中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

最佳創意獎

040414

單淘汰賽程與網路投票之預測分析

學校名稱：國立屏東高級中學

作者：	指導老師：
高二 王啟樺	張宮明

關鍵詞：勝率一般式、實力發揮度、賽程表現率

摘要

以相對實力的概念計算第 n 節點的對手 X_n 之實力，藉此評估對手 X_n 對自己的威脅程度；以函數 b_0 判斷旁子樹選手實力升降對己身造成的優勢或威脅；由勝率一般式 $P_n(Q_1)$ 計算各選手晉升至第 n 節點的勝率；定義實力發揮度 $F_n(Q_i,A_j)$ 用於計算選手 Q_i 於賽程表 A_j 中的實力發揮度；定義賽程表現率 $S_n(Q_i,A_j)$ 評估賽程 A_j 對選手 Q_i 勝率的影響；分別以選手重實力、最新組重實力、累乘組重實力預測各賽程將晉級的選手；檢驗模型計算之勝率是否得以預測實際冠軍。

壹、 研究動機

網路普及的時代，線上投票的結果已逐漸成爲調查評估事件裡重要的參考數據。於比賽途中，甚至會以博弈遊戲的方式滿足各方擁護者爭相預測。其中，淘汰賽是一種非常普遍的賽程安排方式，以古典機率切入分析賽程，更深入探討下列十件事：

(1) BC 選手對於 A 選手的相對實力爲何？
(2) BC 選手實力的升降是否對於 A 選手增加威脅或勝算？
(3)如果 BC 換成單一種子選手，則對 A 的影響是如何？
(4)自我實力的提升是否得以增加勝率？
(5)是否可以導出勝率一般式？
(6)選手於賽程中的實力發揮度如何?
(7)賽程安排對選手勝率的影響?
(8)是否可以根據先前賽程的表現得知何位選手將勝出？
(9)以模型計算之勝率預測冠軍，其準確度爲何？
(10)以此賽程所選出之選手是否名符其實？

貳、研究目的

單淘汰制賽程的安排對每位選手的公平性，藉由分析賽程構造探討選手實力間之相對關係，以各選手實力變化對於其餘選手影響多寡與賽程安排對勝率的影響判斷賽況優劣。並利用實際比賽數據，逐一比較選取最適合之「數據—實力」轉換方式。

參、研究方法

爲了使問題得以討論，在此訂定幾個前提：

一、每位選手皆有其自身的實力，命名選手Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄ……，則各選手對應之實力依序爲 a、b、c、d……。

二、令 P_{AB} 爲選手 A 選手 B 比賽時，選手 A 勝出的機率，並規定 $P_{AB}=\dfrac{a}{a+b}$ 。

三、令 $P_n(A)$為選手 A 晉升至上方第 n 節點的機率。

四、令 X_n 為選手將晉升至第 n 節點時所需克服的相對實力。

五、令 $F_n(Q_i,A_i)$為選手 Q_i 於賽程表 Q_i 時晉升至第 n 節點的實力發揮度。

六、令 $S_n(Q_i,A_i)$為選手 Q_i 於賽程表 Q_i 時的勝率與其於最佳賽程表時的勝率之比值。

七、令選手重 $=\dfrac{\text{選手得票數}}{\text{小組得票數}}$，組重 $=\dfrac{\text{小組總票數}}{\text{組總票數}}$。

八、令 $Q_n(A)$為選手 A 於第 n 場時之組重實力，$Q_n(A)=$ 選手重×組重 。

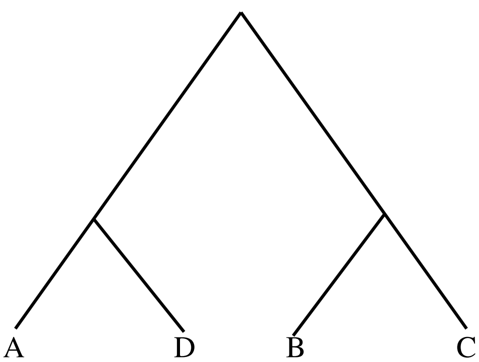
九、令 $L_n(A)$為選手 A 之 n 次組重實力，$L_n(A)= L_{n-1}(A) \times Q_n(A)$。

十、令 $R(P)$為 P 組之預測成功率，$R(P)=\dfrac{\text{成功預測樣本}}{\text{總樣本數}}$。

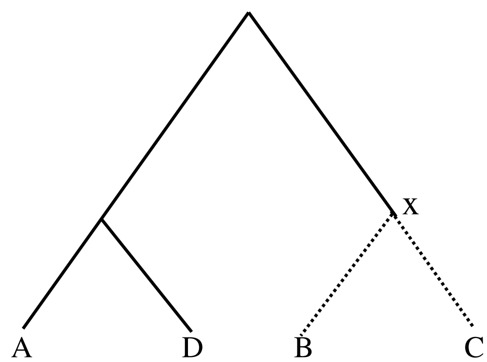
十一、以 G_n 表示賽程第 n 階段；G_f 表示決賽。

肆、研究過程

一、相對實力 X



(圖一)



(圖二)

在完全均高二元樹的賽程中，以選手 A 為視角，對於同子樹的選手 D 所造成的威脅只消比較其實力便可判斷其威脅程度。但位於旁子樹的選手 B、C 所造成的威脅該如何斷定?我們嘗試建立 BC 選手之合力值 x，假設於選手 B、C 上方之節點能以 x 表示選手 B、C 對於選手 A 之相對實力，則我們獲得一個重要的定理如下所示：

定理 1 設選手 B、C 相對於選手 A 之實力值為 x，則

$$x=\frac{b^2(a+c)+c^2(a+b)}{b(a+c)+c(a+b)}$$

證明:

四位選手之淘汰賽賽程由(圖一)所示，為一完全均高樹。可由定義得：

$$P(A)=\frac{a}{a+d}\left(\frac{b}{b+c}\times\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\times\frac{a}{a+c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

假設於選手 B、C 上方之節點能以 x 表示選手 B、C 相對於選手 A 之相對實力，可得：

$$P(A)=\frac{a}{a+d}\times\frac{a}{a+x}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

將(1)、(2)式對照可得：

$$P(A)=\frac{a}{a+d}(\frac{b}{b+c}\times\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\times\frac{a}{a+c})=\frac{a}{a+d}\times\frac{a}{a+x}$$

$$\frac{b}{b+c}\times\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\times\frac{a}{a+c}=\frac{a}{a+x}$$

$$\frac{a}{b+c}(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c})=\frac{a}{a+x}$$

$$(a+x)(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c})=b+c$$

$$a+x=\frac{b+c}{\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}}=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{b(a+c)+c(a+b)}$$

$$x=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{b(a+c)+c(a+b)}-a$$

$$=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)-ab(a+c)-ac(a+b)}{b(a+c)+c(a+b)}$$

$$=\frac{b^2(a+c)+c^2(a+b)}{b(a+c)+c(a+b)}$$

□

利用此相對實力，我們將可以判斷該節點下選手對己身造成的威脅程度。

二、討論 x 與 P(A)的關係

$$P(A)=\frac{a}{a+b}\times\frac{a}{a+x}$$

由上式得知 P(A)與 x 相關，且若 x 上將使 $\frac{a}{a+x}$ 下降，而使 P(A)下降。又 x 為選手 B、C 相對於選手 A 之實力，若選手B的實力上升，是否使 x 上升而使 P(A)下降？為此，我們得到了重要的定理二:

