中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040410

殘缺的完美

學校名稱：臺北市立育成高級中學

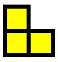
作者：	指導老師：
高二 蘇奕帆 高二 邱詩甯	龎毓珊 林雨鵵

關鍵詞：L 型、虧格

摘要

將二維($2^k \times 2^k - 1$)殘缺棋盤的完全覆蓋性質，推廣至三維($2^k \times 2^k \times 2^k - 1$)殘缺方塊，再推廣至四維($2^k \times 2^k \times 2^k \times 2^k - 1$)殘缺數對集合及 n 維($\overbrace{2^k \times 2^k \times \cdots \times 2^k}^{n\text{個}} - 1$)殘缺數對集合。

壹、研究動機

二維中由 $2^k \times 2^k$ 個小正方格形成的正方形棋盤，若其中恰有一個方格殘缺我們稱爲「$(2^k \times 2^k - 1)$ 殘缺棋盤」。在大小爲 $(2^2 \times 2^2 - 1)$ 的殘缺棋盤中，無論殘缺的方格在哪一個位置，都可用 5 個 L 形元件()將此殘缺棋盤沒有重疊地完全覆蓋(以後簡稱爲覆蓋)。驚訝於如此完美的性質，引發我們思考這樣的性質能否更進一步地推廣至三維或四維甚至 n 維情況呢？於是我們開始探討殘缺中的完美性質。

貳、研究目的

一、二維中，一個($2^k \times 2^k - 1$)殘缺棋盤，找出用 L 形元件將其覆蓋的策略。

二、三維中，一個($2^k \times 2^k \times 2^k - 1$)殘缺方塊，找出將其覆蓋的元件型態及策略。

三、四維中，一個($2^k \times 2^k \times 2^k \times 2^k - 1$)四維殘缺數對集合，找出將其覆蓋的子集合型態及策略。

四、推廣至 n 維，一個($\overbrace{2^k \times 2^k \times \cdots \times 2^k}^{n\text{個}} - 1$) n 維殘缺數對集合，找出將其覆蓋的子集合型態及策略。

參、研究設備與器材

筆、紙、模型。

肆、研究過程與方法

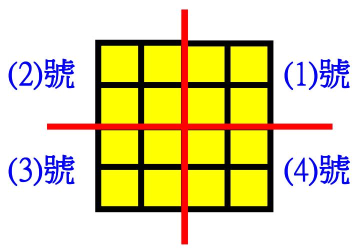
從二維的殘缺棋盤中找出用 L 形元件覆蓋的策略，並將類似的性質推廣至三維與四維情況，並進一步推廣至 n 維情況。

伍、研究結果

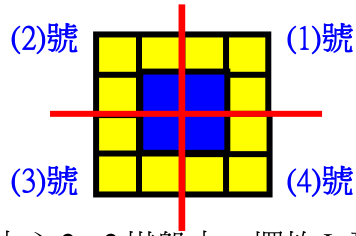
一、二維($2^k \times 2^k - 1$)殘缺棋盤的情況

（一）二維($2^2 \times 2^2 - 1$)殘缺棋盤，若殘缺方格在任一位置，都可用 5 個 L 形元件將其覆蓋。策略說明如下：

1. 將棋盤劃成 4 個 2×2 棋盤。

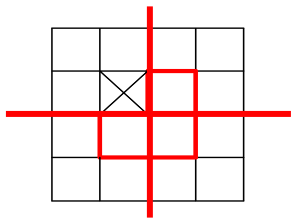


2. 依殘缺方格所在位置決定正中心 2×2 棋盤的 L 形元件覆蓋方式。

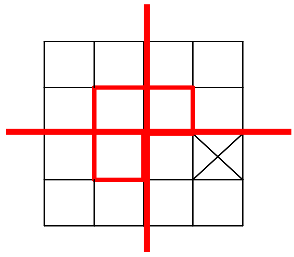


3. 覆蓋原則：若缺格位於(k)號 2×2 棋盤中，則正中心 2×2 棋盤中，擺放 L 形元件以「缺口朝向(k)號 2×2 棋盤」爲原則。例如：

(1)

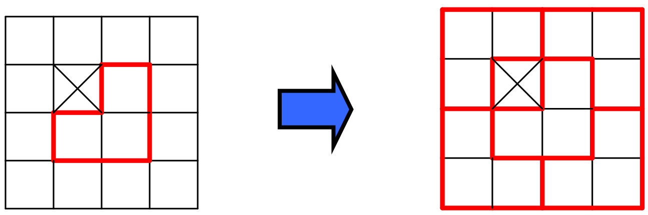


(2)

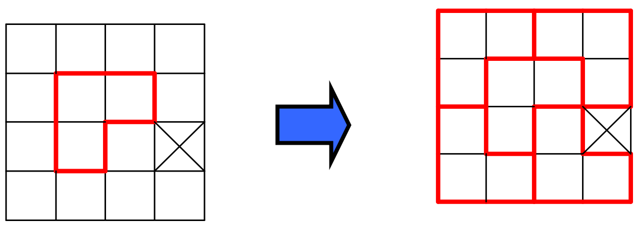


4. 當決定正中心 2×2 棋盤的 L 形元件覆蓋方式後，恰剩下 4 個($2\times 2-1$)殘缺棋盤，可用 4 個 L 形元件覆蓋，如下圖：

(1)

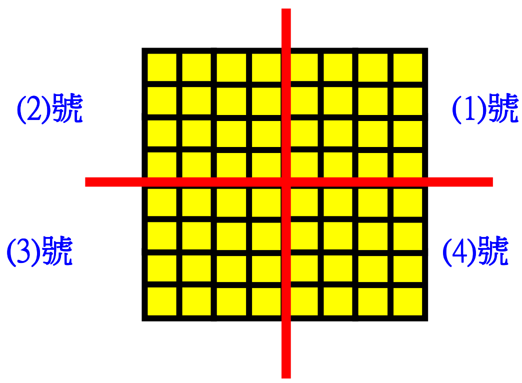


(2)

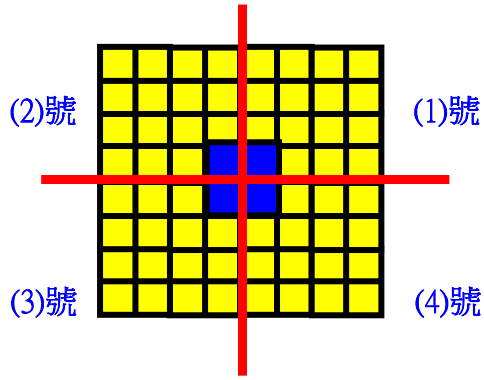


（二）二維($2^3\times 2^3-1$)殘缺棋盤，若殘缺方格在任一位置，都可用 21 個 L 形元件將其覆蓋，策略說明如下：

1. 將棋盤劃成 4 個 $2^2\times 2^2$ 棋盤。

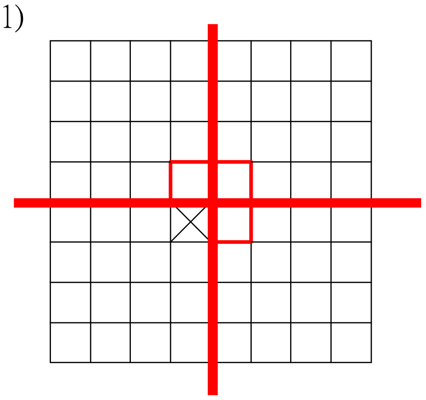


2. 依殘缺方格所在位置決定正中心 2×2 棋盤的 L 形元件覆蓋方式。

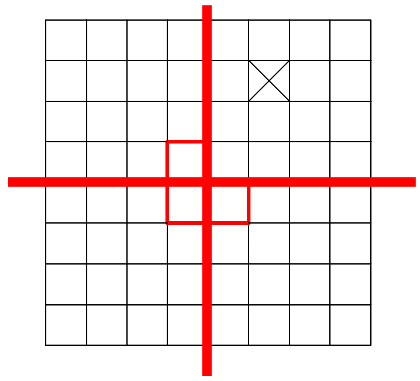


3. 覆蓋原則：若缺格位於(k)號 $2^2\times 2^2$ 棋盤中，則正中心 2×2 棋盤中，擺放 L 形元件以「缺口朝向(k)號 $2^2\times 2^2$ 棋盤」為原則。例如：

