中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040411

幻圓的研究

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 高珮容	鄭凱鐘
高二 葉鈺濙	戴青田

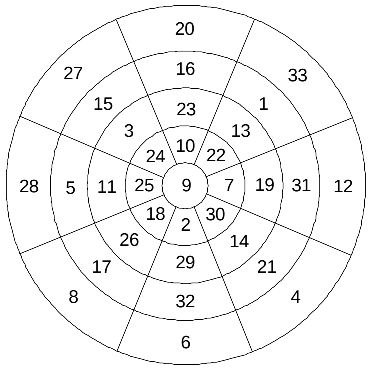
關鍵詞：幻圓、圓形數獨、同餘

摘要

本研究是以楊輝幻圓引發聯想，進而深入探討幻圓的性質。在研究過程中是以矩陣的形式呈現幻圓，利用微調的方式依同心圓數循序研究，並證明幻圓 C2R*n* 的存在性，進一步運用排列組合的概念求出相異幻圓總數；在幻圓 C3R*n* 方面，我們加入 Max 有序排列法尋找幻圓。同時，我們也將較爲特殊的構造方法整理，使得尋找幻圓更爲快速。我們接著探討幻圓的性質及圓心的規律，也找到可以將幻圓推廣的方法。在本研究中得出許多幻圓的特性與數種構造幻圓的方法。

壹、研究動機

偶然的機會在報紙一角上看見圓形數獨，引起我的興趣，便上網查詢資料，無意間發現了中國古代數學家楊輝在《續古摘奇演算法》中的攢九圖（又稱幻圓），如下圖所示。相較於擁有長久研究歷史的幻方（即魔方陣），幻圓這個主題比較少接觸，於是我們決定深入探討幻圓的特性。



貳、研究目的

一、 探討幻圓的性質及個數。

二、 探討幻圓圓心的特性。

三、 找出幻圓的構造方法。

參、文獻探討

一、 楊輝的攢九圖

楊輝幻圓由自然數 1 至 33 所構成，9 放在圓心，其餘數排列在四個同心圓上，每圈 8 個數。它有幾個奇妙的性質：

(1)四個圓周上之和（加圓心）皆爲 147　(2)四條直徑上數字和皆爲 147

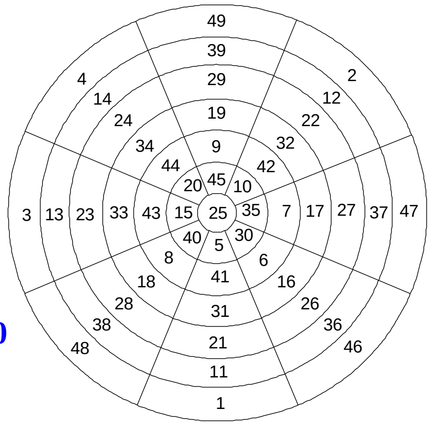
(3)八條半徑上數字之和爲 69 (4)四個圓周上數字之和等於八條半徑線上數字和的兩倍

楊輝在書中未曾說明幻圓的構造方法。新加坡大學蘭麗蓉博士建議將八組半徑數字分爲兩組，構成兩個四階半幻方，例如：

$$\begin{bmatrix} 28 & 5 & 11 & 25 \\ 27 & 15 & 3 & 24 \\ 6 & 32 & 29 & 2 \\ 8 & 17 & 26 & 18 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 & 31 & 19 & 7 \\ 4 & 21 & 14 & 30 \\ 20 & 16 & 23 & 10 \\ 33 & 1 & 13 & 22 \end{bmatrix}$$

由於這兩個四階半幻方每行每列的和都是 69，只需要從第一幻方和第二幻方中隨意各取一行，或隨意各取一列，構成同一條直徑上的兩對半徑，一共組成四條直徑，每條直徑有 8 個數，最後在圓心安放 9，不但可以排出楊輝幻圓，而且還可以排出許多不同排列的幻圓。由於數字的和與數字的次序無關，因此，任何兩組半徑數字可以互換位置，8 組半徑數字可以在圓圈上任意排列，而任何兩組圓圈也可以互換位置。如果限制四個圓周上必須有兩個同和半圓（半圓上的四個數字之和必須爲 69），那麼楊輝幻圓上的半徑位置就不可調換。具有 16 個同和線段（和數爲 69）的幻圓不只一個，可依靠四個圓圈的不同排列得到，共有 4×3×2×1=24 種。

二、 丁易東的太衍五十圖



南宋數學家丁易東與楊輝是同時代人，他以自然數 1 至 49 作出六同心圓幻圓，稱之爲太衍五十圖。如圖所示。

丁易東幻圓的特性：

(1)六個圓周數字之和爲 200

(2)四條直徑上數字之和爲 325

(3)幻圓上的任一數與其相對於圓心的對稱點上數字和爲 50

三、 李彥頡幻方研究

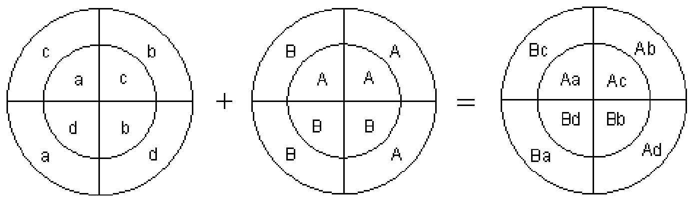
在第 37 屆全國科展中李彥頡在作品中也曾提到幻圓，他對於幻圓所下的定義爲：**各對角線的數字和相等且圓周上的數字和相等**。

我們發現李彥頡所建構的幻圓與楊輝幻圓是不同的，楊輝幻圓要求半徑的和必須相等，但李彥頡所建構的幻圓只要求直徑的和必須相等，且他所建構的是缺乏圓心的幻圓。他將拉丁方陣的觀念推廣並應用於幻圓，以下是他利用正交拉丁圓構造幻圓的方法：

利用拉丁方陣的特性，欲構造一個 n 階幻圓，須先造出兩個 n 階的圓形陣：

1. 各對角線各圓上元素各出現一次的圓形陣(拉丁圓)
2. 各對角線各圓上元素各出現兩次的圓形陣(次拉丁圓)

接著將兩個圓形陣合併即可得到幻圓，如下圖所示：



肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦

伍、研究過程或方法

一、 名詞定義：

(一) 幻圓 CmRn (x)表示由 m 個同心圓以及 n 條半徑所組成 (m、n 爲自然數，$m \geq 2$)。由 1~ mn+1 自然數所構成，取其中一數 x 置於圓心，其餘排列在 m 個同心圓上，每個圓上有 n 個數，使得 $\boxed{\text{每條半徑上數字和相等}}$（同時每條直徑上數字（含圓心）之和也會相等）、$\boxed{\text{每個圓周上數字和相等}}$。楊輝幻圓即 C4R8 (9)，而丁易東幻圓即 C6R8 (25)。

(二) 符號定義：

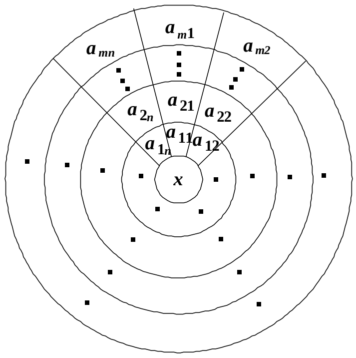
1. x：圓心數字　2. S_{mn+1}：所有數字總和　3. S'：除去圓心之所有數字和

4. S_r ：半徑和　5. S_l ；圓周和　6. $l_1, l_2, l_3 \ldots l_m$ ：由內而外之圓周和

7. Δ ：內外圈之差 8. $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots \Delta_m$ ：微調數 9. Δ_{ij} ：矩陣第 i 列-第 j 列

(三) 矩陣表示法：爲了方便討論，我們將幻圓 CmRn 利用 $m \times n$ 矩陣來表示。

1. 由內而外數起，第一圈數列表示矩陣第一列元素，最外圈數列表第 m 列。
2. 每一列均由 12 點鐘方向，從左側起依順時鐘方向排列而得。



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

3. 由定義可知：第 i 列和=第 i 列圓周和=l_i，i=1,2,…,m，第 j 行和=第 j 條半徑和，j=1,2,…,n。因此，**任兩列對調不改變圓周和且任兩行對調不改變半徑和。**

(四) 等價幻圓

等價幻圓組中之每個相異幻圓皆符合以下性質：

每條半徑數字集合相同，每個圓周數字集合相同，但排列方式不同。

若兩幻圓不滿足上述條件時稱爲異類〈或非等價〉相異幻圓。

當每組數字排列成幻圓時，可排列成(n-1)!×m!種不同的相對位置（∵半徑之間對調有 $\frac{n!}{n}$=(n-1)!種排法，圓周之間對調有 m!種方法），將可視爲一組等價幻圓組。

二、 CmRn 圓心的求法

先算出所有數字總和 S_{mn+1}，再求出圓心數 x（$1\le x\le mn+1$）使其滿足

(1)$n|\,S_{mn+1}-x=S'$ (2)$m|\,S_{mn+1}-x=S'$

證明：因各圈數字和皆爲 S_l，$m\,S_l=S_{mn+1}$-x= S'；又因各條半徑上數字和皆爲 S_r，

$n\,S_r=S_{mn+1}$-x= S'。由此可知 S' 爲 m、n 之公倍數，故 $S'\equiv 0(\mathrm{mod}\,[m,n])$。

三、 尋找所有幻圓的方法

首先尋找圓心數 x，控制半徑和 S_r 相同，接著微調圓周和 S_l（利用差數Δ微調，使得個別圓周和 $l_1'=l_2'=l_3'=\ldots=l_m'$）。

四、 依同心圓數 m 作分類討論

(一) 當 $m=2$ 時，C2Rn(x)

1. C2R2， $S_5=15,\ [2,2]=2,\ 2|15-x\Rightarrow x=1,3,5$

(1) x=1 時， $S'=14$, $S_r=7$, $S_l=7$

內圈　2　3　　l_1=5$\Rightarrow\Delta_1$=+2

外圈　5　4　　l_2=9$\Rightarrow\Delta_2=-2$

Δ　3　1　∵無法合成2∴無解

(2) x=3 時， $S'=12$, $S_r=6$ ，$S_l=6$

內圈　1　2　　l_1=3$\Rightarrow\Delta_1$=+3

外圈　5　4　　l_2=9$\Rightarrow\Delta_2=-3$

Δ　4　2　∵無法合成3∴無解

(3) x=5 時， S'=10, $S_r=5$, $S_l=5$

內圈　1　2　　l_1=3 $\Rightarrow \Delta_1$=+2

外圈　4　3　　l_2=7 $\Rightarrow \Delta_2 = -2$

Δ　　3　1　$\because$ 無法合成2 $\therefore$ 無解

$\therefore$ $\boxed{\text{由以上討論得知 C2R2 無解}}$

2. C2R3，$S_7 = 28,\ [2,3] = 6,\ 6|28 - x \Rightarrow x = 4$，$S' = 24,\ S_r = 8,\ S_l = 12$

內圈　1　2　3　　l_1=6 $\Rightarrow \Delta_1$=+6

外圈　7　6　5　　l_2=18 $\Rightarrow \Delta_2 = -6$

Δ　　6　4　2　1Δ、2Δ和相等(6=4+2)

$\therefore \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

由以上討論得知 $3 \times 2! \times \frac{3!}{3} = 6 \times 2 = 12$　$\therefore$ **C2R3**(4)**有 12 個相異幻圓**

3. C2R4，$S_9 = 45$，$[2,4] = 4$，$4|45 - x \Rightarrow x = 1,5,9$

(1) x=1 時，$S' = 44$，$S_r = 11$，$S_l = 22$

內圈　2　3　4　5　　$l_1 = 14 \Rightarrow \Delta_1 = +8$

外圈　9　8　7　6　　$l_2 = 30 \Rightarrow \Delta_1 = -8$

Δ　　7　5　3　1　2Δ和相等(7+1=5+3)

$\therefore \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

(2) x=5 時，$S' = 40$，$S_r = 10$，$S_l = 20$

內圈　1　2　3　4　　$l_1 = 10 \Rightarrow \Delta_1 = +10$

外圈　9　8　7　6　　$l_2 = 30 \Rightarrow \Delta_1 = -10$

Δ　　8　6　4　2　2Δ和相等(8+2=6+4)

