中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳團隊合作獎

040413

旋乾轉坤陰陽易位

學校名稱：國立潮州高級中學

作者：	指導老師：
高二 蘇晏徵 高二 卓筠凌 高二 戴筱燕	洪育祥

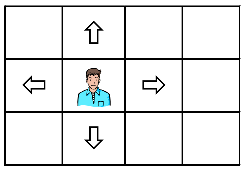
關鍵詞：換座位、迴圈乘積、匹配

摘要

本文是從學校生活中常見的換座位，所延伸出來的數學問題，主要是按照一個換座位的規則來探討所有可能的方法數，規則中要求每人每次只能朝前、後、左、右的方向換位置，並且必須離開原位。在處理過程中，我們發現方法數都是平方數，至於是哪一個數的平方，後來發現此數恰好就是原先問題再限制成倆倆換座的方法數，在 $2\times n$ 的情形中就會得到 *Fibonacci* 平方數列。利用自行定義的迴圈乘積的方法我們證明這個結果，把此結果應用到不規則平面圖形、立體、或是再加上可斜角交換、圖上都有不錯的結果，最後也找到漢米爾頓迴圈的一個判斷法則。

壹、研究動機

每次段考的成績公布後，接下來就有一件令大家緊張的事情發生，那就是—換座位，有時老師讓成績好的先選，有時用抽籤的方式來抽座位，有時依成績排成 S 型…等，我們一時突發奇想，是不是可以要求大家都要換座位，但是換完座位後都坐在原來座位的旁邊，即原來座位之前、後、左、右的位置上呢？

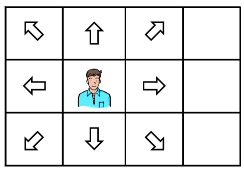


平面型

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

座位編號

舉例來說 6 號可以換到 2、5、7、10 號四個位置；3 號可以換到 2、4、7 號三個位置。為了解釋方便，我們定義平面第 I 型換座位規則：可朝前、後、左、右方向移動，每人必須離開原來位置並且倆倆交換；平面第 II 型換座位規則：可朝前、後、左、右方向移動，每人必須離開原來位置，但不限定倆倆交換。



平面斜角型

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

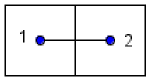
座位編號

平面斜角第 I 型換座位規則：可朝前、後、左、右、斜角等方向移動，每人必須離開原來位置並且倆倆交換；平面斜角第 II 型換座位規則與平面斜角第 I 型相同，但不限定倆倆交換。立體第 I 型換座位規則：可朝前、後、左、右、上、下方向移動，每人必須離開原來位置並且倆倆交換；立體第 II 型換座位規則與立體第 I 型相同，但不限定倆倆交換。之後推廣都分成倆倆交換與不限制倆倆交換兩種情形討論，並從實例來觀察與討論之間的關係。

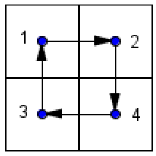
貳、研究目的

一、首先定義：在一個矩形陣列中，每一格皆填入一個號碼，不失一般性，我們由 1 開始填起，由左而右、由上而下，依序將整個陣列填滿。並且定義符號：

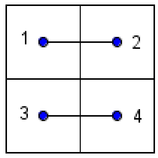
(一)如右圖，以符號(12) 表示 1 換至 2，2 換至 1，即 1 與 2 互換的意思，同理符號(21) 表示 2 換至 1，1 換至 2，即 2 與 1 互換的意思，所以(12)=(21) ，我們稱之為轉置，習慣上以第 1 個數是最小的數來表示，即(12) 來代表。



(二)如右圖，以符號(1243) 表示 1 換至 2，2 換至 4，4 換至 3，3 換回 1，此互換結果恰好繞一圈，故稱一迴圈，依此定義 (1243)=(2431)=(4312)=(3124) ，習慣上以第 1 個數是最小的數作代表，即(1243) 來代表其它同義之迴圈，且其長度為 4，長度為偶數的迴圈我們稱作偶迴圈，因此(1243) 是一個偶迴圈。特別強調像(12) 一般稱作轉置，但是當作迴圈看時也可視為偶迴圈。



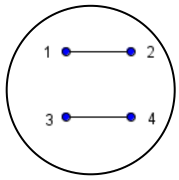
(三)如右圖，以符號(12)(34) 表示 1 與 2 互換，3 與 4 互換，因此 (12)(34)=(34)(12) 。



二、其次定義：在一個圖中，將相異兩點以邊連接。並且定義符號：

(一)如右圖，以符號(12) 表示 1 與 2 相連於一邊，也可當 1 與 2 互換的意思，所以(12)=(21) ，在此我們稱之為匹配，習慣上以(12) 來代表。

(二)如右圖，以符號(12)(34) 表示 1 與 2 相連，3 與 4 相連，所以(12)(34)=(34)(12) ，因為 1234 四個點都已經匹配了，所以我們稱此種配對方式叫做完全匹配。



參、研究設備及器材

一、紙＆筆

二、西洋棋盤

三、Visual Basic 程式

肆、研究過程或方法

一、先利用西洋棋盤，實際模擬換座位的方法，探討遊戲規則

(一)我們發現 2×3 和 3×2 與 3×4 和 4×3 結構是一樣的。

(二)我們發現 1×1、3×3、3×5…等這種奇數×奇數的陣列，根本無法依上述規則完成換座位。

二、首先觀察平面型2×3

1	2	3
4	5	6

(一)平面第 I 型共 3 種：(12)(36)(45),(14)(23)(56),(14)(25)(36)