定理 2 若 B 選手之實力 $b>b_0$，則 b 升高將使 P(A)下降；若 B 選手之實力 $b<b_0$，則 b 升高將使P(A)上升。其中 $b_0=\frac{c(\sqrt{2a(a+c)}-a)}{a+2c}$ 。

證明:

令函數 x = f(b)，檢驗 f(b)是否為嚴格遞增函數。

$$f(b)=\frac{(a+c)b^2+c^2b+c^2a}{(a+2c)b+ac}$$

作 $f(b)$之一次導函數：

$$f'(b)=\frac{(((2(a+c)b+c^2)((a+2c)b+ac)-((a+c)b^2+c^2b+ac^2)(a+2c))}{((a+2c)b+ac)^2}$$

$$=\frac{(a+c)(a+2c)b^2+2ac(a+c)b-(ac^2(a+c))}{((a+2c)b+ac)^2}$$

令其分子爲 g(b)，其爲 b 的二次函數，b^2 係數爲正，由判別式大於 0 得知其圖形爲開口向上的拋物線，且與橫軸有二交點，即 g(b)=0 有二相異實根。以圖形頂點將拋物線分爲左右兩支，右支呈嚴格遞增函數，左支則爲嚴格遞減函數。

令 g(b)爲 0，解出 b 之二根：

$$g(b)=(a+c)(a+2c)2^2+2ac(a+c)b-\left\langle ac^2(a+c)\right\rangle=0$$

$$得\,b=\frac{-2ac(a+c)\pm\sqrt{1a^2c^2(a+c)^2+4(a+c)^2(a+2c)ac^2}}{2(a+c)(a+2c)}$$

$$=\frac{-ac(a+c)\pm(a+c)\sqrt{a^2c^2+(a+2c)ac^2}}{(a+c)(a+2c)}$$

$$=\frac{-ac\pm c\sqrt{2a^2+2ac}}{a+2c}$$

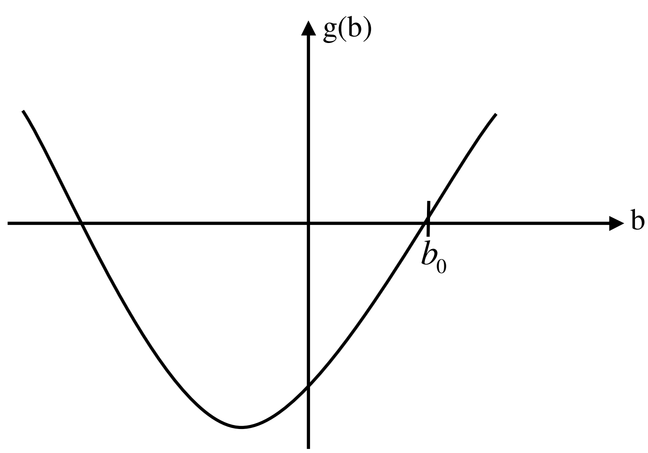
$$=\frac{-ac\pm c\sqrt{2a(a+c)}}{a+2c}$$

$$=\frac{c(\sqrt{2a(a+c)}\pm a)}{a+2c}$$

得一正實根與一負實根，取正實根並命名爲 b_0

$$b_0=\frac{-ac+c\sqrt{2a(a+c)}}{a+2c}$$

$$=\frac{c(\sqrt{2a(a+c)}-a)}{a+2c}$$



(圖三)

將 g(b)之函數圖形繪出，如(圖三)所示，得到：

當 $b> b_0$，$g(b)>0$，$f(b)$爲嚴格遞增函數，此時 b 上升將使 x 上升而使 P(A)下降。

當 $0<b< b_0$，$g(b)<0$，$f(b)$爲嚴格遞減函數，此時 b 上升將使 x 下降而使 P(A)上升。

以表格表示如下:

b	g(b)	*f(b)*	影響
$b> b_0$	g(b)>0	嚴格遞增函數	b 上升將使 x 上升而使 P(A)下降
$0<b< b_0$	g(b)<0	嚴格遞減函數	b 上升將使 x 下降而使 P(A)上升

□

定理 2 是一個很有趣的結果，代表 B 選手的實力 b 有一個門檻 b_0，當 $b>b_0$ 時，B 選手的實力增加，對 A 選手才會造成威脅(即使 P(A)下降)；而當 $b<b_0$ 時，B 選手實力增加卻對 A 選手之勝率 P(A)有提升的作用，即培養將來的對手使其實力增加，竟亦能增加自己的勝率，這真是非常有趣的結果。

既然得知 B 選手有一門檻，因爲選手 B、C 屬同一子樹，故猜想是否有一情況能使 $b_0=c$?

引理 1　b_0 不會恰爲 c。

證明:

試求出當 $b_0=c$ 時之實力相對關係：

$$b_0=\frac{c(\sqrt{2a(a+c)}-a)}{a+2c}=c$$

$$a+2c=\sqrt{2a(a+c)}-a$$

$$2a+2c=\sqrt{2a(a+c)}$$

$$4a^2+8ac+4c^2=2a^2+2ac$$

$$2a^2+6ac+4c^2=0$$

$$(a+c)(2a+4c)=0$$

$$a=-c \text{ or } -2c$$

因選手實力皆爲正値，$a>0$，$c>0$，故 b_0 不會恰爲 c。

□

另外，當 A 選手遇到的對手是種子選手時，即可視爲 b=0 或 c=0；則直觀上，種子選手愈強，A 選手獲勝的機率愈低，現在用數學方法證明如下:

定理 3 若 B 選手爲種子選手，即可視爲 C 選手之實力 c=0，則 $b_0=0$

證明:將 c=0 代入 b_0

$$b_0=\frac{c(\sqrt{2a(a+c)}-a)}{a+2c}$$

c=0　　$b_0=0$

肯定地，當 c=0 時，b_0=0，種子隊實力的上升將直接地降低 P(A)。

再試求出b_0=0 之其它情況。

$$b_0 = \frac{c(\sqrt{2a(a+c)} - a)}{a+2c} = 0$$

$$\sqrt{2a(a+c)} = \text{a}$$

$$2a^2 + 2ac = 0$$
$$2a(a+c) = 0$$
$$a = \text{-}c \text{ 、} 0$$

由於 a>0，c≥ 0，使b_0=0 之情況唯 c=0，能使b_0=0，即選手 B 之實力上升能直接降低選手 A 之勝率。

□

三、討論選手 A 實力對 P(A)的影響

直觀上，自身實力的上升應將使自身勝率上升。現在，以數學方法證明如下.

