中華民國 第49屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第二名

040409

迴蟲世代

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高二 侯宗誠	鍾玉才
高二 許德瑋	周啟仁
高二 曾冠豪	
高二 何昇達	

關鍵詞：遞迴關係、一路領先、Motzkin 數列

迴蟲世代

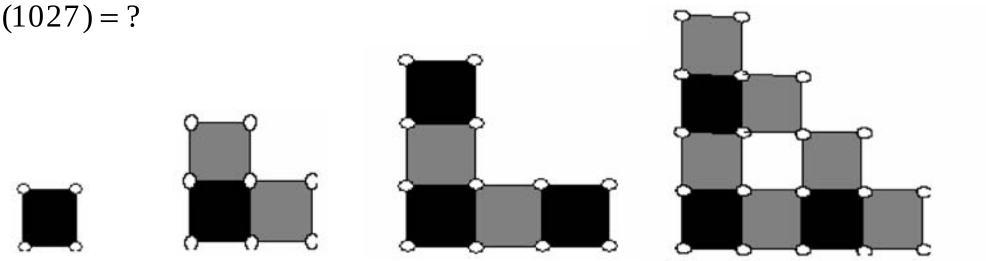
摘要：

在數學課堂中，老師拋出一道甄試的口試題目，那是一道有關蟲類繁殖過程中，探討子代存在的位置及其規律性的題目。我們除了解決原題目外，並改變其維度、形狀來探索其狀況。首先，我們藉由電腦程式來驗證手算的正確性，再用數學算式證明，而在推導的過程中，竟發現其解與 ***Pascal Triangle***、「一路領先」、***Catalan*** 數列、***Motzkin*** 數列、***Fibonacci*** 數列、***Sierpinski gasket*** 和 ***Sierpinski carpet*** 有著密切的關係！

壹、研究動機：

一、甄試口試題目

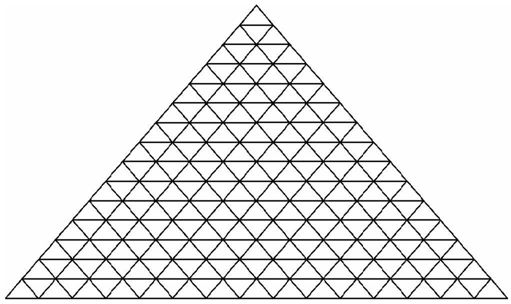
在一道甄試的題目中，有一蟲類隨著時間增長的問題：
有一種昆蟲，佔有同一個方格爲家，永遠不搬家。同一代的昆蟲在同一時間於其所在處的上方、右方各生下一個昆蟲(可能無性生殖)，生了之後就沒有生育能力，但也死不了。假設兩隻昆蟲同時佔有相同方格，那麼這兩隻蟲會彼此吞噬對方而亡。假設第一代僅有一隻昆蟲，令$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{n})$爲第$\boldsymbol{n}$代昆蟲的總數，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$爲第一代至第$\boldsymbol{n}$代昆蟲的總數。已知$\boldsymbol{G}(1)=1$，$\boldsymbol{G}(2)=2$，$\boldsymbol{G}(3)=2$；$\boldsymbol{T}(1)=1$，$\boldsymbol{T}(2)=3$，$\boldsymbol{T}(3)=5$
如下圖所示。請問(1). $\boldsymbol{G}(2^{\boldsymbol{n}})=?$ (2). $\boldsymbol{T}(2^{\boldsymbol{n}})=?$ 其中$\boldsymbol{n}=0$，1，2，3，‧‧‧。
(3). $\boldsymbol{T}(1027)=?$



第一代　第二代　第三代　第四代

觀察每一子代的生長情況，探索蟲子生長的規律性。

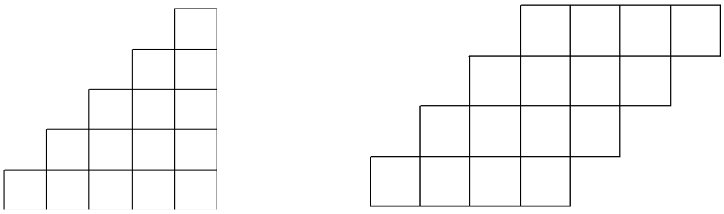
二、改變格子的形狀如圖(一)。並定義蟲子生長的遊戲規則，觀察其規律性。



圖(一)

三、改變昆蟲在同一時間於其所在處的上方、右方與前方各生下一個昆蟲(可能無性生殖)，生了之後就沒有生育能力，但也死不了。假設兩隻昆蟲同時佔有相同方格，那麼這兩隻蟲會彼此吞噬對方而亡；若三隻昆蟲同時佔有相同方格，則此格視爲存在一蟲。觀察每一子代的生長情況，探索蟲子生長的規律性。

四、在特殊格子中如圖(二)，探討蟲子生長的規律性。



圖(二)

貳、研究目的：

一、解決甄試題目中，每一子代數目及一定時間後全部子代數目的總和，並歸納其規律性與巴斯卡定理的關聯。

二、歸納出三角形格子的規律性。

三、歸納出空間方格的規律性。

四、歸納出特殊方格的規律性。

参、研究設備：

一、電腦、模型、紙筆

二、 ***Dev C***++(程式設計軟體)

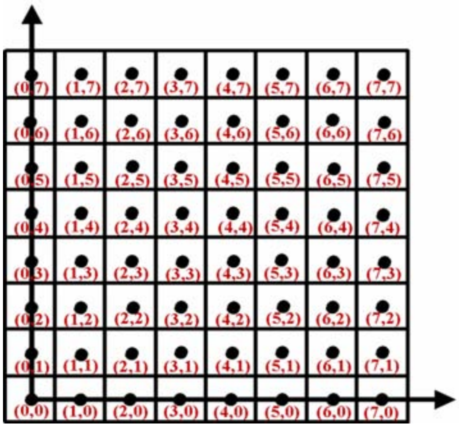
三、 ***Wolfram Mathematica*** 6.0

肆、研究過程：

一、(一). 名詞解釋與符號：

1. 名詞解釋：

(1). 坐標格子(二維)：因為蟲子每次生殖的方向是往右、往上，所以可將棋盤格子置於直角坐標中，且定義棋盤格子的左下角(即母蟲所在位置)為 $(0,0)$ 。而每一格子皆有唯一坐標 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 與之對應，如圖(三)，我們稱此為二維的坐標格子。



圖(三)

(2). 坐標格子(三維)：仿二維狀況，改變蟲子每次生殖的方向為往右、往上及往前方，所以可將方格置於空間直角坐標中，且定義母蟲所在的方格位置為 $(\mathbf{0,0,0})$，而每一方格皆有唯

一坐標(m,n,l)與之對應，我們稱此為三維的坐標格子。且知蟲子每次生殖方向即是沿著x軸，y軸與z軸正向各生一子蟲。

(3). 坐標格子(n維)：仿二維與三維狀況，將方格置於n維空間坐標中，且定義母蟲所在的方格位置為$(0,0,\cdots,0)$，而每一方格皆有唯一坐標$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$與之對應，我們稱此為n維的坐標格子。且知蟲子每次生殖方向即是沿著各坐標軸正向各生一子蟲。

(4). 格心坐標：以每一個坐標格子中心為圓心，$\frac{1}{2}$單位長為半徑畫圓(球面)，則此圓(球面)之圓心(球心)坐標我們稱為格心坐標。

(5). 一路領先：將物品分給n個人，且過程中恆符合第一人所得物品數≥第二人所得物品數≥⋯≥第n人所得物品數，稱之為一路領先。

(6). ***Motzkin***數：從$(0,0)$走到$(n,0)$，規定走法為依循向量$(1,0)$、$(1,1)$或$(1,-1)$，且不走到x軸下方的方法數。

(7). ***Motzkin***路徑：從$(0,0)$走到$(n,0)$，規定走法為依循向量$(1,0)$、$(1,1)$或$(1,-1)$，且不走到x軸下方所形成的路徑。

2. 符號：

(1). 二維

(*a*). $W_{m,n}$：其值為檢驗坐標格子(m,n)，$m,n\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。

(*b*). $T_{m,n}$：其值為檢驗坐標格子(m,n)，$m,n\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。其中坐標格子(m,n)均需滿足$m\geq n$。

(*c*). $F_{m,n}$：其值為檢驗坐標格子(m,n)，$m,n\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。其中坐標格子(m,n)均需滿足$0\leq m-n\leq 3$。

(2). 三維

(*a*). $W_{m,n,l}$：其值為檢驗坐標格子(m,n,l)，$m,n,l\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。

(*b*). $T_{m,n,l}$：其值為檢驗坐標格子(m,n,l)，$m,n,l\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。其中坐標格子(m,n,l)均需滿足$m\geq n\geq l$。

(3). n維

(*a*). $W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$：其值為檢驗坐標格子$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。

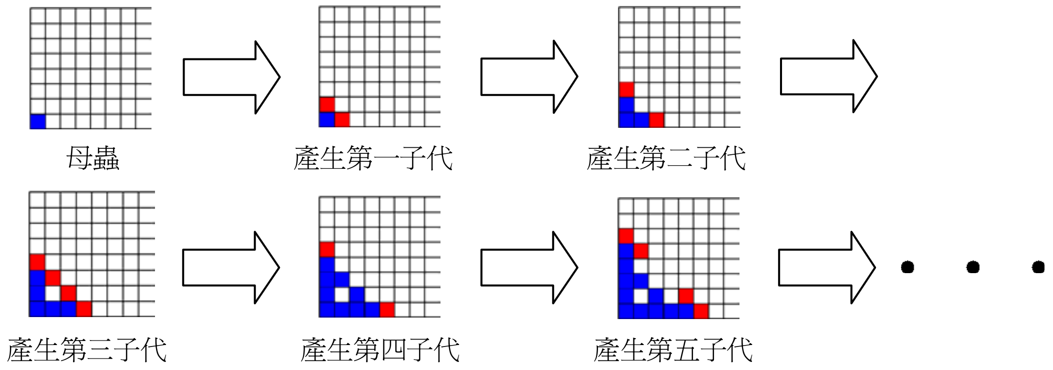
(*b*). $T_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$：其值為檢驗坐標格子$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$是否有蟲子存在。其中坐標格子$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$均需滿足$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$。

(4). 組合：$\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}=\dfrac{(m+n+l)!}{m!n!l!}$，其中$m,n,l\in N\cup\{0\}$。

(5). M_n：從$(0,0)$走到$(n,0)$，規定走法為依循向量$(1,0)$、$(1,1)$或$(1,-1)$，且不走到x軸下方的方法數，即為***Motzkin***數。

二、規定原題目第一代昆蟲為母蟲，第二代昆蟲為母蟲產生的第一子代，第三代為第二子代，以此類推。

(一). 畫出母體和每一子代的增長情形，並記錄下來，如圖(四)：



圖(四)

(二). 根據遊戲規則，推導出某一格子中的蟲子是否存在。

1. 從定義推導，可知：

(1). $\forall(\boldsymbol{m},0)$ 格子，其中 $\boldsymbol{m}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$，皆有存在蟲子。

(2). $\forall(0,\boldsymbol{n})$ 格子，其中 $\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$，皆有存在蟲子。

(3). 不在兩軸邊界上的坐標格子(即 $\boldsymbol{xy}\neq 0$)：

($\boldsymbol{a}$). 若坐標格子左方及下方的坐標格子皆存在或皆不存在蟲子時，則此坐標格子必不存在蟲子。

($\boldsymbol{b}$). 若此坐標格子之左方及下方恰只有一格有蟲子，則此坐標格子必存在蟲子。

由(1). (2). (3). 結果，我們定義：

$$\begin{cases} \text{若坐標格子}(m,n)\text{(其中}\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}\text{)有蟲子，則}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=-1 \\ \text{若坐標格子}(m,n)\text{(其中}\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}\text{)無蟲子，則}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=1 \end{cases}$$

且 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n}}$，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{W}_{0,0}=-1$。

於此，對兩軸邊界上的坐標格子而言，爲了滿足遞迴關係

$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n}}$，即 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},0}=\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},-1}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m}-1,0}$ 或 $\boldsymbol{W}_{0,\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{W}_{0,\boldsymbol{n}-1}\times\boldsymbol{W}_{-1,\boldsymbol{n}}$

定義：$\boldsymbol{m}=-1$ 或 $\boldsymbol{n}=-1$ 時，$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=1$。

2. 證明：$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=(-1)^{C_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}}$，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$，分三步驟證明如下：

(1). 證明：$\boldsymbol{W}_{1,\boldsymbol{n}}=(-1)^{\boldsymbol{n}+1}=(-1)^{C_1^{\boldsymbol{n}+1}}$，其中 $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$。

pf ：$\because \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n}}$，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\geq 1$，$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{W}_{1,\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{W}_{1,\boldsymbol{n}-1}\times\boldsymbol{W}_{0,\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{W}_{1,\boldsymbol{n}-1}=\boldsymbol{W}_{1,\boldsymbol{n}-2}\times\boldsymbol{W}_{0,\boldsymbol{n}-1} \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{W}_{1,1}=\boldsymbol{W}_{1,0}\times\boldsymbol{W}_{0,1} \end{cases}$$

$$\therefore \boldsymbol{W}_{1,\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{W}_{1,0}\times(\boldsymbol{W}_{0,\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{W}_{0,\boldsymbol{n}-1}\times\cdots\times\boldsymbol{W}_{0,1})=(-1)^{\boldsymbol{n}+1}=(-1)^{C_1^{\boldsymbol{n}+1}}$$