$\therefore \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

(3) x=9 時，$S' = 36$，$S_r = 9$，$S_l = 18$

內圈　1　2　3　4　　$l_1 = 10 \Rightarrow \Delta_1 = +8$

外圈　8　7　6　5　　$l_2 = 26 \Rightarrow \Delta_1 = -8$

Δ　　7　5　3　1　2Δ和相等(7+1=5+3)

$\therefore \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

由以上討論得知 $3 \times 2! \times \frac{4!}{4} = 6 \times 6 = 36$　$\therefore$ $\boxed{\textbf{C2R4 有 36 個相異幻圓}}$

4. C2R5，$S_{11} = 66$，$[2,5] = 10$，$10|66 - x \Rightarrow x = 6$

$S' = 60$，S_r=12，$S_l = 30$

內圈　1　2　3　4　5　　$l_1 = 15 \Rightarrow \Delta_1 = 15$

外圈　11　10　9　8　7　　$l_2 = 45 \Rightarrow \Delta_2 = -15$

Δ　　10　8　6　4　2　$\because$ 無法合成15 $\therefore$ 無解

$\therefore$ $\boxed{\text{由以上討論得知 C2R5 無解}}$

5. C2R6，$S_{13} = 91$，$[2,6] = 6$，$6|91 - x \Rightarrow x = 1,7,13$

(1) x=1 時，$S' = 90$，S_r=15，$S_l = 45$

內圈　2　3　4　5　6　7　　$l_1 = 27 \Rightarrow \Delta_1 = 18$

外圈　13　12　11　10　9　8　　$l_2 = 63 \Rightarrow \Delta_2 = -18$

Δ　　11　9　7　5　3　1　2Δ、4Δ和相等(11+7=1+3+5+9)

$\therefore \begin{bmatrix} 13 & 3 & 11 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 12 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

(2) x=7 時，$S' = 84$，S_r=14，$S_l = 42$

內圈	1	2	3	4	5	6	$l_1=21\Rightarrow\Delta_1=21$
外圈	13	12	11	10	9	8	$l_2=63\Rightarrow\Delta_2=-21$
Δ	12	10	8	6	4	2	$\because$ 無法合成21 $\therefore$ 無解

(3) x=13 時，$S'=78$, S_r=13 , $S_l=19$

內圈	1	2	3	4	5	6	$l_1=21\Rightarrow\Delta_1=18$
外圈	12	11	10	9	8	7	$l_2=57\Rightarrow\Delta_2=-18$
Δ	11	9	7	5	3	1	2Δ、4Δ和相等(11+7=1+3+5+9)

$$\therefore\begin{bmatrix}12 & 2 & 10 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 11 & 3 & 9 & 8 & 7\end{bmatrix}$$

由以上討論得知 $2\times 2!\times\dfrac{6!}{6}$=2×2×120=480 ∴ $\boxed{\textbf{C2R6 有 480 個相異幻圓}}$

6. C2R7，$S_{15}=120$, $[2,7]=14$, $14|120-x\Rightarrow x$=8 ，$S'=112$, S_r=16 , $S_l=56$

內圈	1	2	3	4	5	6	7	$l_1=28\Rightarrow\Delta_1=+28$
外圈	15	14	13	12	11	10	9	$l_2=84\Rightarrow\Delta_2=-28$
Δ	14	12	10	8	6	4	2	3Δ、4Δ和相等

① 14+12+2=10+8+6+4=28、 ② 14+10+4=12+8+6+2=28

③ 14+8+6=12+10+4+2=28、 ④ 12+10+6=14+8+4+2=28

① $\begin{bmatrix}15 & 14 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9\\ 1 & 2 & 13 & 12 & 11 & 10 & 7\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}15 & 2 & 13 & 4 & 5 & 10 & 7\\ 1 & 14 & 3 & 12 & 11 & 6 & 9\end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix}15 & 2 & 3 & 12 & 11 & 6 & 7\\ 1 & 14 & 13 & 4 & 5 & 10 & 9\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}1 & 14 & 13 & 4 & 11 & 6 & 7\\ 15 & 2 & 3 & 12 & 5 & 10 & 9\end{bmatrix}$

由以上討論知 $4\times 2!\times\dfrac{7!}{7}$=5760 ∴ $\boxed{\textbf{C2R7}(8)\textbf{有 5760 個相異幻圓}}$

7. C2R8，$S_{17}=153$, $[2,8]=8$, $8|153-x\Rightarrow x$=1,9,17

(1) x=1 時，$S'=152$, S_r=19 , $S_l=76$

內圈	2	3	4	5	6	7	8	9	l_1=44 $\Rightarrow\Delta_1$=+32
外圈	17	16	15	14	13	12	11	10	l_2=108 $\Rightarrow\Delta_1$=−32
Δ	15	13	11	9	7	5	3	1	4Δ和相等

① 15+1+13+3=11+5+9+7=32、 ② 15+1+11+5=13+3+9+7=32、

③ 15+1+9+7=13+3+11+5=32、 ④ 15+3+5+9=1+13+11+7=32

① $\begin{bmatrix}2 & 3 & 15 & 14 & 13 & 12 & 8 & 9\\ 17 & 16 & 4 & 5 & 6 & 7 & 11 & 10\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}2 & 16 & 4 & 14 & 13 & 7 & 11 & 9\\ 17 & 3 & 15 & 5 & 6 & 12 & 8 & 10\end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix}17 & 3 & 4 & 14 & 13 & 7 & 8 & 10\\ 2 & 16 & 15 & 5 & 6 & 12 & 11 & 9\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}17 & 3 & 4 & 14 & 6 & 12 & 11 & 9\\ 2 & 16 & 15 & 5 & 13 & 7 & 8 & 10\end{bmatrix}$

(2) x=9 時，$S'=144$, S_r=18 , $S_l=72$

內圈	1	2	3	4	5	6	7	8	l_1=36 $\Rightarrow\Delta_1$=+36
外圈	17	16	15	14	13	12	11	10	l_2=108 $\Rightarrow\Delta_2$=−36
Δ	16	14	12	10	8	6	4	2	3Δ、4Δ、5Δ和相等

① 16+14+6=12+10+8+4+2=36、② 16+12+8=14+10+6+4+2=36、

③ 14+12+10=16+8+6+4+2=36、④ 16+14+4+2=12+10+8+6=36、 ⑤ 16+12+6+2=14+10+8+4=36、⑥ 16+10+8+2=14+12+6+4=36、

⑦ 16+4+6+10=2+14+12+8=36

①$\begin{bmatrix}17&16&3&4&5&12&7&8\\1&2&15&14&13&6&11&10\end{bmatrix}$②$\begin{bmatrix}17&2&15&4&13&6&7&8\\1&16&3&14&5&12&11&10\end{bmatrix}$

③$\begin{bmatrix}1&16&15&14&5&6&7&8\\17&2&3&4&13&12&11&10\end{bmatrix}$④$\begin{bmatrix}17&16&3&4&5&6&11&10\\1&2&15&14&13&12&7&8\end{bmatrix}$

⑤$\begin{bmatrix}17&2&15&4&5&12&7&10\\1&16&3&14&13&6&11&8\end{bmatrix}$⑥$\begin{bmatrix}17&2&3&14&13&6&7&10\\1&16&15&4&5&12&11&8\end{bmatrix}$

⑦$\begin{bmatrix}17&2&3&14&5&12&11&8\\1&16&15&4&13&6&7&10\end{bmatrix}$

(3) x=17 時，$S'=136$, $S_r=17$, $S_l=68$

內圈	1	2	3	4	5	6	7	8	$l_1=44 \Rightarrow \Delta_1=+32$
外圈	16	15	14	13	12	11	10	9	$l_2=108 \Rightarrow \Delta_2=-32$
Δ	15	13	11	9	7	5	3	1	4Δ和相等

① 15+1+13+3=11+5+9+7=32、② 15+1+11+5=13+3+9+7=32、

③ 15+1+9+7=13+3+11+5=32、④ 15+3+5+9=1+13+11+7=32

①$\begin{bmatrix}16&15&3&4&5&6&10&9\\1&2&14&13&12&11&7&8\end{bmatrix}$②$\begin{bmatrix}16&2&14&4&5&11&7&9\\1&15&3&13&12&6&10&8\end{bmatrix}$

③$\begin{bmatrix}16&2&3&13&12&6&7&9\\1&15&14&4&5&11&10&8\end{bmatrix}$④$\begin{bmatrix}16&2&3&13&5&11&10&8\\1&15&14&4&12&6&7&9\end{bmatrix}$

由以上討論知$(4+7+4)\times 2!\times \dfrac{8!}{8}=151200$ $\therefore$ $\boxed{\textbf{C2R8 有 151200 個相異幻圓}}$

8. 討論 C2Rn 的存在性：

(1) 當 n=4k+1，$k \in N$

$$S_{mn+1}=\frac{(8k+3)(8k+4)}{2}=(4k+2)(8k+3)\text{，}[m,n]=[2,4k+1]=8k+2 \Rightarrow x=4k+2$$

$$S'=(4k+2)(8k+3)-(4k+2)=(8k+4)(4k+1) \quad S_r=\frac{S'}{4k+1}=8k+4, S_l=2(2k+1)(4k+1)$$

內圈	1	2	$\cdots$	$4k+1$	$l_1=(4k+1)(2k+1) \Rightarrow \Delta_1=+(2k+1)(4k+1)$
外圈	$8k+3$	$8k+2$	$\cdots$	$4k+3$	$l_2=3(4k+1)(2k+1) \Rightarrow \Delta_2=-(2k+1)(4k+1)$
Δ	$8k+2$	$8k$	$\cdots$	2	$\because$ 均為偶數無法合成$(2k+1)(4k+1)$ $\therefore$ 無解

由以上討論得知 C2R4k+1 無解

(2) 當 n=4k+2，$k \in N$

$$S_{mn+1}=\frac{(8k+6)(8k+5)}{2}=(8k+5)(4k+3)\text{，}[m,n]=[2,4k+2]=4k+2 \Rightarrow x=1,4k+3,8k+5$$

i. $\boldsymbol{x}$**=1** 時，

$$S'=(8k+5)(4k+3)-1=(8k+7)(4k+2)$$

$$S_r=\frac{S'}{4k+2}=8k+7\ ,\ S_l=\frac{S'}{2}=(8k+7)(2k+1)$$

內圈　2　3　$\cdots$　$4k+3$　$l_1=(2k+1)(4k+5)$　$\Rightarrow \Delta_1=+8k^2+8k+2$

外圈　$8k+5$　$8k+4$　$\cdots$　$4k+4$　$l_2=3(4k+1)(2k+1)$　$\Rightarrow \Delta_2=-(8k^2+8k+2)$

Δ　$8k+3$　$8k+1$　$\cdots$　1

考慮Δ的組合有(8*k*+3、1)，(8*k*-1、5)，(8*k*-5、9)，……，(4k+3、4k+1)（※排除(8*k*+1、3)，(8*k*-3、7)，……，(4*k*+5、4*k*-1)），且每個組合的和皆為 8*k*+4，可以從 $\frac{(2k+1)+1}{2}$=*k*+1 個Δ的組合之中選取 $\frac{(2k+1)-1}{2}$=*k* 個組合，使和為 $\frac{(2k+1)-1}{2}\times(8k+4)=8k^2+4k$ ，只要再從剛才跳過的差，選取兩項使得和為 4*k*+2（如：3 與 4*k*-1），就可以讓總和變為 $8k^2+8k+2$ 。

因此，當 *n*=4*k*+2 時，**幻圓 C2R*n* (1) 必存在，且可以此為構造方法。**

ii. ***x*=*n*+1=4*k*+3** 時，

$S'=(8k+5)(4k+3)-(4k+3)=(8k+6)(4k+2), S_r=\frac{S'}{4k+2}=8k+6, S_l=\frac{S'}{2}=2(4k+3)(2k+1)$

內圈　1　2　3　$\cdots$　$4k+2$　$l_1=(2k+1)(4k+3)\Rightarrow \Delta_1=+(4k+3)(2k+1)$

外圈　$8k+5$　$8k+4$　$8k+3$　$\cdots$　$4k+4$　$l_2=3(2k+1)(4k+3)\Rightarrow \Delta_2=-(4k+3)(2k+1)$

