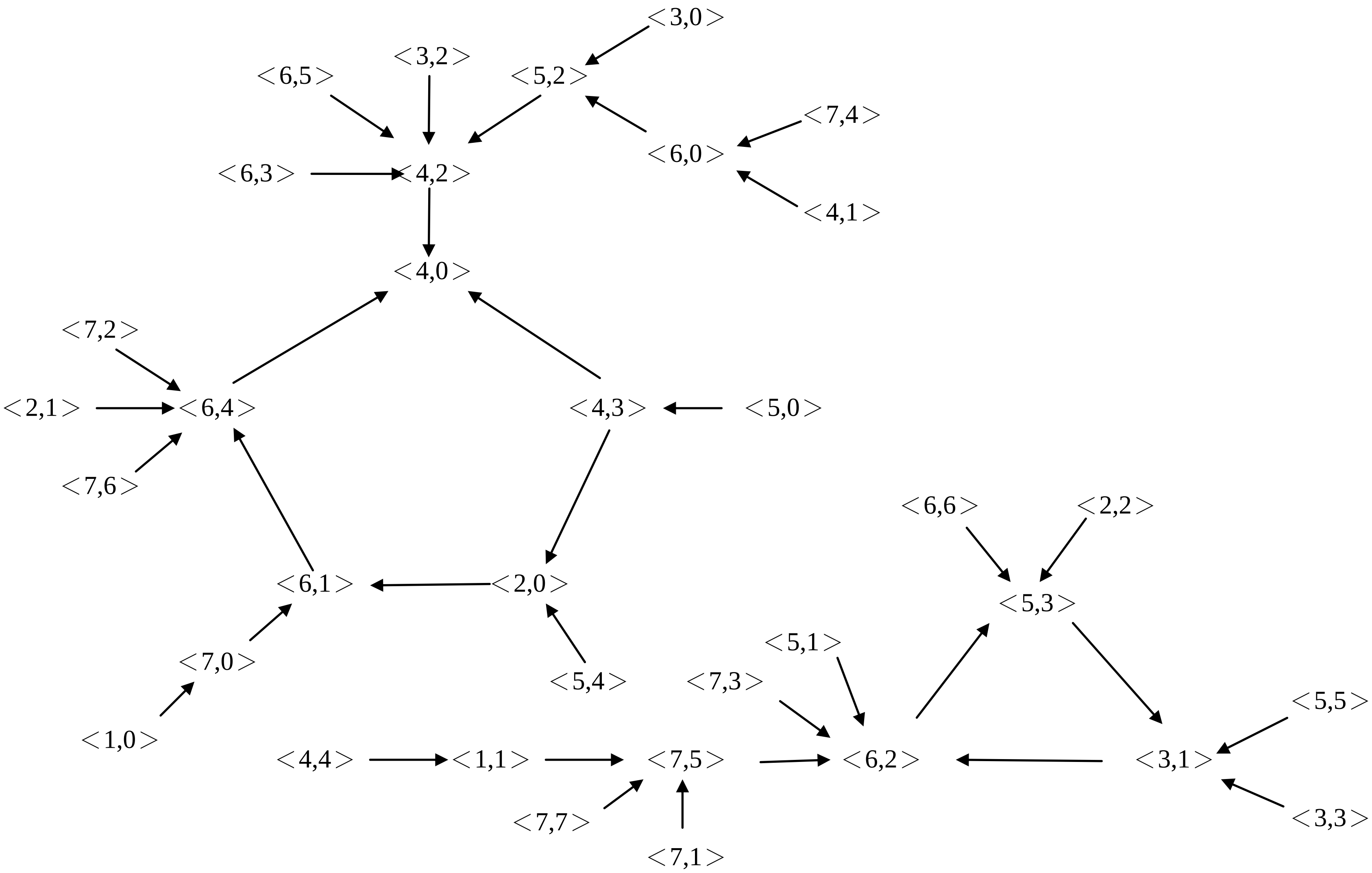
因此有一封閉迴路：4042 → 4132 → 3043 → 3552 → 3133 → 1554