(1)

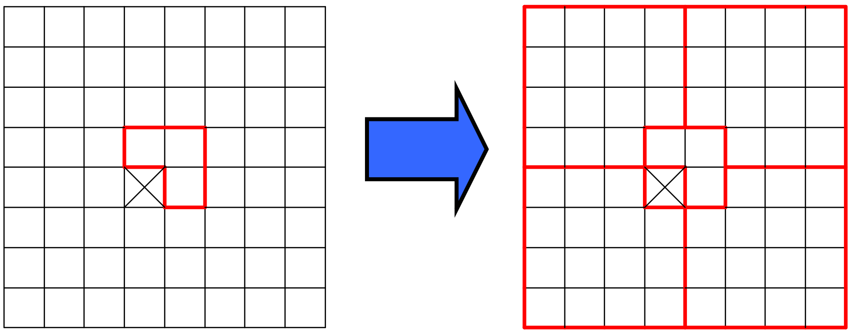


(2)

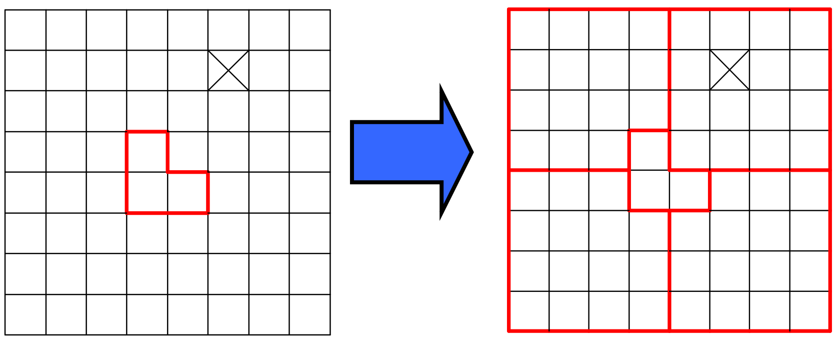


4. 當決定正中心 2×2 棋盤的 L 形元件覆蓋方式後，恰剩下 4 個($2^2\times 2^2-1$)殘缺棋盤，可分別再用 5 個 L 形元件將其覆蓋。

(1)

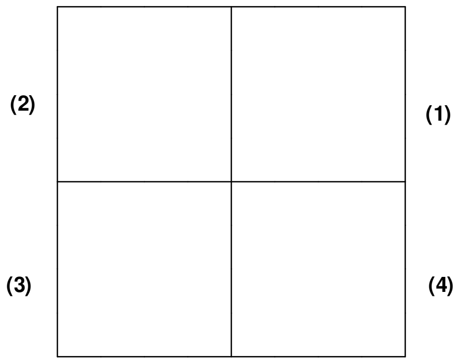


(2)

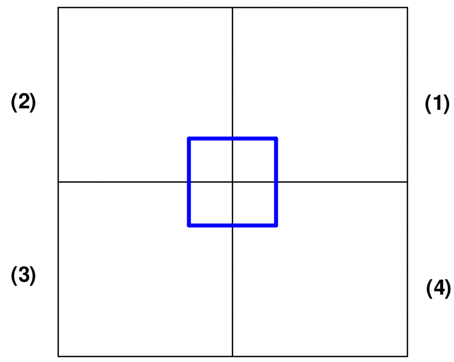


（三）設二維($2^{k-1}\times 2^{k-1}-1$)殘缺棋盤，$k\geq 3$，當殘缺方格在任一位置，都可用 $\dfrac{2^{k-1}\times 2^{k-1}-1}{2\times 2-1}$ 個 L 形元件將其覆蓋。則二維($2^{k}\times 2^{k}-1$)殘缺棋盤，殘缺方格在任一位置，用 $\dfrac{2^{k-1}\times 2^{k-1}-1}{2\times 2-1}$ 個 L 形元件將其覆蓋的策略說明如下：

1. 將($2^{k}\times 2^{k}$)棋盤劃成 4 個 $2^{k-1}\times 2^{k-1}$ 棋盤。

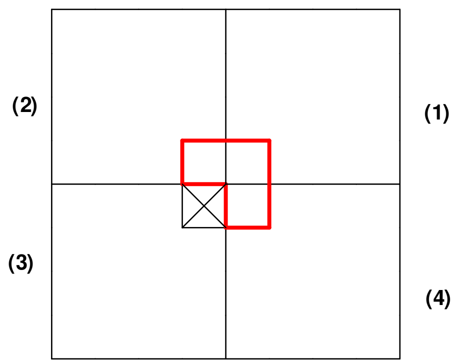


2. 依殘缺方格所在位置決定正中心 2×2 棋盤的 L 形元件覆蓋方式。

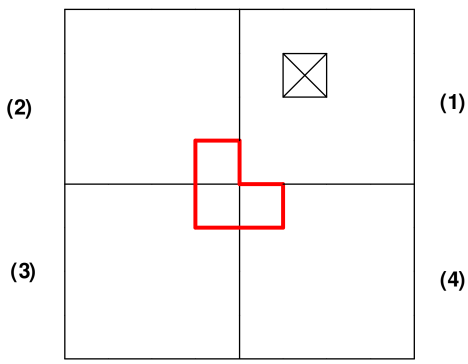


3. 覆蓋原則：若缺格位於(k)號 2×2 棋盤中，則正中心 2×2 棋盤中，擺放 L 形元件以「缺口朝向(k)號 $2^{k-1}\times 2^{k-1}$ 棋盤」爲原則。例如：

(1)

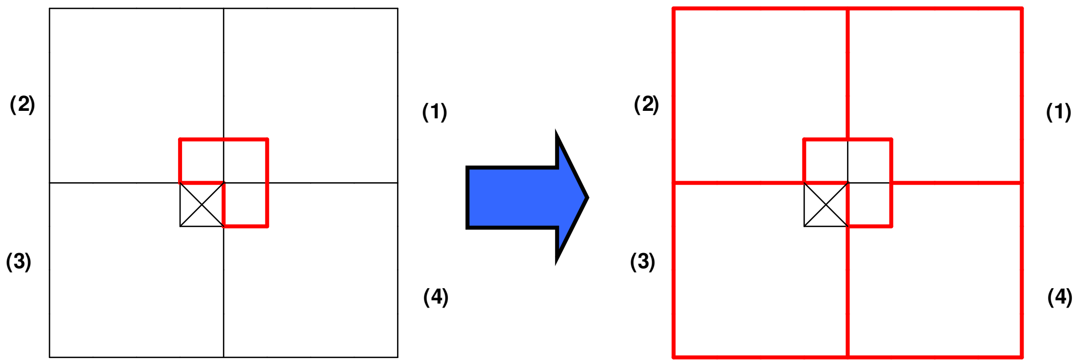


(2)

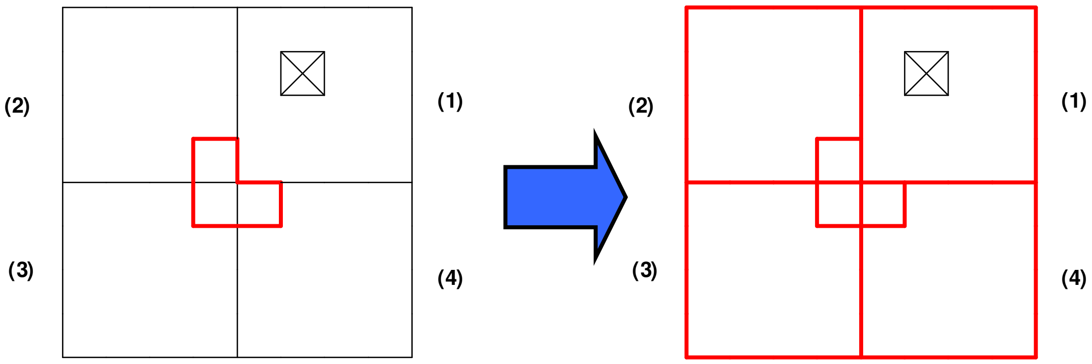


4. 當決定正中心 2×2 棋盤的 L 形元件覆蓋方式後，恰形成 4 個 $(2^{k-1}\times2^{k-1}-1)$ 殘缺棋盤，可分別再用 $\dfrac{2^{k-1}\times2^{k-1}-1}{2\times2-1}$ 個 L 形元件將其覆蓋。