(二)平面第 II 型共 9 種：
(12)(36)(45),(123654),(1254)(36),(145632),(14)(23)(56),(14)(2365),(1452)(36),
(14)(2563),(14)(25)(36)

三、其次觀察平面斜角型2×3

1	2	3
4	5	6

(一)平面斜角第 I 型共 5 種：

(12)(36)(45),(14)(23)(56),(14)(25)(36),(14)(26)(35),(15)(24)(36)

(二)平面斜角第 II 型共 25 種：
(145632),(12)(36)(45),(1452)(36),(1542)(36),(145362),(14)(23)(56),(14)(2563),(156324)
(14)(2653),(123654),(1254)(36),(126354),(14)(2365),(14)(25)(36),(14)(2635),(1524)(36)
(14)(2356),(14)(2536),(14)(26)(35),(153624),(1245)(36),(142365),(1425)(36),(142635)
(15)(24)(36)

這邊僅考慮偶迴圈之結構。

四、觀察平面不規則型：

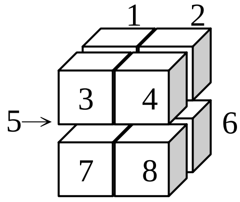
		1	2
3	4	5	6
7	8		

(一)平面第 I 型共 4 種：

(12)(56)(34)(78),(12)(56)(37)(48),(15)(26)(34)(78),(15)(26)(37)(48)

(二)平面第 II 型共 16 種：
(12)(56)(34)(78),(12)(56)(37)(48),(12)(56)(3487),(12)(56)(3784),(15)(26)(34)(78)
(15)(26)(37)(48),(15)(26)(3487),(15)(26)(3784),(1562)(34)(78),(1562)(37)(48)
(1562)(3487),(1562)(3784),(1265)(34)(78),(1265)(37)(48),(1265)(3487),(1265)(3784)

五、接著觀察立體型2×2×2



(一)立體第 I 型共 9 種：
(12)(34)(56)(78),(13)(24)(56)(78),(15)(26)(34)(78)
(12)(37)(48)(56),(12)(34)(57)(68),(13)(24)(57)(68)
(15)(24)(37)(68),(13)(26)(48)(57),(15)(26)(37)(48)

(二)立體第 II 型共 81 種：

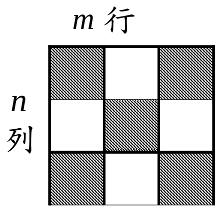
1.(12)(34)(56)(78)	21.(15)(26)(34)(78)	41.(12)(34)(57)(68)	61.(15)(24)(37)(68)
2.(1342)(56)(78)	22.(1265)(3784)	42.(1342)(57)(68)	62.(1375)(2684)
3.(1562)(34)(78)	23.(126875)(34)	43.(157342)(68)	63.(15)(2684)(37)
4.(12)(3784)(56)	24.(13426875)	44.(134862)(57)	64.(12657843)
5.(12)(34)(5786)	25.(15)(243786)	45.(15734862)	65.(13)(248756)
6.(1342)(5786)	26.(134875)(26)	46.(1243)(5687)	66.(26)(157843)
7.(15687342)	27.(15)(26)(3784)	47.(13)(24)(5687)	67.(126573)(48)
8.(13487562)	28.(12)(3487)(56)	48.(15786243)	68.(126843)(57)
9.(1562)(3784)	29.(137842)(56)	49.(12486573)	69.(13)(2486)(57)
10.(1243)(56)(78)	30.(1562)(3487)	50.(1243)(57)(68)	70.(1573)(2486)
11.(13)(24)(56)(78)	31.(12)(37)(48)(56)	51.(13)(24)(57)(68)	71.(13)(26)(48)(57)
12.(156243)(78)	32.(12)(348657)	52.(1573)(24)(68)	72.(1573)(26)(48)
13.(124873)(56)	33.(13756842)	53.(13)(2684)(57)	73.(1265)(3487)
14.(1243)(5786)	34.(156842)(37)	54.(1573)(2684)	74.(13784265)
15.(13)(24)(5786)	35.(137562)(48)	55.(12437865)	75.(15)(26)(3487)
16.(156873)(24)	36.(1562)(37)(48)	56.(24)(137865)	76.(1265)(37)(48)
17.(13)(265784)	37.(12)(34)(5687)	57.(15)(268734)	77.(12684375)
18.(15624873)	38.(1342)(5687)	58.(37)(124865)	78.(1375)(2486)
19.(1265)(34)(78)	39.(157862)(34)	59.(68)(124375)	79.(15)(2486)(37)
20.(134265)(78)	40.(12)(375684)	60.(24)(1375)(68)	80.(1375)(26)(48)
			81.(15)(26)(37)(48)

伍、研究結果

定理 1：任何$n\times m$(奇數)之座位表，

(一)無法依平面第 I 型換座位規則完成換座位

(二)無法依平面第 II 型換座位規則完成換座位



證明：(一)因為$n\times m$為奇數，但平面第 I 型換座位規則須倆倆互換故無法完成換座位。

(二)將座位表模擬到西洋棋盤上，依平面第 II 型換座位規則，原來坐在黑色位置須換到白色位置，而原來坐在白色位置須換到黑色位置，但座位總數是奇數，所以黑、白色位置必不相等，因此也無法完成換座位。