(2). 證明：$W_{2,n}=(-1)^{C_2^{n+2}}$，其中 $n\in N$。

pf：仿(1). $\therefore W_{2,n}=(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=(-1)^{C_2^{n+2}}$

(3). 證明：給定 n，$W_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}}$，其中 $m\in N$。

pf：當 $m=1$ 時，$W_{1,n}=(-1)^{C_1^{n+1}}$，$\therefore m=1$ 成立

假設 $m=k$ 時成立，即 $W_{k,n}=(-1)^{C_n^{k+n}}$

則 $m=k+1$ 時，$\because W_{m,n}=W_{m,n-1}\times W_{m-1,n}$

$$\therefore \begin{cases} W_{k+1,n}=W_{k+1,n-1}\times W_{k,n} \\ W_{k+1,n-1}=W_{k+1,n-2}\times W_{k,n-1} \\ \qquad\vdots \\ W_{k+1,1}=W_{k+1,0}\times W_{k,1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore W_{k+1,n}&=W_{k+1,0}\times(W_{k,1}\times W_{k,2}\times\cdots\times W_{k,n})\\ &=W_{k,0}\times(W_{k,1}\times W_{k,2}\times\cdots\times W_{k,n})=\prod_{i=0}^{n}W_{k,i}\\ &=(-1)^{C_k^k}\times(-1)^{C_k^{k+1}}\times\cdots\times(-1)^{C_k^{k+n}}\\ &=(-1)^{C_{k+1}^{(k+1)+n}}\end{aligned}$$

$\therefore$ 由數學歸納法得知本題得證

由(1). (2). (3). 可得 $W_{m,n}=W_{m,n-1}\times W_{m-1,n}$，其中 $m,n\in N$。

又 $W_{m,0}=W_{0,n}=(-1)^{C_m^{m+0}}=(-1)^{C_0^{0+n}}=(-1)^1$ 顯然成立。因此，可得

$W_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}}$，其中 $m,n\in N\cup\{0\}$。

因此，對二維平面的任意坐標格子，皆可得知坐標格子中是否存在蟲子。

即任一坐標格子 (m,n)，$m,n\in N\cup\{0\}$，

$$\begin{cases}\text{若 } W_{m,n} \text{ 的冪次 } C_m^{m+n} \text{ 為奇數，則此坐標格子存在蟲子；} \\ \text{若 } W_{m,n} \text{ 的冪次 } C_m^{m+n} \text{ 為偶數，則此坐標格子蟲子不存在。}\end{cases}$$

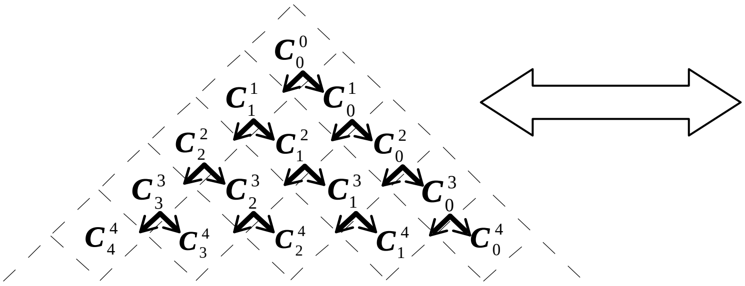
3. 性質：

(1). 若只考慮坐標格子對應的 $W_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}}$ 的冪次值，則發現每一坐標格子所對應之冪次 C_m^{m+n}，與 ***Pascal Triangle*** 中之數字相互對應。

(2). 根據巴斯卡定理：$C_m^{m+n}=C_{m-1}^{m+n-1}+C_m^{m+n-1}$，$\forall m\ge n\ge 1$

發現此算式恰是蟲子生長 $W_{m,n}=W_{m-1,n}\times W_{m,n-1}$，其中 $m,n\ge 1$ 所對應的冪次關係，如圖(五)。

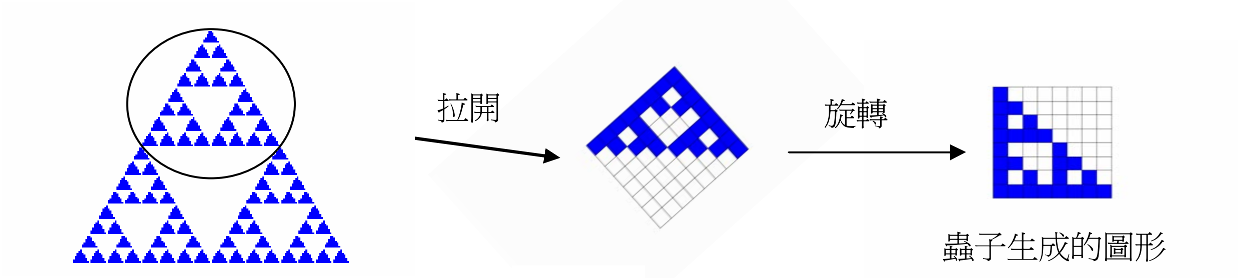
(3). 坐標格子所對應的冪次之值恰是由坐標格子 $(0,0)$ 到坐標格子 (m,n) 的捷徑走法，如圖(六)。



1					
1	4				
1	3	6			
1	2	3	4		
1	1	1	1	1	

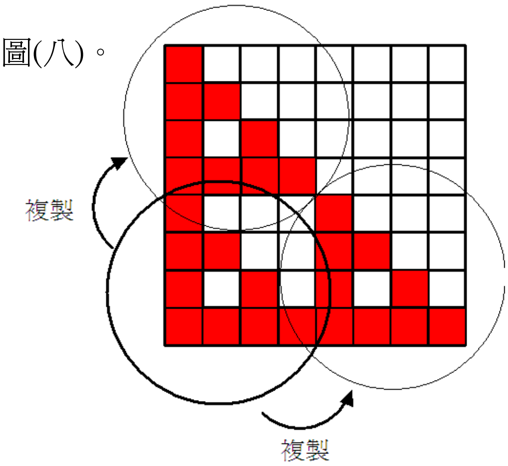
圖(五)　　　　圖(六)

(4). 若把有蟲子的坐標格子塗上顏色，我們發現其圖形具有自我重複性，也就是「自我碎形」！根據相關資料顯示蟲子生長所形成的圖形恰與 ***Sierpinski gasket*** 形成對應關係，如圖(七)。



Sierpinski gasket　　圖(七)

(5). 由於蟲子存在的位置有著「自我碎形」的特性。我們觀察到其圖形會由起始點算起以 $(2^n \times 2^n)$ 正方形，($n \in N \cup \{0\}$)，向上向右複製相同的圖形，如圖(八)。



圖(八)

由以上性質，針對這道甄試的口試題目：

(a). 對 $G(2^n)$ ，已知 $G(2^0)=1$ ， $G(2^1)=2$ ，則
$G(2^2)=2\times G(2^1)=2\times 2=2^2 \Rightarrow G(2^n)=2^n$ 。

(b). 對 $T(2^n)$ ，已知 $T(2^0)=1$ ， $T(2^1)=3$ ，又因為「自我碎形」關係，$\therefore T(2^2)=(2+1)\times T(2^1)=3\times 3=3^2 \Rightarrow T(2^n)=3^n$ 。

(c). $\because T(1027)=T(1024)+G(1025)+G(1026)+G(1027)$

$$=3^{10}+G(1025)+G(1026)+G(1027)$$

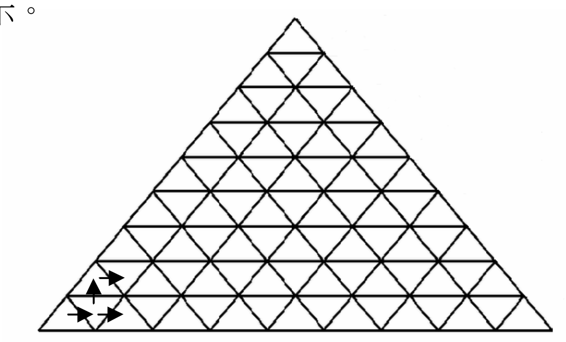
又對第 1025 代而言，只有圖形的最上方及最右方的兩個格子有蟲子　$\therefore G(1025)=2$

又從第 1025 代到 1027 代，可以視爲第一代到第三代的重複出現，但蟲子個數增爲兩倍。

$\therefore \boldsymbol{G}(1026)=4$ ， $\boldsymbol{G}(1027)=4$

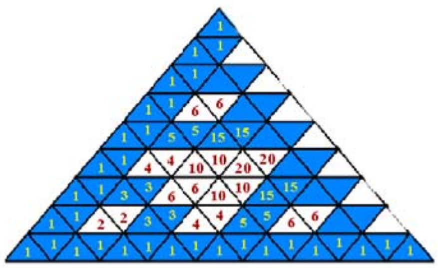
$\therefore \boldsymbol{T}(1027)=3^{10}+2+4+4=3^{10}+10=59059$

三、(一). 改變格子的形狀成三角形，並將遊戲規則改爲：在邊與邊相接壤的格子條件下，蟲子只能向右及上方生殖，且每一隻蟲子一樣只能生殖一次，且不會自然死亡。如圖(九)所示。



圖(九)

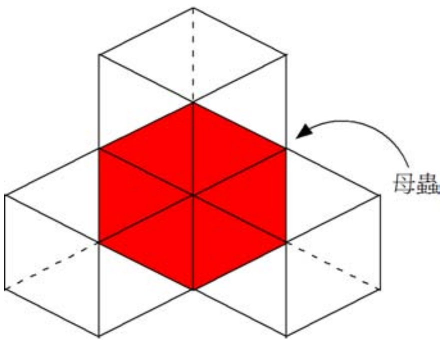
(二). 因爲條件的限制下，格子形如△(即尖端朝上的三角形)，只能向右生殖子蟲，所以我們將尖端朝上的三角形和其右方的格子視爲同一格，如此形成一平行四邊形，則發現此平行四邊形的冪次值與平面中的正方形格子對應之冪次值完全一致，因此三角形應爲正方形的特例，於此不再冗述。如圖(十)所示。



圖(十)

(蟲子生長後及所影響其格子內冪次值累加之後的結果)

四、(一). 改變昆蟲在同一時間於其所在處的上方、右方與前方各生下一個昆蟲(可能無性生殖)，生了之後就沒有生育能力，但也死不了。假設兩隻昆蟲同時佔有相同方格，那麼這兩隻蟲會彼此吞噬對方而亡，若三隻昆蟲同時佔有相同方格，則此格視爲存在一蟲。觀察每一子代的生長情況，探索蟲子生長的規律性。如圖(十一)所示。



圖(十一)

(二). 根據遊戲規則及仿照二 (二) 1.之觀念，可得：

1. (1). $\forall(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},0)$ ，$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$ 。因爲蟲子生長只受兩個方向的坐標格子影響，所以狀況等同於平面。故其坐標格子是否有蟲子可以 $(-1)^{C_m^{m+n}}$ 表之。

   (2). 同(1).，$\forall(\boldsymbol{m},0,\boldsymbol{l})$，$\boldsymbol{m},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$，坐標格子是否有蟲子可以 $(-1)^{C_m^{m+l}}$ 表之。同理，$\forall(0,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ ，$\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$，坐標格子是否有蟲子可以 $(-1)^{C_n^{n+l}}$ 表之。

   (3). $\forall(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ 坐標格子，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}$ ，我們可知影響其是否有蟲子的坐標格子爲 $(\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1)$ ，所以：

   ($\boldsymbol{a}$). 若坐標格子 $(\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1)$ 中都沒蟲子，則坐標格子 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ 必不存在蟲子。

   ($\boldsymbol{b}$). 若坐標格子 $(\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l})$，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1)$ 中恰有一格有蟲子，則坐標格子 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ 必存在蟲子。

   ($\boldsymbol{c}$). 若坐標格子 $(\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1)$ 中恰有兩格有蟲子，則坐標格子 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ 必不存在蟲子。

   ($\boldsymbol{d}$). 若坐標格子 $(\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l})$ ，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1)$ 中三格均有蟲子，則坐標格子 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ 必存在蟲子。

   由(1). (2). (3). 結果，我們定義：

$$\begin{cases}\text{若坐標格子}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\ (\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\})\text{有蟲子，則}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=-1\\ \text{若坐標格子}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\ (\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\})\text{無蟲子，則}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=1\end{cases}$$

   且 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1}$ ，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}$ ，$\boldsymbol{W}_{0,0,0}=-1$ 。

   於此，位於 $\boldsymbol{xy}$ 平面的坐標格子而言，沒有來自下方(即 $\boldsymbol{z}$ 軸)方格蟲子生殖而得，又爲了滿足遞迴關係 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m}-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}-1,\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1}$ ，所以我們定義此方格的下方坐標格子 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1)$ 所對應之 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}-1}$ 爲1 ，即 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},-1}=1$ 。

   同理 $\boldsymbol{W}_{-1,\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=1$ ，$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},-1,\boldsymbol{l}}=1$ 。