(1)



(2)

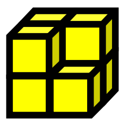


（四）由數學歸納法得知，一個 $(2^k\times2^k-1)$殘缺棋盤，無論殘缺方格在任一位置，皆可用相同策略以 $\dfrac{2^k\times2^k-1}{2\times2-1}$ 個 L 形元件將其覆蓋。

二、三維$(2^k\times2^k\times2^k-1)$殘缺方塊的情況

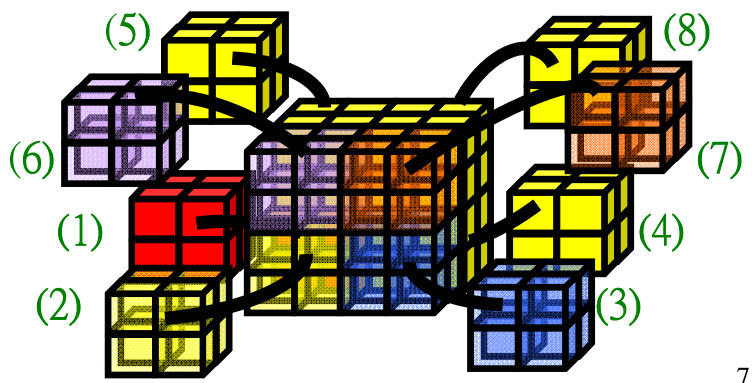
（一）三維中由 $2^k\times2^k\times2^k$ 個小正立方塊組成的正立方塊，若其中恰有一個小正立方塊殘缺我們稱爲「$(2^k\times2^k\times2^k-1)$ 殘缺方塊」。

（二）決定三維$(2^k\times2^k\times2^k-1)$殘缺方塊的覆蓋元件爲$(2\times2\times2-1)$殘缺方塊。

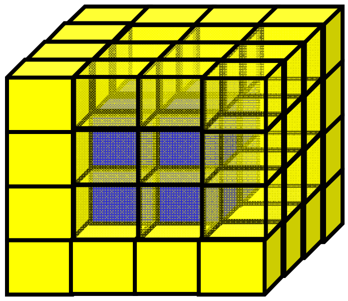


（三）三維$(2^2\times2^2\times2^2-1)$殘缺方塊，若殘缺小立方塊在任一位置，都可用 9 個元件將其覆蓋，策略說明如下：

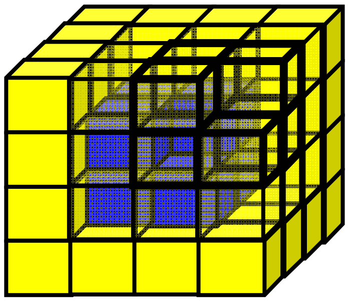
1. 將正立方塊依三個面向劃成 8 個 $2\times2\times2$ 立方塊。



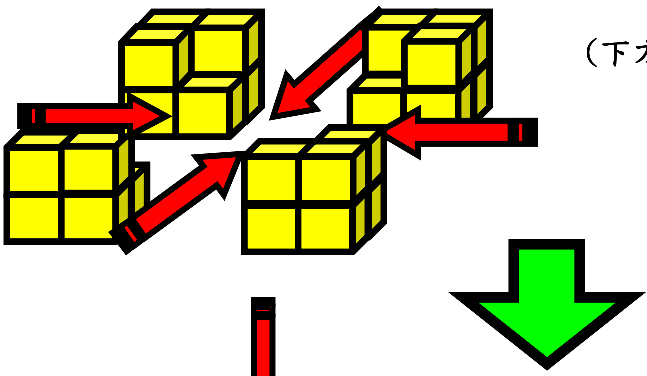
2. 依殘缺小立方塊所在位置決定正中心 2×2×2 立方塊的元件覆蓋方式。



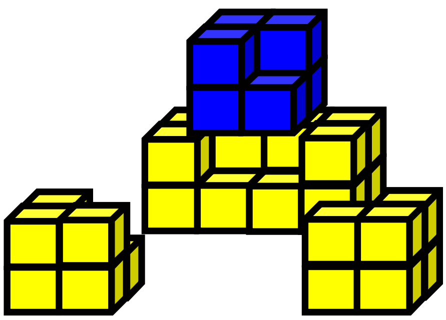
3. 覆蓋原則：若殘缺小立方塊位於(k)號 2×2×2 立方塊中，則正中心 2×2×2 立方塊中，擺放元件以「缺口朝向(k)號 2×2×2 立方塊」為原則。例如：若殘缺小立方塊位於(7)號 2×2×2 立方塊中，則元件擺放方式為缺口朝向(7)號 2×2×2 立方塊，如右圖。



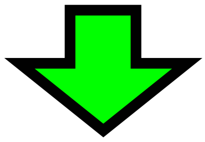
4. 當決定正中心 2×2×2 立方塊的元件覆蓋方式後，恰形成 8 個(2×2×2－1)殘缺方塊，可分別再用 8 個元件覆蓋。

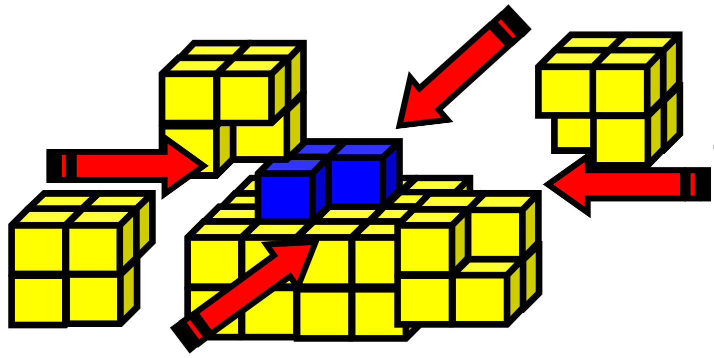


（下方積木將缺口朝上向中心推進）



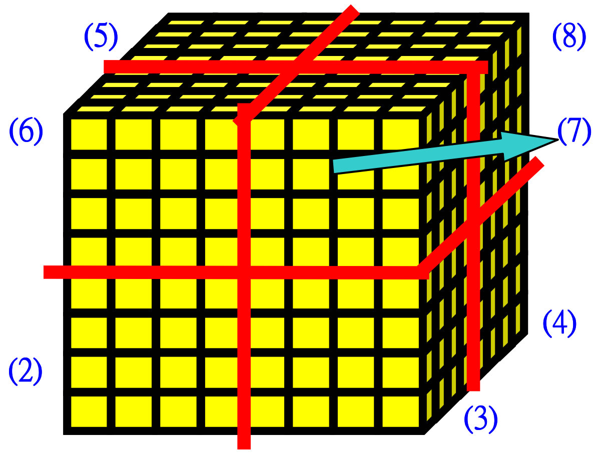
（在中央缺口放入基本元件）





（四）設三維$(2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}-1)$殘缺方塊，$k\geq3$，當殘缺小立方塊在任一位置，都可用 $\dfrac{2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}-1}{2\times2\times2-1}$ 個元件將其覆蓋。則三維$(2^{k}\times2^{k}\times2^{k}-1)$殘缺方塊，殘缺小立方塊在任一位置，用 $\dfrac{2^{k}\times2^{k}\times2^{k}-1}{2\times2\times2-1}$ 個元件將其覆蓋的策略說明如下：

1. 將 $2^{k}\times2^{k}\times2^{k}$ 立方塊劃成 8 個 $2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}$ 立方塊。



2. 依殘缺小立方塊所在位置決定正中心 $2\times2\times2$ 立方塊的元件覆蓋方式。
3. 覆蓋原則：若殘缺小立方塊位於(k)號 $2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}$ 立方塊中，則正中心 $2\times2\times2$ 立方塊中，擺放元件以「缺口朝向(k)號 $2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}$ 立方塊」爲原則。
4. 當決定正中心 $2\times2\times2$ 立方塊的元件覆蓋方式後，恰形成 8 個$(2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}-1)$殘缺方塊，可分別再用 $\dfrac{2^{k-1}\times2^{k-1}\times2^{k-1}-1}{2\times2\times2-1}$ 個元件將其覆蓋。