引理 1：任何$n\times m$(偶數)之座位表，則

(一)可以依平面第 I 型換座位規則完成換座位

(二)可以依平面第 II 型換座位規則完成換座位

證明：(一)因為$n\times m$為偶數，可以倆倆互換來換座位，故可完成平面第 I 型換座位。

(二)同定理 1(二)將座位表模擬到西洋棋盤上，原來坐在黑色位置換到白色位置，而原來坐在白色位置換到黑色位置，即可完成平面第 II 型換座位。

引理 2：(一)對於所有$n\times m=N$(偶數)平面第 I 型的結構，必定由$\dfrac{N}{2}$個轉置所構成。

(二)對於所有$n\times m=N$(偶數)平面第 II 型的結構，必定是迴圈與轉置的組合。

證明：(一)依定義因為每人位置必須改變，且又要求倆倆互換，故每人必出現在其中一個轉置，這些轉置共$\dfrac{N}{2}$個。

(二)依定義因為每人位置必須改變，且可朝前後左右方向交換，所以有可能兩兩交換，是一種轉置；也有可能形成推擠效應，即 A 換到 B，B 換到 C，C 換到 D，D 又換回到 A，此時稱為迴圈。所以每一種平面第 II 型的方法，必定是迴圈與轉置的組合。

範例 1：例如(1254)(36)是右圖符合 2×3 平面第 II 型的規則的一種排列方法，由一個長度為 4 的迴圈及一個轉置所構成，其意義是 1 換至 2，2 換至 5，5 換至 4，4 換回 1，而且 3 與 6 互換。

1	2	3
4	5	6

定義 1：迴圈乘積：對於兩個$n \times m$平面第 I 型的排列方法，我們定義×運算(<u>第一組</u>×<u>第二組</u>)，基本上遵循下列步驟：

(一)每次從第一組開始，不失一般性從最小數a開始，若b為a所對應的轉置，則到第二組找b所在的轉置。

(二)若a為b在第二組對應的轉置，則以a為首的一個迴圈(在此為轉置)，已經結束，記為(ab)。

(三)若c為b在第二組對應的轉置，則再回到第一組找c所在的轉置，c所對應的轉置不可能是a,b,c(每一個數在每一組僅出現一次)，不失一般性稱為d，又再到第二組找d所對應的轉置。

(四)則d所對應的數不可能是b,c(已出現)，若是出現a，則以a為首的一個迴圈，已經結束，記為$(abcd)$，然後再回到第一組繼續找不在$(abcd)$中且是最小的數重複步驟(一)。

(五)若d所對應的數不是a，則繼續步驟(三)。

(六)從上面敘述，不難發現，透過×運算的結果其括號內元素個數為偶數，即迴圈長度必定是**偶數**，此種迴圈稱為偶迴圈。

1	2	3
4	5	6

範例 2：如右圖在2×3階之$(12)(36)(45) \times (14)(25)(36)$迴圈乘積運算，我們稱$(12)(36)(45)$是第一組、$(14)(25)(36)$是第二組，從第一組之最小數 1 開始，依迴圈乘積之運算法則將第一組之 1 換至 2，接著找第二組之 2，結果換至 5，再回過頭找第一組之 5，結果換至 4，最後再找第二組之 4，結果換至 1，回到一開始之 1，以 1 為首的迴圈結束記為(1254)；接著換 3 開始，第一組之 3 換至 6，接著找第二組之 6，結果換至 3，回到開始之 3，以 3 為首的迴圈(轉置)結束記為(36)，因此$(12)(36)(45) \times (14)(25)(36) = (1254)(36)$，根據引理 2 這是平面第 II 型的排列方法。

1	2	3
4	5	6

範例 3：如右圖在2×3階之$(12)(36)(45) \times (12)(36)(45)$迴圈乘積運算，從第一組之最小數 1 開始，將第一組之 1 換至 2，接著找第二組之 2，結果換至 1，回到開始之 1，以 1 為首的迴圈(轉置)結束記為(12)；接著換 3 開始，第一組之 3 換至 6，而第二組之 6 換至 3，回到開始之 3，以 3 為首的迴圈(轉置)結束記為(36)，同理(45)，因此$(12)(36)(45) \times (12)(36)(45) = (12)(36)(45)$是平面第 II 型的其中一種排列方法。

定義 2：對於任何一個 $n\times m$ 平面第 II 型的其中一種排列方法，我們亦可拆解成兩個平面第 I 型的×運算，其步驟如下：

(一)不失一般性每次從第一個迴圈的最小數 a 開始，若其換到 b，則在第一組的第一個轉置中，記成 (ab)

(二)不失一般性設 b 換到 c，則在第二組的第一個轉置中，記成 (bc)

(三)不失一般性設 c 換到 d，則在第一組的第二個轉置中，記成 (cd)

(四)不失一般性設 d 換到 e，則在第二組的第二個轉置中，記成 (de)

重複上列步驟直到第二組最後一個轉置必須連到第一個 a，記成 $(\square a)$，於是第一個迴圈結束，接著再從第二個迴圈開始，重複步驟(一)，直到第 II 型的最後一個迴圈結束，這樣就可得到兩個平面第 I 型的乘積

1	2	3
4	5	6

範例 4：在 2×3 階中之(123654)是平面第 II 型的其中一種排列方法的，我們在第一組的第一個轉置寫上(12)，在第二組的第一個轉置寫上(23)，再回到第一組的第二個轉置寫上(36)，再到第二組的第二個轉置寫上(65)，又回到第一組的第三個轉置寫上(54)，最後到第二組的第三個轉置寫上(41)，此時迴圈結束，同時得到如下結果(123654)=(12)(36)(54)×(23)(65)(41)，整理後可得