2. 證明：$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=(-1)^{\frac{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l})!}{\boldsymbol{m}!\boldsymbol{n}!\boldsymbol{l}!}}$ ，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$ 。

   $\boldsymbol{pf}$ ：仿二維 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}$ 方法，於此省略。

   因此，對於三維空間的任意坐標格子，皆可得知其坐標格子中是否存在蟲子。即任一坐標格子 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$ ，其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$ ，

   若 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}$ 的冪次 $\binom{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l}}$ 値爲奇數，則此坐標格子存在蟲子；

   若 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}$ 的冪次 $\binom{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l}}$ 値爲偶數，則此坐標格子蟲子不存在。

3. 性質：

   (1). 參考第四十七屆科展國中組作品：「立體」巴斯卡。此時，若只考慮坐標格子對應之 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}}=(-1)^{\binom{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l}}}$ 的冪次，則發現每一坐標格子所對應之冪次 $\binom{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l}}$ 之値與「立體」巴斯卡中之數字相互對應。

(2). 依據二維巴斯卡定理：

$C_{m}^{m+n-1}+C_{m-1}^{m+n-1}=C_{m}^{m+n}$ ，$\forall m\geq n\geq 1$的型式，

我們不妨稱算式：

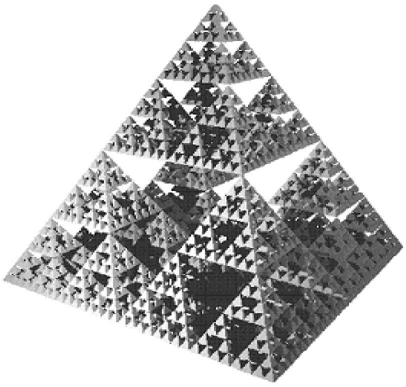
$$\begin{pmatrix} & m+n+l-1 & \\ m-1, & n, & l \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & m+n+l-1 & \\ m, & n-1, & l \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & m+n+l-1 & \\ m, & n, & l-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & m+n+l & \\ m, & n, & l \end{pmatrix}$$

其中$m,n,l\geq 1$，為「立體」巴斯卡定理，而此算式恰是蟲子生長

$W_{m,n,l}=W_{m-1,n,l}\times W_{m,n-1,l}\times W_{m,n,l-1}$，其中$m,n,l\geq 1$，所對應的冪次關係。

(3). 坐標格子所對應的冪次值恰是由坐標格子$(0,0,0)$到坐標格子(m,n,l)的捷徑走法。

(4). 若把有蟲子的坐標格子塗上顏色，我們發現圖形具有自我重複性，也就是「自我碎形」！根據相關資料顯示蟲子生長所形成的圖形恰與 ***Sierpinski gasket*** 形成對應關係。如圖(十二)所示。



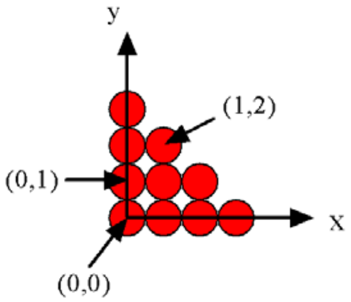
圖(十二)

此圖源自 http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/gasket/

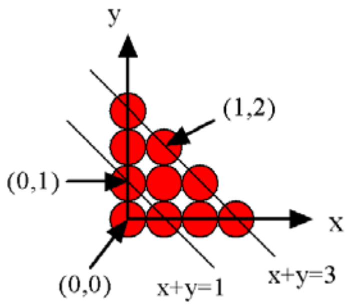
4. 為了方便解釋n維空間狀況，我們試著用另一觀點來思考：

(1). (a). 在二維中，對於每一坐標格子(x,y)而言，其結果與$C_{x}^{x+y}=\dfrac{(x+y)!}{x!\,y!}$（其中$x,y\in N\cup\{0\}$）有關。所以，我們分別以每個坐標格子中心為圓心，$\dfrac{1}{2}$單位長為半徑畫圓，就可做出兩兩相切的圓形，如圖(十三)。

(b). 作直線$x+y=k$，其中$k\in N\cup\{0\}$。如此，當$k=0$，$x+y=0$代表通過$(0,0)$之圓心，即代表母蟲所在位置；當$k=1$，$x+y=1$代表通過$(0,1)$與$(1,0)$之圓心，即代表第一子代蟲子的所在位置；當$k=2$，$x+y=2$代表通過$(0,2)$，$(1,1)$，$(2,0)$之圓心，此時若有蟲子存在，則代表第二子代蟲子的所在位置，以此類推。所以，可知$x+y=k$，$k\in N\cup\{0\}$之非負整數解，代表直線$x+y=k$通過之格心坐標，此時若有蟲子存在，則亦代表第k子代蟲子所在位置。如圖(十四)。



圖(十三)



圖(十四)

(c). 因為每一代的蟲子皆會受其上一代蟲子存在的位置影響，所以當圓心在直線 $x+y=k$ ，$k\in N\cup\{0\}$ 上之圓，必受到圓心在直線 $x+y=k-1$ 上且與之相切圓的影響。故對一圓心為 (m,n) 的圓而言，因位在直線 $x+y=m+n$ 上，定會受到圓心在直線 $x+y=m+n-1$ 上且與之相切圓的影響。又坐標上的圓排列是沿 x 軸，y 軸的正向堆積，所以可知與圓心為 (m,n) 相切之格心座標為 $(m,n-1)$ ，$(m-1,n)$ 。

(2). **(a)**. 仿 (1) ，在空間中，我們將二維的圓轉換為三維的球面。亦即球心在平面 $x+y+z=k$ 上的球面，必受到球心在 $x+y+z=k-1$ 上且與之相切球面的影響。

(b). 又因為空間坐標中的球面是沿 x 軸，y 軸，z 軸的正向堆積，所以可知球心為 (m,n,l) 的球面會受到球心為 $(m-1,n,l)$ 和 $(m,n-1,l)$ 和 $(m,n,l-1)$ 球面的影響。

(3). 仿(1). (2). 想法：

(a). 在 n 維空間中，定義 n 維的點坐標為 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$ ，討論 $a_1+a_2+\cdots+a_n=k$ 的圖形，$k\in N\cup\{0\}$ 。如此，點坐標在 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ 上的是第一子代；點坐標在 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ 上的是第二子代，以此類推。

(b). 格心坐標在 $a_1+a_2+\cdots+a_n=k$ 上，定會受到格心坐標在 $a_1+a_2+\cdots+a_n=k-1$ 上且與之相切的球面影響。又由於球面會沿坐標軸正向堆積，故對格心坐標 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 而言，是否存在蟲子是受到格心坐標為 $(a_1-1,a_2,\cdots,a_n)$ ，$(a_1,a_2-1,\cdots,a_n)$ ，… ，$(a_1,a_2,\cdots,a_n-1)$ 的影響。

(c). (I). 仿二維與三維狀況，我們定義：

$$\begin{cases}\text{若坐標格子}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\text{，}a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}\text{有蟲子，則}W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=-1\\ \text{若坐標格子}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\text{，}a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}\text{無蟲子，則}W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=1\end{cases}$$

且 $W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=W_{a_{1-1},a_2,\cdots,a_n}\times W_{a_1,a_2-1,\cdots,a_n}\times\cdots\times W_{a_1,a_2,\cdots,a_n-1}$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in N$ ，$W_{0,0,\cdots,0}=-1$ 。

為了滿足遞迴關係 $W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=W_{a_1-1,a_2,\cdots,a_n}\times W_{a_1,a_2-1,\cdots,a_n}\times\cdots\times W_{a_1,a_2,\cdots,a_n-1}$ 會出現與二維、三維類似情況，所以定義

$W_{-1,a_2,\cdots,a_n}=W_{a_1,-1,\cdots,a_n}=\cdots=W_{a_1,a_2,\cdots,-1}=1$

(Ⅱ). 證明：$\binom{(a_1-1)+a_2+\cdots+a_n}{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}+\binom{a_1+(a_2-1)+\cdots+a_n}{a_1,\ a_2-1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}$

$$+\cdots+\binom{a_1+a_2+\cdots+(a_n-1)}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n-1}=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}$$

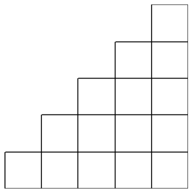
pf **:** 見附錄

爲了一致性，我們稱此性質爲「 ***n*** 維」巴斯卡定理。

由(Ⅰ).(Ⅱ). 條件可推論 $W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=(-1)^{\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}}$ ，

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$。所以，我們可以推論出 n 維巴斯卡的架構，進而標示出蟲子所存在的位置及關係。

五、(一). 於二維中改變規則，限定每個坐標格子 (m,n) 皆符合 $m\geq n$ ， $m,n\in N\cup\{0\}$ ，因此我們將圖形改變，如圖(十五)所示：



圖(十五)

從遊戲規則可知，格子是否有蟲子存在同樣受其左方及下方格子影響。我們仿照 $W_{m,n}$ ：

1. 定義：

$$\begin{cases}\text{若坐標格子}(m,n)\ \ (m,n\in N\cup\{0\})\text{有蟲子，則}T_{m,n}=-1\\ \text{若坐標格子}(m,n)\ \ (m,n\in N\cup\{0\})\text{無蟲子，則}T_{m,n}=1\end{cases}$$

且 $T_{m,n}=T_{m,n-1}\times T_{m-1,n}$ ，其中 $m,n\in N$ ， $m\geq n$ ， $T_{0,0}=-1$。類似 $W_{m,n}$ 的情況，特別定義當 $m<0$ ， $n<0$ 或不滿足 $m\geq n$ 時， $T_{m,n}=1$。

2. (1). 顯然易見 $T_{k,0}=W_{k,0}$ ， $T_{k,k}=T_{k,k-1}$ (其中 $k\in N$)。

(2). 證明： $T_{m,n}=(-1)^{C^{m+n-1}_{m-1}-C^{m+n-1}_{n-2}}$ ，其中 $m\geq n\geq 1$，分五步驟證明如下：

(*a*). 證明： $T_{m,1}=(-1)^m$ ， $\forall m\in N$

pf **:** $\because T_{m,n}=T_{m,n-1}\times T_{m-1,n}$ ，其中 $m>n\geq 0$

$$\therefore\begin{cases}T_{1,1}=T_{1,0}\\ T_{2,1}=T_{1,1}\times T_{2,0}\\ T_{3,1}=T_{2,1}\times T_{3,0}\\ \quad\vdots\\ T_{m,1}=T_{m-1,1}\times T_{m,0}\end{cases}$$

$$\therefore T_{m,1}=\prod_{i=1}^{m}T_{i,0}=\prod_{i=1}^{m}W_{i,0}=(-1)^{C^1_0+C^2_0+\cdots+C^m_0}=(-1)^m$$

(b). 證明：$T_{m,2}=(-1)^{C_2^{m+1}-1}$ ，$\forall m\in N$ 且 $m\geq 2$

pf :仿 (a). $\therefore T_{m,2}=\prod_{i=2}^{m}T_{i,1}=(-1)^{2+3+\cdots+m}=(-1)^{C_2^{m+1}-1}$

(c). 證明：$T_{m,3}=(-1)^{C_3^{m+2}-C_1^{m+2}}$ ，$\forall m\in N$ 且 $m\geq 3$

pf :由 (b). $\therefore T_{m,3}=\prod_{i=3}^{m}T_{i,2}=(-1)^{(C_2^4-1)+(C_3^5-1)+\cdots+(C_{m-1}^{m+1}-1)}$

$$=(-1)^{(C_2^4+C_3^5+\cdots+C_{m-1}^{m+1})-(m-2)}=(-1)^{C_{m-1}^{m+2}-C_1^4-(m-2)}=(-1)^{C_3^{m+2}-C_1^{m+2}}$$

(d). 由以上的規律，我們推測：$T_{m,n}=(-1)^{C_{m-1}^{m+n-1}-C_{n-2}^{m+n-1}}$ ，$\forall m\geq n\geq 1$

pf :當 $n=1$ 時，(a). 已證畢， $\therefore n=1$ 時成立

假設 $n=k$ 時成立，即 $T_{m,k}=(-1)^{C_{m-1}^{m+k-1}-C_{k-2}^{m+k-1}}$

則 $n=k+1$ 時

$$T_{m,k+1}=\prod_{i=k+1}^{m}T_{i,k}=T_{k+1,k}\times T_{k+2,k}\times\cdots\times T_{m,k}$$

$$=(-1)^{(C_k^{2k}-C_{k-2}^{2k})+(C_{k+1}^{2k+1}-C_{k-2}^{2k+1})+\cdots+(C_{m-1}^{m+k-1}-C_{k-2}^{m+k-1})}$$

$$=(-1)^{(C_k^{2k}+C_{k+1}^{2k+1}+\cdots+C_{m-1}^{m+k-1})-(C_{k+2}^{2k}+C_{k+3}^{2k+1}+\cdots+C_{m+1}^{m+k-1})}$$

$$=(-1)^{(C_{m-1}^{m+k}-C_{k+1}^{2k})-(C_{k+2}^{2k}+C_{k+3}^{2k+1}+\cdots+C_{m+1}^{m+k-1})}=(-1)^{C_{m-1}^{m+k}-(C_{k+1}^{2k}+C_{k+2}^{2k}+\cdots+C_{m+1}^{m+k-1})}$$

$$=(-1)^{C_{m-1}^{m+k}-C_{m+1}^{m+k}}=(-1)^{C_{m-1}^{m+(k+1)-1}-C_{(k+1)-2}^{m+(k+1)-1}}$$