定理 4 於包含四位選手之均高樹賽程表中，自身實力上升直接地使自身勝率上升。

證明:

由定義可得 P(A)：

$$P(A) = \frac{a}{a+d}\left(\frac{b}{b+c} \times \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} \times \frac{a}{a+c}\right)$$

令前項爲$\mathrm{G}(a) = \dfrac{a}{a+d}$，$\mathrm{G}'(a) > 0$ ，可明顯地知道爲變數 a 之嚴格遞增函數，令後項爲 $\mathrm{H}(a)$ ，並求其一次導函數。

$$\mathrm{H}(a) = \frac{b}{b+c} \times \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} \times \frac{a}{a+c}$$
$$= \frac{ab(a+c) + ac(a+b)}{(b+c)(a+b)(+c)}$$
$$= \frac{(b+c)a^2 + 2bca}{(b+c)a^2 + (b+c)^2 a + bc(b+c)}$$

$$\mathrm{H}'(a) = \frac{((b+c)a + 2bc)((b+c)a^2 + (b+c)^2 a + bc(bc)) - ((b+c)a^2 + 2bca)((b+c)a + (b+c)^2)}{((b+c)a^2 + (b+c)^2 a + bc(b+c))^2}$$
$$= \frac{bc(b+c)^2 a + 2b^2c^2(b+c)}{((b+c)a^2 + (b+c)^2 a + bc(b+c))^2}$$

$\mathrm{H}'(a)$ 恆爲正値，$\mathrm{H}(a)$ 爲嚴格遞增函數。證明自身實力上升直接地使自身勝率上升。

□

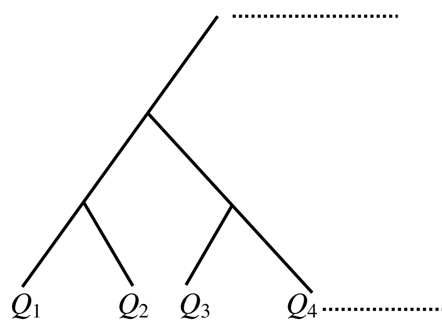
四、勝率一般式

接下來我們想要瞭解，選手 Q_1 晉升至第 n 節點之勝率一般式如何表示:

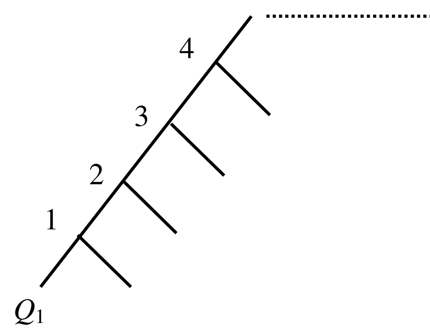
定理 5 選手 Q_1 晉升至第 n 節點之勝率一般式為 $P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$

證明：

設有一包含 2^m 位選手之完全二元樹賽程表，由子節點由左至右依序命名選手為 $Q_1,Q_2,Q_3,\ldots\ldots$，如(圖四)所示：



(圖四)選手分佈圖



(圖五)晉升節點圖

以 Q_1 為起始點，選手 Q_1 每晉級一場比賽即晉升至下一節點，如(圖五)所示。並以 $P_n(Q_1)$ 表示選手 Q_1 晉升至第 n 節點之機率。則：

$$P_1(Q_1)=P_{Q1Q2}$$

$$P_2(Q_1)=P_1(Q_1)\times(P_{Q_3Q_4}\times P_{Q_1Q_3}+P_{Q_4Q_3}\times P_{Q_1Q_4})=P_1(Q_1)\times(P_1(Q_3)\times P_{Q_1Q_3}+P_1(Q_4)\times P_{Q_1Q_4})$$

$$P_3(Q_1)=P_2(Q_1)\times(P_1(Q_5)\times P_{Q_1Q_5}+P_1(Q_6)\times P_{Q_1Q_6}+P_1(Q_7)\times P_{Q_1Q_7}+P_1(Q_8)\times P_{Q_1Q_8})$$

推得下遞迴式：

$$P_n(Q_1)=P_{n-1}(Q_1)\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{n-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

由遞迴式求 $P_n(Q_1)$之一般項：

$$P_1(Q_1)=P_0(Q_1)\sum_{i=2^0+1}^{2}(P_0(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$P_2(Q_1)=P_1(Q_1)\sum_{i=2^1+1}^{2^2}(P_1(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$P_3(Q_1)=P_2(Q_1)\sum_{i=2^2+1}^{2^3}(P_2(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$\vdots$$

x) $$P_n(Q_1)=P_{n-1}(Q_1)\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{n-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

求得 $P_n(Q_1)$之一般項為：

$$P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

□

在定理 4 中，我們證明了於包含四位選手之均高樹賽程表中，自身實力上升直接地使自身勝率上升。在包含 2^m 位選手之均高樹賽程中，是否亦是如此呢?

定理 6 於包含 2^m 位選手之均高樹賽程表中，自身實力上升直接地使自身勝率上升。

證明：

由勝率一般式 $P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$ 可得選手 Q_1 晉升至第 n 節點之機率。若其對 Q_1 之一次導函數恆為正值，則 $P_n(Q_1)$為選手 Q_1 的嚴格地增函數。

試求 $P_n(Q_1)$之一次導函數:

$$P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$P_n^{'}(Q_1)=P_0(Q_1)\sum_{k=1}^{n}\{\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}[\frac{q_i}{(q_i+q_1)^2}P_{k-1}(Q_i)]\prod_{j=1;j\neq k}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})\}$$

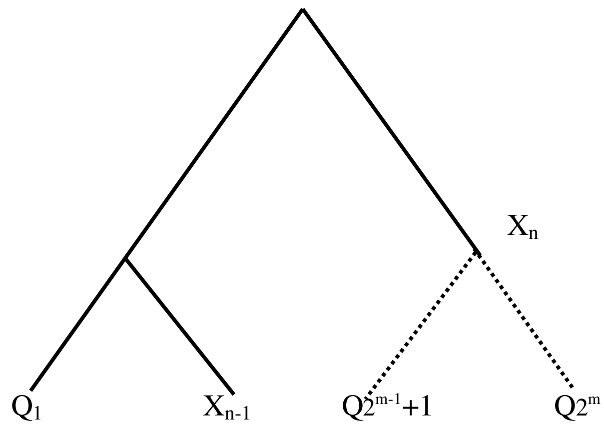
由一次導函數恆為正值可證明，$P_n(Q_1)$為 Q_1 之嚴格遞增函數，即於包含 2^m 位選手之完全二元樹賽程表中，自身實力上升直接地使自身勝率上升。

□

五、相對實力 *x* 的一般式

在定理 1 中，我們得到包含四位選手之均高樹賽程表中，第 2 節點所模擬的相對實力 *x*。

那麼，在包含 2^m 位選手之均高樹賽程中第 n 節點之相對實力 x_n 是否能以一般式表示?