(123654)=(12)(36)(45)×(14)(23)(56)，是兩個平面第 I 型的乘積。

範例 5：在 2×3 階中之(1254)(36)是平面第 II 型的其中一種排列方法的，我們在第一組的第一個轉置寫上(12)，在第二組的第一個轉置寫上(25)，再回到第一組的第二個轉置寫上(54)，再到第二組的第二個轉置寫上(41)，此時(1254)這個迴圈已經拆解完成，接著拆解(36)這個迴圈，在第一組的第三個轉置寫上(36)，在第二組的第三個轉置寫上(63)，此時第 II 型的迴圈全拆解完成。所以(1254)(36)=(12)(54)(36)×(25)(41)(63)，整理後可得(1254)(36)=(12)(36)(45)×(14)(25)(36)，是兩個平面第 I 型的乘積。

定理 2：假設 A 是 $n\times m$ 平面第 I 型的排列方法所成的集合，B 是其第 II 型的排列方法所成的集合，則 $n(B)=n(A)^2$

證明：給定函數 $f:A\times A\to B$，即 $f(a_i,a_j)=a_i\times a_j=b_k$，其中 $a_i,a_j\in A,b_k\in B$

(一)從定義 1 可以得到，$f(a_i,a_i)=a_i\times a_i=a_i$，$f(a_i,a_j)=a_i\times a_j\neq a_j\times a_i=f(a_j,a_i)$，因此 $f:A\times A\to B$ 是一個一對一函數

(二)對任何一個 $b_k\in B$，從定義 2 知可以找到 $a_i,a_j\in A$，使得 $f(a_i,a_j)=a_i\times a_j=b_k$，因此 $f:A\times A\to B$ 是一個映成函數

由(一)(二)知，$f:A\times A\to B$ 是一個一對一且映成函數，所以 $n(B)=n(A)\times n(A)=n(A)^2$，即所有平面第 II 型的排列方法數等於其第 I 型的排列方法數的平方。

範例 6：下表是平面 2×3 階迴圈乘積的所有情形，平面第 II 型的方法數等於其第 I 型的方法數的平方。

1	2	3
4	5	6

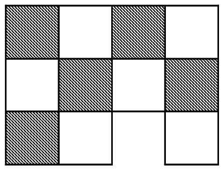
		y		
	$x\times y$	**(12)(36)(45)**	**(14)(23)(56)**	**(14)(25)(36)**
x	**(12)(36)(45)**	(12)(36)(45)	(123654)	(1254)(36)
	(14)(23)(56)	(145632)	(14)(23)(56)	(14)(2365)
	(14)(25)(36)	(1452)(36)	(14)(2563)	(14)(25)(36)

引理 3：(一)任何有缺格之座位表如果總數是奇數，無法完成換座位。

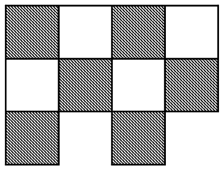
(二)任何有缺格之座位表如果總數是偶數，但黑白格數不相等，無法完成換座位。

證明:如右圖,理由如定理 1。

(一)



(二)



定理 3：不規則之連續平面座位表若總數是偶數，假設 B 為坐在黑色座位同學所成集合，W 為坐在白色座位同學所成集合，A 是 B 之任意子集合即 $A\subseteq B$，$N(A)$ 是 A 這群原先坐在黑色座位同學依前後左右換座位條件可以移到白色座位的集合，若此圖可以滿足第 I 型規則換座位，則其條件為 $n(B)=n(W)$ 且 $n(A)\le n(N(A))$。

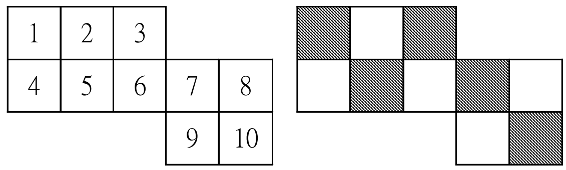
證明：根據第 I 型換座位規則，

(1)因為每個人都要換座位，而且原先坐在黑色位置的同學需移到白色位子，原先坐在白色位置的同學也要移到黑色去，所以黑白座位要一樣多，即 $n(B)=n(W)$。

(2) B 集合的每個同學都會與 W 集合的其中一個同學換座位，這表示 A 中的每個同學必會與 $N(A)$ 中的某個同學換座位，所以 $n(A)\le n(N(A))$。

由(1)(2)可知要滿足第 I 型換座位規則要有 $n(B)=n(W)$ 且 $n(A)\le n(N(A))$ 此二條件。

範例 7：如圖西洋棋盤之黑白格數相等，



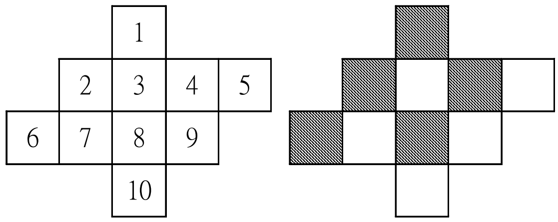
$B=\{1,3,5,7,10\}$，$W=\{2,4,6,8,9\}$，所以

$n(B)=n(W)$。任取 $A=\{1,3,7\}$ ($A\subseteq B$)，則

$N(A)=\{2,4,6,8,9\}$，顯然 $n(A)\le n(N(A))$。

當然 A 之非空集合有 31 種，每一種都滿足 $n(A)\le n(N(A))$，所以此座位表可以依平面第 I 型規則完成換座位，也可以依平面第 II 型規則完成換座位。

範例 8：如圖西洋棋盤之黑白格數相等，



$B=\{1,2,4,6,8\}$，$W=\{3,5,7,9,10\}$，所以

$n(B)=n(W)$。若取 $A=\{1,2,6\}$ ($A\subseteq B$)，則

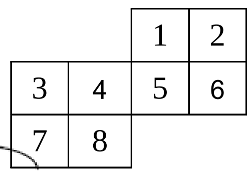
$N(A)=\{3,7\}$，顯然 $n(A)>n(N(A))$ 與定理 3 產生矛盾，所以此座位表無法依平面第 I 型規則換座位，因此其方法數記為 0 種。