$\therefore$由數學歸納法得知本命題得證

又 $C_{m-1}^{m+n-1}-C_{n-2}^{m+n-1}=C_{m-1}^{m+n-1}+(C_m^{m+n-1}-C_{n-1}^{m+n-1})-C_{n-2}^{m+n-1}$

$$=C_m^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}=C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}$$

$\therefore T_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}}$ ，$m\geq n\geq 1$

在運算過程中，會遇到型如 $T_{a,-1}$、$T_{a,-2}$、$T_{-1,b}$ 之情形，可視為此坐標格子 (a,b) 之左方或下方或再下方無格子，所以定義 $T_{a,-1}=T_{a,-2}=T_{-1,b}=1$，甚至可定義其對應之冪次值為 0 ，

$\therefore T_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}}$ ，$\forall m\geq n\geq 0$ 。

$$\begin{cases}\text{當 } T_{m,n} \text{ 的冪次 } C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n} \text{ 為奇數，則坐標格子存在蟲子；}\\ \text{當 } T_{m,n} \text{ 的冪次 } C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n} \text{ 為偶數，則坐標格子蟲子不存在。}\end{cases}$$

(3). 性質：

(a). 因為 $T_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}}$ ，$\forall m\geq n\geq 1$

當 $n=0$ 時，$T_{m,0}=T_{m-1,0}\times T_{m,-1}=T_{m-1,0}$ ，而 $T_{m,0}$ 下方並無坐標格子，所以依定義令 $T_{m,-1}=1$ 。

(b). 因為 $T_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}}$ ，其中 $m\geq n\geq 0$ ，則 $T_{m,n}$ 的冪次之值恰是由 $(0,0)$ 走到 (m,n) 的「一路領先」方法數。

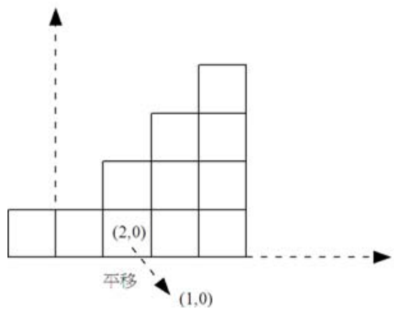
(c). 若令 $m=n$ 代入，其中 $m,n\in N\cup\{0\}$，則 $T_{n,n}$ 之冪次值

$$C_n^{n+n}-C_{n-1}^{n+n}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$$，即爲 $Catalan$ 數。

(d). (Ⅰ). 若將「一路領先」的過程中，把條件限制爲甲得票數「一路領先」乙得票數一張(顯然，開票後的第一張票要給甲)，則我們可令甲乙得票數依序爲 x,y ，$x,y\in N\cup\{0\}$。令 $x'=x-1$ ，$y'=y$ ，使得 $x'\geq y'\geq 0$ ，即可代入我們的「一路領先」公式。

即 $T_{x',y'}=(-1)^{C_{y'}^{x'+y'}-C_{y'-1}^{x'+y'}}=(-1)^{C_y^{(x-1)+y}-C_{y-1}^{(x-1)+y}}=(-1)^{C_y^{x+y-1}-C_{y-1}^{x+y-1}}$

如圖(十六)：



圖(十六)

$\therefore$ 總方法數即爲 $T_{x-1,y}$ 之冪次值 $C_y^{x+y-1}-C_{y-1}^{x+y-1}$ 。

(Ⅱ). 若甲得票數「一路領先」乙得票數 k 張(顯然，開票後前 k 張票要給甲)，且甲乙得票數依序爲 a,b ，仿(Ⅰ)可得，

$T_{a-k,b}=(-1)^{C_b^{a+b-k}-C_{b-1}^{a+b-k}}$ ，冪次值 $C_b^{a+b-k}-C_{b-1}^{a+b-k}$ 即爲總方法數。

(二). 於三維中改變立體形狀，限制任一坐標格子 (m,n,l) 皆滿足 $m\geq n\geq l\geq 0$。仿(一)

1. 定義：$T_{m,n,l}=T_{m-1,n,l}\times T_{m,n-1,l}\times T_{m,n,l-1}$ ，其中 $m>n>l\geq 1$ ，$T_{0,0,0}=-1$
   類似二維情況，特別定義當 $m<0$ 或 $n<0$ 或 $l<0$ 或不滿足 $m\geq n\geq l$ 時，$T_{m,n,l}=1$ 。

2. (1). $T_{k,k,k}=T_{k,k,k-1}$ ，$k\in N$ 顯然成立。

   (2). 對 $T_{m,n,0}$ ，可知爲對應到平面上的 $T_{m,n}$ ，即 $T_{m,n,0}=T_{m,n}$ ，其中 $m\geq n\geq 0$ 。

   (3). 證明：$T_{m,n,l}=(-1)^{\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}-\binom{m+n+l}{m,\ n+1,\ l-1}+\binom{m+n+l}{m+1,\ n+1,\ l-2}-\binom{m+n+l}{m+1,\ n-1,\ l}}$

$$\times(-1)^{\binom{m+n+l}{m+2,\ n-1,\ l-1}-\binom{m+n+l}{m+2,\ n,\ l-2}}$$

其中 $m,n,l\in N\cup\{0\}$ 且 $m\geq n\geq l$ 。
pf :證明仿二維情況，於此省略。

在演算過程中，型如 $T_{m,n,-1}$ ，$T_{m,n,-2}$ 或坐標格子 (m,n,l) 不滿足 $m\geq n\geq l$

時，其值爲 1 ，而其對應之冪次值爲 0 。此時，當 $T_{m,n,l}$ 的冪次值

$$\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}-\binom{m+n+l}{m,\ n+1,\ l-1}+\binom{m+n+l}{m+1,\ n+1,\ l-2}-\binom{m+n+l}{m+1,\ n-1,\ l}+\binom{m+n+l}{m+2,\ n-1,\ l-1}-\binom{m+n+l}{m+2,\ n,\ l-2}$$

爲奇數，則此坐標格子存在蟲子；當冪次值爲偶數，則此坐標格子中蟲子不存在。

3. 性質：

(1). $T_{m,n,l}=(-1)^{\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}-\binom{m+n+l}{m,\ n+1,\ l-1}+\binom{m+n+l}{m+1,\ n+1,\ l-2}-\binom{m+n+l}{m+1,\ n-1,\ l}}$

$\times(-1)^{\binom{m+n+l}{m+2,\ n-1,\ l-1}-\binom{m+n+l}{m+2,\ n,\ l-2}}$，其中 $m\ge n\ge l\ge 0$，

則 $T_{m,n,l}$ 的冪次值恰是由 $(0,0,0)$ 走到 (m,n,l) 的「一路領先」方法數。

(2). 仿二維情況，若甲乙丙三人得票數依序爲 x,y,z，其中 $x,y,z\in N\cup\{0\}$，且甲得票數「一路領先」乙得票數　張，乙得票數「一路領先」丙得票數　張，其中　，　$\in N\cup\{0\}$，則可令 $x'=x-(\ \ +\ \ )$，$y'=y-\ \ $，$z'=z$

$\therefore T_{x-(\ +\ ),y-\ ,z}=(-1)^{\binom{x+y+z-\ \ -2}{x-\ -\ ,\ y-\ ,\ z}-\binom{x+y+z-\ \ -2}{x-\ -\ ,\ y-\ +1,\ z-1}+\binom{x+y+z-\ \ -2}{x-\ -\ +1,\ y-\ +1,\ z-2}}$

$\times(-1)^{-\binom{x+y+z-\ \ -2}{x-\ -\ +1,\ y-\ -1,\ z}+\binom{x+y+z-\ \ -2}{x-\ -\ +2,\ y-\ -1,\ z-1}-\binom{x+y+z-\ \ -2}{x-\ -\ +2,\ y-\ ,\ z-2}}$

(三). n 維情形：

由 $W_{m,n}$，$W_{m,n,l}$，$T_{m,n}$，$T_{m,n,l}$ 的冪次發現，$W_{m,n}$，$T_{m,n}$ 爲坐標格子 $(m-1,n)$、$(m,n-1)$ 所對應之冪次值相加，故其冪次值爲從坐標格子 $(0,0)$ 走到坐標格子爲 (m,n) 之捷徑走法數(空間亦同)。因此，我們可以仿二維、三維作法，推廣到 n 維的「一路領先」。

1. 推廣到 n 維狀況：

(1). 觀察二維中冪次值的算式：$C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}=(m+n)!\begin{vmatrix}\frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!}\\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!}\end{vmatrix}$

(2). 觀察三維中冪次值的算式：

$$\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}-\binom{m+n+l}{m,\ n+1,\ l-1}+\binom{m+n+l}{m+1,\ n+1,\ l-2}$$
$$-\binom{m+n+l}{m+1,\ n-1,\ l}+\binom{m+n+l}{m+2,\ n-1,\ l-1}-\binom{m+n+l}{m+2,\ n,\ l-2}$$
$$=(m+n+l)!\begin{vmatrix}\frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} & \frac{1}{(m+2)!}\\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!}\\ \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{l!}\end{vmatrix}$$

(3).推論 $T_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$ 之冪次值爲：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1!} & \frac{1}{(a_1+1)!} & \cdots & & \frac{1}{[a_1+(n-1)]!} \\ \frac{1}{(a_2-1)!} & \frac{1}{a_2!} & \cdots & & \frac{1}{[a_2+(n-2)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}!} & \frac{1}{(a_{n-1}+1)!} \\ \frac{1}{[a_n-(n-1)]!} & \frac{1}{[a_n-(n-2)]!} & \cdots & \frac{1}{(a_n-1)!} & \frac{1}{a_n!} \end{vmatrix}, n\geq 2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

其中 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ ， $a_1,a_2\cdots,a_n\in N\bigcup\{0\}$ 。（爲了方便呈現，我們稱上式(*)爲 $T_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$ 之冪次值公式）

pf ：(a). 若　爲集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一對一函數，則 $\{\ (1),\ (2),\cdots,\ (n)\}=\{1,2,\cdots,n\}$ ，這樣的函數，我們稱爲一個 n 個文字的排列，有時將一個排列　以下面的方式表示：

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ (1) & (2) & \cdots & (n-1) & (n) \end{pmatrix}$$，例如 $=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 時，$a_{1\ (1)}a_{2\ (2)}a_{3\ (3)}$ 就表示 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 。通常以 S_n 表示所有 n 個文字的排列全體集合，顯然 S_n 中共有 $n!$ 個元素。而前述的 $=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ，可以這樣合成：

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，即一個排列若可經由偶數次「互換」的合成而得，則稱偶排列；否則稱爲奇排列。以sgn　來表示　的奇偶性如下：

$$\operatorname{sgn}\ =\begin{cases} 1\text{，若　爲偶排列} \\ \text{-1，若　爲奇排列} \end{cases}$$

$$\therefore\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\in S_n}(\operatorname{sgn}\ )a_{1\ (1)}a_{2\ (2)}\cdots a_{n\ (n)}\ ,$$

(b). 當 $n=2$ 時，T_{a_1,a_2} 之冪次值滿足(*) ，已證畢。

假設 $n=k$ 時成立，即 $T_{a_1,a_2,\cdots,a_k}$ 之冪次值滿足(*)

則 $n=k+1$ 時，當 $a_{k+1}=0$ 時， $T_{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}}=T_{a_1,a_2,\cdots,a_k,0}$ 之冪次值與 $T_{a_1,a_2,\cdots,a_k}$ 相同。即在 $(k+1)$ 維情況下，有些坐標格子 $(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})$ 之冪次值滿足(*) 。

假設存在不滿足 $T_{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}}$ 之冪次值公式之坐標格子所形成之集合爲 S ，即

$\boldsymbol{S}=\{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k+1})\,|\,\boldsymbol{T}_{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}}$ 之冪次值不滿足 (*) }

若 $\boldsymbol{S}=$ ，則本題得證。

若 $\boldsymbol{S}\neq$ ，在集合 $\boldsymbol{S}$ 中元素，針對第 $(\boldsymbol{k}+1)$ 坐標找到最小的 $\boldsymbol{a}'_{k+1}$ ，使得 $\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}$ 之冪次值不滿足 (*) 。

同理固定第 $(\boldsymbol{k}+1)$ 坐標 $\boldsymbol{a}'_{k+1}$ ，依序針對第 $\boldsymbol{k}$ 坐標找到最小的 $\boldsymbol{a}'_k$ ，使得 $\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}$ 之冪次值不滿足 (*) 。

如此類推，我們可以依序找到最小的 $\boldsymbol{a}'_{k+1},\boldsymbol{a}'_k,\cdots,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_1$ 使得 $\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}$ 之冪次值不符合 (*) 。

$\because \boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}=\boldsymbol{T}_{a'_1-1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}\times\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2-1,\cdots,a'_{k+1}}\times\cdots\times\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}-1}$