Δ　$8k+4$　$8k+2$　$8k$　$\cdots$　2　　均為偶數無法合成$(4k+3)(2k+1)\therefore$無解

因此，當 *n*=4*k*+2 時，**幻圓 C2R*n* (*n*+1) 不存在。**

iii. ***x*=2*n*+1=8*k*+5** 時，

$S'=(8k+5)(4k+3)-(8k+5)=(8k+5)(4k+2), S_r=\frac{S'}{4k+2}=8k+5, S_l=\frac{S'}{2}=(8k+5)(2k+1)$

內圈　1　2　$\cdots$　$4k+2$　$l_1=(2k+1)(4k+3)\Rightarrow \Delta_1=+2(2k+1)^2$

外圈　$8k+4$　$8k+3$　$\cdots$　$4k+3$　$l_2=(2k+1)(12k+7)\Rightarrow \Delta_2=-2(2k+1)^2$

Δ　$8k+3$　$8k+1$　$\cdots$　1

由於這 4*k*+2 個Δ與圓心為 1 時的Δ相同，討論方式皆為從 4*k*+2 個Δ中找出若干個使其總和為 $2(2k+1)^2$ ，故解法皆與圓心為 1 時相同。

因此，當 *n*=4*k*+2 時，**幻圓 C2R*n* (2*n*+1) 必存在，且可以此為構造方法。**

- **計算 C2R4*k*+2 的總數**

i. ***x*=1** 時

$$\Delta：\ \underbrace{1\quad 3\quad \cdots\quad 4k+1}_{共2k+1項}\ \Big|\ \underbrace{4k+3\quad \cdots\quad 8k+3}_{共2k+1項}$$

共有 2k+1 組對數的和為 8k+4；共有 *k* 組對數的和為 4k+2

Δ_1=｜Δ_2｜$=8k^2+8k+2$ =k(8k+4)+4k+2

若取 *k* 組和為 8*k*+4 的對數與 1 組和為 4k+2 的對數，則其值為 Δ_1=｜Δ_2｜，因此將對數中的兩數對調後即可得到幻圓。

對數和為 8*k*+4 共 2*k*+1 組	對數和為 4*k*+2 共 *k* 組
k	1

$C_k^{2k+1-2}C_1^k=C_k^{2k-1}C_1^k$

k-1	3	$C_{k-1}^{2k+1-6}C_3^k=C_{k-1}^{2k-5}C_3^k$
⋮	⋮	⋮
k-i	1+2i	$C_{k-2i}^{2k+1-2(1+2i)}C_{1+2i}^k=C_{k-2i}^{2k-4i-1}C_{1+2i}^k$

當和爲 8k+4 的對數少 i 組，和爲 4k+2 的對數即增加 2i 組

$$\therefore C_{k-i}^{2k+1-2(1+2i)}C_{1+2i}^k=C_{k-i}^{2k-1-4i}C_{1+2i}^k$$

$$\Rightarrow 2k\text{-}1\text{-}4i\geq k\text{-}i \text{ 且 } k\geq 1+2i \quad \Rightarrow k\geq 3i+1 \quad \Rightarrow i\leq\frac{k-1}{3} \text{且} i\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} i=0\Rightarrow k\geq 1\Rightarrow k=1,2,3 \\ i=1\Rightarrow k\geq 4\Rightarrow k=4,5,6 \\ i=2\Rightarrow k\geq 7\Rightarrow k=7,8,9 \end{cases} \quad \Rightarrow i=\left[\frac{k-1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow C_k^{2k-1}C_1^k+C_{k-1}^{2k-5}C_3^k+\cdots+C_{k-i}^{2k-1-4i}C_{1+2i}^k$$

∴C2R4k+2 在 x=1 的情況下非等價幻圓至少有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{3}\right]}C_{k-i}^{2k-(1+4i)}C_{1+2i}^k$ 組

ii. **x=2n+1=8k+5 時**

由於這 4k+2 個Δ與圓心爲 1 時的Δ均相同，討論方式皆爲從 2k+1 組和爲 8k+4 的對數與 4k+2 組和爲 4k+2 的對數中取其值爲 $\Delta_1=|\Delta_2|$，故解法皆與圓心爲 1 時相同。

∴C2R4k+2 在 x=8k+5 的情況下非等價幻圓至少有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{3}\right]}C_{k-i}^{2k-(1+4i)}C_{1+2i}^k$ 組

∴**至少有 $2\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{3}\right]}C_{k-i}^{2k-(1+4i)}C_{1+2i}^k\right)\times 2!\times\frac{(4k+2)!}{(4k+2)}$ 種 C2R4k+2 相異幻圓**

(3) 當 n=4k+3， $k\in N$

$$S_{mn+1}=\frac{(8k+7)(8k+8)}{2}=(4k+4)(8k+7) \quad [m,n]=[2,4k+3]=8k+6\Rightarrow x=4k+4$$

$$S'=(4k+4)(8k+7)-(4k+4)=(4k+4)(8k+6), S_r=\frac{S'}{4k+3}=8k+8, S_l=\frac{S'}{2}=4(k+1)(4k+3)$$

內圈	1	2	$\cdots$	$4k+3$	$l_1=2(4k+3)(k+1)\Rightarrow\Delta_1=+2(4k+3)(k+1)$
外圈	$8k+7$	$8k+6$	$\cdots$	$4k+5$	$l_2=6(4k+3)(k+1)\Rightarrow\Delta_2=-2(4k+3)(k+1)$
Δ	$8k+6$	$8k+4$	$\cdots$	2	

$\Rightarrow \Delta_1$、$|\Delta_2|$、Δ均爲偶數$\Rightarrow$取和爲$2(4k+3)(k+1)$即可

設$S_\Delta = 2(4k+3)(k+1) = \dfrac{(2k+2)(8k+6)}{2}$

設項數有$2k+2$項，首項爲a_1, 末項爲a'，由公差$=2$得$a' = a_1 + 2\left[(2k+2)-1\right]$

$$\begin{cases} a' - a_1 = 4k+2 \quad -(1) & (1)+(2) \Rightarrow 2a' = 12k+8 \Rightarrow a' = 6k+4 \\ a' + a_1 = 8k+6 \quad -(2) & (2)-(1) \Rightarrow 2a_1 = 4k+4 \Rightarrow a_1 = 2k+2 \end{cases}$$

取$(2k+2),(2k+4),\cdots,(6k+4)$可得一組幻圓解

$\therefore$ **C2R4*k*+3 的幻圓有解**

(4) 當 $n=4k$， $k \in N$

$S_{mn+1} = \dfrac{(8k+1)(8k+2)}{2} = 32k^2 + 12k + 1$, $[m,n] = [2,4k] = 4k \Rightarrow x = 1, 4k+1, 8k+1$

i. ***x*=1** 時

$S' = (8k+1)(4k+1) - 1 = 32k^2 + 12k$， $S_r = \dfrac{S'}{4k} = 8k+3$， $S_l = \dfrac{S'}{2} = 2k(8k+3)$

內圈	2	3	4	$\cdots$	$4k+1$	$l_1 = 2k(4k+3) \Rightarrow \Delta_1 = +8k^2$
外圈	$8k+1$	$8k$	$8k-1$	$\cdots$	$4k+2$	$l_2 = 2k(12k+3) \Rightarrow \Delta_2 = -8k^2$
Δ	$8k-1$	$8k-3$	$8k-5$	$\cdots$	1	

考慮Δ的組合有(8*k*-1、1)，(8*k*-3、3)，(8*k*-5、5)，……，(4*k*+1、4*k*-1)，且每個組合的和爲 8*k*，又 $\dfrac{8k^2}{8k} = k$ ，所以必能從 2*k* 個組合中找出 *k* 個組合，使總和爲 $8k^2$ ，再將這些組合相對應的兩數交換，即可構成幻圓。因此，當 *n*=4*k* 時，**幻圓 C2R*n* (1)必存在，且可以此爲構造方法。**

ii. ***x*=*n*+1=4*k*+1** 時

$S' = (8k+1)(4k+1) - (4k+1) = 16k^2 + 8k$, $S_r = \dfrac{S'}{4k} = 8k+2$, $S_l = \dfrac{S'}{2} = 4k(4k+1)$

內圈	1	2	3	$\cdots$	$4k$	$l_1 = 2k(4k+1) \Rightarrow \Delta_1 = +8k^2+2$
外圈	$8k+1$	$8k$	$8k-1$	$\cdots$	$4k+2$	$l_2 = 2k(12k+3) \Rightarrow \Delta_2 = -(8k^2+2)$
Δ	$8k$	$8k-2$	$8k-4$	$\cdots$	2	

考慮Δ的組合有(8*k*、2)，(8*k*-2、4)，(8*k*-4、6)，……，(4*k*+2、4*k*)，且每個組合的和皆爲 8*k*+2，又 $\dfrac{2k(4k+1)}{8k+2} = k$ ，所以必能從 2*k* 個組合中找出 *k* 個組合使得總和爲 8*k*+2，再將這些組合相對應的兩數交換，即可構成幻圓。因此，當 *n*=4*k* 時，**幻圓 C2R*n* (*n*+1) 必存在，且可以此爲構造方法。**

iii. ***x*=2*n*+1=8*k*+1** 時

$S' = (8k+1)(4k+1) - (8k+1) = 32k^2 + 4k$, $S_r = \dfrac{S'}{4k} = 8k+1$, $S_l = \dfrac{S'}{2} = 2k(8k+1)$

內圈	1	2	3	$\cdots$	$4k$	$l_1 = 2k(4k+1) \Rightarrow \Delta_1 = +8k^2$
外圈	$8k$	$8k-1$	$8k-2$	$\cdots$	$4k+1$	$l_2 = 2k(12k+1) \Rightarrow \Delta_2 = -8k^2$
Δ	$8k-1$	$8k-3$	$8k-5$	$\cdots$	1	

考慮Δ的組合有(8k-1、1)，(8k-3、3)，(8k-5、5)，……，(4k+1、4k-1)，且每個組合的和皆為 8k，又 $\frac{8k^2}{8k}=k$ ，所以必能從 2k 個組合中找出 k 個組合，使總和為 $8k^2$，再將這些組合相對應的兩數交換，即可構成幻圓。因此，當 n=4k 時，**幻圓 C2R*n* (2*n*+1) 必存在，且可以此為構造方法。**

- **計算 C2R4*k* 的總數**

i. x=1

$$\Delta：\ 1\quad 3\quad \cdots\quad 4k-1\ \big|\ 4k+1\quad \cdots\quad 8k-1$$

共2k項　　　　共2k項

共有 2k 組對數的和為 8k；共有 k 組對數的和為 4k

$$\Delta_1=\left|\Delta_2\right|=8k^2=k\left(8k\right)\quad 取\begin{cases}\left(k-i\right)組數對，和為8k\\ 2i組數對，和為4k\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_k^{2k}\times C_0^k+C_{k-1}^{2k-4}\times C_{2\times1}^k+C_{k-2}^{2k-8}\times C_{2\times2}^k+\cdots+C_{k-i}^{2k-4i}\times C_{2i}^k$$

其中 $2k-4i\geq k-i$ 且 $k\geq 2i\Rightarrow k\geq 3i\Rightarrow i\leq\frac{k}{3}$ 且 $i\in\mathbb{Z}\Rightarrow i=\left[\frac{k}{3}\right]$

$$\therefore \textbf{C2R4k(1)非等價幻圓至少有}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}C_{k-i}^{2k-4i}\times C_{2i}^{k}\ \textbf{組}$$

ii. x=4k+1

$$\Delta：\ 2\quad 4\quad \cdots\quad 4k\ \big|\ 4k+2\quad \cdots\quad 8k$$

共2k項　　　　共2k項

共有 2k 組數對，其和為 8k+2　　取 k 組數對，和為 8k+2

$$\Delta_1=\left|\Delta_2\right|=2k\left(4k+1\right)=k\left(8k+2\right)$$

C2R4*k* 在 *x*=4*k*+１的情況下非等價幻圓至少有 C_k^{2k} 組

iii. x=8k+1

$$\Delta：\ 1\quad 3\quad \cdots\quad 4k-1\ \big|\ 4k+1\quad \cdots\quad 8k-1$$

共2k項　　　　共2k項

共有 2k 組對數的和為 8k；共有 k 組對數的和為 4k

$$\Delta_1=\left|\Delta_2\right|=8k^2=k\left(8k\right)\quad 取\begin{cases}\left(k-i\right)組數對，和為8k\\ 2i組數對，和為4k\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_k^{2k}\times C_0^k+C_{k-1}^{2k-4}\times C_{2\times1}^k+C_{k-2}^{2k-8}\times C_{2\times2}^k+\cdots+C_{k-i}^{2k-4i}\times C_{2i}^k$$