定理 4：假設 A 是不規則連續平面 E 之平面第 I 型的排列方法所成的集合，B 是其第 II 型的排列方法所成的集合，則 $n(B)=n(A)^2$

證明：(一)若此不規則連續平面依定理三得知不存在第 I 型的排列方法，則 $n(A)=0$，當然也不會存在第 II 型的排列方法，所以 $n(B)=0$，因此 $n(B)=n(A)^2$

(二)若此不規則連續平面存在第 I 型的排列方法，則仿定理二可以證明 $n(B)=n(A)\times n(A)=n(A)^2$，即所有不規則連續平面第 II 型的排列方法數等於其第 I 型的排列方法數的平方。

範例 9：如右圖是一個不規則連續平面，則其所有第 I 型的排列方法有 4 個 (12)(34)(56)(78), (12)(37)(48)(56),(15)(26)(34)(78),(15)(26)(37)(48)，下表則是迴圈乘積的所有情形，不規則連續平面第 II 型的方法數等於其第 I 型的排列方法數的平方。



y

	$x\times y$	**(12)(34)(56)(78)**	**(12)(37)(48)(56)**	**(15)(26)(34)(78)**	**(15)(26)(37)(48)**
x	**(12)(34)(56)(78)**	(12)(34)(56)(78)	(12)(3487)(56)	(1265)(34)(78)	(1265)(3487)
	(12)(37)(48)(56)	(12)(3784)(56)	(12)(37)(48)(56)	(1265)(3784)	(1265)(37)(48)
	(15)(26)(34)(78)	(1562)(34)(78)	(1562)(3487)	(15)(26)(34)(78)	(15)(26)(3487)
	(15)(26)(37)(48)	(1562)(3784)	(1562)(37)(48)	(15)(26)(3784)	(15)(26)(37)(48)

範例 10：(一) (1524)(36) 是 2×3 平面斜角第 II 型的一種排列方法，此時(1524)是一個交叉的迴圈。

(二) (154)(236) 也是 2×3 平面斜角第 II 型的一種排列方法，但是我們不考慮長度是奇數的迴圈。

1	2	3
4	5	6

定理 5：假設 A 是 $n\times m$ 平面斜角第 I 型的排列方法所成的集合，B 是其第 II 型的排列方法所成的集合，則 $n(B)=n(A)^2$。※註：B 集合是偶迴圈(含轉置)的組合。

證明：仿定理二可以證明 $n(B)=n(A)\times n(A)=n(A)^2$，即所有平面斜角第 II 型的偶迴圈排列方法數會等於其第 I 型的排列方法數的平方。

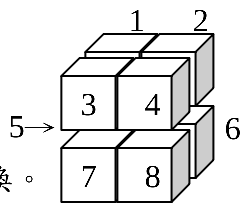
範例 11：下表是 2×3 階平面斜角迴圈乘積的所有情形，可以知道平面斜角第 II 型的偶迴圈排列方法數等於第 I 型的排列方法數的平方。

1	2	3
4	5	6

y

$x\times y$	**(12)(36)(45)**	**(14)(25)(36)**	**(14)(23)(56)**	**(15)(24)(36)**	**(14)(26)(35)**
(12)(36)(45)	(12)(36)(45)	(1254)(36)	(123654)	(1245)(36)	(126354)
(14)(25)(36)	(1452)(36)	(14)(25)(36)	(14)(2563)	(1425)(36)	(14)(2536)
x **(14)(23)(56)**	(145632)	(14)(2365)	(14)(23)(56)	(142365)	(14)(2356)
(15)(24)(36)	(1542)(36)	(1524)(36)	(156324)	(15)(24)(36)	(153624)
(14)(26)(35)	(145362)	(14)(2635)	(14)(2653)	(142635)	(14)(26)(35)

範例 12：(一) (15)(26)(34)(78) 是 $2\times2\times2$ 立體第 I 型的排列方法，由 $\frac{8}{2}=4$ 個轉置所構成，其意義是 1 與 5 互換，2 與 6 互換，3 與 4 互換，7 與 8 互換。

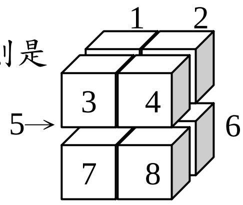


(二) (134875)(26) 是 $2\times2\times2$ 立體第 II 型的排列方法，此時 (134875) 是一個立體的迴圈。

定理 6：假設 A 是 $n\times m\times k$ 立體第 I 型的排列方法所成的集合，B 是其第 II 型的排列方法所成的集合，則 $n(B)=n(A)^2$

證明：仿定理二可以證明 $n(B)=n(A)\times n(A)=n(A)^2$，即所有立體第 II 型的排列方法數等於其第 I 型的排列方法數的平方。

範例 13：如右圖是一個立體圖，則其所有第 I 型的排列方法有 9 個，下表則是迴圈乘積的所有情形，可以知道立體第 II 型的排列方法數等於其第 I 型的排列方法數的平方。