又 $\boldsymbol{T}_{a'_1-1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}\times\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2-1,\cdots,a'_{k+1}}\times\cdots\times\boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}-1}\notin\boldsymbol{S}$

$\therefore \boldsymbol{T}_{a'_1-1,a'_2,\cdots,a'_{k+1}}$ 之冪次值爲

$$[(\boldsymbol{a}'_1-1)+\boldsymbol{a}'_2+\cdots+\boldsymbol{a}'_k+\boldsymbol{a}'_{k+1}]!\begin{vmatrix} \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_1-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}'_1!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}'_1+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_2-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}'_2!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}'_2+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}'_k!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_k+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_{k+1}-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}'_{k+1}-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_{k+1}-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}'_{k+1}!} \end{vmatrix}$$

$\therefore \boldsymbol{T}_{a'_1,a'_2-1,\cdots,a'_{k+1}}$ 之冪次值爲

$$[(\boldsymbol{a}'_1-1)+\boldsymbol{a}'_2+\cdots+\boldsymbol{a}'_k+\boldsymbol{a}'_{k+1}]!\begin{vmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{a}'_1!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_1+1)!} & \cdots & & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_1+\boldsymbol{k})!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_2-2)!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_2-1)!} & \cdots & & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_2+\boldsymbol{k}-2)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}'_k!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_k+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_{k+1}-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}'_{k+1}-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}'_{k+1}-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}'_{k+1}!} \end{vmatrix},$$

以此類推。

則 $\boldsymbol{T}_{a_1'-1,a_2',\cdots,a_{k+1}'}\times\boldsymbol{T}_{a_1',a_2'-1,\cdots,a_{k+1}'}\times\cdots\times\boldsymbol{T}_{a_1',a_2',\cdots,a_{k+1}'-1}$ 之冪次值為

$$(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{a}_2'+\cdots+\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!\left[\begin{vmatrix} \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_1'+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_2'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_k'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_k'+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_{k+1}'-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{k+1}'!} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+1)!} & \cdots & & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{k})!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-2)!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{k}-2)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_k'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_k'+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_{k+1}'-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{k+1}'!} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+1)!} & \cdots & & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{k})!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_2'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_k'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_k'+1)!} \\ \frac{1}{[\boldsymbol{a}_{k+1}'-(\boldsymbol{k}+1)]!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-\boldsymbol{k})!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-2)!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!} \end{vmatrix}\right]\cdots\cdots(**)$$

於 (**) 中，針對此 $(\boldsymbol{k}+1)$ 個行列式，令

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_1'+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_2'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_k'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_k'+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_{k+1}'-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{k+1}'!} \end{vmatrix}=\sum_{\in S_{k+1}}(\operatorname{sgn}\quad)\boldsymbol{a}^{(1)}_{1\ (1)}\boldsymbol{a}^{(1)}_{2\ (2)}\cdots\boldsymbol{a}^{(1)}_{(k+1)\ (k+1)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+1)!} & \cdots & & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{k})!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-2)!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{k}-2)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_k'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_k'+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_{k+1}'-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{k+1}'!} \end{vmatrix}=\sum_{\in S_{k+1}}(\operatorname{sgn}\quad)\boldsymbol{a}^{(2)}_{1\ (1)}\boldsymbol{a}^{(2)}_{2\ (2)}\cdots\boldsymbol{a}^{(2)}_{(k+1)\ (k+1)}$$

，以此類推。

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+1)!} & \cdots & & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{k})!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_2'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{k}-1)]!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_k'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_k'+1)!} \\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-\boldsymbol{k})!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_{k+1}'-(\boldsymbol{k}-1)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{k+1}'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{k+1}'!} \end{vmatrix}=\sum_{\in S_{k+1}}(\operatorname{sgn}\quad)\boldsymbol{a}_{1\ (1)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}\cdots\boldsymbol{a}_{(k+1)\ (k+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

考慮(***)與(**)中$(\boldsymbol{k}+1)$個行列式：

對任一 $\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}+1}$，sgn 爲同號，且觀察$\boldsymbol{a}_{1\ (1)}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}^{(\boldsymbol{i})}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}^{(\boldsymbol{i})}$，$1\le \boldsymbol{i}\le \boldsymbol{k}+1$，

(Ⅰ). 考慮 $\ _{\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{p})}^{(1)},\ _{\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{p})}^{(2)},\cdots,\ _{\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{p})}^{(\boldsymbol{k}+1)}$，$1\le \boldsymbol{p}\le \boldsymbol{k}+1$

若 $\ _{\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{p})}^{(\boldsymbol{i})}=\dfrac{1}{\left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}}-(\boldsymbol{p}-1)+(\ \ (\boldsymbol{p})-1)-1\right]!}=\dfrac{1}{\left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}-\ \ (\boldsymbol{p})-1\right]!}$，

則$\forall \boldsymbol{j}\ne \boldsymbol{i}$， $\ _{\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{p})}^{(\boldsymbol{j})}=\dfrac{1}{\left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}-\ \ (\boldsymbol{p})\right]!}$，其中$1\le \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\le \boldsymbol{k}+1$

(Ⅱ). 考慮 $\ _{1\ (1)}^{(\boldsymbol{i})}\ _{2\ (2)}^{(\boldsymbol{i})}\cdots\ _{\boldsymbol{k}+1\ (\boldsymbol{k}+1)}^{(\boldsymbol{i})}$，$1\le \boldsymbol{i}\le \boldsymbol{k}+1$

若 $\ _{\boldsymbol{q}\ (\boldsymbol{q})}^{(\boldsymbol{i})}=\dfrac{1}{\left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}-\ \ (\boldsymbol{q})-1\right]!}$，$1\le \boldsymbol{q}\le \boldsymbol{k}+1$

則 $\ _{\boldsymbol{j}\ (\boldsymbol{j})}^{(\boldsymbol{i})}=\dfrac{1}{\left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{j}}-\boldsymbol{j}-\ \ (\boldsymbol{j})\right]!}$，$1\le \boldsymbol{j}\le \boldsymbol{k}+1$且 $\boldsymbol{j}\ne \boldsymbol{q}$

$$(\mathrm{sgn}\quad)\left(\boldsymbol{a}_{1\ (1)}^{(1)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}^{(1)}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}^{(1)}+\boldsymbol{a}_{1\ (1)}^{(2)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}^{(2)}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}^{(2)}+\cdots+\boldsymbol{a}_{1\ (1)}^{(\boldsymbol{k}+1)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}^{(\boldsymbol{k}+1)}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}^{(\boldsymbol{k}+1)}\right)$$

$$=(\mathrm{sgn}\quad)\left[\left(\boldsymbol{a}_1^{'}+\boldsymbol{a}_2^{'}+\cdots+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}+1}^{'}\right)\boldsymbol{a}_{1\ (1)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}\right]$$（由$\boldsymbol{n}$維巴斯卡定理）

$$\therefore\left(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{a}_2'+\cdots+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}+1}'-1\right)!\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{k}+1}\sum_{\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}+1}}(\mathrm{sgn}\quad)\boldsymbol{a}_{1\ (1)}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}^{(\boldsymbol{i})}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}^{(\boldsymbol{i})}$$

$$=\left(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{a}_2'+\cdots+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}+1}'-1\right)!\sum_{\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}+1}}(\mathrm{sgn}\quad)\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}+1}\right)\boldsymbol{a}_{1\ (1)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}$$

$$=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}+1})!\sum_{\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}+1}}(\mathrm{sgn}\quad)\boldsymbol{a}_{1\ (1)}\boldsymbol{a}_{2\ (2)}\cdots\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{k}+1)\ (\boldsymbol{k}+1)}$$，矛盾。

$\therefore \boldsymbol{S}=$ ，由數學歸納法得知本題得證

若$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1\ge \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_2\ge \boldsymbol{a}_3$，…， $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-1}-\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}-1}\ge \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}$，令$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'=\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}-\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{k}}$，$1\le \boldsymbol{i}\le \boldsymbol{n}$，

則$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}'}$即爲過程中恆領先固定票數（即$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}-1}$）之「一路領先」方法票數。

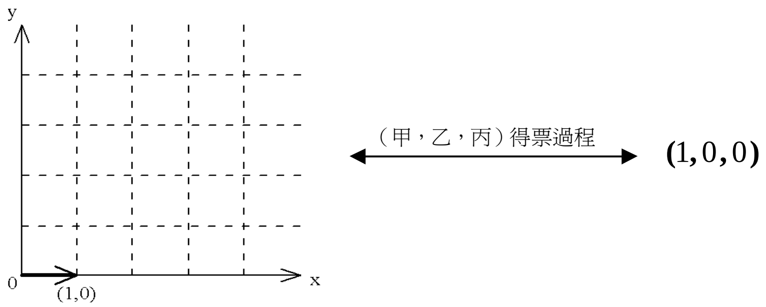
(四). 1. 給定票數$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$，試求甲得票數「一路領先」乙得票數之方法總數爲$\boldsymbol{C}_{\left[\frac{\boldsymbol{n}}{2}\right]}^{\boldsymbol{n}}$。（$\boldsymbol{pf}$:見附錄）

若$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}$爲給定票數$\boldsymbol{n}$的兩人「一路領先」方法總數，由此，我們推得其遞迴式爲$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}+1}=\dfrac{2\boldsymbol{n}+3+(-1)^{\boldsymbol{n}+1}}{\boldsymbol{n}+2}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}$，其中$\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}$

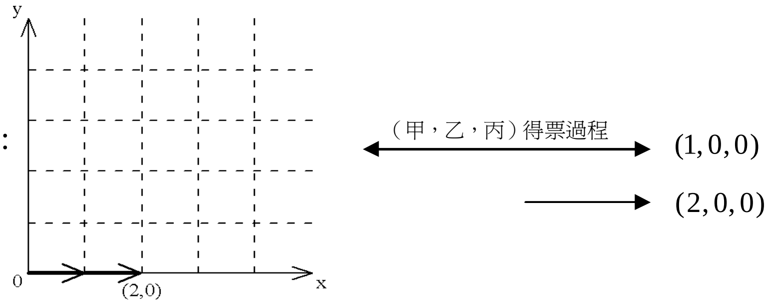
2. 給定票數 n ，$n \in N \cup \{0\}$ ，試求甲得票數「一路領先」乙得票數，且乙得票數「一路領先」丙得票數之方法總數為 $\sum_{k \ge 0} \binom{n}{2k} C_k$ ，其中 $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ 即 ***Catalan*** 數。

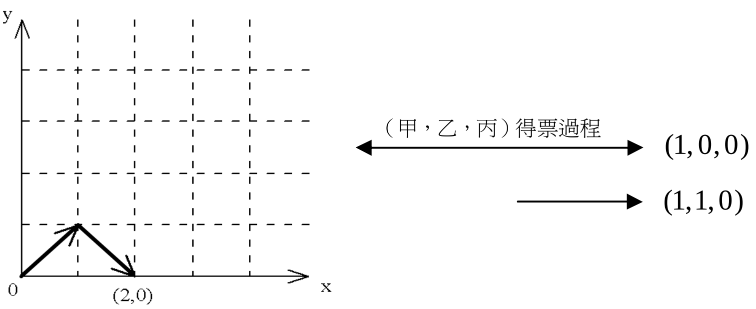
pf ：利用電腦程式檢驗出甲乙丙三人「一路領先」總方法數的前幾項，發現與 ***Motzkin*** 數一一對應，於是思考三人「一路領先」與 ***Motzkin*** 路徑的關聯。觀察 M_n ，$n \in N$ 與「給定總票數且甲得票≥乙得票≥丙得票的方法數」之間關係：