(圖六)

定理 7 位於第 n 節點相對於選手 Q_1 之相對實力 x_n 之一般式為: $x_n = \dfrac{1 - \displaystyle\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}{\displaystyle\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}q_1$

證明：由(圖六)可得:

$$P_n(Q_1) = P_{n-1}(Q_1)\frac{q_1}{q_1 + x_n}$$

$$x_n P_n(Q_1) + q_1 P_n(Q_1) = q_1 P_{n-1}(Q_1)$$

$$x_n = \frac{P_{n-1}(Q_1) - P_n(Q_1)}{P_n(Q_1)}q_1$$

$$P_n(Q_1) = P_{n-1}(Q_1)\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{n-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$x_n = \frac{1 - \displaystyle\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}{\displaystyle\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}q_1$$

□

六、實力發揮度

知道勝率會因為自身實力的增加而遞增，我們便猜想，其增加量是否為一固定值，符合我們平常說的:「一份耕耘，一份收穫。」定義函數 $F_n(Q_1) = \dfrac{P_n(Q_1)}{q_1}$ ，並命名此函數為「實力發揮度」，則我們有了下這個定理:

定理 8 選手 Q_1 晉升至第 n 節點的實力發揮度 $F_n(Q_1) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{P_{j-1}(Q_i)}{q_1 + q_i}$ 。

證明：

$$F_n(Q_1)=\frac{P_n(Q_1)}{q_1}$$

$$P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$$

$$F_n(Q_1)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}{q_1}$$

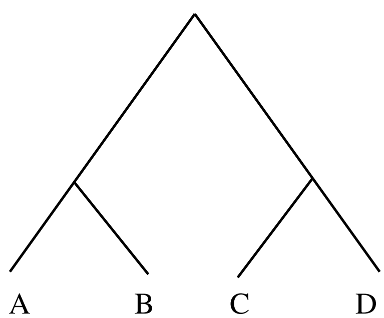
$$=\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{P_{j-1}(Q_i)}{q_1+q_i}$$

□

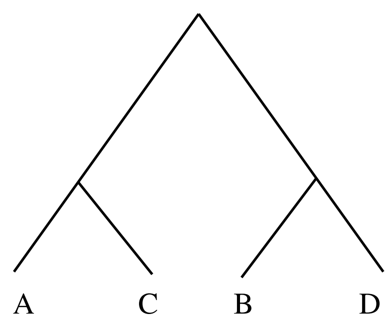
七、賽程安排之影響

藉由定理 8 的實力發揮度，我們可以得知選手實力於賽程中的發揮情形。當參賽選手的實力固定時，賽程的安排是否會影響選手的實力發揮度?

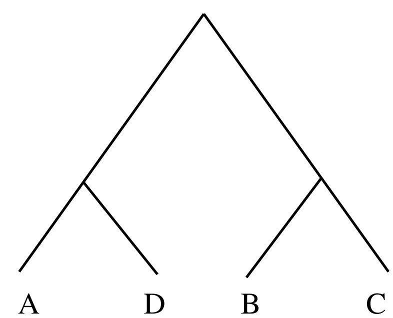
包含 4 位選手的賽程表中，共有 3 種不同的賽程安排，如<圖七>、<圖八>、<圖九>:



<圖七>賽程表 A_1



<圖八>賽程表 A_2



<圖九>賽程表 A_3

依序命名賽程表<圖七>、<圖八>、<圖九>為 A_1、A_2、A_3。並規定選手 A、B、C、D 間實力大小關係為 $a>b>c>d$ 。利用定理 8 的實力發揮度計算各選手於不同賽程中的實力發揮度，比較找出對選手最有利的賽程安排。

首先，我們將賽程表變數加入實力發揮度，令 $F_n(A, A_j)$為選手 A 於賽程表 A_j 時，晉升至第 n 節點的實力發揮度。則我們得到下面的定理:

定理 9 選手 A 的實力發揮度 $F_2(A, A_3) > F_2(A, A_2) > F_2(A, A_1)$。

證明:

列出選手 A 於各賽程表中的實力發揮度:

$$F_2(A, A_1)=\frac{P_0(B)}{a+b}\left(\frac{P_1(C)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{a+d}\right)$$

$$F_2(A, A_2)=\frac{P_0(C)}{a+c}(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{a+d})$$

$$F_2(A, A_3)=\frac{P_0(D)}{a+d}(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(C)}{a+c})$$

先比較 $F_2(A, A_3)$與 $F_2(A, A_2)$間大小:

$F_2(A, A_3) - F_2(A, A_2)$

$$=\frac{P_0(D)}{a+d}(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(C)}{a+c})-\frac{P_0(C)}{a+c}(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{a+d})$$

$$=(\frac{P_0(D)}{a+d}-\frac{P_0(C)}{a+c})\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_0(D)P_1(C)-P_0(C)P_1(D)}{(a+c)(a+d)})$$

$$=(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+c})\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(C)-P_1(D)}{(a+c)(a+d)})>0$$

得: $F_2(A, A_3) > F_2(A, A_2)$

再比較 $F_2(A, A_2)$與 $F_2(A, A_1)$間大小:

$F_2(A, A_2) - F_2(A, A_1)$

$$=\frac{P_0(C)}{a+c}(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{a+d})-\frac{P_0(B)}{a+b}(\frac{P_1(C)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{a+d})$$

$$=(\frac{P_0(C)}{a+c}-\frac{P_0(B)}{a+b})\frac{P_1(D)}{a+d}+\frac{P_0(C)P_1(B)-P_0(B)P_1(C)}{(a+b)(a+c)})$$

$$=(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b})\frac{P_1(D)}{a+d}+\frac{P_1(B)-P_1(C)}{(a+b)(a+c)})>0$$

得: $F_2(A, A_2) > F_2(A, A_1)$

綜合得: $F_2(A, A_3) > F_2(A, A_2) > F_2(A, A_1)$

□

定理 10 選手 B 的實力發揮度 $F_2(B, A_2) > F_2(B, A_3) > F_2(B, A_1)$。

證明:

列出選手 B 於各賽程表中的實力發揮度:

$$F_2(B, A_1)=\frac{P_0(A)}{a+b}(\frac{P_1(C)}{b+c}+\frac{P_1(D)}{b+d})$$

$$F_2(B, A_2)=\frac{P_0(D)}{b+d}(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(C)}{b+c})$$

$$F_2(B, A_3)=\frac{P_0(C)}{b+c}(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{b+d})$$

先比較 $F_2(B, A_2)$與 $F_2(B, A_3)$間大小:

$F_2(B, A_2)-F_2(B, A_3)$

$$=\frac{P_0(D)}{b+d}(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(C)}{b+c})-\frac{P_0(C)}{b+c}(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{b+d})$$

$$=(\frac{P_0(D)}{b+d}-\frac{P_0(C)}{b+c})\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_0(D)P_1(C)-P_0(C)P_1(D)}{(b+c)(b+d)}$$

$$=(\frac{1}{b+d}-\frac{1}{b+c})\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(C)-P_1(D)}{(b+c)(b+d)}>0$$

得: $F_2(B , A_2) > F_2(B , A_3)$

再比較 $F_2(B , A_3)$與 $F_2(B , A_1)$間大小:

$F_2(B , A_3) >F_2(B , A_1)$

$$=\frac{P_0(C)}{b+c}(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{b+d})-\frac{P_0(A)}{a+b}(\frac{P_1(C)}{b+c}+\frac{P_1(D)}{b+d})$$

$$=(\frac{P_0(C)}{b+c}-\frac{P_0(A)}{a+b})\frac{P_1(D)}{b+d}+\frac{P_0(C)P_1(A)-P_0(A)P_1(C)}{(a+b)(b+c)}$$

$$=(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b})\frac{P_1(D)}{b+d}+\frac{P_1(A)-P_1(C)}{(a+b)(b+c)}>0$$

得: $F_2(B , A_3) > F_2(B , A_1)$

綜合得: $F_2(B , A_2) > F_2(B , A_3) > F_2(B , A_1)$

□

定理 11 選手 C 的實力發揮度 $F_2(C , A_1) > F_2(C , A_3) > F_2(C , A_2)$。

證明:

列出選手 C 於各賽程表中的實力發揮度:

$$F_2(C, A_1)=\frac{P_0(D)}{c+d}(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(B)}{b+c})$$

$$F_2(C, A_2)=\frac{P_0(A)}{a+c}(\frac{P_1(B)}{b+c}+\frac{P_1(D)}{c+d})$$

$$F_2(C, A_3)=\frac{P_0(B)}{b+c}(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{c+d})$$

先比較 $F_2(C , A_1)$與 $F_2(C , A_3)$間大小:

$F_2(C , A_1) - F_2(C , A_3)$

$$=\frac{P_0(D)}{c+d}(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(B)}{b+c})-\frac{P_0(B)}{b+c}(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{c+d})$$

$$=(\frac{P_0(D)}{c+d}-\frac{P_0(B)}{b+c})\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_0(D)P_1(B)-P_0(B)P_1(D)}{(b+c)(c+d)}$$

$$=(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{b+c})\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(B)-P_1(D)}{(b+c)(c+d)}>0$$

得: $F_2(C , A_1) > F_2(C , A_3)$

再比較 $F_2(C , A_3)$與 $F_2(C , A_2)$間大小:

$F_2(C , A_3) - F_2(C , A_2)$

$$=\frac{P_0(B)}{b+c}(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{c+d})-\frac{P_0(A)}{a+c}(\frac{P_1(B)}{b+c}+\frac{P_1(D)}{c+d})$$

$$=(\frac{P_0(B)}{b+c}-\frac{P_0(A)}{a+c})\frac{P_1(D)}{c+d}+(\frac{P_0(B)P_1(A)-P_0(A)P_1(B)}{(a+c)(b+c)})$$

$$=(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c})\frac{P_1(D)}{c+d}+(\frac{P_1(A)-P_1(B)}{(a+c)(b+c)})>0$$

得: $F_2(C, A_3) > F_2(C, A_2)$

綜合得: $F_2(C, A_1) > F_2(C, A_3) > F_2(C, A_2)$

□

定理 12 選手 D 的實力發揮度 $F_2(D, A_1) > F_2(D, A_2) > F_2(D, A_3)$。

證明:

列出選手 D 於各賽程表中的實力發揮度:

$$F_2(D, A_1)=\frac{P_0(C)}{c+d}(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(B)}{b+d})$$

$$F_2(D, A_2)=\frac{P_0(B)}{b+d}(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(C)}{c+d})$$

$$F_2(D, A_3)=\frac{P_0(A)}{a+d}(\frac{P_1(B)}{b+d}+\frac{P_1(C)}{c+d})$$

先比較 $F_2(D, A_1)$與 $F_2(D, A_2)$間大小:

$F_2(D, A_1)- F_2(D, A_2)$

$$=\frac{P_0(C)}{c+d}(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(B)}{b+d})-\frac{P_0(B)}{b+d}(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(C)}{c+d})$$

$$=(\frac{P_0(C)}{c+d}-\frac{P_0(B)}{b+d})\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_0(C)P_1(B)-P_0(B)P_1(C)}{(b+d)(c+d)}$$

$$=(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{b+d})\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(B)-P_1(C)}{(b+d)(c+d)}>0$$

得: $F_2(D, A_1) > F_2(D, A_2)$

再比較 $F_2(D, A_2)$與 $F_2(D, A_3)$間大小:

$F_2(D, A_2) - F_2(D, A_3)$

$$=\frac{P_0(B)}{b+d}(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(C)}{c+d})-\frac{P_0(A)}{a+d}(\frac{P_1(B)}{b+d}+\frac{P_1(C)}{c+d})$$

$$=(\frac{P_0(B)}{b+d}-\frac{P_0(A)}{a+d})\frac{P_1(C)}{c+d}+\frac{P_0(B)P_1(A)-P_0(A)P_1(B)}{(a+d)(b+d)}$$

$$=(\frac{1}{b+d}-\frac{1}{a+d})\frac{P_1(C)}{c+d}+\frac{P_1(A)-P_1(B)}{(a+d)(b+d)}>0$$

得: $F_2(D, A_2) > F_2(D, A_3)$

綜合得: $F_2(D, A_1) > F_2(D, A_2) > F_2(D, A_3)$

□

綜合定理 9~12，我們可以得到於包含 4 位選手賽程表中極重要的定理:

定理 13 在包含 4 位選手的賽程中，對自己的最有利賽程表為與除自己以外之最弱選手於第一場賽程比賽。

證明:

以下二表格表示定理 9~12 的結果:

	A	B	C	D
優	A_3	A_2	A_1	A_1
中	A_2	A_3	A_3	A_2
劣	A_1	A_1	A_2	A_3

	A	B	C	D
A_1	劣	劣	優	優
A_2	中	優	劣	中
A_3	優	中	中	劣

觀察各選手的最有利賽程表，發現在包含 4 位選手的賽程中，自己的最有利賽程表為與除自己以外之最弱選手於第一場賽程比賽。由此規則，在包含 4 位選手的賽程中，對於每一位選手，我們能直接地排出其最有利賽程。

□

八、賽程表現率

由定理 13，我們知道因為賽程表不同使選手會有不同的勝率，即賽程表亦是影響選手的一個變因。為了解各賽程表對選手勝率造成的影響，我們定義賽程表現率 $S_n(A,A_j)=\dfrac{P_n(A,A_j)}{P_n(A,A_k)}$

其中 A_k 為選手之最有利賽程表；則 $S_n(A,A_j)$ 為選手 A 於賽程表 A_j 中晉升至第 n 節點，賽程表 A_j 與最有利賽程表的勝率比值。

另外，由於 $F_n(A,A_j)=\dfrac{P_n(A,A_j)}{a}$，可得 $S_n(A,A_j)=\dfrac{P_n(A,A_j)}{P_n(A,A_k)}=\dfrac{F_n(A,A_j)}{F_n(A,A_k)}$。藉由此方式，我們可以得到每個選手於各賽程表的賽程表現率。

定理 14 選手 A 賽程表現率 $S_2(A,A_1)=\dfrac{a+\dfrac{2cd}{c+d}}{a+\dfrac{2bc}{b+c}}$、$S_2(A,A_2)=\dfrac{a+\dfrac{2bd}{b+d}}{a+\dfrac{2bc}{b+c}}$、$S_2(A,A_3)=\dfrac{a+\dfrac{2bc}{b+c}}{a+\dfrac{2bc}{b+c}}$。

證明:

$$F_2(A\,,A_1)=\frac{P_0(B)}{a+b}\left(\frac{P_1(C)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{a+d}\right)=\frac{a+\dfrac{2cd}{c+d}}{(a+b)(a+c)(a+d)}$$

$$F_2(A, A_2)=\frac{P_0(C)}{a+c}\left(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{a+d}\right)=\frac{a+\frac{2bd}{b+d}}{(a+b)(a+c)(a+d)}$$

$$F_2(A, A_3)=\frac{P_0(D)}{a+d}\left(\frac{P_1(B)}{a+b}+\frac{P_1(C)}{a+c}\right)=\frac{a+\frac{2bc}{b+c}}{(a+b)(a+c)(a+d)}$$

$$S_2(A,A_1)=\frac{a+\frac{2cd}{c+d}}{a+\frac{2bc}{b+c}} \qquad S_2(A,A_2)=\frac{a+\frac{2bd}{b+d}}{a+\frac{2bc}{b+c}} \qquad S_2(A,A_3)=\frac{a+\frac{2bc}{b+c}}{a+\frac{2bc}{b+c}}$$