（五）由數學歸納法得知，三維$(2^{k}\times2^{k}\times2^{k}-1)$殘缺方塊，無論殘缺小立方塊在任一位置，皆可用相同策略以 $\dfrac{2^{k}\times2^{k}\times2^{k}-1}{2\times2\times2-1}$ 個元件將其覆蓋 。

三、將二維$(2^2\times 2^2-1)$殘缺棋盤的情況以集合形式表示

（一）二維$2^2\times 2^2$棋盤中，將每一個方格的位置用正整數數對(a,b)表示如下圖。

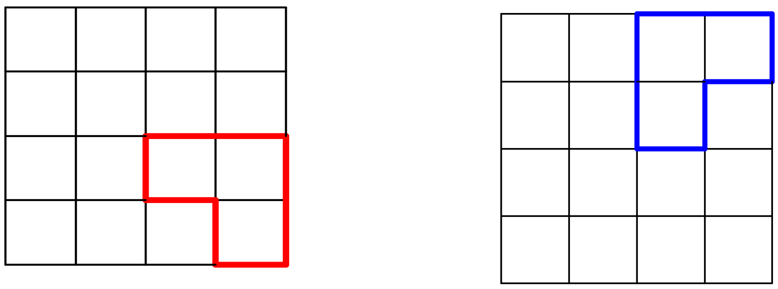
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,4)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

（二）定義二維集合$S^2=\{(a,b)\mid 1\le a,b\le 4, a,b\in N\}$，則$S^2$等同二維$2^2\times 2^2$棋盤。

（三）對任意$(i,j)\in S^2$，定義二維殘缺集合$S_{(i,j)}=S^2-\{(i,j)\}$，則$S_{(i,j)}$等同殘缺位置爲(i,j)的殘缺棋盤。

（四）定義二維子集合$P^{(p,q)}=\{(a,b)\in S^2\mid p-1\le a\le p,\ q-1\le b\le q\}$，其中$(p,q)\in S^2$。我們特別考慮 5 個二維子集合$P^{(p,q)}$，其中$p,q\in\{2,4\}$或$(p,q)=(3,3)$。

（五）定義元件集合$P_{(t,u)}^{(p,q)}=P^{(p,q)}-\{(t,u)\}$，其中$(t,u)\in P^{(p,q)}$，則$P_{(t,u)}^{(p,q)}$等同殘缺棋盤中的L 形元件。如圖一，$P_{(3,1)}^{(4,2)}$等同紅色 L 形元件，$P_{(4,3)}^{(4,4)}$等同藍色 L 形元件。



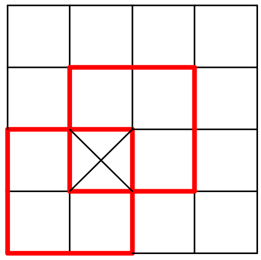
$P_{(3,1)}^{(4,2)}$　　　　$P_{(4,3)}^{(4,4)}$

圖一

（六）二維$(2^2\times 2^2-1)$殘缺棋盤，無論殘缺方格在哪一個位置，都可用 5 個 L 形元件將其覆蓋。同理，二維殘缺集合$S_{(i,j)}$中，無論殘缺數對是哪一個(i,j)，都可用 5 個元件集合$P_{(t,u)}^{(p,q)}$將$S_{(i,j)}$覆蓋，覆蓋策略說明如下：

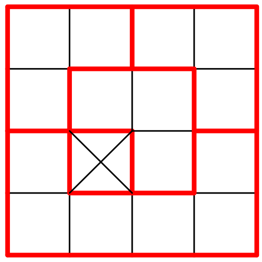
1. 若殘缺數對$(i,j)\in P^{(3,3)}$，即殘缺方格在正中心的2×2棋盤中：

(1) 設殘缺數對爲$(2,2)\in P^{(3,3)}$，則$P^{(2,2)},P^{(3,3)}$皆缺了數對$(2,2)$，可先以$P_{(2,2)}^{(2,2)},P_{(2,2)}^{(3,3)}$覆蓋，其覆蓋殘缺集合$S_{(2,2)}$的方式等同圖二。



圖二

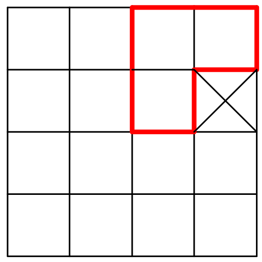
(2) 因爲$P_{(2,2)}^{(3,3)}=\{(3,3),(2,3),(3,2)\}$，且$(3,3)\in P^{(4,4)}$, $(2,3)\in P^{(2,4)},(3,2)\in P^{(4,2)}$，故可再以$P_{(3,3)}^{(4,4)},P_{(2,3)}^{(2,4)}$, $P_{(3,2)}^{(4,2)}$將二維殘缺集合$S_{(2,2)}$覆蓋，等同圖三。



圖三

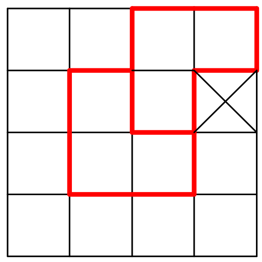
2. 若殘缺數對$(i,j)\in S^2-P^{(3,3)}$，即殘缺方格不在正中心的2×2棋盤中：

(1) 設殘缺數對爲$(4,3)\in P^{(4,4)}$，則$P^{(4,4)}$缺了數對$(4,3)$，可先以$P_{(4,3)}^{(4,4)}$覆蓋，其覆蓋殘缺集合$S_{(4,3)}$的方式等同圖四。



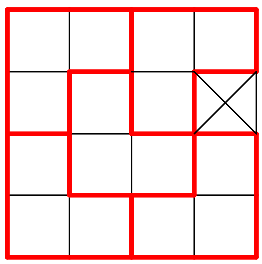
圖四

(2) 因爲$P_{(4,3)}^{(4,4)}=\{(4,4),(3,4),(3,3)\}$，且$(3,3)\in P^{(3,3)}$，則$P^{(3,3)}$缺了數對$(3,3)$，故可再以$P_{(3,3)}^{(3,3)}$覆蓋，等同圖五。