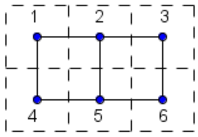
一、立體第 I 型排列	14.5x2>(1243)(5786)	38.2×5>(1342)(5687)	62.8×7>(1375)(2684)
1.(12)(34)(56)(78)	15.6x2>(13)(24)(5786)	39.3×5>(157862)(34)	63.9×7>(15)(2684)(37)
2.(13)(24)(56)(78)	16.7x2>(156873)(24)	40.4×5>(12)(375684)	64.1×8>(12657843)
3.(15)(26)(34)(78)	17.8x2>(13)(265784)	41.5×5>(12)(34)(57)(68)	65.2×8>(13)(248756)
4.(12)(37)(48)(56)	18.9x2>(15624873)	42.6×5>(1342)(57)(68)	66.3×8>(26)(157843)
5.(12)(34)(57)(68)	19.1x3>(1265)(34)(78)	43.7×5>(157342)(68)	67.4×8>(126573)(48)
6.(13)(24)(57)(68)	20.2x3>(134265)(78)	44.8×5>(134862)(57)	68.5×8>(126843)(57)
7.(15)(24)(37)(68)	21.3x3>(15)(26)(34)(78)	45.9×5>(15734862)	69.6×8>(13)(2486)(57)
8.(13)(26)(48)(57)	22.4x3>(1265)(3784)	46.1×6>(1243)(5687)	70.7×8>(1573)(2486)
9.(15)(26)(37)(48)	23.5x3>(126875)(34)	47.2×6>(13)(24)(5687)	71.8×8>(13)(26)(48)(57)
二、立體第 II 型排列	24.6x3>(13426875)	48.3×6>(15786243)	72.9×8>(1573)(26)(48)
1.1x1>(12)(34)(56)(78)	25.7x3>(15)(243786)	49.4×6>(12486573)	73.1×9>(1265)(3487)
2.2x1>(1342)(56)(78)	26.8x3>(134875)(26)	50.5×6>(1243)(57)(68)	74.2×9>(13784265)
3.3x1>(1562)(34)(78)	27.9x3>(15)(26)(3784)	51.6×6>(13)(24)(57)(68)	75.3×9>(15)(26)(3487)
4.4x1>(12)(3784)(56)	28.1×4>(12)(3487)(56)	52.7×6>(1573)(24)(68)	76.4×9>(1265)(37)(48)
5.5x1>(12)(34)(5786)	29.2×4>(137842)(56)	53.8×6>(13)(2684)(57)	77.5×9>(12684375)
6.6x1>(1342)(5786)	30.3×4>(1562)(3487)	54.9×6>(1573)(2684)	78.6×9>(1375)(2486)
7.7x1>(15687342)	31.4×4>(12)(37)(48)(56)	55.1×7>(12437865)	79.7×9>(15)(2486)(37)
8.8x1>(13487562)	32.5×4>(12)(348657)	56.2×7>(24)(137865)	80.8×9>(1375)(26)(48)
9.9x1>(1562)(3784)	33.6×4>(13756842)	57.3×7>(15)(268734)	81.9×9>(15)(26)(37)(48)
10.1x2>(1243)(56)(78)	34.7×4>(156842)(37)	58.4×7>(37)(124865)	
11.2x2>(13)(24)(56)(78)	35.8×4>(137562)(48)	59.5×7>(68)(124375)	
12.3x2>(156243)(78)	36.9×4>(1562)(37)(48)	60.6×7>(24)(1375)(68)	
13.4x2>(124873)(56)	37.1×5>(12)(34)(5687)	61.7×7>(15)(24)(37)(68)	

定義 3：一個圖 G 通常記作 $G=(V,E)$，其中 V 是點所成的集合，而 E 是邊所成的集合，我們要將前面結果應用到點與邊所構成的圖上。

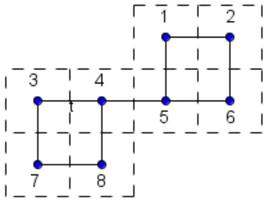
定義 4：一個圖 G 的匹配的意思是指 G 中不會共用一個點的邊所成的集合。一個具有 n 個點的圖 G，最大可能的匹配就是包含 $\frac{n}{2}$ 個邊，這樣的匹配，我們稱為完全匹配。

定義 5：一個迴圈如果通過圖 G 的頂點個數是偶數，我們稱為偶迴圈(包含匹配)。若這些不相交的偶迴圈恰通過所有圖 G 的頂點，我們稱這些偶迴圈為覆蓋圖 G 的偶迴圈集。

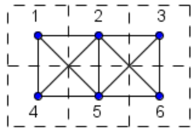
範例 14：我們將範例 5 之圖型改成圖，則平面第 I 型的情形，可以視為匹配問題之完全匹配，而第 II 型的情形，則為覆蓋偶迴圈集。故完全匹配有 3 個，覆蓋偶迴圈集有 9 個。



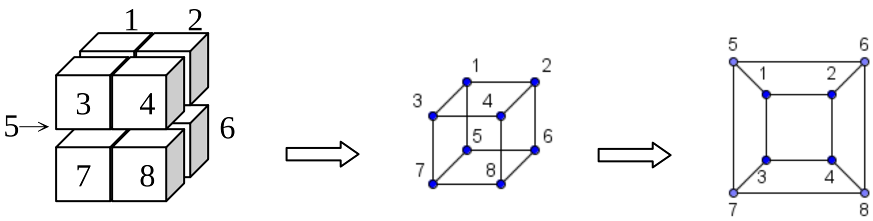
範例 15：我們將範例 9 之圖型改成圖，則不規則連續平面第 I 型的情形為完全匹配，而第 II 型的情形則為覆蓋偶迴圈集。如範例 9 之結果，完全匹配有 4 個，覆蓋偶迴圈集有 16 個。