M_1 ：

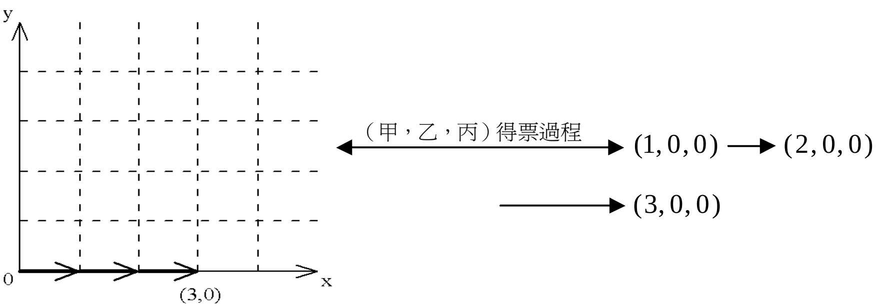


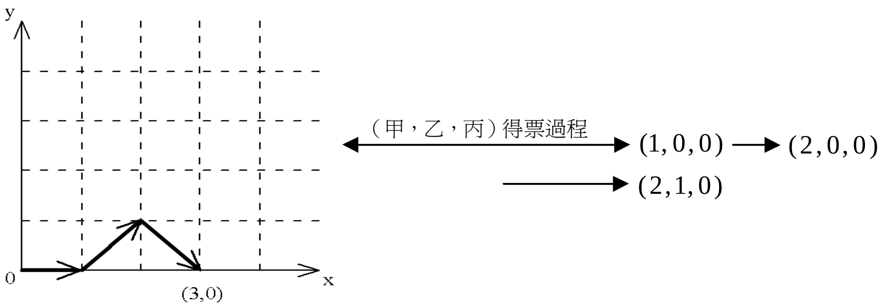
M_2 ：

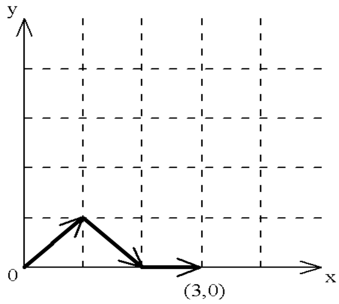




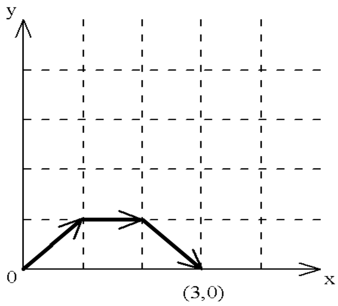
M_3 ：





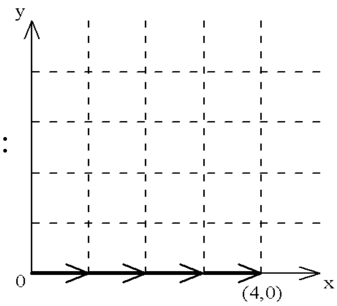


（甲，乙，丙）得票過程 $(1,0,0) \to (1,1,0) \to (2,1,0)$

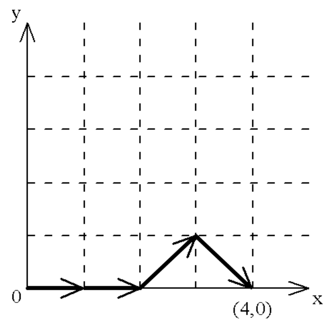


（甲，乙，丙）得票過程 $(1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$

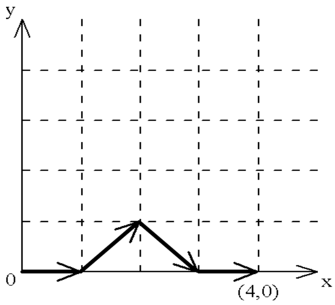
M_4 ：



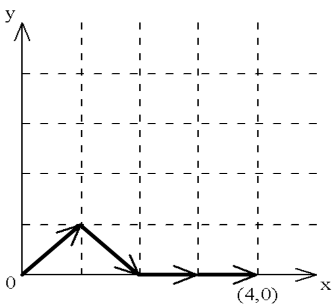
（甲，乙，丙）得票過程 $(1,0,0) \to (2,0,0) \to (3,0,0) \to (4,0,0)$



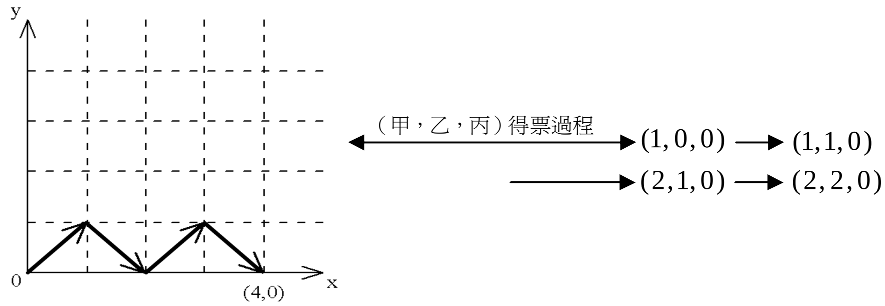
（甲，乙，丙）得票過程 $(1,0,0) \to (2,0,0) \to (3,0,0) \to (3,1,0)$

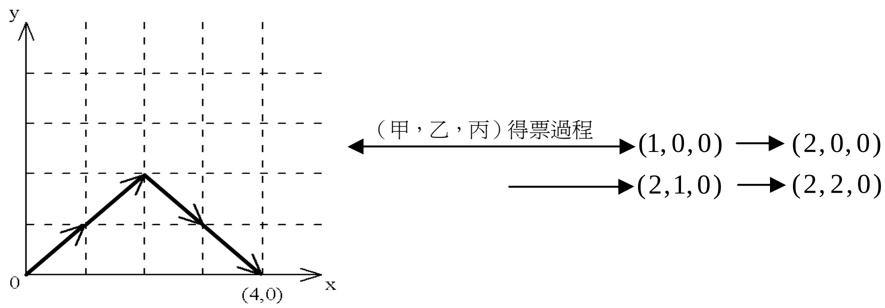


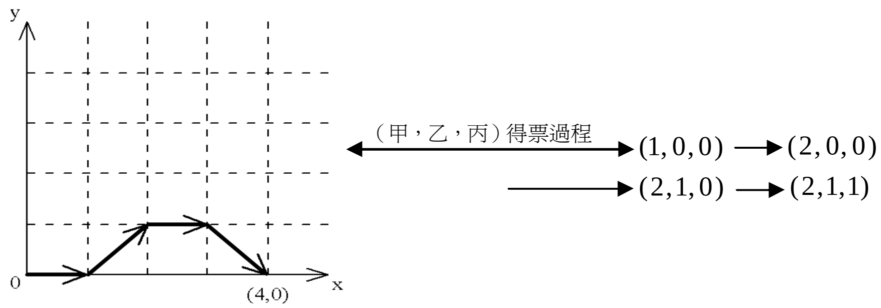
（甲，乙，丙）得票過程 $(1,0,0) \to (2,0,0) \to (2,1,0) \to (3,1,0)$

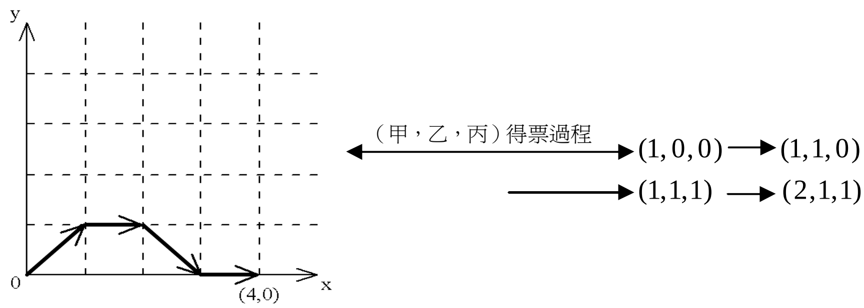


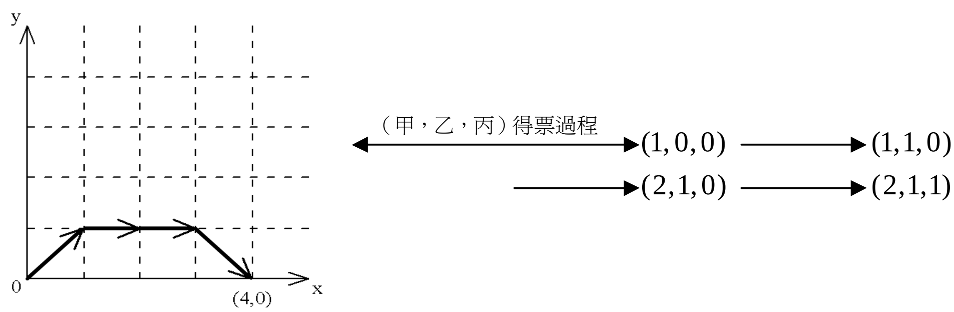
（甲，乙，丙）得票過程 $(1,0,0) \to (1,1,0) \to (2,1,0) \to (3,1,0)$











(1). 「一路領先」到 ***Motzkin*** 數：由甲乙丙「一路領先」過程觀察可得：

(***a***). 每一個丙所對應的向量定爲 **(1,−1)** 。

(***b***). 承(***a***).，每一個丙往左找最相近的乙，其對應向量定爲 **(1,0)** 。

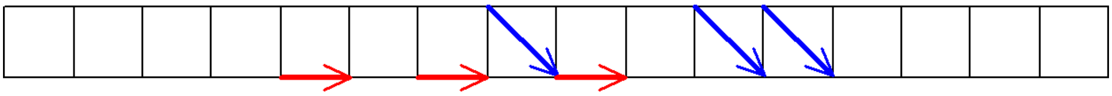
(***c***). 承(***b***).，每一個乙往左找最相近的甲，其對應向量定爲 **(1,1)** 。

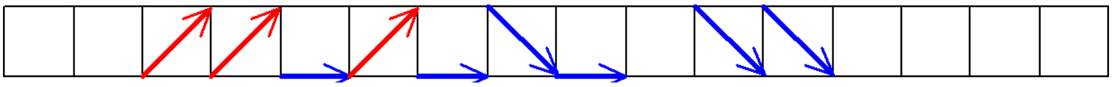
$(\boldsymbol{d})$. 承 $(\boldsymbol{a}).(\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{c}).$，若有剩餘的乙，其對應向量定爲 $(1,-1)$ 。
$(\boldsymbol{e})$. 承 $(\boldsymbol{d}).$，每一個乙往左找最相近的甲，其對應向量定爲 $(1,1)$ 。
$(\boldsymbol{f})$. 承 $(\boldsymbol{c}).(\boldsymbol{d}).(\boldsymbol{e}).$，若有剩餘的甲，其對應向量定爲 $(1,0)$ 。

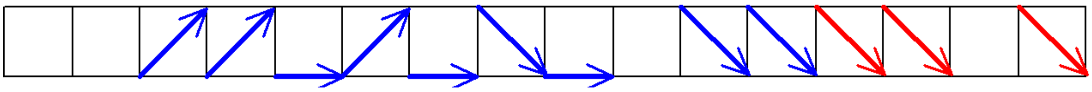
例如：

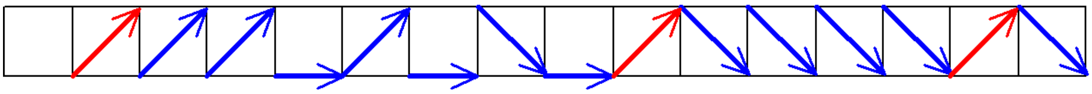
甲 甲 甲 甲 乙 甲 乙 丙 乙 甲 丙 丙 乙 乙 甲 乙

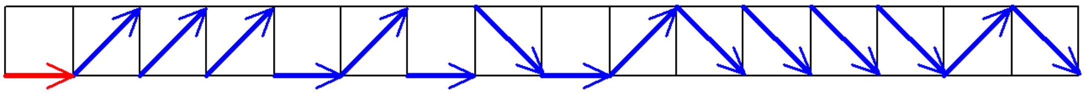
$(\boldsymbol{a})$.

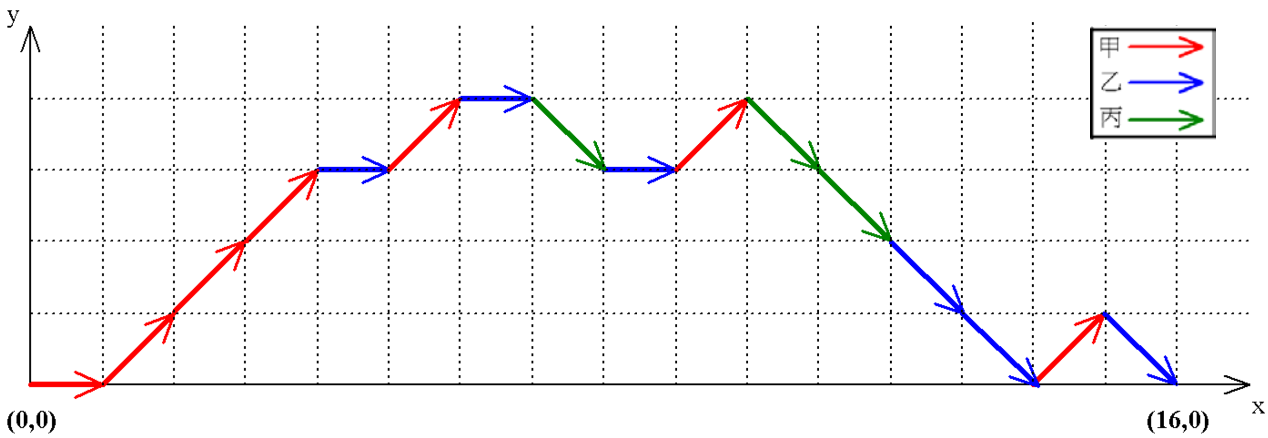

$(\boldsymbol{b})$.


$(\boldsymbol{c})$.


$(\boldsymbol{d})$.


$(\boldsymbol{e})$.


$(\boldsymbol{f})$.