圖五

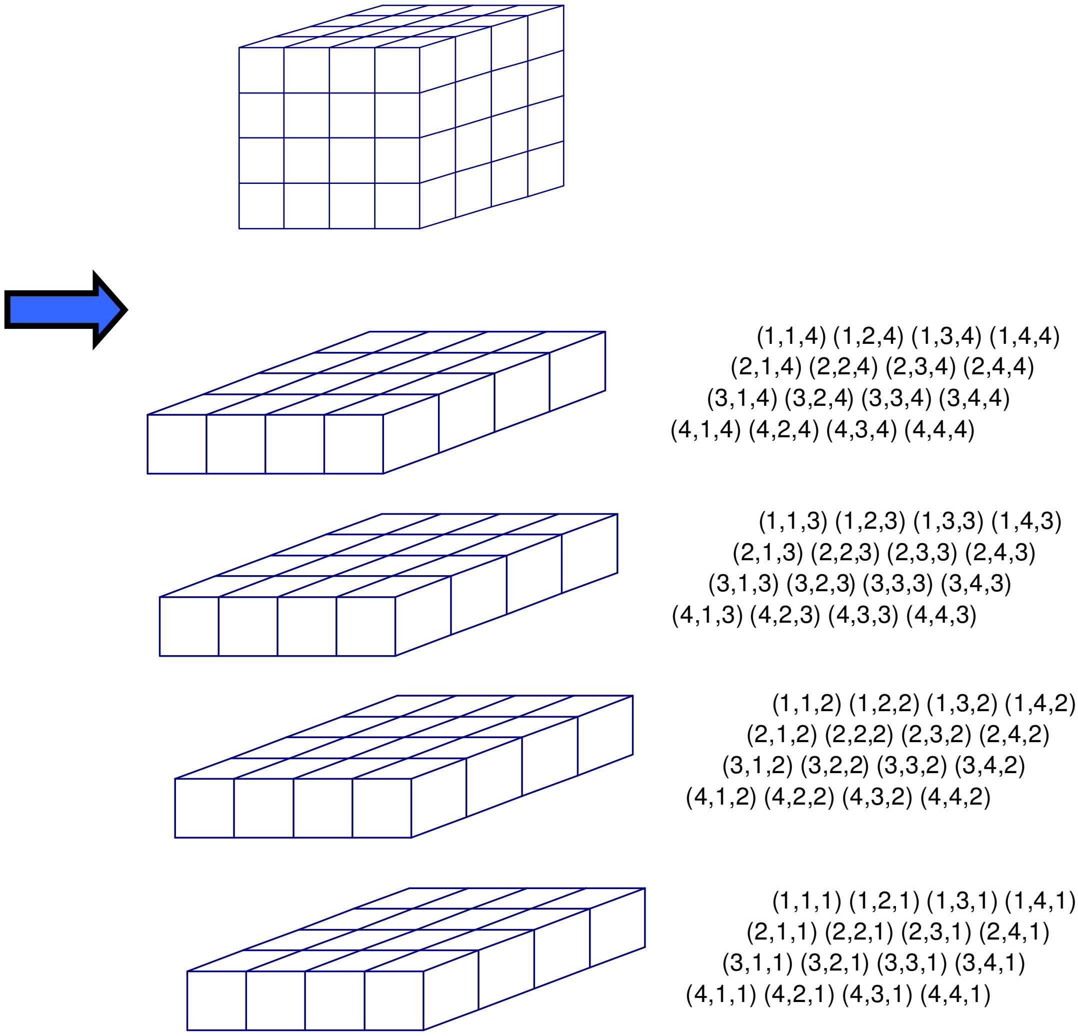
(3) 又$P_{(3,3)}^{(3,3)}=\{(2,3),(3,2),(2,2)\}$，且$(2,3)\in P^{(2,4)}$, $(3,2)\in P^{(4,2)}$, $(2,2)\in P^{(2,2)}$，故可再以$P_{(2,3)}^{(2,4)},P_{(3,2)}^{(4,2)}$, $P_{(2,2)}^{(2,2)}$將二維殘缺集合$S_{(4,3)}$覆蓋，等同圖六。



圖六

四、將三維$(2^2\times2^2\times2^2-1)$殘缺方塊的情況以集合形式表示

（一）三維 $2^2\times2^2\times2^2$ 立方塊中，將每一個小立方塊的位置用正整數數對(a,b,c)表示如下圖。



（二）定義三維集合 $S^3=\{(a,b,c)\mid 1\le a,b,c\le 4\,,\,a,b,c\in N\}$，則 S^3 等同三維 $2^2\times2^2\times2^2$ 立方塊。

（三）對任意 $(i,j,k)\in S^3$，定義三維殘缺集合 $S_{(i,j,k)}=S^3-\{(i,j,k)\}$，則 $S_{(i,j,k)}$ 等同殘缺位置爲 (i,j,k) 的殘缺方塊。

（四）定義三維子集合 $P^{(p,q,r)}=\{(a,b,c)\in S^3\mid p-1\le a\le p,q-1\le b\le q,r-1\le c\le r\}$,其中 $(p,q,r)\in S^3$。我們特別考慮 9 個三維子集合 $P^{(p,q,r)}$，其中 $p,q,r\in\{2,4\}$ 或 $(p,q,r)=(3,3,3)$。

（五）定義元件集合 $P_{(t,u,v)}^{(p,q,r)}=P^{(p,q,r)}-\{(t,u,v)\}$，其中 $(t,u,v)\in P^{(p,q,r)}$，則 $P_{(t,u,v)}^{(p,q,r)}$ 等同殘缺方塊中的元件。

（六）三維$(2^2\times2^2\times2^2-1)$殘缺方塊，無論殘缺小立方塊在哪一個位置，都可用 9 個元

件將其覆蓋。同理，三維殘缺集合 $S_{(i,j,k)}$ 中，無論殘缺數對是哪一個 (i,j,k) ，都可用 9 個元件集合 $P_{(t,u,v)}^{(p,q,r)}$ 將 $S_{(i,j,k)}$ 覆蓋，覆蓋策略說明如下：

1. 若殘缺數對 $(i,j,k)\in P^{(3,3,3)}$ ，即殘缺小立方塊在正中心的 $2\times2\times2$ 立方塊中：

   (1) 設殘缺數對爲 $(2,2,2)\in P^{(3,3,3)}$ ，則 $P^{(2,2,2)},P^{(3,3,3)}$ 皆缺了數對 $(2,2,2)$ ，可先以 $P_{(2,2,2)}^{(2,2,2)},P_{(2,2,2)}^{(3,3,3)}$ 覆蓋。

   (2) 因爲 $P_{(2,2,2)}^{(3,3,3)}=\{(3,3,3),(3,3,2),(3,2,3),(2,3,3,),(3,2,2),(2,3,2),(2,2,3)\}$ ，且 $(3,3,3)\in P^{(4,4,4)},(3,3,2)\in P^{(4,4,2)},(3,2,3)\in P^{(4,2,4)},(2,3,3)\in P^{(2,4,4)},(3,2,2)\in P^{(4,2,2)},$ $(2,3,2)\in P^{(2,4,2)},(2,2,3)\in P^{(2,2,4)}$ ，故可再以 $P_{(3,3,3)}^{(4,4,4)},P_{(3,3,2)}^{(4,4,2)},P_{(3,2,3)}^{(4,2,4)},P_{(3,2,2)}^{(4,2,2)},$ $P_{(2,3,3)}^{(2,4,4)},P_{(2,3,2)}^{(2,4,2)},P_{(2,2,3)}^{(2,2,4)}$ 等 7 個元件將 $S_{(2,2,2)}$ 覆蓋。

2. 若殘缺數對 $(i,j,k)\in S^3-P^{(3,3,3)}$ ，即殘缺小立方塊不在正中心的 $2\times2\times2$ 立方塊中：

   (1) 設殘缺數對爲 $(4,3,3)\in P^{(4,4,4)}$ ，則 $P^{(4,4,4)}$ 缺了數對 $(4,3,3)$ ，可先以 $P_{(4,3,3)}^{(4,4,4)}$ 覆蓋。

   (2) 因爲 $P_{(4,3,3)}^{(4,4,4)}=\{(4,4,4),(4,4,3),(4,3,4),(3,4,4),(3,4,3),(3,3,4),(3,3,3)\}$ ，則 $P^{(3,3,3)}$ 缺了數對 $(3,3,3)$ ，故可再以 $P_{(3,3,3)}^{(3,3,3)}$ 覆蓋。

   (3) 我們又知道 $P_{(3,3,3)}^{(3,3,3)}=\{(3,3,2),(3,2,3),(2,3,3),(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2),(2,2,2)\}$ ，且 $(3,2,3)\in P^{(4,2,4)},(2,3,3)\in P^{(2,4,4)},(2,2,3)\in P^{(2,2,4)},(2,3,2)\in P^{(2,4,2)},(3,2,2)\in P^{(4,2,2)},$ $(2,2,2)\in P^{(2,2,2)}$ ，故可再以 $P_{(3,3,2)}^{(4,4,2)},P_{(3,2,3)}^{(4,2,4)},P_{(2,3,3)}^{(2,4,4)},P_{(2,2,3)}^{(2,2,4)},P_{(2,3,2)}^{(2,4,2)},P_{(3,2,2)}^{(4,2,2)},P_{(2,2,2)}^{(2,2,2)}$ 等 7 個元件將三維殘缺集合 $S_{(4,3,3)}$ 覆蓋。

五、 推廣至$(2^2\times 2^2\times 2^2\times 2^2-1)$四維殘缺集合的情況

（一）定義四維集合$S^4=\{(a,b,c,d)\mid 1\le a,b,c,d\le 4\ ,\ a,b,c,d\in N\}$。

（二）對任意$(i,j,k,l)\in S^4$，定義四維殘缺集合$S_{(i,j,k,l)}=S^4-\{(i,j,k,l)\}$。

（三）定義四維子集合$P^{(p,q,r,s)}=\{(a,b,c,d)\in S^4 \mid p-1\le a\le p, q-1\le b\le q, r-1\le c\le r, s-1\le d\le s\}$，