其中 $2k-4i\geq k-i$ 且 $k\geq 2i\Rightarrow k\geq 3i\Rightarrow i\leq\frac{k}{3}$ 且 $i\in\mathbb{Z}\Rightarrow i=\left[\frac{k}{3}\right]$

C2R4k 在 x=8k+1 的情況下非等價幻圓至少有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]} C_{k-i}^{2k-4i} \times C_{2i}^{k}$ 組

C2R4k 的幻圓共至少有 $\left(2\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]} C_{k-i}^{2k-4i} \times C_{2i}^{k} + C_{k}^{2k}\right) \times 2! \times \frac{(4k)!}{4k}$ 種

(二) 當 $m=3$ 時，C3R$n(x)$

1. C3R2， $S_7=28$, $[3,2]=6$, $6|28-x \Rightarrow x=4$ ， $S'=24$, $S_r=12$, $S_l=8$

Max 有序排列刪去法：將數字由大開始填入第一行，再將剩餘兩數之和填入第二行，找出剩餘兩數的組合

最大數	較小兩數和	較小兩數組合
7	5	3 2
6	6	5 1
5	7	

首先找到一組

$$\begin{array}{llll} \text{內圈} & 7 & 6 & l_1=13 \Rightarrow \Delta_1=-5 \\ \text{中圈} & 3 & 5 & l_2=8 \Rightarrow \Delta_2=0 \\ \text{外圈} & 2 & 1 & l_3=3 \Rightarrow \Delta_3=+5 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=8 \\ l_2=8 \\ l_3=8 \end{array}$$

Δ_{13} 5 5

由於中圈上的數未必只能爲 3、5，因此必須再處理：

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=13, \Delta_1=-5 \\ l_2=8, \Delta_2=0 \\ l_3=3, \Delta_3=+5 \end{array}$$

	(1)		(2)	
Δ_{12}	$\boxed{4}$	1	4	$\boxed{1}$
Δ_{32}	-1	$\boxed{-4}$	$\boxed{-1}$	-4

得到了兩組結果，分別進行處理

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=9, \Delta_1=-1 \\ l_2=8, \Delta_2=0 \\ l_3=7, \Delta_3=+1 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Δ_{13} 1 1

$$(2) \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=12, \Delta_1=-4 \\ l_2=8, \Delta_2=0 \\ l_3=4, \Delta_3=+4 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Δ_{13} 4 4

∴C3R2(4) 共有 $1 \times 3! \times \frac{2!}{2} = 6$ 種相異幻圓

2. C3R3，$S_7=55, [3,3]=3, 3|55-x \Rightarrow x=1,4,7,10$，$S'=54, S_r=18, S_l=18$

i. ***x*=1** 時

最大數	較小兩數和	較小兩數組合
10	8	6 5 2 3
9	9	7 6 5 2 3 4
8	10	7 6 3 4
7	11	6 5

找到兩組幻圓(A,B)

$$A組：\begin{array}{lccccl} 內圈 & 10 & 9 & 8 & & l_1=27\Rightarrow\Delta_1=-9 \\ 中圈 & 6 & 5 & 7 & & l_2=18\Rightarrow\Delta_2=0 \\ 外圈 & 2 & 4 & 3 & & l_3=9\Rightarrow\Delta_3=+9 \\ \Delta_{13} & 8 & 5 & 5 & & \Rightarrow 無法合成9,無解 \end{array}$$

由於無法直接合成幻圓，且中圈上的數未必爲 6、5、7，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{4}41$	$4\boxed{4}1$	$4\boxed{4}1$	$44\boxed{1}$
Δ_{32}	$-4-1\boxed{-4}$	$\boxed{-4}-1-4$	$-4-1\boxed{-4}$	$-4\boxed{-1}-4$

$$(1)\begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 10 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=23\Rightarrow\Delta_1=-5 \\ l_2=18\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=13\Rightarrow\Delta_3=+5 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 7 \end{bmatrix}=A_1$$

Δ_{13} 4 5 1

$$(2)\begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=23\Rightarrow\Delta_1=-5 \\ l_2=18\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=13\Rightarrow\Delta_3=+5 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}=A_2\equiv A_1$$

Δ_{13} 4 1 5

$$(3)\begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=23\Rightarrow\Delta_1=-5 \\ l_2=18\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=13\Rightarrow\Delta_3=+5 \end{array}$$

Δ_{13} 8 1 1 $\Rightarrow$ 無法合成5 $\therefore$ 無解

$$(4)\begin{bmatrix} 10 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=26\Rightarrow\Delta_1=-8 \\ l_2=18\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=10\Rightarrow\Delta_3=+8 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}=A_3\equiv A_1$$

Δ_{13} 8 4 4

$$B\text{組：}\begin{array}{lccccl} \text{內圈} & 10 & 9 & 8 & & l_1 = 27 \Rightarrow \Delta_1 = -9 \\ \text{中圈} & 5 & 7 & 6 & & l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ \text{外圈} & 3 & 2 & 4 & & l_3 = 9 \Rightarrow \Delta_3 = +9 \\ \Delta_{13} & 7 & 7 & 4 & & \Rightarrow \text{無法合成}9,\text{無解} \end{array}$$

由於無法直接合成幻圓，且中圈上的數未必為 5、7、6，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{5}22$	$5\boxed{2}2$	$5\boxed{2}2$	$52\boxed{2}$
Δ_{32}	$-2\boxed{-5}-2$	$\boxed{-2}-5-2$	$-2-5\boxed{-2}$	$\boxed{-2}-5-2$

$$(1)\begin{bmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 10 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 22 \Rightarrow \Delta_1 = -4 \\ l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 14 \Rightarrow \Delta_3 = +4 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 10 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} = B_1 \equiv A_1$$

Δ_{13}　2　2　4

$$(2)\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 25 \Rightarrow \Delta_1 = -7 \\ l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 11 \Rightarrow \Delta_3 = +7 \end{array}$$

Δ_{13}　5　5　4　$\Rightarrow$ 無法合成7 $\therefore$ 無解

$$(3)\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 25 \Rightarrow \Delta_1 = -7 \\ l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 11 \Rightarrow \Delta_3 = +7 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 10 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} = B_2 \equiv A_1$$

Δ_{13}　7　5　2

$$(4)\begin{bmatrix} 10 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 25 \Rightarrow \Delta_1 = -7 \\ l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 11 \Rightarrow \Delta_3 = +7 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} = B_3 \equiv A_1$$

Δ_{13}　5　7　2

觀察 A 組與 B 組 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 10 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

經行列互換可得 $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 7 \end{bmatrix} \equiv A_1$，**$m$=$n$ 時，令行列互換為等價結構**

ii. ***x*=4** 時

最大數	較小兩數和	較小兩數組合
10	7	6　5
		1　2

9	8	7 6 5 1 2 3
8	9	7 6 2 2

找到兩組幻圓(C,D)

$$C組：\begin{array}{llll} 內圈 & 10 & 9 & 8 \\ 中圈 & 6 & 5 & 7 \\ 外圈 & 1 & 3 & 2 \\ \Delta_{13} & 9 & 6 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} l_1 = 27 \Rightarrow \Delta_1 = -10 \\ l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = -1 \\ l_3 = 6 \Rightarrow \Delta_3 = +11 \\ \Rightarrow \Delta_2 \neq 0 \text{無法直接合成幻圓，無解} \end{array}$$

由於無法直接合成幻圓，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{4}41$	$4\boxed{4}1$	$4\boxed{4}1$	$44\boxed{1}$
Δ_{32}	$-5-2\boxed{-5}$	$\boxed{-4}-2-5$	$-5-2\boxed{-5}$	$-5\boxed{-2}-5$

$$(1)\begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 10 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 23 \Rightarrow \Delta_1 = -6 \\ l_2 = 17 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 11 \Rightarrow \Delta_3 = +6 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{bmatrix} = C_1$$

Δ_{13} 5 6 1

$$(2)\begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 23 \Rightarrow \Delta_1 = -6 \\ l_2 = 17 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 11 \Rightarrow \Delta_3 = +6 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix} = C_2 \equiv C_1$$

Δ_{13} 4 2 6

$$(3)\begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 23 \Rightarrow \Delta_1 = -6 \\ l_2 = 17 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 11 \Rightarrow \Delta_3 = +6 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix} = C_3 \equiv C_1$$

Δ_{13} 4 2 6

$$(4)\begin{bmatrix} 10 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 26 \Rightarrow \Delta_1 = -9 \\ l_2 = 17 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 8 \Rightarrow \Delta_3 = +9 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 10 & 5 & 2 \end{bmatrix} = C_4 \equiv C_1$$

Δ_{13} 9 4 5

$$D組：\begin{array}{llll} 內圈 & 10 & 9 & 8 \\ 中圈 & 5 & 7 & 6 \\ 外圈 & 2 & 1 & 3 \\ \Delta_{13} & 8 & 8 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} l_1 = 27 \Rightarrow \Delta_1 = -10 \\ l_2 = 18 \Rightarrow \Delta_2 = -1 \\ l_3 = 6 \Rightarrow \Delta_3 = +11 \\ \Rightarrow \Delta_2 \neq 0 \text{無法直接合成幻圓，無解} \end{array}$$

由於無法直接合成幻圓，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)
Δ_{12}	$\boxed{5}24$	$5\boxed{2}4$	$5\boxed{2}4$

Δ_{32}	$-3\boxed{-6}-3$	$\boxed{-3}-6-3$	$-3-6\boxed{-3}$

$$(1)\begin{bmatrix}5&9&8\\10&1&6\\2&7&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-5}\\l_2=17\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=12\Rightarrow\Delta_3\text{=+5}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5&9&3\\10&1&6\\2&7&8\end{bmatrix}=D_1\equiv C_1$$

Δ_{13} 3 2 5

$$(2)\begin{bmatrix}10&7&8\\2&9&6\\5&1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=25\Rightarrow\Delta_1\text{=-8}\\l_2=17\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=9\Rightarrow\Delta_3\text{=+8}\end{matrix}$$

Δ_{13} 5 6 5 $\Rightarrow$無法合成8$\therefore$無解

$$(3)\begin{bmatrix}10&7&8\\5&9&3\\2&1&6\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=25\Rightarrow\Delta_1\text{=-8}\\l_2=17\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=9\Rightarrow\Delta_3\text{=+8}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5&9&3\\10&1&6\\2&7&8\end{bmatrix}=D_2\equiv C_1$$

Δ_{13} 8 6 2

iii. ***x*=7** 時

最大數	較小兩數和	較小兩數組合
10	6	5 4 1 2
9	7	6 5 4 1 2 3
8	8	6 5 2 3

找到兩組幻圓(E,F)

*E*組：

內圈	10	9	8	$l_1=27\Rightarrow\Delta_1=-11$
中圈	5	4	6	$l_2=15\Rightarrow\Delta_2=+1$
外圈	1	3	2	$l_3=6\Rightarrow\Delta_3=+10$
Δ_{13}	9	6	6	$\Rightarrow\Delta_2\neq0$無法直接合成幻圓，無解

由於無法直接合成幻圓，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{5}52$	$5\boxed{5}2$	$5\boxed{5}2$	$55\boxed{2}$
Δ_{32}	$-4-1\boxed{-4}$	$\boxed{-4}-1-4$	$-4-1\boxed{-4}$	$-4\boxed{-1}-4$

$$(1)\begin{bmatrix}5&9&8\\10&4&2\\1&3&6\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-6}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=10\Rightarrow\Delta_3\text{=+6}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5&3&8\\10&4&2\\1&9&6\end{bmatrix}=E_1$$

Δ_{13} 4 6 2

$$(2)\begin{bmatrix}10&4&8\\1&9&6\\5&3&2\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-6}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=10\Rightarrow\Delta_3\text{=+6}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}10&4&2\\1&9&6\\5&3&8\end{bmatrix}=E_2\equiv E_1$$