□

定理 15 選手 B 賽程表現率 $S_2(B,A_1)=\frac{b+\frac{2cd}{c+d}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$、$S_2(B,A_2)=\frac{b+\frac{2ac}{a+c}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$、$S_2(B,A_3)=\frac{b+\frac{2ad}{a+d}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$。

證明:

$$F_2(B, A_1)=\frac{P_0(A)}{a+b}\left(\frac{P_1(C)}{b+c}+\frac{P_1(D)}{b+d}\right)=\frac{b+\frac{2cd}{c+d}}{(a+b)(b+c)(b+d)}$$

$$F_2(B, A_2)=\frac{P_0(D)}{b+d}\left(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(C)}{b+c}\right)=\frac{b+\frac{2ac}{a+c}}{(a+b)(b+c)(b+d)}$$

$$F_2(B, A_3)=\frac{P_0(C)}{b+c}\left(\frac{P_1(A)}{a+b}+\frac{P_1(D)}{b+d}\right)=\frac{b+\frac{2ad}{a+d}}{(a+b)(b+c)(b+d)}$$

$$S_2(B,A_1)=\frac{b+\frac{2cd}{c+d}}{b+\frac{2ac}{a+c}} \qquad S_2(B,A_2)=\frac{b+\frac{2ac}{a+c}}{b+\frac{2ac}{a+c}} \qquad S_2(B,A_3)=\frac{b+\frac{2ad}{a+d}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$$

□

定理 16 選手 C 賽程表現率 $S_2(C,A_1)=\frac{c+\frac{2ab}{a+b}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$、$S_2(C,A_2)=\frac{c+\frac{2bd}{b+d}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$、$S_2(C,A_3)=\frac{c+\frac{2ad}{a+d}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$。

證明:

$$F_2(C, A_1)=\frac{P_0(D)}{c+d}\left(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(B)}{b+c}\right)=\frac{c+\frac{2ab}{a+b}}{(a+c)(b+c)(c+d)}$$

$$F_2(C,A_2)=\frac{P_0(A)}{a+c}\left(\frac{P_1(B)}{b+c}+\frac{P_1(D)}{c+d}\right)=\frac{c+\frac{2bd}{b+d}}{(a+c)(b+c)(c+d)}$$

$$F_2(C,A_3)=\frac{P_0(B)}{b+c}\left(\frac{P_1(A)}{a+c}+\frac{P_1(D)}{c+d}\right)=\frac{c+\frac{2ad}{a+d}}{(a+c)(b+c)(c+d)}$$

$$S_2(C,A_1)=\frac{c+\frac{2ab}{a+b}}{c+\frac{2ab}{a+b}}\qquad S_2(C,A_2)=\frac{c+\frac{2bd}{b+d}}{c+\frac{2ab}{a+b}}\qquad S_2(C,A_3)=\frac{c+\frac{2ad}{a+d}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$$

□

定理 17 選手 D 賽程表現率$S_2(D,A_1)=\frac{d+\frac{2ab}{a+b}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$、$S_2(D,A_2)=\frac{d+\frac{2ac}{a+c}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$、$S_2(D,A_3)=\frac{d+\frac{2bc}{b+c}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$。

證明:

$$F_2(D,A_1)=\frac{P_0(C)}{c+d}\left(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(B)}{b+d}\right)=\frac{d+\frac{2ab}{a+b}}{(a+d)(b+d)(c+d)}$$

$$F_2(D,A_2)=\frac{P_0(B)}{b+d}\left(\frac{P_1(A)}{a+d}+\frac{P_1(C)}{c+d}\right)=\frac{d+\frac{2ac}{a+c}}{(a+d)(b+d)(c+d)}$$

$$F_2(D,A_3)=\frac{P_0(A)}{a+d}\left(\frac{P_1(B)}{b+d}+\frac{P_1(C)}{c+d}\right)=\frac{d+\frac{2bc}{b+c}}{(a+d)(b+d)(c+d)}$$

$$S_2(D,A_1)=\frac{d+\frac{2ab}{a+b}}{d+\frac{2ab}{a+b}}\qquad S_2(A,A_2)=\frac{d+\frac{2ac}{a+c}}{d+\frac{2ab}{a+b}}\qquad S_2(A,A_3)=\frac{d+\frac{2bc}{b+c}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$$

□

賽程的安排對選手的影響到底有多大呢?下舉兩個例子，分別是選手間實力成等差與成等比，讓我們看看此兩種情況下賽程安排對選手的影響。

(一) 選手間實力成等差

選手 A、B、C、D 的實力關係分別爲: $a=4d$、$b=3d$、$c=2d$、$d=d$。則各選手於各賽程表中的賽程表現率如下表示:

	A	B	C	D
A_1	83.333%	76.471%	100%	100%
A_2	85.938%	100%	64.474%	82.764%
A_3	100%	81.176%	66.316%	76.744%

(二) 選手間實力成等比

選手 A、B、C、D 的實力關係分別為: a = 8d、b = 4d、c = 2d、d = d。則各選手於各賽程表中的賽程表現率如下表示:

	A	B	C	D
A_1	70%	77.193%	100%	100%
A_2	72%	100%	49.091%	66.316%
A_3	100%	83.626%	51.52%	57.895%

國際上包含 4 位選手的單淘汰制賽程採用 A_3 賽程，由賽程表現率可發現 A_3 賽程能使擁有最高實力的選手有最大的勝率，其餘選手的勝率則受到賽程影響而非該選手應有的最大勝率。有趣的是，受到此賽程安排影響最大的，並不是直觀上的最弱選手，反而是次弱選手，這真是一個有趣的發現。

□

九、「資訊轉換為實力」模型晉級預測的成功率

當我們欲計算勝率時，我們需要選手之實力。但是可以取得的資訊無法選擇，如何將「資訊轉換為實力」才能確實表現選手的強度?以下分析一實際比賽，並驗證所提出之實力轉換模型是否能作為「資訊轉換為實力」之參考。

此實際比賽為網路投票，共 288 名選手參賽，第一輪與第二輪賽程以每小組 3 名選手進行，得票最高之選手得以晉級下一輪之賽程；由第三輪開始，所留下的 32 名選手皆進行 1 對 1 之單淘汰賽。

於此討論尚未進行下一輪賽程前，利用已結束賽程之資料提供下一輪將晉級選手之資訊，並利用權重的概念計算各選手所佔之輕重，如下函數定義:

1.令 $Q_n(A)$為選手 A 於第 n 場時之組重實力，$Q_n(A)$= 選手重×組重 。
2.令 $L_n(A)$為選手 A 之 n 次組重實力，$L_n(A) = L_{n-1}(A)\times Q_n(A)$。
3.令 R(P)為 P 組之預測成功率，$R(P) = \dfrac{\text{成功預測樣本}}{\text{總樣本數}}$ 。
4.以 G_n 表示賽程第 n 階段； G_f 表示決賽。