其中$p,q,r,s\in S^4$，我們特別考慮 17 個四維子集合$P^{(p,q,r,s)}$，其中$p,q,r,s\in\{2,4\}$或$(p,q,r,s)=(3,3,3,3)$。

（四）定義元件集合$P_{(t,u,v,w)}^{(p,q,r,s)}=P^{(p,q,r,s)}-\{(t,u,v,w)\}$，其中$(t,u,v,w)\in P^{(p,q,r,s)}$。

（五）四維殘缺集合$S_{(i,j,k,l)}$中，無論殘缺數對是哪一個(i,j,k,l)，都可用 17 個元件集合將$S_{(i,j,k,l)}$覆蓋，覆蓋策略說明如下

1. 若殘缺數對$(i,j,k,l)\in P^{(3,3,3,3)}$：

(1) 設殘缺數對為$(2,2,2,2)\in P^{(3,3,3,3)}$，則$P^{(2,2,2,2)}, P^{(3,3,3,3)}$ 皆缺了數對$(2,2,2,2)$，可先以$P_{(2,2,2,2)}^{(2,2,2,2)}, P_{(2,2,2,2)}^{(3,3,3,3)}$覆蓋。

(2) 因為

$$P_{(2,2,2,2)}^{(3,3,3,3)}=\{(2,2,2,3),(2,2,3,2),(2,3,2,2),(3,2,2,2),(2,2,3,3),(2,3,3,2),(3,3,2,2),(2,3,2,3),\\(3,2,3,2),(3,2,2,3),(2,3,3,3),(3,3,3,2),(3,2,3,3),(3,3,2,3),(3,3,3,3)\ \}$$

且

$$(2,2,2,3)\in P^{(2,2,2,4)}, (2,2,3,2)\in P^{(2,2,4,2)}, (2,3,2,2,)\in P^{(2,4,2,2)}, (3,2,2,2)\in P^{(4,2,2,2)}$$
$$(2,2,3,3)\in P^{(2,2,4,4)}, (2,3,3,2)\in P^{(2,4,4,2)}, (3,3,2,2,)\in P^{(4,4,2,2)}, (2,3,2,3)\in P^{(2,4,2,4)}$$
$$(3,2,3,2)\in P^{(4,2,4,2)}, (3,2,2,3)\in P^{(4,2,2,4)}, (2,3,3,3,)\in P^{(2,4,4,4)}, (3,3,3,2)\in P^{(4,4,4,2)}$$
$$(3,2,3,3)\in P^{(4,2,4,4)}, (3,3,2,3)\in P^{(4,4,2,4)}, (3,3,3,3,)\in P^{(4,4,4,4)}$$

故可再以

$P_{(2,2,2,3)}^{(2,2,2,4)}$，$P_{(2,2,3,2)}^{(2,2,4,2)}$，$P_{(2,3,2,2)}^{(2,4,2,2)}$，$P_{(3,2,2,2)}^{(4,2,2,2)}$，$P_{(2,2,3,3)}^{(2,2,4,4)}$，$P_{(2,3,3,2)}^{(2,4,4,2)}$，$P_{(3,3,2,2)}^{(4,4,2,2)}$，$P_{(2,3,2,3)}^{(2,4,2,4)}$

$P_{(3,2,3,2)}^{(4,2,4,2)}$，$P_{(3,2,2,3)}^{(4,2,2,4)}$，$P_{(2,3,3,3)}^{(2,4,4,4)}$，$P_{(3,3,3,2)}^{(4,4,4,2)}$，$P_{(3,2,3,3)}^{(4,2,4,4)}$，$P_{(3,3,2,3)}^{(4,4,2,4)}$，$P_{(3,3,3,3)}^{(4,4,4,4)}$

等 15 個元件將$S_{(2,2,2,2)}$覆蓋。

2. 若殘缺數對$(i,j,k,l)\in S^4-P^{(3,3,3,3)}$：

(1) 設殘缺數對為$(4,3,3,3)\in P^{(4,4,4,4)}$，則$P^{(4,4,4,4)}$缺了數對$(4,3,3,3)$，可先以

$P_{(4,3,3,3)}^{(4,4,4,4)}$覆蓋。

(2) 因爲

$$P_{(4,3,3,3)}^{(4,4,4,4)}=\{(3,3,3,3),(3,3,3,4),(3,3,4,3),(3,4,3,3),(3,3,4,4),(3,4,4,3),(4,4,3,3),(3,4,3,4),(4,3,4,3),(4,3,3,4),(3,4,4,4),(4,4,4,3),(4,3,4,4),(4,4,3,4),(4,4,4,4)\}$$

則 $P^{(3,3,3,3)}$ 缺了數對 $(3,3,3,3)$，故可再以 $P_{(3,3,3,3)}^{(3,3,3,3)}$ 覆蓋。

(3) 又

$$P_{(3,3,3,3)}^{(3,3,3,3)}=\{(2,2,2,2),(2,2,2,3),(2,2,3,2),(2,3,2,2),(3,2,2,2),(2,2,3,3,),(2,3,3,2),(3,3,2,2),(2,3,2,3),(3,2,3,2),(3,2,2,3),(2,3,3,3),(3,3,3,2),(3,2,3,3),(3,3,2,3)\}$$

且

$(2,2,2,2)\in P^{(2,2,2,2)},(2,2,2,3)\in P^{(2,2,2,4)},(2,2,3,2,)\in P^{(2,2,4,2)},(2,3,2,2)\in P^{(2,4,2,2)}$

$(3,2,2,2)\in P^{(4,2,2,2)},(2,2,3,3)\in P^{(2,2,4,4)},(2,3,3,2,)\in P^{(2,4,4,2)},(3,3,2,2)\in P^{(4,4,2,2)}$

$(2,3,2,3)\in P^{(2,4,2,4)},(3,2,3,2)\in P^{(4,2,4,2)},(3,2,2,3,)\in P^{(4,2,2,4)},(2,3,3,3)\in P^{(2,4,4,4)}$

$(3,3,3,2)\in P^{(4,4,4,2)},(3,2,3,3)\in P^{(4,2,4,4)},(3,3,2,3,)\in P^{(4,4,2,4)}$

故可再以

$P_{(2,2,2,2)}^{(2,2,2,2)}$，$P_{(2,2,2,3)}^{(2,2,2,4)}$，$P_{(2,2,3,2)}^{(2,2,4,2)}$，$P_{(2,3,2,2)}^{(2,4,2,2)}$，$P_{(3,2,2,2)}^{(4,2,2,2)}$，$P_{(2,2,3,3)}^{(2,2,4,4)}$，$P_{(2,3,3,2)}^{(2,4,4,2)}$，$P_{(3,3,2,2)}^{(4,4,2,2)}$

$P_{(2,3,2,3)}^{(2,4,2,4)}$，$P_{(3,2,3,2)}^{(4,2,4,2)}$，$P_{(3,2,2,3)}^{(4,2,2,4)}$，$P_{(2,3,3,3)}^{(2,4,4,4)}$，$P_{(3,3,3,2)}^{(4,4,4,2)}$，$P_{(3,2,3,3)}^{(4,2,4,4)}$，$P_{(3,3,2,3)}^{(4,4,2,4)}$

等 15 個元件將四維殘缺集合 $S_{(4,3,3,3)}$ 覆蓋。

六、再推廣至 $(2^k\times2^k\times2^k\times2^k-1)$ 四維殘缺集合的情況

（一）爲了方便說明一般性狀況，定義 $2^k\times2^k\times2^k\times2^k$ 四維集合

$S^{(4,k)}=\{(a,b,c,d)\mid 1\le a,b,c,d\le 2^k,\ a,b,c,d\in N\}$。

（二）對任意 $(i,j,k,l)\in S^{(4,k)}$，定義 $(2^k\times2^k\times2^k\times2^k-1)$ 四維殘缺集合

$S_{(i,j,k,l)}^{(4,k)}=S^{(4,k)}-\{(i,j,k,l)\}$。

（三）定義 $2\times2\times2\times2$ 四維子集合

$P^{(p,q,r,s)}=\left\{(a,b,c,d)\in S^{(4,k)}\middle|\ p-1\le a\le p,q-1\le b\le q,r-1\le c\le r,s-1\le d\le s\right\}$，其中