Δ_{13} 5 1 6

$$(3)\begin{bmatrix}10&4&8\\5&9&2\\1&3&6\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-6}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=10\Rightarrow\Delta_3\text{=+6}\end{matrix}$$

Δ_{13} 9 1 2 $\Rightarrow$無法合成Δ $\therefore$無解

$$(4)\begin{bmatrix}10&9&6\\5&3&8\\1&4&2\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=25\Rightarrow\Delta_1\text{=-9}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=7\Rightarrow\Delta_3\text{=+9}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&9&6\\5&3&8\\10&4&2\end{bmatrix}=E_3\equiv E_1$$

Δ_{13} 9 5 4

F組：

內圈	10	9	8	$l_1=27\Rightarrow\Delta_1=-11$
中圈	4	6	5	$l_2=15\Rightarrow\Delta_2=+1$
外圈	2	1	3	$l_3=6\Rightarrow\Delta_3=+10$
Δ_{13}	8	8	5	$\Rightarrow\Delta_2\neq 0$無法直接合成幻圓，無解

由於無法直接合成幻圓，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{6}33$	$6\boxed{3}3$	$6\boxed{3}3$	$63\boxed{3}$
Δ_{32}	$-2-5\boxed{-2}$	$\boxed{-2}-5-2$	$-2-5\boxed{-2}$	$-2\boxed{-5}-2$

$$(1)\begin{bmatrix}4&9&8\\10&1&5\\2&6&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=21\Rightarrow\Delta_1\text{=-5}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=11\Rightarrow\Delta_3\text{=+5}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&9&3\\10&1&5\\2&6&8\end{bmatrix}=F_1$$

Δ_{13} 2 3 5

$$(2)\begin{bmatrix}10&6&8\\2&9&5\\4&1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=24\Rightarrow\Delta_1\text{=-8}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=8\Rightarrow\Delta_3\text{=+8}\end{matrix}$$

Δ_{13} 6 5 5 $\Rightarrow$無法合成Δ $\therefore$無解

$$(3)\begin{bmatrix}10&6&8\\4&9&3\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=24\Rightarrow\Delta_1\text{=-8}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=8\Rightarrow\Delta_3\text{=+8}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&6&8\\4&9&3\\10&1&5\end{bmatrix}=F_2\equiv F_1$$

Δ_{13} 6 8 2

$$(4)\begin{bmatrix}10&9&5\\2&6&8\\4&1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=24\Rightarrow\Delta_1\text{=-8}\\l_2=16\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=8\Rightarrow\Delta_3\text{=+8}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&9&6\\5&3&8\\10&4&2\end{bmatrix}=F_3\equiv F_1$$

Δ_{13} 6 8 2

iv. x=**10** 時

最大數	較小兩數和	較小兩數組合
9	6	5　4 1　2
8	7	6　5　4 1　2　3
7	8	6　5 2　3

找到兩組幻圓

$$G\text{組：}\begin{array}{lccccl} \text{內圈} & 9 & 8 & 7 & & l_1 = 24 \Rightarrow \Delta_1 = -9 \\ \text{中圈} & 5 & 4 & 6 & & l_2 = 15 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ \text{外圈} & 1 & 3 & 2 & & l_3 = 6 \Rightarrow \Delta_3 = +9 \\ \Delta_{13} & 8 & 5 & 5 & & \Rightarrow \text{無法直接合成幻圓，無解} \end{array}$$

由於無法直接合成幻圓，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{4}41$	$4\boxed{4}1$	$4\boxed{4}1$	$44\boxed{1}$
Δ_{32}	$-4-1\boxed{-4}$	$\boxed{-4}-1-4$	$-4-1\boxed{-4}$	$-4\boxed{-1}-4$

$$(1)\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 20 \Rightarrow \Delta_1 = -5 \\ l_2 = 15 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 10 \Rightarrow \Delta_3 = +5 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} = G_1$$

Δ_{13}　4　5　1

$$(2)\begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 20 \Rightarrow \Delta_1 = -5 \\ l_2 = 15 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 10 \Rightarrow \Delta_3 = +5 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = G_2 \equiv G_1$$

Δ_{13}　4　1　5

$$(3)\begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 20 \Rightarrow \Delta_1 = -5 \\ l_2 = 15 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 10 \Rightarrow \Delta_3 = +5 \end{array}$$

Δ_{13}　8　1　1　$\Rightarrow$ 無法合成5 $\therefore$ 無解

$$(4)\begin{bmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1 = 23 \Rightarrow \Delta_1 = -8 \\ l_2 = 15 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ l_3 = 7 \Rightarrow \Delta_3 = +8 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} = G_3 \equiv G_1$$

Δ_{13}　8　4　4

$$H\text{組：}\begin{array}{lccccl} \text{內圈} & 9 & 8 & 7 & & l_1 = 24 \Rightarrow \Delta_1 = -9 \\ \text{中圈} & 4 & 6 & 5 & & l_2 = 15 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \\ \text{外圈} & 2 & 1 & 3 & & l_3 = 6 \Rightarrow \Delta_3 = +9 \\ \Delta_{13} & 7 & 7 & 4 & & \Rightarrow \text{無法直接合成幻圓，無解} \end{array}$$

由於無法直接合成幻圓，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)	(4)
Δ_{12}	$\boxed{5}22$	$5\boxed{2}2$	$5\boxed{2}2$	$52\boxed{2}$
Δ_{32}	$-2-5\boxed{-2}$	$\boxed{-2}-5-2$	$-2-5\boxed{-2}$	$\boxed{-2}-5-2$

$$(1)\begin{bmatrix}4&8&7\\9&1&5\\2&6&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=19\Rightarrow\Delta_1\text{=-4}\\l_2=15\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=6\Rightarrow\Delta_3\text{=+4}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&8&3\\9&1&5\\2&6&7\end{bmatrix}=H_1\equiv G_1$$

Δ_{13} 2 2 4

$$(2)\begin{bmatrix}9&6&7\\2&8&5\\4&1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-7}\\l_2=15\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=8\Rightarrow\Delta_3\text{=+7}\end{matrix}$$

Δ_{13} 5 5 4 $\Rightarrow$無法合成Δ $\therefore$無解

$$(3)\begin{bmatrix}9&6&7\\4&8&3\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-7}\\l_2=15\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=8\Rightarrow\Delta_3\text{=+7}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&6&7\\4&8&3\\9&1&5\end{bmatrix}=H_2\equiv G_1$$

Δ_{13} 7 5 2

$$(4)\begin{bmatrix}9&8&5\\2&6&7\\4&1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}l_1=22\Rightarrow\Delta_1\text{=-7}\\l_2=15\Rightarrow\Delta_2\text{=0}\\l_3=8\Rightarrow\Delta_3\text{=+7}\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}9&1&5\\2&6&7\\4&8&3\end{bmatrix}=H_3\equiv G_1$$

Δ_{13} 5 7 2

共有 4 組非等價幻圓，$\therefore$C3R3(x)有 $4\times3!\times\frac{3!}{3}\times2=96$ 個相異幻圓

3. C3R4

$S_{13}=91$, $[3,4]=12$, $12|91-x\Rightarrow x$=7， $S'=91-7=84$，$S_r=\frac{84}{4}$=21，$S_l=\frac{84}{3}=28$

最大數	較小兩數和	較小兩數組合
13	8	6 5 2 3
12	9	8 6 5 1 3 4
11	10	9 8 6 1 2 4
10	11	9 8 6 2 3 5

$$A\text{組：}\begin{array}{lccccl} \text{內圈} & 13 & 12 & 11 & 10 & l_1=46\Rightarrow\Delta_1=-18 \\ \text{中圈} & 6 & 5 & 9 & 8 & l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ \text{外圈} & 2 & 4 & 1 & 3 & l_3=10\Rightarrow\Delta_3=+18 \\ \Delta_{13} & 11 & 8 & 10 & 7 & \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 4 & 1 & 10 \\ 6 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & 12 & 11 & 3 \end{bmatrix} = A_1$$

由於中圈上的數未必爲 6、5、9、8，因此必須再處理：

	(1)	(2)
Δ_{12}	$7\boxed{7}\,\boxed{2}\,2$	$\boxed{7}\,7\,2\,\boxed{2}$
Δ_{32}	$\boxed{-4}-1-8\boxed{-5}$	$4\,\boxed{-1}\,\boxed{8}\,-5$

$$(1)\begin{bmatrix} 13 & 5 & 9 & 10 \\ 2 & 12 & 11 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=37\Rightarrow\Delta_1=-9 \\ l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=19\Rightarrow\Delta_3=+9 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 4 & 1 & 10 \\ 2 & 12 & 11 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix} = A_2 \equiv A_1$$

Δ_{13}　7　1　8　2

$$(2)\begin{bmatrix} 6 & 12 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=37\Rightarrow\Delta_1=-9 \\ l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=19\Rightarrow\Delta_3=+9 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 8 \\ 13 & 4 & 1 & 10 \\ 2 & 12 & 11 & 3 \end{bmatrix} = A_3 \equiv A_1$$

Δ_{13}　4　7　2　5

$$B\text{組：}\begin{array}{lccccl} \text{內圈} & 13 & 12 & 11 & 10 & l_1=46\Rightarrow\Delta_1=-18 \\ \text{中圈} & 5 & 8 & 6 & 9 & l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ \text{外圈} & 3 & 1 & 4 & 2 & l_3=10\Rightarrow\Delta_3=+18 \\ \Delta_{13} & 10 & 11 & 7 & 8 & \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 1 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 6 & 9 \\ 3 & 12 & 11 & 2 \end{bmatrix} = B_1$$

由於中圈上的數未必爲 5、8、6、9，因此必須再處理：

	(1)	(2)	(3)
Δ_{12}	$8\,\boxed{4}\,5\,1$	$\boxed{8}\,4\,5\,\boxed{1}$	$8\,\boxed{4}\,\boxed{5}\,1$
Δ_{32}	$\boxed{-2}-7\,\boxed{-2}\,-7$	$-2\boxed{-7}\,\boxed{-2}-7$	$\boxed{-2}-7\,-2\,\boxed{-7}$

$$(1)\begin{bmatrix} 13 & 8 & 11 & 10 \\ 3 & 12 & 4 & 9 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=42\Rightarrow\Delta_1=-14 \\ l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=14\Rightarrow\Delta_3=+14 \end{array}$$

Δ_{13}　8　7　5　8　$\Rightarrow$無法合成14 $\therefore$無解

$$(2)\begin{bmatrix} 5 & 12 & 11 & 9 \\ 13 & 1 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=37\Rightarrow\Delta_1=-9 \\ l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=19\Rightarrow\Delta_3=+9 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 12 & 11 & 2 \\ 13 & 1 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 6 & 9 \end{bmatrix} = B_2 \equiv B_1$$

Δ_{13}　2　4　5　7

$$(3)\begin{bmatrix} 13 & 8 & 6 & 10 \\ 3 & 12 & 11 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1=37\Rightarrow\Delta_1=-9 \\ l_2=28\Rightarrow\Delta_2=0 \\ l_3=19\Rightarrow\Delta_3=+9 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 1 & 4 & 10 \\ 3 & 12 & 11 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 9 \end{bmatrix} = B_3 \equiv B_1$$

Δ_{13}　8　7　2　1

共有 2 組非等價幻圓，∴C3R4(x)有 $2\times3!\times\frac{4!}{4}\times=72$ 個相異幻圓

4. **C3R5、C3R6⋯C3Rn 均以相同流程處理，但隨 n 之增加複雜度遽增**

五、 CmRn 的圓心（$2\le m\le3$）

將先前的研究結果所得到的圓心整理出下表，**粗體紅字表示以此數爲圓心的幻圓無解**

<table>
<tr><th>m \ n</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th colspan="2">n 爲偶數</th><th colspan="2">n 爲奇數</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">無</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">1
5
9</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">1
7
13</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">1
9
17</td><td>n=4k</td><td>1、n+1、2n+1</td><td>n=4k+1</td><td>n+1</td></tr>
<tr><td>n=4k+2</td><td>1、n+1、2n+1</td><td>n=4k+3</td><td>n+1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">1
4
7
10</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">1
16</td><td rowspan="2">4
10
16</td><td rowspan="2">1
22</td><td rowspan="2">13</td><td>n=6k</td><td>$\frac{n}{2}+1$、
$\frac{3n}{2}+1$、$\frac{5n}{2}+1$</td><td>n=6k+3</td><td>1
n+1
2n+1
3n+1</td></tr>
<tr><td>n=6k+2
n=6k+4</td><td>$\frac{3n}{2}+1$</td><td>n=6k+1
n=6k+5</td><td>1
3n+1</td></tr>
</table>