我們提出三種模型，分別為:選手重實力、最新組重實力($Q_k(A)$)、累乘組重實力($L_n(A)$)。

(一)以選手重實力預測各階段晉級選手的成功率

計算各選手的選手重(選手得票數/小組得票數)，於各場賽程比較此賽程所包含之選手的選手重實力，並預測選手重實力較高者能於該場次晉級。

以此方式統計 2007 年與 2008 年賽程各場次預測成功率如<表一>、<表二>所示:

階段	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_f	總和
成功樣本數	20	9	6	2	2	1	40
總樣本數	32	16	8	4	2	1	63
準確率	62.5%	56.25%	75%	50%	100%	100%	63.4920634920635%

<表一>2007 年選手重實力預測晉級選手成功率表

階段	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_f	總和
成功樣本數	20	11	6	2	1	1	41
總樣本數	32	16	8	4	2	1	63
準確率	62.5%	68.75%	75%	50%	50%	100%	65.0793650793651%

<表二>2008 年選手重實力預測晉級選手成功率表

實測結果 1 以選手重實力預測各階段晉級選手有 64%的預測成功率。

□

(二)以最新組重實力預測各階段晉級選手的成功率

利用已完成賽程之成績，計算各選手的最新組重實力($Q_n(A)$= 選手重×組重)，於各場賽程比較此賽程所包含之選手的最新組重實力，並預測最新組重實力較高者能於該場次晉級。

以此方式統計 2007 年與 2008 年賽程各場次預測成功率如<表三>、<表四>所示:

階段	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_f	總和
成功樣本數	22	9	6	2	0	0	39
總樣本數	32	16	8	4	2	1	63
準確率	68.75%	56.25%	75%	50%	0%	0%	61.9047619047619%

<表三>2007 年最新組重實力預測晉級選手成功率表

階段	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_f	總和
成功樣本數	20	12	3	1	2	0	38
總樣本數	32	16	8	4	2	1	63
準確率	62.5%	75%	37.5%	25%	100%	0%	60.3174603174603%

<表四>2008 年最新組重實力預測晉級選手成功率表

實測結果 2 以最新組重實力預測各場次晉級選手有 61%的預測成功率。

□

(三) 以累乘組重實力預測各階段晉級選手的成功率

利用已完成賽程之成績，計算各選手的累乘組重實力($L_n(A) = L_{n-1}(A) \times Q_n(A)$)，於各場賽程比較此賽程所包含之選手的累乘組重實力，並預測累乘組重實力較高者能於該場次晉級。

以此方式統計 2007 年與 2008 年賽程各場次預測成功率如<表五>、<表六>所示:

階段	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_f	總和
成功樣本數	23	10	7	3	0	0	43
總樣本數	32	16	8	4	2	1	63
準確率	71.875%	62.5%	87.5%	75%	0%	0%	68.2539682539683%

<表五>2007 年累乘組重實力預測晉級選手成功率表

階段	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_f	總和
成功樣本數	20	14	5	1	2	1	43
總樣本數	32	16	8	4	2	1	63
準確率	62.5%	87.5%	62.5%	25%	100%	100%	68.2539682539683%

<表六>2008 年累乘組重實力預測晉級選手成功率表

實測結果 3 以累乘組重實力預測各場次晉級選手有 68%的預測成功率。

□

綜合以上 3 個實測結果，可得以累乘組重實力預測各場次晉級選手有較高的預測成功率。

十、模型預測冠軍的成功率

討論尚未進行下一輪賽程前，以結束賽程之資料計算選手重實力、最新組重實力、累乘組重實力作爲選手實力，後利用勝率一般式求出各選手勝率後排序，預測勝率最高者爲冠軍。

以選手重實力、最新組重實力、累乘組重實力作爲選手實力，統計 2007 年與 2008 年賽程之勝率以<表七>、<表八>表示:

選手	選手重實力勝率	選手	最新組重實力勝率	選手	累乘組重實力勝率
A-34	31.6172260552213%	A-34	13.0620322521941%	A-34	31.6172260552213%
B-14	14.1326422487938%	B-14	11.8755957930285%	B-14	14.1326422487938%
C-17	8.21250965405299%	C-17	12.1382904601078%	C-17	8.21250965405299%
D-24	5.17329355066133%	D-24	12.7894633293646%	D-24	5.17329355066133%
E-4	14.2373110911097%	E-4	12.8987647341979%	E-4	14.2373110911097%
F-36	17.373490839476%	F-36	12.0320711369791%	F-36	17.373490839476%
G-34	6.46129904502843%	G-34	15.2439560916047%	G-34	6.46129904502843%
H-24	2.79222751565636%	H-24	9.95982620252316%	H-24	2.79222751565636%

<表七>2007 年選手重實力、最新組重實力、累乘組重實力選手勝率表

選手	選手重實力勝率	選手	最新組重實力勝率	選手	累乘組重實力勝率
A-35	10.4443466685665%	A-35	15.2793005309478%	A-35	29.3279857770616%
B-14	9.78492022076659%	B-14	8.92232958357408%	B-14	12.7579773552869%
C-18	17.2173585359914%	C-18	17.5509766822727%	C-18	19.598355119807%
D-7	8.27230622002483%	D-7	10.959754988276%	D-7	16.6061084934801%
E-29	11.5217022535192%	E-29	12.8370015029879%	E-29	7.62252168536483%
F-15	13.1810974399952%	F-15	10.6465716968589%	F-15	3.72749167512765%
G-34	14.390097843911%	G-34	12.5016613411968%	G-34	5.38723409837362%
H-27	15.1881708172252%	H-27	11.3024036738857%	H-27	4.9723257954982%

<表八>2008 年選手重實力、最新組重實力、累乘組重實力選手勝率表

實際冠軍 2007 年為 G-34、2008 年為 C-18。預測結果以下表格表示:

	選手重實力	最新組重實力	累乘組重實力
2007	A-34	G-34	A-34
2008	C-18	C-18	A-35

2007 年冠軍由最新組重實力可預測成功;2008 年冠軍則可由選手重實力與最新組重實力預測成功，綜合兩年的實測結果，認為最新組重實力為預測冠軍時最佳的實力轉換方式。

實測結果 4 欲以模型計算勝率預測冠軍，以最新組重實力為實力轉換方式最佳，亦即以即時更新的實力為轉換方式為預測最佳轉換方式。

綜合實測結果 1~4，我們可以得知:欲預測各賽程晉級選手時，比較各選手之累乘組重實力較佳、欲預測冠軍時，則是以最新組重實力為實力轉換方式較佳。

實測結果 5 欲預測各賽程晉級選手時，比較各選手之累乘組重實力較佳；
欲預測冠軍時，則是以最新組重實力為實力轉換方式較佳。

八、淘汰賽程之冠軍選手是否名符其實?