範例 16：我們將範例 11 之圖型改成圖，則斜角第 I 型的情形，也可視為完全匹配，而第 II 型的情形則為覆蓋偶迴圈集。如範例 11 之結果，完全匹配有 5 個，覆蓋偶迴圈集有 25 個。



範例 17：我們將範例 13 之圖型改成圖，再換成平面圖，則立體第 I 型為完全匹配，而第 II 型為覆蓋偶迴圈集。如範例 13 之結果，完全匹配有 9 個，覆蓋偶迴圈集有 81 個。

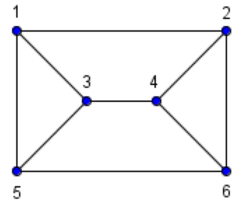


定理 7：假設圖 G 的頂點有偶數個，而 A 是圖 G 中所有完全匹配的方法數，B 是所有覆蓋圖 G 偶迴圈集的方法數所成的集合，則 $n(B)=n(A)^2$

證明：仿定理二可以證明 $n(B)=n(A)\times n(A)=n(A)^2$，即所有覆蓋偶迴圈集的方法數等於所有完全匹配的方法數的平方。

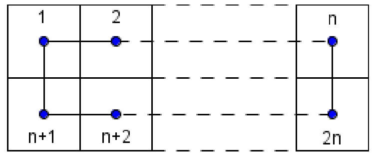
定義 6：漢米爾頓迴圈的意思是指一個迴圈會通過圖 G 中的所有頂點，且每一個頂點恰經過一次。

範例 18：如右圖，(126435) 是一個漢米爾頓迴圈，(153462) 也是一個漢米爾頓迴圈，在這邊這兩個迴圈視為不同，因此我們討論的迴圈是有方向性的。



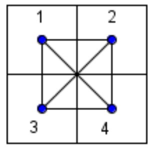
定理 8：任何 $2\times n$ 平面圖，有 2 個漢米爾頓迴圈。

證明：任何 $2\times n$ 平面圖都有 $(1,2,...,n,2n,...,n+2,n+1)$ 及 $(1,n+1,n+2,...,2n,n,n-1,...,2)$ 這 2 個漢米爾頓迴圈。



範例 19：2×2 之斜角圖，有 6 個漢米爾頓迴圈。

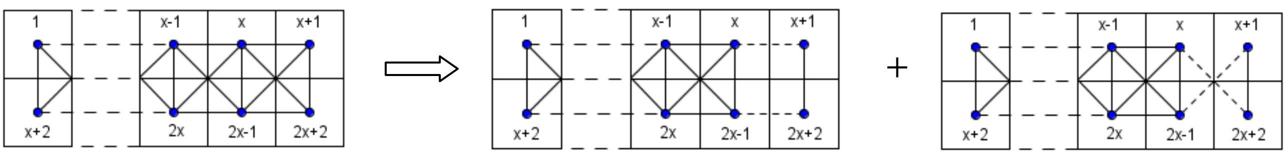
說明：如圖 2×2 之斜角圖有 (1243),(1342),(1234),(1432),(1324),(1423) 等 6 個漢米爾頓迴圈。



定理 9：任何 $2\times n(n\geq 3)$ 斜角圖，有 2^n 個漢米爾頓迴圈。

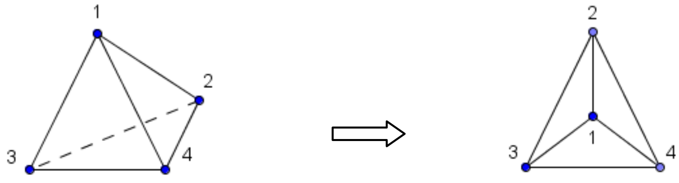
證明：(一)當 $n=3$ 時，有 (123654),(145632),(126354),(145362),(142365),(156324),(153624),(142635) 等 2^3 個漢米爾頓迴圈。

(二)假設 $n=x$ 時，有 2^x 個漢米爾頓迴圈。

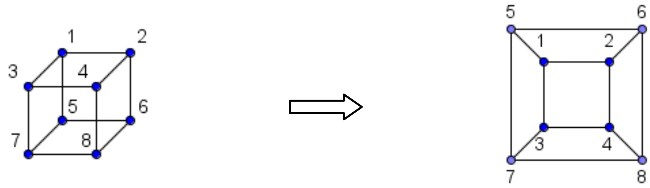


則當 $n=x+1$ 時，則會有 $2^x+2^x=2(2^x)=2^{x+1}$ 個漢米爾頓迴圈，所以由數學歸納法原理知，任何 $2\times n(n\geq 3)$ 斜角圖，有 2^n 個漢米爾頓迴圈。至於 $n=2$ 不合的原因請看上面的範例 19。

範例 20：將左邊正四面體視為右邊平面上的圖形，則完全匹配為 (12)(34),(13)(24),(14)(23) 共 3 個，而所有的覆蓋偶迴圈集為 (12)(34),(13)(24),(14)(23),(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432) 共 9 個，其中有 6 個是長度為 4 的偶迴圈，也就是漢米爾頓迴圈。



範例 21：將左邊正六面體視為右邊平面上的圖形，則完全匹配共 9 個(可參考範例 13 及 17)，而所有的覆蓋偶迴圈集共 81 個，其中有 12 個是長度為 8 的漢米爾頓迴圈。