從上表可以觀察出 C2R3 與 C3R2 的圓心相同，於是我們猜想是否當 n、m 有特殊關係時，不同的幻圓能擁有相同的圓心。

綜合文中所定義的條件，我們可以知道圓心 $x\equiv S_{mn+1}=\dfrac{m^2n^2+3mn+2}{2}$（$\mathrm{mod}\,[m,n]$），

至於 $[m,n]$ 的值，可分爲下列幾種進行討論：

(一) 設 n 爲偶數($n=2t,t\in N$)，m 爲質數：

1. $m=2,\ m|t\ \Rightarrow[m,n]=2t=n\,,S_{mn+1}=2n^2+3n+1\equiv2n+1\equiv n+1\equiv1(\mathrm{mod}\,n)$

2. $m=2,\ m$不整除$t\Rightarrow[m,n]=2t=n\,,S_{mn+1}=2n^2+3n+1\equiv2n+1\equiv n+1\equiv1(\mathrm{mod}\,n)$

3. $m\ne2,\ m|n\Rightarrow m|t\,(設t=ms)\ \Rightarrow[m,n]=2t=2ms=n$

$$S_{mn+1}=2m^4s^2+3m^2s+1\equiv m^2s+1\equiv\cdots\equiv\frac{(m+2)n}{2}+1\equiv\frac{mn}{2}+1\equiv\frac{(m-2)n}{2}+1\equiv\cdots\equiv\frac{n}{2}+1(\mathrm{mod}\,n)$$

4. $m\ne2,\ m$不整除$t\Rightarrow[m,n]=mn=2mt$

$$S_{mn+1}=2m^2t^2+3mt+1\equiv mt+1\equiv\frac{mn}{2}+1(\mathrm{mod}\,mn)$$

(二) 設 n 爲奇數($n=2t+1,t\in N$)，m 爲質數：

1. $m=2,\ m|t\ \Rightarrow[m,n]=2n,\ \ S_{mn+1}=2n^2+3n+1\equiv n+1(\mathrm{mod}\,2n)$

2. $m=2,\ m\text{不整除}t \Rightarrow [m,n]=2n$， $S_{mn+1}=2n^2+3n+1\equiv n+1 \pmod{2n}$

3. $m\neq 2,\ m|n\,(\text{設}n=ms)\ \Rightarrow [m,n]=ms=n$

$$S_{mn+1}=\frac{m^4s^2+3m^2s+2}{2}=\frac{m^2s(m^2s+3)}{2}+1\equiv\cdots\equiv mn+1\equiv(m-1)n+1\equiv\cdots\equiv n+1\equiv 1 \pmod{n}$$

4. $m\neq 2,\ m\text{不整除}n \Rightarrow [m,n]=2mt+m=mn$

$$S_{mn+1}=\frac{4m^2t^2+4m^2t+m^2+6mt+3m+2}{2}$$

$$=(2m^2t^2+m^2t)+\frac{(m+3)}{2}(2mt+m)+1\equiv mn+1\equiv 1 \pmod{mn}$$

※ 由上述討論，我們可以從同心圓數以及半徑數的關係找出所有可能的圓心。

※ 成立幻圓的首要步驟為定出圓心，因此我們可以從得到的結果中直接挑選完成。

六、幻圓的性質

(一) 互補性

給定一個幻圓 C*m*R*n*，將幻圓上任一個數 *t* 用 *mn*+2-*t* 代換，得到另一個互補的幻圓 C*m*R*n*。例如：前文提到的 C2R6(1)與 C2R6(13)即為互補幻圓。

(二) 幻圓與幻方的關係

給定一個幻圓 C*n*R*n*，當 $x=n^2+1$時，將幻圓 C*n*R*n* 用 $n\times n$矩陣表示，若此時的對角線和＝列和＝行和，即可得到 *n* 階幻方。同理，已知一個 *n* 階幻方，若再以 n^2+1當做圓心，即可得出一幻圓 C*n*R*n* (n^2+1)。

(三) 圓心 *x* 與總和 S_{mn+1} 存在同餘關係

(四) 跳心平移

若存在幻圓 C*m*R*n* 之圓心 *x*, *y*，此時可將幻圓 C*m*R*n*(*x*)中每一元素加上(*y*-*x*)，使得圓心由 *x* 變成 *y*，又每個圓周內大小介於 1~*mn*+1 的元素個數相同，則可將所有元素 mod(*mn*+1)，藉由跳心平移得到換心幻圓 C*m*R*n*(*y*)。

例：C2R4 存在圓心 1,5，此時可將幻圓 C2R4(1)中每一元素加上 4，使得圓心由 1 變成 5，且每個圓周內大小介於 1~9 的元素個數皆為 2 個，便可將所有元素 mod(9)，藉由跳心平移得到 C2R4(5)。註：9(mod 9) 視為 9

$$\underset{x=1}{\begin{bmatrix}9&3&4&6\\2&8&7&5\end{bmatrix}}\Rightarrow\underset{x=5}{\begin{bmatrix}13&7&8&10\\6&12&11&9\end{bmatrix}}\pmod{9}\Rightarrow\underset{x=5}{\begin{bmatrix}4&7&8&1\\6&3&2&9\end{bmatrix}}$$

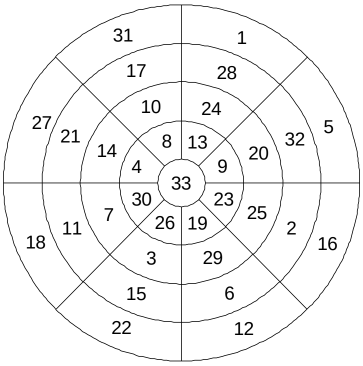
(五) 伸縮與平移

1. 平移：將幻圓中每一元素增加一個定數 k，則 S_r 增加 *m*k， S_l 增加 *n*k。
2. 伸縮：將幻圓中每一元素乘上一個定數 k，則 S_r 、 S_l 皆增為 k 倍。
3. 由於幻圓具有平移及伸縮的特性，可得知等差數列亦可構成幻圓，且幻圓保持 S_r 、 S_l 相等的特性。

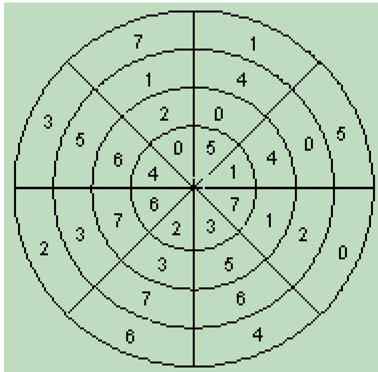
(六) 幻圓與圓形數獨

「數獨」（sudoku）來自日文，但概念源自「拉丁方陣」，是十八世紀瑞士數學家歐拉發明的。圓形數獨規則：在 m 個同心圓、$2m$ 條半徑的圓形中，每個圓圈，隔著圓心相對的兩個區域，都有從 0 到 $2m-1$ 的數字，每個數字只出現一次。數字在每個同心圓以及每條半徑上各出現一次，正好可以視爲幻圓 CmR2m(x) 上的數字(忽略圓心)取 mod 2m 之餘數。

例：左圖爲 C4R8(33)幻圓，右圖即爲圓形數獨。



(mod 8) →

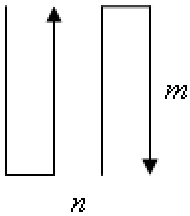


七、 幻圓的構造方法

(一) 基本構造方法 A

如前文三所述，首先尋找圓心數 x，控制半徑和 S_r 相同，接著微調圓周和 S_l（利用差數 Δ 微調，使得個別圓周和 $l_1^{'}=l_2^{'}=l_3^{'}=\ldots=l_m^{'}$）。

(二) 基本構造方法 B



1. 先求出圓心 x。除了圓心之外的將每個數依右圖順序排列成 $n\times m$ 的矩形，因此，我們可以確定圓周和相等。
2. 我們將排列後的數字一同減去圓心，以縮減總和，使數字利於計算。
3. 因爲每一列的數字和是相等的，所以只需從 m 列中各取一數使之和爲 $\left(m+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{mn}{2}+1-x\right)$，即可確定半徑和相等。
4. 再將簡化後的數字加上圓心，便可得到 CmRn(x)。

例： C5R4

(1) 求出圓心爲 11

(2) 將 1、2、3…10，12、13、14…21 依序排列成 4×5 的矩形，將每一數分別減去 11，可得到-10、-9、-8⋯-1，1、2、3⋯10 的矩形。

1	10	16	17
2	9	15	18
3	8	14	19
4	7	13	20
5	6	12	21

4　5　⇒

−10	−1	5	6
−9	−2	4	7
−8	−3	3	8
−7	−4	2	9
−6	−5	1	10

4　5

(3) 其數字和應為 0，經計算得(6)+(7)+(-3)+(-4)+(-6)=
(-10)+(-2)+(8)+(9)+(-5)=(-1)+(4)+(3)+(-7)+(1)=(5)+(-9)+(-8)+(2)+(10)=0

(4) 加回 11 即可得到 C5R4(11) $\begin{bmatrix} 17 & 1 & 10 & 16 \\ 18 & 9 & 15 & 2 \\ 8 & 19 & 14 & 3 \\ 7 & 20 & 4 & 13 \\ 5 & 6 & 12 & 21 \end{bmatrix}$

（二）由 C2R*n*(*n* 為偶數)推廣

探討完 C2R*n* 幻圓之後(*n* 為偶數)，因為 4 為 2 的倍數，因此我們想知道是否能將已知的 C2R*n* 幻圓經過適當轉換而得到 C4R*n* 幻圓？以下是討論過程：

已知幻圓 C2R*n*(2*n*+1)與 C2R*n*(*n*+1)如下：

圓心為 2*n*+1（相當於圓心為 1 的幻圓每個數皆減掉 1）

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1^{'} = n(2n+1)/2 \\ l_2^{'} = n(2n+1)/2 \end{matrix}$$

圓心為 *n*+1

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{matrix} l_3^{'} = n(n+1) \\ l_4^{'} = n(n+1) \end{matrix}$$

(1) 欲構成圓心為 4*n*+1 的幻圓

將圓心為 2*n*+1 的幻圓複製一次，每個數皆加上 2*n*，與原本的 2*n*+1 幻圓合併如下：

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1+2n & a_2+2n & a_3+2n & \cdots & a_n+2n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1+2n & b_2+2n & b_3+2n & \cdots & b_n+2n \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1^{'} = n(2n+1)/2 & \Delta_1 = +n^2 \\ l_2^{'} = n(6n+1)/2 & \Delta_2 = -n^2 \\ l_3^{'} = n(2n+1)/2 & \Delta_3 = +n^2 \\ l_4^{'} = n(6n+1)/2 & \Delta_4 = -n^2 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n \end{matrix}$$

$\rightarrow$選取 $\dfrac{n^2}{2n} = \dfrac{n}{2}$ 組 $\left(a_i, a_i+2n\right)$ 及 $\left(b_i, b_i+2n\right)$ 交換

$\therefore$共有 $C_{\frac{n}{2}}^{n} \times C_{\frac{n}{2}}^{n} \times$（幻圓 C2R*n*(2*n*+1)總數）

(2) 欲構成圓心為 3*n*+1 的幻圓

將圓心為 *n*+1 的幻圓複製一次，每個數皆加上 2*n*，與原本的 2*n*+1 幻圓合併如下：

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c_1+2n & c_2+2n & c_3+2n & \cdots & c_n+2n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ d_1+2n & d_2+2n & d_3+2n & \cdots & d_n+2n \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1^{'}=n(2n+1)/2 & \Delta_1=+n(2n+0.5)/2 \\ l_2^{'}=n(3n+1) & \Delta_2=-n(2n+0.5)/2 \\ l_3^{'}=n(2n+1)/2 & \Delta_3=+n(2n+0.5)/2 \\ l_4^{'}=n(3n+1) & \Delta_4=-n(2n+0.5)/2 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 2n+c_1-a_1 & 2n+c_2-a_2 & 2n+c_3-a_3 & \cdots & 2n+c_n-a_n \\ 2n+d_1-b_1 & 2n+d_2-b_2 & 2n+d_3-b_3 & \cdots & 2n+d_n-b_n \end{matrix}$$