4 位數 7 進位



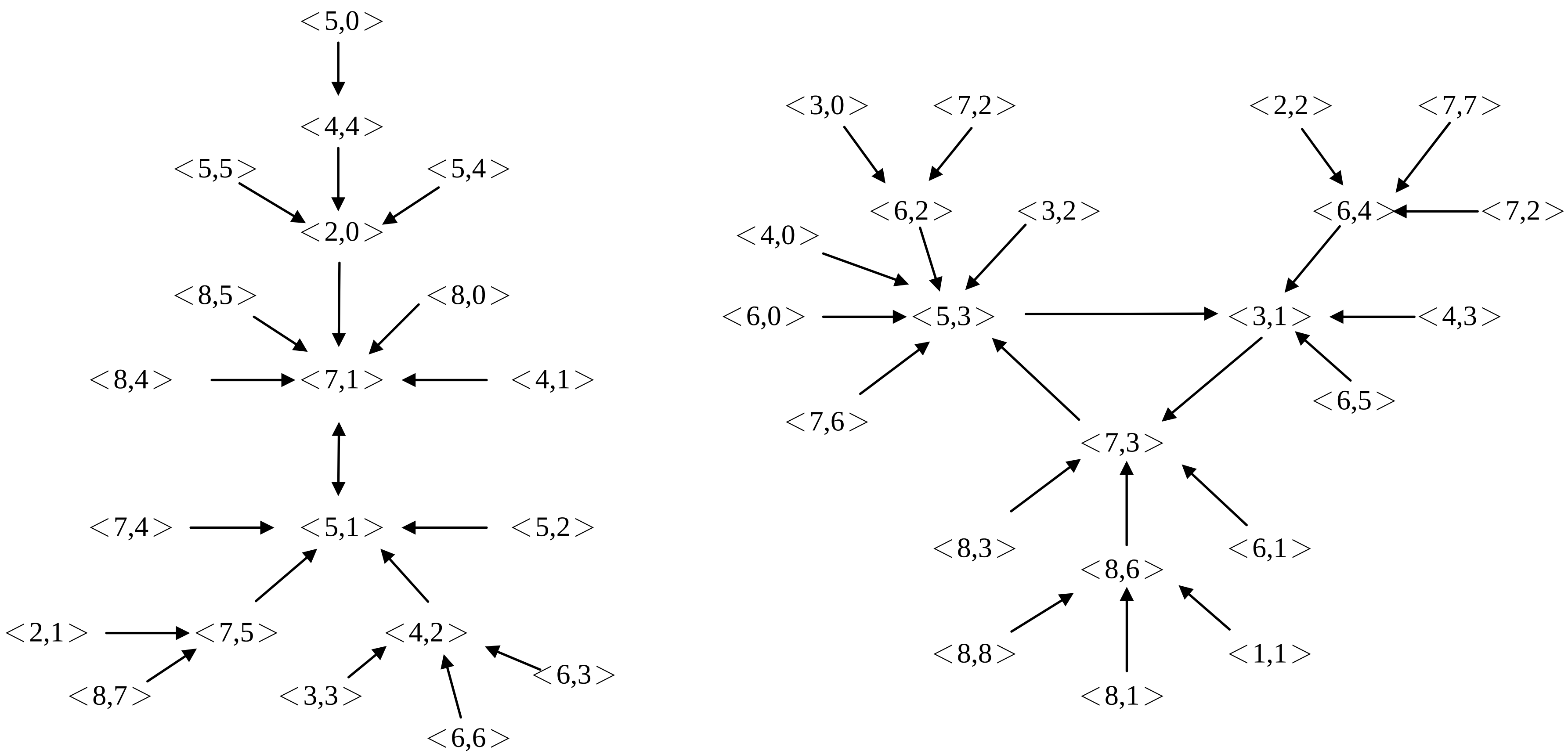
因此有一封閉迴路：5052 → 5232 → 3054

4 位數 8 進位



因此有二封閉迴路：一是 6332 → 3774 → 4244 → 1776 → 6062 ； 二是 5243 → 3065 → 6152

4 位數 9 進位



因此有二封閉迴路：一是 7072 → 7432 → 5074 ； 二是 5254 → 3076 → 7252

【評語】040415

1、 十進位 Kaprekar operation 的探討已有許多年，而此作品討論非十進位之情形。在此作品所提及之數個條件中，部分已在某些文獻中出現，作者群實應分析所得結果與原文獻之差異性，以評估附加條件之必要性。

2、 值得去探究該如何運用電腦來輔助研究的進行。

3、 若將之應用至密碼學，如何由 Kaprekar constant 來確保其所還原之原始碼的唯一性？