(Ⅰ). 在步驟 $(\boldsymbol{a}).(\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{c}).$ 對應中，將若干組(甲乙丙)的得票對應到向量走法分別爲 $(1,1),(1,0),(1,-1)$ 。且所對應出的向量 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$ 走法數相同，且先有 $(1,1)$ 再有 $(1,-1)$ 。

(Ⅱ). 在步驟 $(\boldsymbol{d}).(\boldsymbol{e}).(\boldsymbol{f}).$ 對應中，在(Ⅰ).之後將若干組(甲乙)的得票對應到向量走法分別爲 $(1,1),(1,-1)$，且必先有 $(1,1)$ 再有 $(1,-1)$。

由(Ⅰ).(Ⅱ).，因對應向量 $(1,1),(1,0),(1,-1)$ 走法三種，且對應路徑爲一起點 $(0,0)$ ，終點 $(\boldsymbol{n},0)$ 且不走到 $\boldsymbol{x}$ 軸下方所形成的路徑，故爲一 ***Motzkin*** 路徑。

∴對於任意一個甲乙丙「一路領先」得票過程，均可找到一個且唯一的 ***Motzkin*** 路徑與之對應。

(2). 由 ***Motzkin*** 路徑觀察可得：

$(\boldsymbol{a})$. 向量 $(1,1)$ 及位於 $\boldsymbol{x}$ 軸上的向量 $(1,0)$ 定爲甲。
$(\boldsymbol{b})$. 向量 $(1,0)$ 可爲甲或乙。
$(\boldsymbol{c})$. 向量 $(1,-1)$ 可爲乙或丙。

(d). 承(c).：

對任一 $Motzkin$ 路徑，由左至右考慮由一個或連續數個向量 $(1,-1)$ 所組成的下降區間 $[c,d]$。由區間 $[c,d]$ 往左找到最相近的一始點位於 x 軸的向量 $(1,1)$，設此向量 $(1,1)$ 位於區間 $[a,b]$ 上。

(Ⅰ). 若區間 $[b,c]$ 中無水平向量 $(1,0)$，則在區間 $[c,d]$ 的向量 $(1,-1)$ 全部填乙。

(Ⅱ). 若區間 $[b,c]$ 中存在水平向量 $(1,0)$。

(i). 由左至右考慮由一個或連續數個向量 $(1,0)$ 所組成任一水平區間 $[g,h]$。

①由區間 $[g,h]$ 往左找到最相近向量 $(1,0)$ 的甲，設此向量 $(1,0)$ 位於區間 $[e,f]$ 上，且在區間 $[f,g]$ 中，甲比乙多 k 個。

ⓐ若區間 $[g,h]$ 的向量 $(1,0)$ 個數 $\geq k$ 時，則在區間 $[g,h]$ 上由左至右填入 k 個乙，剩餘者填甲。

ⓑ若區間 $[g,h]$ 的向量 $(1,0)$ 個數 $< k$ 時，則在區間 $[g,h]$ 的向量 $(1,0)$ 全部填乙。

②由區間 $[g,h]$ 往左找，若無向量 $(1,0)$ 的甲時，則替換成往左找一始點位於 x 軸的向量 $(1,1)$，設此向量 $(1,1)$ 位於區間 $[e',f']$ 上，且在區間 $[e',g]$ 中，甲比乙多 k' 個，討論情形與上ⓐⓑ同。

(ii). 考慮下降區間 $[c,d]$:

①由區間 $[c,d]$ 往左找到最相近向量 $(1,-1)$ 的乙，設此向量 $(1,-1)$ 位於區間 $[i,j]$ 上，且在區間 $[j,c]$ 中，乙比丙多 l 個。

ⓐ若區間 $[c,d]$ 的向量 $(1,-1)$ 個數 $\geq l$ 時，則在區間 $[c,d]$ 由上往下填入 l 個丙，剩餘者填乙。

ⓑ若區間 $[c,d]$ 的向量 $(1,-1)$ 個數 $< l$ 時，則在區間 $[c,d]$ 的向量 $(1,-1)$ 全部填丙。

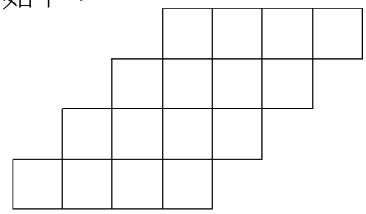
②由區間 $[c,d]$ 往左找，若無向量 $(1,-1)$ 的乙時，則替換成往左找一始點位於 x 軸的向量 $(1,1)$，設此向量 $(1,1)$ 位於區間 $[i',j']$ 上，且在區間 $[i',c]$ 中，乙比丙多 l' 個，討論情況與上ⓐⓑ同。

由此，對於任意一個 $Motzkin$ 路徑，均可找到一個且唯一的甲乙丙「一路領先」得票過程與之對應。所以，給定票數 n，$n \in N \cup \{0\}$ 之甲乙丙「一路領先」方法數即爲 M_n，由文獻知 $M_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} C_k$，其中

$C_k = \dfrac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ 即 $Catalan$ 數。

此外，若在 $Motzkin$ 路徑中限制向量 $(1,0)$ 走法僅可在 x 軸上出現時，此即和甲乙兩人「一路領先」得票過程形成一一對應。

(五). 若將圖形改變如下：



同樣的遊戲規則，若以 $\boldsymbol{F}_{m,n}$ ， $m,n\in N\cup\{0\}$ ，其中 $0\le m-n\le 3$ ，來檢驗格子是否有蟲子存在，則發現 $\boldsymbol{F}_{m,n}$ 之冪次值與 ***Fibonacci*** 數有關。

$$\boldsymbol{F}_{1,0}=\boldsymbol{T}_{1,0}=(-1)^{C_{0}^{1}}$$

$$\boldsymbol{F}_{2,0}=\boldsymbol{T}_{2,0}=(-1)^{C_{0}^{2}}=(-1)^{C_{0}^{1}}$$

$$\boldsymbol{F}_{2,1}=\boldsymbol{T}_{2,1}=(-1)^{C_{1}^{3}-C_{0}^{3}}=(-1)^{C_{1}^{2}+C_{0}^{2}-C_{0}^{3}}=(-1)^{C_{1}^{2}}=(-1)^{C_{1}^{1}+C_{0}^{1}}=(-1)^{C_{0}^{2}+C_{1}^{1}}$$

$$\boldsymbol{F}_{3,1}=\boldsymbol{T}_{3,1}=(-1)^{C_{1}^{4}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{1}^{3}+C_{0}^{3}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{1}^{3}}=(-1)^{C_{1}^{2}+C_{0}^{2}}=(-1)^{C_{0}^{3}+C_{1}^{2}}$$

$$\boldsymbol{F}_{3,2}=\boldsymbol{T}_{3,2}=(-1)^{C_{2}^{5}-C_{1}^{5}}=(-1)^{C_{2}^{4}+C_{1}^{4}-C_{1}^{4}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{2}^{3}+C_{1}^{3}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{2}^{2}+C_{1}^{2}+C_{1}^{3}-C_{0}^{4}}$$

$$=(-1)^{C_{2}^{2}+C_{1}^{1}+C_{0}^{1}+C_{1}^{3}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{0}^{4}+C_{1}^{3}+C_{2}^{2}}$$

$$\boldsymbol{F}_{4,2}=\boldsymbol{F}_{3,2}\times\boldsymbol{F}_{4,1}=\boldsymbol{F}_{3,2}\times\boldsymbol{F}_{3,1}=\boldsymbol{T}_{3,2}\times\frac{\boldsymbol{T}_{4,1}}{\boldsymbol{T}_{4,0}}=\frac{\boldsymbol{T}_{4,2}}{\boldsymbol{T}_{4,0}}$$

$$=(-1)^{C_{2}^{6}-C_{1}^{6}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{2}^{5}+C_{1}^{5}-C_{1}^{5}-C_{0}^{5}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{2}^{4}+C_{1}^{4}-C_{0}^{5}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{2}^{3}+C_{1}^{3}+C_{1}^{4}-C_{0}^{3}-C_{0}^{4}}$$

$$=(-1)^{C_{2}^{3}+C_{1}^{2}+C_{0}^{2}+C_{1}^{4}-C_{0}^{3}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{2}^{3}+C_{1}^{1}+C_{0}^{1}+C_{1}^{4}-C_{0}^{4}}=(-1)^{C_{0}^{5}+C_{1}^{4}+C_{2}^{3}}$$

$\cdots$※

由以上結果推論：

若 ***Fibonacci*** 數列 $<\boldsymbol{F}_{n}>$ ： $\boldsymbol{F}_{1}=\boldsymbol{F}_{2}=1$ ， $\boldsymbol{F}_{n+2}=\boldsymbol{F}_{n+1}+\boldsymbol{F}_{n}$ ， $n\in N$

則 $\boldsymbol{F}_{n,n-1}$ 的冪次值爲 $\boldsymbol{F}_{2n-1}=C_{0}^{2n-2}+C_{1}^{2n-3}+C_{2}^{2n-4}+\cdots+C_{n-2}^{n}+C_{n-1}^{n-1}$ ，其中 $n\in N$

$\boldsymbol{F}_{n+1,n-1}$ 的冪次值爲 $\boldsymbol{F}_{2n}=C_{0}^{2n-1}+C_{1}^{2n-2}+C_{2}^{2n-3}+\cdots+C_{n-2}^{n+1}+C_{n-1}^{n}$ ，其中 $n\in N$

pf : 1. 考慮對 $\boldsymbol{F}_{n,n-1}$ ， $\boldsymbol{F}_{n+1,n-1}$ 的冪次值，

當 $n=1$ 時， $\boldsymbol{F}_{1,0},\boldsymbol{F}_{2,0}$ 於上已證畢。

假設 $n\le i$ 時成立，即 $\boldsymbol{F}_{n,n-1}$ ， $\boldsymbol{F}_{n+1,n-1}$ 的冪次值符合(※)

則 $n=i+1$ 時， $\boldsymbol{F}_{n,n-1}=\boldsymbol{F}_{i+1,i}=\boldsymbol{F}_{i,i-1}\times\boldsymbol{F}_{i+1,i-1}$

$\boldsymbol{F}_{i+1,i}$ 的冪次值爲

$$\left(C_{0}^{2i-2}+C_{1}^{2i-3}+C_{2}^{2i-4}+\cdots+C_{i-2}^{i}+C_{i-1}^{i-1}\right)+\left(C_{0}^{2i-1}+C_{1}^{2i-2}+C_{2}^{2i-3}+\cdots+C_{i-2}^{i+1}+C_{i-1}^{i}\right)$$

$$=C_{0}^{2i-1}+\left(C_{0}^{2i-2}+C_{1}^{2i-2}\right)+\cdots+\left(C_{i-2}^{i}+C_{i-1}^{i}\right)+C_{i-1}^{i-1}=C_{0}^{2i}+C_{1}^{2i-1}+\cdots+C_{i-1}^{i+1}+C_{i}^{i}$$

$\therefore\ \boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+1$時成立，由數學歸納法得知此推論成立。

即已知 F_{2n-1} ， F_{2n} 的冪次值成立，則可知 F_{2n+1} 必符合(※)。

2. 考慮 $F_{n+1,n-1}$ ， $F_{n+1,n}$ 的冪次值，

當 $n=1$時， $F_{2,0}, F_{3,1}$ 於上頁已證畢。

假設 $n\le j$ 時成立，即 $F_{j+1,j-1}$ ， $F_{j+1,j}$ 的冪次值符合(※)，

則 $n=j+1$時， $F_{n+1,n-1}=F_{j+2,j}=F_{j+1,j-1}\times F_{j+1,j}$ ，

$F_{j+2,j}$ 的冪次值為

$$\left(C_0^{2j-1}+C_1^{2j-2}+C_2^{2j-3}+\cdots+C_{j-2}^{j+1}+C_{j-1}^{j}\right)+\left(C_0^{2j}+C_1^{2j-1}+C_2^{2j-2}+\cdots+C_{j-1}^{j+1}+C_j^{j}\right)$$

$$=C_0^{2j}+\left(C_0^{2j-1}+C_1^{2j-1}\right)+\cdots+\left(C_{j-2}^{j+1}+C_{j-1}^{j+1}\right)+\left(C_{j-1}^{j}+C_j^{j}\right)=C_0^{2j+1}+C_1^{2j}+\cdots+C_{j-1}^{j+2}+C_j^{j+1}$$

$$\therefore F_n=C_0^{n-1}+C_1^{n-2}+\cdots+C_{n-1-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]}=\sum_{k=0}^{n-1-[\frac{n}{2}]}C_k^{n-1-k}\ ,\ n\in N$$

伍、研究結果

一、對二維的坐標格子 (m,n) ，定義蟲子生殖的遞迴關係 $W_{m,n}=W_{m-1,n}\times W_{m,n-1}$ ，

其中 $m,n\in N\cup\{0\}$ 。

(一). 1. 對任意坐標格子 (m_0,n_0) ，我們有 $W_{m_0,n_0}=(-1)^{C_{m_0}^{m_0+n_0}}$ ，其中 $m_0,n_0\in N\cup\{0\}$ ，

$W_{0,0}=-1$ 。

2. 若 $C_{m_0}^{m_0+n_0}$ 為奇數，則此坐標格子有蟲子；

若 $C_{m_0}^{m_0+n_0}$ 為偶數，則此坐標格子蟲子不存在。

(二). 由蟲子生殖遞迴關係導出的冪次性質，恰與巴斯卡定理

$C_m^{m+n}=C_{m-1}^{m+n-1}+C_m^{m+n-1}$ 形成對應，其中 $m,n\in N$ 。

(三). $W_{m,n}=(-1)^{C_m^{m+n}}$ ，其中 $m,n\in N\cup\{0\}$ 。冪次值即從原點 $(0,0)$ 走到 (m,n) 之捷徑走法數。