（∵差數皆為不定數　∴沒有固定的轉換規則）

(3)　欲構成圓心為 2*n*+1 的幻圓

將圓心為 2*n*+1 的幻圓複製一次，每個數皆加上 2*n*+1，與原本的 2*n*+1 幻圓合併如下：

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1+2n+1 & a_2+2n+1 & a_3+2n+1 & \cdots & a_n+2n+1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1+2n+1 & b_2+2n+1 & b_3+2n+1 & \cdots & b_n+2n+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1^{'}=n(2n+1)/2 & \Delta_1=+n(2n+1)/2 \\ l_2^{'}=n(6n+3)/2 & \Delta_2=-n(2n+1)/2 \\ l_3^{'}=n(2n+1)/2 & \Delta_3=+n(2n+1)/2 \\ l_4^{'}=n(6n+3)/2 & \Delta_4=-n(2n+1)/2 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 2n+1 & 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 \end{matrix}$$

$$\to \text{選取} \frac{\frac{n(2n+1)}{2}}{2n+1} = \frac{n}{2} \text{組} \left(a_i, a_i+2n+1\right) \text{及} \left(b_i, b_i+2n+1\right) \text{交換}$$

∴共有 $C^{n}_{\frac{n}{2}} \times C^{n}_{\frac{n}{2}} \times$（幻圓 C2R*n*(2*n*+1)總數）

(4)　欲構成圓心為 *n*+1 的幻圓

將圓心為 2*n*+1 的幻圓複製一次，每個數皆加上 2*n*+1，與原本的 *n*+1 幻圓合併如下：

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ a_1+2n+1 & a_2+2n+1 & a_3+2n+1 & \cdots & a_n+2n+1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_n \\ b_1+2n+1 & b_2+2n+1 & b_3+2n+1 & \cdots & b_n+2n+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1^{'}=n(n+1) & \Delta_1=+n(2n+0.5)/2 \\ l_2^{'}=n(6n+3)/2 & \Delta_2=-n(2n+0.5)/2 \\ l_3^{'}=n(n+1) & \Delta_3=+n(2n+0.5)/2 \\ l_4^{'}=n(6n+3)/2 & \Delta_4=-n(2n+0.5)/2 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 2n+1+a_1-c_1 & 2n+1+a_2-c_2 & 2n+1+a_3-c_3 & \cdots & 2n+1+a_n-c_n \\ 2n+1+b_1-d_1 & 2n+1+b_2-d_2 & 2n+1+b_3-d_3 & \cdots & 2n+1+b_n-d_n \end{matrix}$$

（∵差數皆為不定數　∴沒有固定的轉換規則）

(5)　欲構成圓心為 1 的幻圓

將圓心為 2*n*+1 的幻圓複製一次，每個數皆加上 2*n*+1，而原本的 2*n*+1 幻圓每個數皆加上 1 合併如下：

$$\begin{bmatrix} a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1+2n+1 & a_2+2n+1 & a_3+2n+1 & \cdots & a_n+2n+1 \\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & \cdots & b_n+1 \\ b_1+2n+1 & b_2+2n+1 & b_3+2n+1 & \cdots & b_n+2n+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1'=n(n+1) & \Delta_1=+n^2 \\ l_2'=n(3n+1) & \Delta_2=-n^2 \\ l_3'=n(n+1) & \Delta_3=+n^2 \\ l_4'=n(3n+1) & \Delta_4=-n^2 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n \end{matrix}$$

$\rightarrow$選取$\dfrac{n^2}{2n}=\dfrac{n}{2}$組$\left(a_i+1, a_i+2n+1\right)$及$\left(b_i+1, b_i+2n+1\right)$交換

$\therefore$共有$C^{n}_{\frac{n}{2}} \times C^{n}_{\frac{n}{2}} \times$（幻圓 C2R$n$(2$n$+1)總數）

（三）對於 C4Rn(x)的其中一種構造方法

1. x=4n+1

<table>
<tr><td>1.將 1~4n 的數字依照下圖所示依序排列，並從中分成兩部份
2.將右半部水平鏡射，如下圖矩陣所示，即構成幻圓 C4Rn(4n+1)</td></tr>
<tr><td>$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & \frac{n}{2} \\ 2n & 2n-1 & \cdots & \frac{3n}{2}+1 \\ 3n & 3n-1 & \cdots & \frac{5n}{2}+1 \\ 3n+1 & 3n+2 & \cdots & \frac{7n}{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{3n}{2} & \cdots & n+2 & n+1 \\ \frac{5n}{2} & \cdots & 2n+2 & 2n+1 \\ \frac{7n}{2}+1 & \cdots & 4n-1 & 4n \end{matrix}$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{7n}{2}+1 & \cdots & 4n-1 & 4n \\ 2n & 2n-1 & \cdots & \frac{3n}{2}+1 & \frac{5n}{2} & \cdots & 2n+2 & 2n+1 \\ 3n & 3n-1 & \cdots & \frac{5n}{2}+1 & \frac{3n}{2} & \cdots & n+2 & n+1 \\ 3n+1 & 3n+2 & \cdots & \frac{7n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix}_{4\times n}$$</td></tr>
</table>

2. x=1：利用互補性，幻圓上任一數 t 可用 4n+2-t 代換如下圖

$$\begin{bmatrix} 4n+1 & 4n & \cdots & \frac{7n}{2}+2 & \frac{n}{2}+1 & \cdots & 3 & 2 \\ 2n+2 & 2n+3 & \cdots & \frac{5n}{2}+1 & \frac{3n}{2}+2 & \cdots & 2n & 2n+1 \\ n+2 & n+3 & \cdots & \frac{3n}{2}+1 & \frac{5n}{2}+2 & \cdots & 3n & 3n+1 \\ n+1 & n & \cdots & \frac{n}{2}+2 & \frac{7n}{2}+1 & \cdots & 3n+3 & 3n+2 \end{bmatrix}_{4\times n}$$

3. x=2n+1

1. 除了圓心 2n+1 之外，將 1 ~4n+1 的數字依照下圖所示依序排列，並從中分成兩部份
2.將右半部水平鏡射，如下圖矩陣所示，即構成幻圓 C4Rn(2n+1)

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-1 & n \\
2n & 2n-1 & \cdots & \frac{3n}{2}+1 & \frac{3n}{2} & \cdots & n+2 & n+1 \\
3n+1 & 3n & \cdots & \frac{5n}{2}+2 & \frac{5n}{2}+1 & \cdots & 2n+3 & 2n+2 \\
3n+2 & 3n+3 & \cdots & \frac{7n}{2}+1 & \frac{7n}{2}+2 & \cdots & 4n & 4n+1
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 2 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{7n}{2}+2 & \cdots & 4n & 4n+1 \\
2n & 2n-1 & \cdots & \frac{3n}{2}+1 & \frac{5n}{2}+1 & \cdots & 2n+3 & 2n+2 \\
3n+1 & 3n & \cdots & \frac{5n}{2}+2 & \frac{3n}{2} & \cdots & n+2 & n+1 \\
3n+2 & 3n+3 & \cdots & \frac{7n}{2}+1 & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-1 & n
\end{bmatrix}_{4\times n}$$

4. x=n+1 (當 4 | n)

1.除了圓心 n+1 之外，將 1 ~4n+1 的數字依照下圖所示依序排列
2.將中央 $\frac{n}{2}$ 行中四列數字中第一列與第二列一組，第三列與第四列一組，同組兩行上下交換，如下圖所示
3.從中間分成兩個部分，將右半部水平鏡射，如下圖矩陣所示，即構成幻圓 C4Rn(n+1)

$$\begin{array}{cccc|ccccc|cccc}
1 & 2 & \cdots & \frac{n}{4} & \frac{n}{4}+1 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & \frac{3n}{4} & \frac{3n}{4}+1 & \cdots & n-1 & n \\
2n+1 & 2n & \cdots & \frac{7n}{4}+2 & \frac{7n}{4}+1 & \cdots & \frac{3n}{2}+2 & \frac{3n}{2}+1 & \cdots & \frac{5n}{4}+2 & \frac{5n}{4}+1 & \cdots & n+3 & n+2 \\
\hline
3n+1 & 3n & \cdots & \frac{11n}{4}+2 & \frac{11n}{4}+1 & \cdots & \frac{5n}{2}+2 & \frac{5n}{2}+1 & \cdots & \frac{9n}{4}+2 & \frac{9n}{4}+1 & \cdots & 2n+3 & 2n+2 \\
3n+2 & 3n+3 & \cdots & \frac{13n}{4}+1 & \frac{13n}{4}+2 & \cdots & \frac{7n}{2}+1 & \frac{7n}{2}+2 & \cdots & \frac{15n}{4}+1 & \frac{15n}{4}+2 & \cdots & 4n & 4n+1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 2 & \cdots & \frac{n}{4} & \frac{7n}{4}+1 & \cdots & \frac{3n}{2}+2 & \frac{3n}{2}+1 & \cdots & \frac{5n}{4}+2 & \frac{3n}{4}+1 & \cdots & n-1 & n \\
2n+1 & 2n & \cdots & \frac{7n}{4}+2 & \frac{n}{4}+1 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & \frac{3n}{4} & \frac{5n}{4}+1 & \cdots & n+3 & n+2 \\
3n+1 & 3n & \cdots & \frac{11n}{4}+2 & \frac{13n}{4}+2 & \cdots & \frac{7n}{2}+1 & \frac{7n}{2}+2 & \cdots & \frac{15n}{4}+1 & \frac{9n}{4}+1 & \cdots & 2n+3 & 2n+2 \\
3n+2 & 3n+3 & \cdots & \frac{13n}{4}+1 & \frac{11n}{4}+1 & \cdots & \frac{5n}{2}+2 & \frac{5n}{2}+1 & \cdots & \frac{9n}{4}+2 & \frac{15n}{4}+2 & \cdots & 4n & 4n+1
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 2 & \cdots & \frac{n}{4} & \frac{7n}{4}+1 & \cdots & \frac{3n}{2}+2 & \frac{5n}{2}+1 & \cdots & \frac{9n}{4}+2 & \frac{15n}{4}+2 & \cdots & 4n & 4n+1 \\
2n+1 & 2n & \cdots & \frac{7n}{4}+2 & \frac{n}{4}+1 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{7n}{2}+2 & \cdots & \frac{15n}{4}+1 & \frac{9n}{4}+1 & \cdots & 2n+3 & 2n+2 \\
3n+1 & 3n & \cdots & \frac{11n}{4}+2 & \frac{13n}{4}+2 & \cdots & \frac{7n}{2}+1 & \frac{n}{2}+1 & \cdots & \frac{3n}{4} & \frac{5n}{4}+1 & \cdots & n+3 & n+2 \\
3n+2 & 3n+3 & \cdots & \frac{13n}{4}+1 & \frac{11n}{4}+1 & \cdots & \frac{5n}{2}+2 & \frac{3n}{2}+1 & \cdots & \frac{5n}{4}+2 & \frac{3n}{4}+1 & \cdots & n-1 & n
\end{bmatrix}_{4\times n}
$$