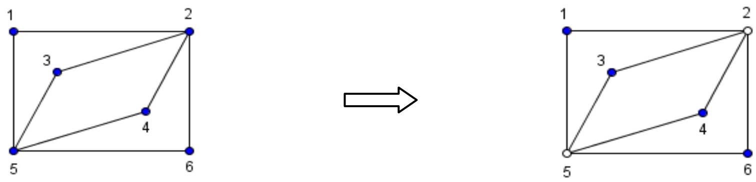


定理 10：任何一個長度 $2n$ (偶數)的漢米爾頓迴圈，均可以表示成二個完全匹配的迴圈乘積。

證明：任何一個長度 $2n$ (偶數)的漢米爾頓迴圈都可表示成 $(a_1, a_2, ..., a_{2n-1}, a_{2n})$，其中 $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ 是 $1, 2, ..., 2n$ 的一個重排，可利用定義 2 之迴圈乘積的方法將其拆成 2 個完全匹配。

定理 11：若一個圖的頂點共 $2n$ (偶數)個，如果此圖並無完全匹配，則此圖必無漢米爾頓迴圈。

證明：假設此圖有漢米爾頓迴圈，根據定理 10 知道必存在 2 個完全匹配，與已知此圖並無完全匹配矛盾，所以此圖無漢米爾頓迴圈。

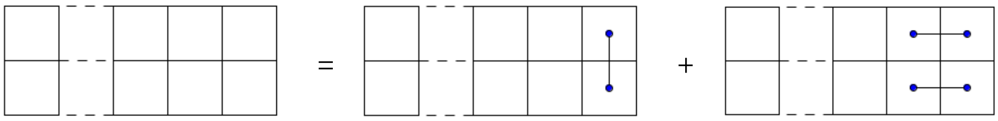


範例 22：如上圖，此圖無漢米爾頓迴圈。

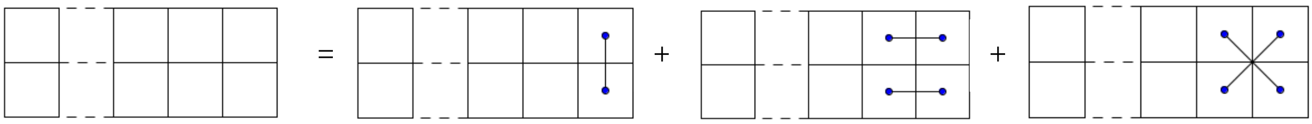
說明：此圖頂點數目雖為偶數，但並無任何完全匹配，根據定理 11 此圖必無漢米爾頓迴圈。

陸、討論

一、假設a_n為$2\times n$之平面第 I 型的排列方法數，利用數學歸納法可以證明$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，即$\lt a_n \gt$為 *Fibonacci* 數列，因此第 II 型的排列方法數則為 *Fibonacci* 平方數列。



二、假設b_n為$2\times n$之平面斜角第 I 型的排列方法數，利用數學歸納法可以證明$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$，即$\lt b_n \gt$為 *Jacobsthal* 數列，因此第 II 型的排列方法數則為 *Jacobsthal* 平方數列。



三、假設nm為偶數，則$n\times m$之平面第 I 型為兩兩互換的方法數，其方法數恰與在$n\times m$之平面上的骨牌排列(*Domino tiling*)的方法數是一樣的，它的方法數是(參考資料三)
$A_{n\times m} = 2^{\frac{mn}{2}} \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} \sqrt[4]{\cos^2 \frac{\pi j}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{m+1}}$，即第 II 型的方法數為$A_{n\times m}{}^2$。

四、對於n階之 *Aztec diamond* 之平面第 I 型的方法數，其方法數恰與在 *Aztec diamond* 之平面上的骨牌排列(*Domino tiling*)的方法數是一樣的，它的方法數是$B_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$(參考資料三)，因此 *Aztec diamond* 之第 II 型的方法數為$B_n{}^2$。

五、平面上之方向是前後左右，得到第 II 型的方法數是第 I 型方法數的平方；空間上之方向是前後左右上下，同樣地第 II 型的方法數也是第 I 型方法數的平方；這個結果我們推論在n維空間也應如此。

柒、結論

一、在矩形平面上，第 II 型的方法數是第 I 型方法數的平方。

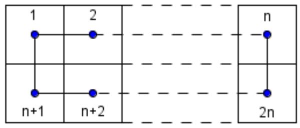
二、在不規則平面上，第 II 型的方法數是第 I 型方法數的平方。

三、在平面上允許斜角的情形，第 II 型(偶迴圈)的方法數是第 I 型方法數的平方。

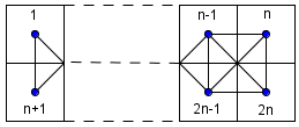
四、在立體上，第 II 型的方法數是第 I 型方法數的平方。

五、在圖上，覆蓋偶迴圈集的方法數是完全匹配的方法數的平方。

六、如右圖任何 $2\times n$ 平面圖，有 2 個漢米爾頓迴圈。



七、如右圖任何 $2\times n (n\geq 3)$ 斜角圖，有 2^n 個漢米爾頓迴圈。



八、若一個圖的頂點共 $2n$ (偶數)個，如果此圖並無完全匹配，則此圖必無漢米爾頓迴圈。

捌、參考資料及其他

一、許志農、黃森山教授。高級中學數學(四)教學手冊。龍騰文化事業公司，2008

二、單墫著(民 83)。趣味的圖論問題。新竹市：凡異出版社。

三、J. Bao, On the number of domino tilings of the rectangular grid, the holey square, and related problems, Final Report, Research Summer Institute at MIT, (1997).

四、http://mathworld.wolfram.com/

【評語】040413

1、 主要的工作是利用轉置、迴圈及迴圈乘積三種變換位置的運算，證明了平面型Ⅰ的排列方法數是型Ⅱ的排列方法數之平方，並且對不同的排列方法做了推廣。

2、 全文用了 23 個範例來做說明，部分數學符號所表達的意思不合常規。