(四). 標示出蟲子存在的位置，形成一美麗的「自我碎形」圖案。

二、對三維空間中坐標格子 (m,n,l) ，定義蟲子生殖的遞迴關係

$W_{m,n,l}=W_{m-1,n,l}\times W_{m,n-1,l}\times W_{m,n,l-1}$ ，其中 $m,n,l\in N\cup\{0\}$ ， $W_{0,0,0}=-1$

(一). 1. 對任意坐標格子 (m_0,n_0,l_0) ，我們有 $W_{m_0,n_0,l_0}=(-1)^{\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0,\ n_0,\ l_0}}$ ，

其中 $m_0,n_0,l_0\in N\cup\{0\}$

2. 若$\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0,\ n_0,\ l_0}$爲奇數，則此坐標格子存在蟲子；

若$\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0,\ n_0,\ l_0}$爲偶數，則此坐標格子中蟲子不存在。

(二). 由蟲子生長的遞迴關係導出的冪次性質，我們仿二維，恰與「立體」巴斯卡定理：$\binom{m+n+l-1}{m-1,\ n,\ l}+\binom{m+n+l-1}{m,\ n-1,\ l}+\binom{m+n+l-1}{m,\ n,\ l-1}=\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}$

形成對應，其中$m,n,l\in N\cup\{0\}$。

(三). $W_{m,n,l}=(-1)^{\binom{m+n+l}{m,\ n,\ l}}$，其中$m,n,l\in N\cup\{0\}$。冪次值即從原點$(0,0,0)$走到$(m,n,l)$之捷徑走法數。

三、根據二維及三維的公式及空間關係，我們推論n維空間內也存在著規律。對坐標格子$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，定義蟲子生殖的遞迴關係

$W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=W_{a_1-1,a_2,\cdots,a_n}\times W_{a_1,a_2-1,\cdots,a_n}\times\cdots\times W_{a_1,a_2,\cdots,a_n-1}$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$，

$W_{0,0,\cdots,0}=-1$

(一). 1. 對任意坐標格子$(a_1',a_2',\cdots,a_n')$，我們有

$W_{a_1',a_2',\cdots,a_n'}=(-1)^{\binom{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'}{a_1',\ a_2',\ \cdots,\ a_{n-1}',\ a_n'}}$，其中$a_1',a_2',\cdots,a_n'\in N\cup\{0\}$

2. 若$\binom{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'}{a_1',\ a_2',\ \cdots,\ a_{n-1}',\ a_n'}$爲奇數，則此坐標格子中存在蟲子；

若$\binom{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'}{a_1',\ a_2',\ \cdots,\ a_{n-1}',\ a_n'}$爲偶數，則此坐標格子中蟲子不存在。

(二). 由蟲子生長的遞迴關係導出的冪次性質，我們仿二維、三維，恰與「n維」巴斯卡定理

$$\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n-1}{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}+\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n-1}{a_1,\ a_2-1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}$$
$$+\cdots+\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n-1}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n-1}=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}$$

形成對應，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$

(三). $W_{a_1,a_2,\cdots,a_n}=(-1)^{\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n}}$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n\in N\cup\{0\}$。冪次值即爲從原點$(0,0,\cdots,0)$走到$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$之捷徑走法數。

四、改變蟲子所走的格子形狀，對二維平面中任意坐標格子(m,n)恆有$m\geq n$之關係。

定義蟲子生殖的遞迴關係$T_{m,n}=T_{m-1,n}\times T_{m,n-1}$，$T_{0,0}=-1$，其中$m,n\in N\cup\{0\}$

(一). 1. 對任意坐標格子(m_0,n_0)，我們有$T_{m_0,n_0}=(-1)^{C_{n_0}^{m_0+n_0}-C_{n_0-1}^{m_0+n_0}}$，其中$m_0\geq n_0$且$m_0,n_0\in N\cup\{0\}$。

2. 若$C_{n_0}^{m_0+n_0}-C_{n_0-1}^{m_0+n_0}$爲奇數，則此坐標格子存在蟲子；

若$C_{n_0}^{m_0+n_0}-C_{n_0-1}^{m_0+n_0}$爲偶數，則此坐標格子中蟲子不存在。

(二). 1. $T_{m,n}=(-1)^{C_n^{m+n}-C_{n-1}^{m+n}}$，其中$m_0,n_0\in N\cup\{0\}$。其冪次值即爲從原點$(0,0)$走到$(m,n)$之捷徑走法數。我們可應用其於求一路領先的方法數上。

2. 若限制$m_0-d\geq n_0$，我們令$m'=m_0-d$，$n'=n_0$，$T_{m',n'}$即爲「一路領先」之方法數。

(三). 1. 若給定票數n，其中$n\in N\cup\{0\}$，則甲得票數「一路領先」乙得票數之方法總數爲$C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}$

2. 若A_n爲給定票數n的兩人「一路領先」方法總數，則其遞迴式爲

$$A_{n+1}=\frac{2n+3+(-1)^{n+1}}{n+2}A_n$$，其中$n\in N$。

3. 在*Motzkin*路徑中，若限制向量$(1,0)$走法(即僅可在x軸上出現)，會與二人「一路領先」得票過程形成一一對應。

五、改變蟲子所走的格子形狀，對三維空間中任意坐標格子(m,n,l)恆有$m\geq n\geq l$之關係，定義蟲子生殖的遞迴關係$T_{m,n,l}=T_{m-1,n,l}\times T_{m,n-1,l}\times T_{m,n,l-1}$，其中$m,n,l\in N\cup\{0\}$。

$T_{0,0,0}=-1$，其中$m,n,l\in N\cup\{0\}$

(一). 對任意坐標格子(m_0,n_0,l_0)，我們有

$$T_{m_0,n_0,l_0}=(-1)^{\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0,\ n_0,\ l_0}-\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0,\ n_0+1,\ l_0-1}+\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0+1,\ n_0+1,\ l_0-2}-\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0+1,\ n_0-1,\ l_0}}$$

$$\times(-1)^{\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0+2,\ n_0-1,\ l_0-1}-\binom{m_0+n_0+l_0}{m_0+2,\ n_0,\ l_0-2}}$$

其中$m_0\geq n_0\geq l_0$且$m_0,n_0,l_0\in N\cup\{0\}$

(二). 承(一).：

若T_{m_0,n_0,l_0}之冪次值爲奇數，則此坐標格子中存在蟲子；

若T_{m_0,n_0,l_0}之冪次值爲偶數，則此坐標格子中蟲子不存在。

(三). 承(一).，對任意坐標格子(m,n,l)，其中$m,n,l\in N\cup\{0\}$，$T_{m,n,l}$冪次值即爲從原點$(0,0,0)$走到(m,n,l)之捷徑走法數。我們可應用其於求「一路領先」之方法數上。

(四). 若限制$m_0-d_1\geq n_0$且$n_0-d_2\geq l_0$，我們令$m'=m_0-d_1-d_2$，$n'=n_0-d_2$，$l'=l_0$，$T_{m',n',l'}$即爲「一路領先」之方法數。

(五). 1. 若給定票數$\boldsymbol{n}$，其中$\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$，則甲得票數「一路領先」乙得票數，乙得票數「一路領先」丙得票數之得票過程與由$(0,0)$走到$(\boldsymbol{n},0)$的 ***Motzkin*** 路徑形成一一對應。

2. 參考文獻可得給定票數$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$之三人「一路領先」其方法總數

$$\boldsymbol{M_n}=\sum_{\boldsymbol{k}\ge 0}\binom{\boldsymbol{n}}{2\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C_k}$$ ，其中$\boldsymbol{C_k}=\dfrac{1}{\boldsymbol{k}+1}\dbinom{2\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}}$即 ***Catalan*** 數。

六、改變蟲子所走的格子形狀，對$\boldsymbol{n}$維空間中任意坐標格子$(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\cdots.\boldsymbol{a_n})$恆有$\boldsymbol{a_1}\ge\boldsymbol{a_2}\ge\cdots\ge\boldsymbol{a_n}$之關係，定義蟲子生殖的遞迴關係

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n}=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1-1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n}\times\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2-1,\cdots,\boldsymbol{a}_n}\times\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n-1}$$ ，其中$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\cdots,\boldsymbol{a_n}\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$。

(一). 對任意坐標格子$(\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_n')$，若令

$$\boldsymbol{D_n}=\left(\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{a}_2'+\cdots+\boldsymbol{a}_n'\right)!\begin{vmatrix}\frac{1}{\boldsymbol{a}_1'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1'+1)!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_1'+(\boldsymbol{n}-1)]!}\\ \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_2'!} & \cdots & & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_2'+(\boldsymbol{n}-2)]!}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ & & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{n-1}'!} & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_{n-1}'+1)!}\\ \frac{1}{[\boldsymbol{a}_n'-(\boldsymbol{n}-1)]!} & \frac{1}{[\boldsymbol{a}_n'-(\boldsymbol{n}-2)]!} & \cdots & \frac{1}{(\boldsymbol{a}_n'-1)!} & \frac{1}{\boldsymbol{a}_n'!}\end{vmatrix}$$

我們有$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_n'}=(-1)^{\boldsymbol{D_n}}$，其中$\boldsymbol{a}_1'\ge\boldsymbol{a}_2'\ge\cdots\ge\boldsymbol{a}_n'$且$\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_n'\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$。

(二). 若$\boldsymbol{D_n}$爲奇數，則此坐標格子中存在蟲子；若$\boldsymbol{D_n}$爲偶數，則此坐標格子中蟲子不存在。

(三). $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_n'}=(-1)^{\boldsymbol{D_n}}$，其中$\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_n'\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$。冪次值即爲從原點$(0,0,\cdots,0)$走到$(\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2',\cdots,\boldsymbol{a}_n')$之捷徑走法數。我們可應用其於求「一路領先」之方法數上。

七、改變棋盤格子的形式，發現蟲子生長的特性與 ***Fibonacci*** 數列亦有關聯：

$$\boldsymbol{F_n}=\boldsymbol{C}_0^{\boldsymbol{n}-1}+\boldsymbol{C}_1^{\boldsymbol{n}-2}+\cdots+\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-1-[\frac{\boldsymbol{n}}{2}]}^{[\frac{\boldsymbol{n}}{2}]}=\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}-1-[\frac{\boldsymbol{n}}{2}]}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}-1-\boldsymbol{k}}$$

陸、討論

一、若改變母蟲起始存在的格子位置，或母蟲的隻數等，進而推導出更多蟲子存在的規律性及應用。

二、仿三人「一路領先」得票過程與 ***Motzkin*** 路徑的對應，思考是否藉由類似概念，改變 ***Motzkin*** 路徑規則與四人或更多人「一路領先」得票過程對應。

三、二維中，改變棋盤格子形式，可得與 ***Fibonacci*** 數列有關，若以同樣概念於三維中改變方格形式，已找出前十項爲 1,1,2,3,6,16,21,54,163,205，但在現有數列資料中，我們尚未發現相同的數列。此乃往後努力研究的課題。

柒、參考資料

一、余文卿 編著 / 高中數學課本第一冊、高中數學課本第三冊、高中數學課本第四冊 龍騰文化事業公司

二、廖思善 編著 / 動手玩碎形 / 天下文化

三、第 47 屆科展立體巴斯卡、第 45 屆科展 ***Catalan*** 數列的聯想

四、洪維恩 編著 / ***Mathematica***5 數學運算大師 / 旗標出版社

五、整數數列搜尋器（***The On – line Encyclopedia of Integer Sequences***），http://www.research.att.com/~njas/sequences/

六、***Sierpinski Gasket*** http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/gasket/

七、***Sierpinski Gasket and Carpet***
http://www.atlas-zone.com/complex/fractals/classic/sierpinski.htm

八、伯特朗選票問題 / 取自機率名題二則漫談
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_04_4_03/page2.html

九、***Motzkin Numbers*** / 取自小素民族 http://hk.geocities.com/goodprimes/OMinor.htm

十、***Motzkin Numbers*** / 取自 ***Wolfram MathWorld***
http://mathworld.wolfram.com/MotzkinNumber.html

十一、***Sen – Peng Eu*** & ***Shu – Cheng Liu*** & ***Yeong – Nan Yeh*** / 2006 /
Catalan and Motzkin Numbers mod***ulo*** 4***and***8
http://www.math.sinica.edu.tw/www/file_upload/mayeh/MotzkinMod_f.pdf

十二、王元元 王慶瑞 黃紀麟 編著 / 組合數學-原理及題解 / 中央圖書出版社 / 2000

十三、***Robert Donaghey*** & ***Louis W. Shapiro*** / 1977 / ***Motzkin Numbers*** /
Journal of Combinatorial Theory / ***Series A***23 / ***P***.291 – ***P***.301

十四、黃敏晃 方述誠 / 漫談費布那齊數列
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_05_07_1/page3.html

【評語】040409

1、 由解決甄試試題進一步得出規律性與巴斯卡定理的關連。

2、 依序歸納出三角格子、空間方格至特殊方格之規律性，以至發展到「一路領先」的投票到 Motzkin 數之對應。

3、 仍可繼續研究四人以上之「一路領先」的投票與一般 Motzkin 數之關係。