5. x=3n+1 (當 4 | n)：利用互補性，幻圓上任一數 t 可用 4n+2-t 代換如下圖

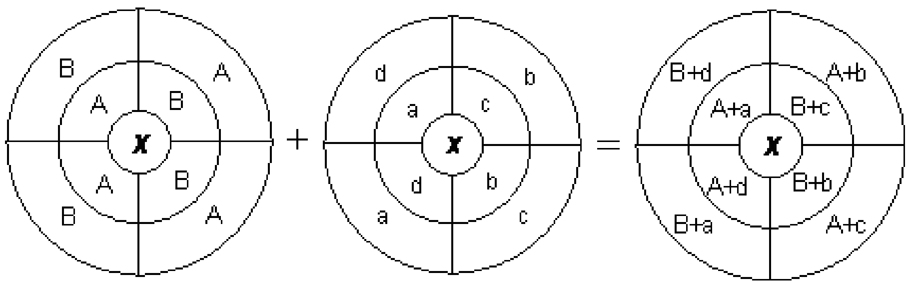
$$
\begin{bmatrix}
4n+1 & 4n & \cdots & \frac{15n}{4}+2 & \frac{9n}{4}+1 & \cdots & \frac{5n}{2} & \frac{3n}{2}+1 & \cdots & \frac{7n}{4} & \frac{n}{4} & \cdots & 2 & 1 \\
2n+1 & 2n+2 & \cdots & \frac{9n}{4} & \frac{15n}{4}+1 & \cdots & \frac{7n}{2}+2 & \frac{n}{2} & \cdots & \frac{n}{4}+1 & \frac{7n}{4}+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\
n+1 & n+2 & \cdots & \frac{5n}{4} & \frac{3n}{4} & \cdots & \frac{n}{2}+1 & \frac{7n}{2}+1 & \cdots & \frac{13n}{4}+2 & \frac{11n}{4}+1 & \cdots & 3n-1 & 3n \\
n & n-1 & \cdots & \frac{3n}{4}+1 & \frac{5n}{4}+1 & \cdots & \frac{3n}{2} & \frac{5n}{2}+1 & \cdots & \frac{11n}{4} & \frac{13n}{4}+1 & \cdots & 3n+3 & 3n+2
\end{bmatrix}_{4\times n}
$$

(二) 正交圓的構造方法

我們發現若將拉丁圓與次拉丁圓內的元素做調整，但不改變拉丁圓各對角線上元素各出現一次、次拉丁圓各對角線上元素各出現二次的性質，可以構成幻圓。利用正交拉丁圓上沒有相同元素的性質可以構造出連續正整數，經過調整後，使定義由直徑和相同轉爲半徑和相同，另外加上圓心並做討論，即可得到幻圓。

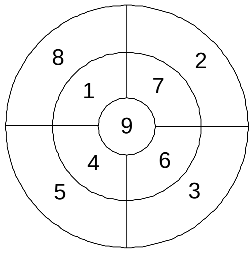
1. C2R4

假設假設 P、Q 圓，並將 P、Q 圓相對應的位置相加



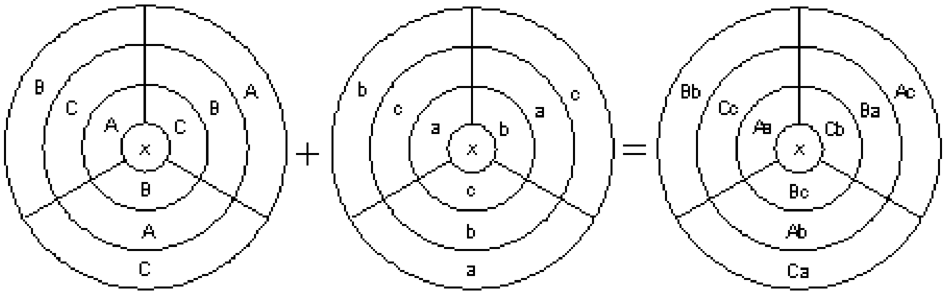
P 圓　　　　Q 圓

舉其中一種狀況爲例

(a，b，c，d)=(1，2，3，4)、(A，B)=(0，4)　(*x*=9)	
	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

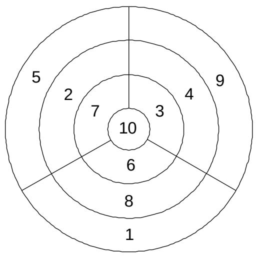
2.　C3R3

假設 P、Q 圓，並將 P、Q 圓相對應的位置相加



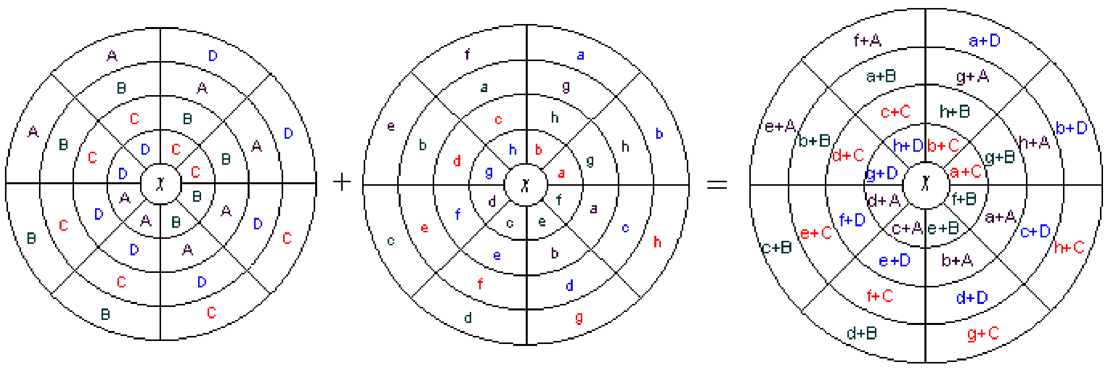
P 圓　　　　　　　　Q 圓

舉其中一種狀況爲例

(A，B，*C*)=(6，3，0) (*a*，*b*，*c*)=(1，2，3)　(*x*=10)	
	$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

3.　C4R8

假設 P、Q 圓，並將 P、Q 圓相對應的位置相加



P 圓　　　　　　　　Q 圓

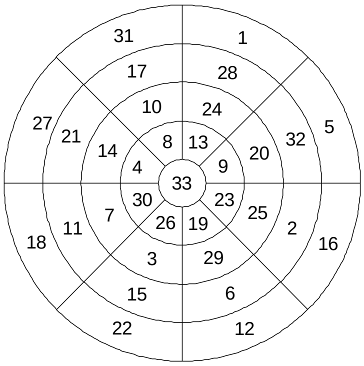
※　P 圓中同一顏色填入相同字母 A,B,C,D

※　Q 圓中同一顏色以順時鐘或逆時鐘依序填入 *a,b,c,d,e,f,g,h*

舉其中一種狀況爲例

(a，b，c，d，e，f，g，h)=(1，5，2，6，3，7，4，8)

(A，B，C，D)=(24，16，8，0)　(圓心爲 33)



$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 30 & 26 & 19 & 23 & 9 & 13 \\ 10 & 14 & 7 & 3 & 29 & 25 & 20 & 24 \\ 17 & 21 & 11 & 15 & 6 & 2 & 32 & 28 \\ 31 & 27 & 18 & 22 & 12 & 16 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

陸、研究結果

一、 在 C2Rn 幻圓中，$k \in N$：

(一) 當 n=4k+1 時無解。

(二) 當 n=4k+2 時至少有 $2\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{3}\right]} C_{k-i}^{2k-(1+4i)} C_{1+2i}^{k}\right)\times 2!\times \frac{(4k+2)!}{(4k+2)}$ 個相異幻圓。

(三) 當 n=4k+3 時證明有解。

(四) 當 n=4k 時至少有 $\left(2\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]} C_{k-i}^{2k-4i}\times C_{2i}^{k}+C_{k}^{2k}\right)\times 2!\times\frac{(4k)!}{4k}$ 個相異幻圓。

二、 在 C3Rn 幻圓中：當 n=2 時有 6 個相異幻圓，當 n=3 時有 96 個相異幻圓，當 n=4 時有 72 個相異幻圓。

三、 當 n 爲偶數，由 C2Rn 可造出 C4Rn，進而推廣造出 C8Rn…。

四、 圓心 x 與 S_{mn+1} 對 $[m,n]$ 來說存在同餘關係。

柒、討論

一、 幻圓 CnR2n 與圓形數獨之間存在對應關係。

二、 C2R4 中的三個不同圓心間幻圓存在有平移加上 mod 9 之等價關係，但 C2R8 中的三個不同圓心間卻有些幻圓不存在有平移加上 mod 17 之等價關係。

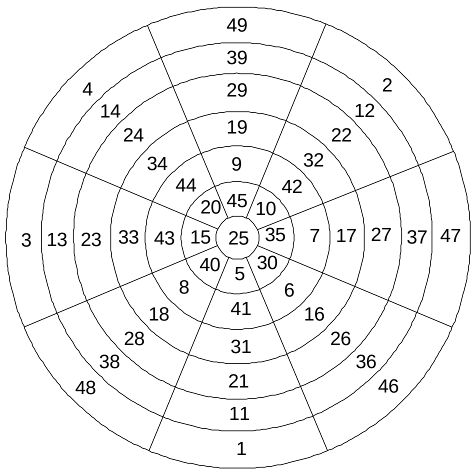
$$\underset{x=1}{\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{x=5}{\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{x=9}{\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}}$$

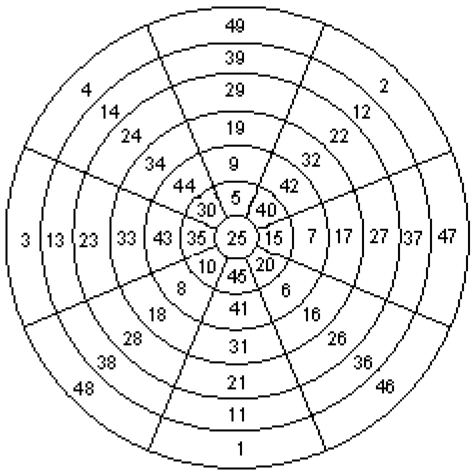
$$\underset{x=1}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 15 & 14 & 13 & 12 & 8 & 9 \\ 17 & 16 & 4 & 5 & 6 & 7 & 11 & 10 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{x=9}{\begin{bmatrix} 10 & 11 & 6 & 5 & 4 & 3 & 16 & 17 \\ 8 & 7 & 12 & 13 & 14 & 15 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{x=1}{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 12 & 13 & 14 & 4 & 16 & 17 \\ 10 & 11 & 7 & 6 & 5 & 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}} \nLeftarrow \underset{x=9}{\begin{bmatrix} 17 & 16 & 3 & 4 & 5 & 12 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 15 & 14 & 13 & 6 & 11 & 10 \end{bmatrix}}$$

三、 丁易東的太衍五十圖的應用

丁易東的太衍五十圖除了最內層圓周外，每條半徑皆由五個數構成，且這五個數皆有相同的個位數字，所以除了最內層圓周外各半徑之間的差必為 5 的倍數，因此太衍五十圖巧妙的利用「5」字組的特性使各條直徑和相等，且由於太衍五十圖將各條半徑中最小數的五倍置於最內層圓周，所以半徑和並不相等，但因為它具有奇妙的特性，所以只要將最內層圓周相對應的兩數對調，即可轉換為 C6R8 (25)。我們認為這種特性很適合繼續做更深入的探討，或許將來可以應用在某些幻圓的特殊建構法上。

丁易東的太衍五十圖	C6R8 (25)




捌、結論

在本研究中，我們探討了許多幻圓的性質與規律性，並針對其存在性做深入的思考，除此之外，我們找到許多比基本建構方法更迅速、具巧思的特殊建構方法，使得尋找幻圓更為容易。除此之外，若將幻圓推廣到空間中成為幻球也將會是個有趣的題目，期待我們將來能完成它。

玖、參考資料及其他

幻圓-維基百科 http://zh.wikipedia.org/w/index.php?itle=%E5%B9%BB%E5%9C%86&variant=zh-tw#.E5.8F.82.E8.80.83.E6.96.87.E7.8C.AE

李彥頡（1997）幻方研究 中華民國三十七屆中小學科展高中組數學科第三名
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/37/pdf/37h/147.pdf

林旺聖（2003）魔圓陣之研究。中華民國四十三屆中小學科展高中組數學科
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040417.pdf

趙文敏（1981） 寓數學於遊戲第一輯（頁 54~83） 台北：九章出版社。

吳文俊（主編）（2000） 中國數學史大系：第六卷 第六篇 《楊輝》 第二節 《幻圓》（頁 641）

吳文俊（主編）（2000）中國數學史大系：第七篇 第一節（頁 691-692）

Lam Lay Yong（1977） A CRITICAL STUDY OF HANG HUI SUAN FA 《楊輝演算法》 SINGAPORE UNIVERSITY PRESS。

【評語】040411

1、 幻圓與幻方都屬於古老數學問題，幻方是幻圓之特例。

2、 作者嘗試各種分析方法，對於 2 個及 3 個同心圓的情形做了頗完整的解答與整理，並且得到不同的建構方法。