然而，使用淘汰賽程所選出之冠軍是否實力相符?計算實際冠軍每一階段之選手重與組重實力，如<表九>、<表十>、<表十一>所示:

選手	半準決賽選手重	選手	5 次組重實力
C-18	0.5902	C-18	0.00002159720557114480
H-27	0.5546	A-35	0.00002099155066412600
G-34	0.5399	D-7	0.00001365527695684790
F-15	0.5168	B-14	0.00001021114096374750
E-29	0.4832	G-34	0.00001011202195860610
A-35	0.4601	E-29	0.00000858154553478169
B-14	0.4454	H-27	0.00000819042782411866
D-7	0.4098	F-15	0.00000673976807083606

<表九>選手半準決賽選手重、5 次組重實力排序表

選手	準決賽選手重	選手	6 次組重實力
C-18	0.5489	C-18	0.0000056653640633508
G-34	0.5092	G-34	0.0000026883146096083
H-27	0.4908	H-27	0.0000020987699377100
F-15	0.4511	F-15	0.0000014529638511508

<表十>選手準決賽選手重、6 次組重實力排序表

選手	決賽選手重	選手	7 次組重實力
C-18	0.5152	C-18	0.000002918795565438
G-34	0.4848	G-34	0.000001303294922738

<表十一>選手決賽選手重、7 次組重實力排序表

發現實際冠軍之選手重與組重實力皆爲全部選手中之最大值，亦即實際冠軍爲所有選手中實力最強者。但第二名以後皆有逆轉之情形，故認爲淘汰賽能選出實力最強者，其餘名次則與賽程時選手位置分佈而有不符之情形。

實測結果 6 淘汰賽能選出實力最強者，其餘名次則與賽程時選手位置分佈而有不符之情形。

伍、研究結果

一、主要結果:

(一) 設選手 B、C 相對於選手 A 之實力值爲 x，則

$$x=\frac{b^2(a+c)+c^2(a+b)}{b(a+c)+c(a+b)}$$

(二) 於旁子樹的選手 B、C 之實力之升高對 P(A)之影響決定於選手 B 之實力 b 與 b_0 之大小關係；若 b> b_0 則 b 的上升降低 P(A)，若 b< b_0 則 b 的上升增加 P(A)。使 $b_0=0$ 之情況唯 c=0 時，能使 $b_0=0$，即選手 B 之實力值上升能直接降低選手 A 之勝率。其中:

$$b_0=\frac{c(\sqrt{2a(a+c)}-a)}{a+2c}$$

(三)若 B 選手爲種子選手，即可視爲 C 選手之實力 c=0，則 $b_0=0$。

(四)選手 Q_1 晉升至第 n 節點之勝率一般式爲 $P_n(Q_1)=P_0(Q_1)\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})$。

(五)包含 2^m 位選手之均高樹賽程表中，自身實力上升直接地使自身勝率上升。

(六)位於第 n 節點相對於選手 Q_1 之實力值 X_n 之一般爲: $X_n=\dfrac{1-\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}{\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}(P_{j-1}(Q_i)P_{Q_1Q_i})}q_1$。

(七) 選手 Q_1 晉升至第 n 節點的實力發揮度 $F_n(Q_1)=\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{P_{j-1}(Q_i)}{q_1+q_i}$ 。

(八)選手 A 的實力發揮度 $F_2(A , A_3) > F_2(A , A_2) > F_2(A , A_1)$

選手 B 的實力發揮度 $F_2(B , A_2) > F_2(B , A_3) > F_2(B , A_1)$

選手 C 的實力發揮度 $F_2(C , A_1) > F_2(C , A_3) > F_2(C , A_2)$

選手 D 的實力發揮度 $F_2(D , A_1) > F_2(D , A_2) > F_2(D , A_3)$

(九)在包含 4 位選手的賽程中，對自己的最有利賽程表為與除自己以外之最弱選手於第一場賽程比賽。

(十)選手 A 賽程表現率 $S_2(A,A_1)=\dfrac{a+\frac{2cd}{c+d}}{a+\frac{2bc}{b+c}}$ 、$S_2(A,A_2)=\dfrac{a+\frac{2bd}{b+d}}{a+\frac{2bc}{b+c}}$ 、$S_2(A,A_3)=\dfrac{a+\frac{2bc}{b+c}}{a+\frac{2bc}{b+c}}$

選手 B 賽程表現率 $S_2(B,A_1)=\dfrac{b+\frac{2cd}{c+d}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$ 、$S_2(B,A_2)=\dfrac{b+\frac{2ac}{a+c}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$ 、$S_2(B,A_3)=\dfrac{b+\frac{2ad}{a+d}}{b+\frac{2ac}{a+c}}$

選手 C 賽程表現率 $S_2(C,A_1)=\dfrac{c+\frac{2ab}{a+b}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$ 、$S_2(C,A_2)=\dfrac{c+\frac{2bd}{b+d}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$ 、$S_2(C,A_3)=\dfrac{c+\frac{2ad}{a+d}}{c+\frac{2ab}{a+b}}$

選手 D 賽程表現率 $S_2(D,A_1)=\dfrac{d+\frac{2ab}{a+b}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$ 、$S_2(D,A_2)=\dfrac{d+\frac{2ac}{a+c}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$ 、$S_2(D,A_3)=\dfrac{d+\frac{2bc}{b+c}}{d+\frac{2ab}{a+b}}$

陸、討論與展望

以上定理，有 3 項期待能繼續推廣:

1 .包含 8 人之賽程選手實力升降造成己身威脅之門檻。

2 .包含 8 人之賽程各選手於所有可能賽程表中實力發揮度之大小關係，以及各選手於所有可能賽程表中的賽程表現率。

3 .包含 8 人之賽程各選手最有利賽程表的安排規則。

利用相對實力、威脅門檻、勝率一般式、實力發揮度與賽程表現率，我們可以分析選手於賽程表所被安排位置與可能遭遇對手之實力對選手勝率所造成的影響,進而判斷賽況優劣。

以選手重實力、最新組重實力、累積組重實力所作之預測雖有一定的成功率，仍有待更大的樣本數趨近修正此機率數值。此實際比賽為一年一度的網路投票，此後繼續觀察分析比賽數據，檢驗所提出之「數據—實力」轉換方式使否可供參考。以此預測較受歡迎的選手，可提供相關商品製作的廠商公司決策製作計劃時的一個參考指標，並於賽程進行中推出受歡迎選手相關商品。

柒、參考資料及其他

一、中文部分

【期刊文章】

黃光明 (1978) 。淘汰賽。數學傳播，第三卷第二期，2-5。

【國際科展作品】

于小涵 (2006) 。輸贏一線間-淘汰賽的相關探討。台灣 2006 年國際科學展覽會。

二、英文部分

【期刊文章】

F.R.K.Chung and F.K.Hwang (1978). Do Stronger Players Win More Knockout Tournament? Journal of the American Statistical Association Vol.73, 593-596.

三、網路資源

(一)中文部分

【資料庫資料】

最萌角色大賽 2008 中文網。2009 年 2 月 15 日，取自：http://saimoe2008twhk.blogspot.com/

(二)日文部分

【資料庫資料】

アニメ最萌トーナメント 2007。2009 年 3 月 6 日，

取自:http://animemoe2007.hp.infoseek.co.jp/

アニメ最萌トーナメント 2008。2009 年 3 月 6 日，

取自：http://friend.45.kg/saimoe2008/

【評語】040414

1、 此件作品只利用簡單的古典機率，卻分析了 10 個問題，全文提出了許多概念，是比較特別的地方。

2、 作者熱情洋溢地介紹自己的作品，態度愉悅而自信，深具感染力。