$(p,q,r,s)\in S^{(4,k)}$。

（四）定義 $(2\times2\times2\times2-1)$ 四維元件集合 $P_{(t,u,v,w)}^{(p,q,r,s)}=P^{(p,q,r,s)}-\{(t,u,v,w)\}$，其中

$(t,u,v,w)\in P^{(p,q,r,s)}$。

（五）接下來我們用數學歸納法說明，$(2^k \times 2^k \times 2^k \times 2^k - 1)$四維殘缺集合 $S_{(i,j,k,l)}^{(4,k)}$ ，無論殘缺數對是哪一個(i,j,k,l)，都可用四維元件集合 $P_{(t,u,v,w)}^{(p,q,r,s)}$ 將其覆蓋。

1. 當$k=2$時，由前面的討論得知成立。

2. 假設當$k=m\geq 2$時成立，則$k=m+1$時，

(1) $S^{(4,m+1)}$爲$2^{m+1}\times 2^{m+1}\times 2^{m+1}\times 2^{m+1}$四維集合，我們可以將它分割成 16 個 $2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m$ 四維集合如下：

(1)號：$\{(a,b,c,d) \mid 1\leq a,b,c,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(2)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a\leq 2^{m+1}, 1\leq b,c,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(3)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq b\leq 2^{m+1}, 1\leq a,c,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(4)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq c\leq 2^{m+1}, 1\leq a,b,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(5)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq d\leq 2^{m+1}, 1\leq a,b,c\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(6)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a,b\leq 2^{m+1}, 1\leq c,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(7)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a,c\leq 2^{m+1}, 1\leq b,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(8)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a,d\leq 2^{m+1}, 1\leq b,c\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(9)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq b,c\leq 2^{m+1}, 1\leq a,d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(10)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq b,d\leq 2^{m+1}, 1\leq a,c\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(11)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq c,d\leq 2^{m+1}, 1\leq a,b\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(12)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a,b,c\leq 2^{m+1}, 1\leq d\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(13)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a,b,d\leq 2^{m+1}, 1\leq c\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(14)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1\leq a,c,d\leq 2^{m+1}, 1\leq b\leq 2^m, a,b,c,d\in N\}$

(15)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1 \le b,c,d \le 2^{m+1}, 1 \le a \le 2^m, a,b,c,d \in N\}$

(16)號：$\{(a,b,c,d) \mid 2^m+1 \le a,b,c,d \le 2^{m+1}, a,b,c,d \in N\}$

(2) 若殘缺數對 $(i,j,k,l) \in P^{(2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)}$:

設 $(i,j,k,l)=(2^m,2^m,2^m,2^m)$，則先用四維元件集合 $P^{(2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)}_{(2^m,2^m,2^m,2^m)}$ 覆蓋，此時前面討論中的(1)號四維集合原本就是一個 $(2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m - 1)$ 殘缺集合，而 $P^{(2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)}_{(2^m,2^m,2^m,2^m)}$ =

$$\begin{aligned}\{ &(2^m, 2^m, 2^m, 2^m+1), (2^m, 2^m, 2^m+1, 2^m), (2^m, 2^m+1, 2^m, 2^m),\\ &(2^m+1, 2^m, 2^m, 2^m), (2^m,2^m,2^m+1,2^m+1), (2^m,2^m+1,2^m,2^m+1),\\ &(2^m,2^m+1,2^m+1,2^m), (2^m+1,2^m,2^m,2^m+1), (2^m+1,2^m,2^m+1,2^m),\\ &(2^m+1,2^m+1,2^m,2^m), (2^m,2^m+1,2^m+1,2^m+1), (2^m+1,2^m,2^m+1,2^m+1),\\ &(2^m+1,2^m+1,2^m,2^m+1), (2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m), (2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)\}\end{aligned}$$

中的 15 個數對在覆蓋後恰會使前文中的(2)號 ~ (16)號 $(2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m)$ 四維集合殘缺，例如：數對 $(2^m,2^m,2^m,2^m+1)$ 會使(5)號四維集合殘缺，數對 $(2^m, 2^m, 2^m+1, 2^m+1)$ 會使(11)號四維集合殘缺。由歸納法的假設得知，這 16 個 $(2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m - 1)$ 四維殘缺集合可分別用四維元件集合覆蓋。

(3) 若殘缺數對 $(i,j,k,l) \in S^{(4,m+1)} - P^{(2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)}$:

設 $(i,j,k,l)=(1, 2^{m+1}, 1, 2^{m+1})$，因 $(1,2^{m+1},1,2^{m+1})$ 屬於(10)號四維集合，則先用元件集合 $P^{(2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)}_{(2^m,2^m+1,2^m,2^m+1)}$ 覆蓋，此時(10)號四維集合原本就是一個 $(2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m - 1)$ 四維殘缺集合，而 $P^{(2^m+1,2^m+1,2^m+1,2^m+1)}_{(2^m,2^m+1,2^m,2^m+1)}$ 中的 15 個數對在覆蓋後恰會使其他 15 個 $(2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m)$ 四維集合殘缺，由歸納法的假設得知，這 16 個 $(2^m \times 2^m \times 2^m \times 2^m - 1)$ 四維殘缺集合可分別用四維元件集合覆蓋。

七、再推廣至($\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{n個}-1$) $\boldsymbol{n}$ 維殘缺集合的情況

（一）1. 定義$\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{\text{n個}}$ n 維集合

$S^{(n,k)}=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ \middle|\ 1\le a_1,a_2,\cdots,a_n\le 2^k, a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\right\}$。

2. 對任意$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S^{(n,k)}$，定義($\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{n個}-1$) n 維殘缺集合

$S_{(b_1,b_2,\cdots,b_n)}^{(n,k)}=S^{(n,k)}-\{(b_1,b_2,\cdots,b_n)\}$。

3. 定義$\overbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}^{n個}$ n 維子集合

$P^{(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,k)}\ \middle|\ c_{i-1}\le a_i\le c_i, i=1,2,\cdots,n\right\}$，其中

$(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S^{(n,k)}$。

4. 定義($\overbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}^{\text{n個}}-1$) n 維元件集合$P_{(d_1,d_2,\cdots,d_n)}^{(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=P^{(c_1,c_2,\cdots,c_n)}-\{(d_1,d_2,\cdots,d_n)\}$，其中$(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in P^{(c_1,c_2,\cdots c_n)}$。

〈二〉接下來我們用數學歸納法說明，($\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{n個}-1$) n 維殘缺集合 $S_{(b_1,b_2,\cdots,b_n)}^{(n,k)}$，無論殘缺數對是哪一個$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，都可用($\overbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}^{\text{n個}}-1$) n 維元件集合 $P_{(d_1,d_2,\cdots,d_n)}^{(c_1,c_2,\cdots,c_n)}$將其覆蓋。

1. $k=2$時，($\overbrace{2^2\times 2^2\times\cdots\times 2^2}^{n個}-1$) n 維殘缺集合$S_{(b_1,b_2,\cdots,b_n)}^{(n,2)}$中，無論殘缺數對是哪一個$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，都可用$2^n+1$個 n 維元件集合將$S_{(b_1,b_2,\cdots,b_n)}^{(n,2)}$覆蓋，覆蓋策略說明如下：

(1)我們特別考慮2^n+1個 n 維子集合$P^{(c_1,c_2,\cdots,c_n)}$，其中$c_1,c_2,\cdots,c_n\in\{2,4\}$或$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(3,3,\cdots,3)$。

(2)若殘缺數對$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in P^{(3,3,\cdots,3)}$：

設$(2,3,\cdots,3)\in P^{(3,3,\cdots,3)}$，可先以$P_{(2,3,\cdots,3)}^{(3,3,\cdots,3)}$、$P_{(2,3,\cdots,3)}^{(2,4,\cdots,4)}$覆蓋。而$P_{(2,3,\cdots,3)}^{(3,3,\cdots,3)}$中的$2^n-1$個數對恰可使前文(1)中剩餘的$2^n-1$個 n 維子集合殘缺，例如$P_{(2,3,\cdots,3)}^{(3,3,\cdots,3)}$中的數對

$(3,\cdots,3,2)$會使$P^{(4,\cdots,4,2)}$殘缺，可分別再以 n 維元件集合覆蓋。

(3)若殘缺數對$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S^{(n,m+1)}_{(b_1,b_2,\cdots,b_n)}-P^{(3,3,\cdots,3)}$：

設$(4,4,\cdots,4,1,)\in S^{(n,m+1)}_{(4,4,\cdots,4,1)}-P^{(3,3,\cdots,3)}$，可先以$P^{(4,4,\cdots,4,2)}_{(4,4,\cdots,4,1)}$覆蓋，而$P^{(4,4,\cdots,4,2)}_{(4,4,\cdots,4,1)}$中的數對$(3,3,\cdots,3,2)$會使$P^{(3,3,\cdots,3)}$殘缺，故再以$P^{(3,3,\cdots,3,3)}_{(3,3,\cdots,3,2)}$覆蓋，又$P^{(3,3,\cdots,3,3)}_{(3,3,\cdots,3,2)}$中的$2^n-1$個數對恰可使前文(1)中剩餘的$2^n-1$個 n 維子集合殘缺，例如$P^{(3,3,\cdots,3,3)}_{(3,3,\cdots,3,2)}$中的數對$(3,\cdots,3,2,2)$會使$p^{(4,\cdots,4,2,2)}$殘缺，可分別再以 n 維元件集合覆蓋。

2. 假設$k=m\geq 2$時成立，則$k=m+1$時，

(1) $S^{(n,m+1)}$爲$\overbrace{2^{m+1}\times 2^{m+1}\times\cdots\times 2^{m+1}}^{n個}$ n 維集合，我們可以將它分割成2^n個 n 維集合如下：

第(1)組：$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,m+1)}\mid 1\leq a_1,a_2,\cdots,a_n\leq 2^m\}$，共$C^n_0=1$個。

第(2)組：$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,m+1)}\mid a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中恰有1個大於等於2^m+1

且小於等於2^{m+1}，其餘$n-1$個大於等於1且小於等於$2^m\}$，共C^n_1個。

第(3)組：$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,m+1)}\mid a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中恰有2個大於等於2^m+1

且小於等於2^{m+1}，其餘$n-2$個大於等於1且小於等於$2^m\}$，共C^n_2個。

⋮

⋮

第(n)組：$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,m+1)}\mid a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中恰有$n-1$個大於等於2^m+1

且小於等於2^{m+1}，其餘1個大於等於1且小於等於$2^m\}$，共C^n_{n-1}個。

第(n+1)組：$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,m+1)}\mid 2^m+1\leq a_1,a_2,\cdots,a_n\leq 2^{m+1}\}$，共$C^n_n=1$個。

因此$\overbrace{2^m\times 2^m\times\cdots\times 2^m}^{n個}$ n 維集合共$C^n_0+C^n_1+\cdots+C^n_n=2^n$個。

(2) 若殘缺數對$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in P^{(2^m+1,2^m+1,\cdots,2^m+1)}$：

設$(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(2^m,2^m+1,\cdots,2^m+1)$，則先用 n 維元件集合$P^{(2^m+1,2^m+1,\cdots,2^m+1)}_{(2^m,2^m+1,\cdots,2^m+1)}$覆蓋，此時殘缺數對$(2^m,2^m+1,\cdots,2^m+1)$會使前面討論(1)中第($n$)組的 n 維集合$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S^{(n,m)}\mid 1\leq a_1\leq 2^m,\ 2^m+1\leq a_2,a_3,\cdots,a_n\leq 2^{m+1}\}$殘缺，而

$P_{\left(2^m,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)}^{\left(2^m+1,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)}$中的$2^n-1$個數對恰會使剩下的$2^n-1$個 n 維集合殘缺，例如 $P_{\left(2^m,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)}^{\left(2^m+1,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)}$ 中的 $\left(2^m,2^m,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)$會使第$(n\text{-}1)$組中的 n 維集合 $\left\{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in S^{(n,m)}\middle|\, 2^m+1\le a_3,a_4,\cdots,a_n\le 2^{m+1},1\le a_1,a_2\le 2^m\right\}$殘缺。由歸納法的假設得知，這$2^n$個($\overbrace{2^m\times 2^m\times\cdots\times 2^m}^{n個}-1$) n 維殘缺集合可分別用 n 維元件集合覆蓋。

(3) 若殘缺數對$\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)\in S^{(n,m+1)}-P^{\left(2^m+1,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)}$：

設 $\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)=\left(1,\cdots,1,2^{m+1}\right)$，因 $\left(1,\cdots,1,2^{m+1}\right)$屬於第(2)組中的 n 維集合 $\left\{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in S^{(n,m)}\middle|\,1\le a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\le 2^m,2^m+1\le a_n\le 2^{m+1}\right\}$，故形成一個 $\overbrace{2^m\times 2^m\times\cdots\times 2^m}^{n個}$ 的 n 維殘缺集合。先用元件集合 $P_{\left(2^m,\cdots,2^m,2^m+1\right)}^{\left(2^m+1,2^m+1,\cdots,2^m+1\right)}$ 覆蓋，而 $P_{\left(2^m,\cdots,2^m,2^m+1\right)}^{\left(2^m+1,\cdots,2^m+1,2^m+1\right)}$中的$2^n-1$個數對恰會使剩下的$2^n-1$個$\overbrace{2^m\times 2^m\times\cdots\times 2^m}^{n個}$ n 維集合殘缺，例如$P_{\left(2^m,\cdots,2^m,2^m+1\right)}^{\left(2^m+1,\cdots,2^m+1,2^m+1\right)}$中的$\left(2^m+1,\cdots 2^m+1,2^m\right)$會使第(n)組中的 n 維集合$\left\{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in S^{(n,m)}\middle|\,2^m+1\le a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\le 2^{m+1},1\le a_n\le 2^m\right\}$殘缺。由歸納法的假設知，這$2^n$個($\overbrace{2^m\times 2^m\times\cdots\times 2^m}^{n個}-1$) n 維殘缺集合可分別用 n 維元件集合覆蓋。

陸、討論

一、二維($2^k\times 2^k-1$) 殘缺棋盤，殘缺方格在任一位置，由數學歸納法知，皆可用$\dfrac{2^k\times 2^k-1}{2\times 2-1}$個 L 形元件將其覆蓋。

二、三維($2^k\times 2^k\times 2^k-1$)殘缺方塊，殘缺小立方塊在任一位置，由數學歸納法知，皆可用$\dfrac{2^k\times 2^k\times 2^k-1}{2\times 2\times 2-1}$個元件將其覆蓋。

三、四維($2^k\times 2^k\times 2^k\times 2^k-1$)殘缺數對集合，無論殘缺數對是哪一個，由數學歸納法知皆可用$\dfrac{2^k\times 2^k\times 2^k\times 2^k-1}{2\times 2\times 2\times 2-1}$個元件集合將其覆蓋。

四、n 維($\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{n個}-1$)殘缺數對集合，無論殘缺數對是哪一個，由數學歸納法知，

皆可用$\dfrac{\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{n個}-1}{\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n個}-1}$個元件集合將其覆蓋。

柒、結論

二維($2^k\times 2^k-1$)殘缺棋盤的覆蓋性質，可推廣至三維($2^k\times 2^k\times 2^k-1$)殘缺方塊，再推廣至四維($2^k\times 2^k\times 2^k\times 2^k-1$)殘缺數對集合，並可持續推廣至 n 維($\overbrace{2^k\times 2^k\times\cdots\times 2^k}^{n個}-1$)殘缺數對集合，這樣的架構很美。

捌、參考資料與其他

一、 作品名稱：「虧格」—中華民國第二十八屆國中組科展第三名。

作者：台北市立和平國民中學—陳綽、陳建彰、廖昱善。

網址：http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/28/pdf/28m/177.pdf。

二、高級中學基礎數學第一冊—數學歸納法。

【評語】040410

1、 取材自然完整，處理方法簡易，演示生動。

2、 從 2 維出發，抽象化列 n 維殘缺數對集合，符合數學精神。

3、 若能再充分利用動態幾何來呈現，效果應更佳。