中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040408

順逆循環、等間隔取項所成序元列之 n 維序組列的相異序組數探討

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 許哲瑋	彭威銘
高二 楊欣哲	
高二 陳豐鎮	
高二 洪郁凱	

關鍵詞：原生數列、序元列、相異序組數

壹、摘要

我們先對幾個專有名詞作定義：

(1)序組列：將序組依一定規則排列。

如(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (3, 6), (2, 6), (1, 5)⋯。

(2)第 ***i*** 序元列：將序組列中的第 i 序元獨自看成一數列。

如上述序組列的第一序元列為 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1,⋯；

第二序元列為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5,⋯。

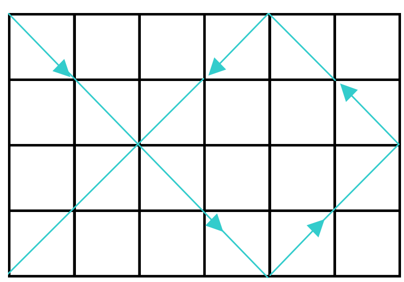
(3)原生數列：先設定生成元個數 m, 再將生成元 1, 2, ⋯, m 不斷作順逆循環排列而得的數列。如 1, 2, ⋯, m, m, ⋯, 2, 1, 1, 2, ⋯, m, m, ⋯,2 ,1, ⋯。

(4)間隔 ***d*** 取項：先設定間隔數 d, 再從原生數列第一項開始，每隔 d 項將之取出形成一新數列的動作。如原生數列為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ⋯ 時，間隔 3 取項 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ⋯, 得到新數列為 1, 4, 6, 3, ⋯。

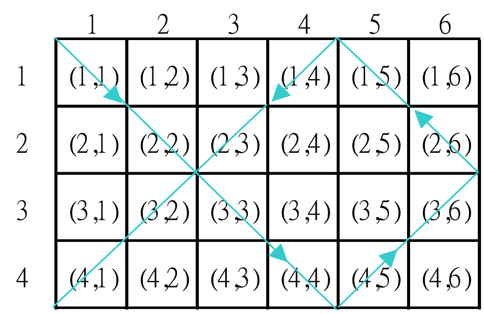
現依以下規則構造一 n 維序組列：獨立設定各序元原生數列的生成元個數 m_i，再設定間隔數 d_i 取項，得到的新數列當作各序元的序元列。本研究探討此 n 維序組列會出現多少個相異序組？又將各序元列的起始項改成不是 1 時，結果如何？

貳、研究動機

一個 $m\times n$ 的方格中，光線從最左上角開始朝右下射出，碰到方格最邊緣時依反射定律反射，我們想知道光線不斷前進，會經過幾個格子？如圖(一)，這是一個 4×6 的方格，光線共經過 12 個格子，我們將格子編號如圖(二)



圖(一)



圖(二)

此時光線經過的格子可視為一個不斷在變動的序組：(1, 1) → (2, 2) → (3, 3) → (4, 4) → (4, 5) → (3, 6) → (2, 6) → ⋯

其兩個序元不斷作順逆循環：第一序元：1 2 3 4 4 3 2 1 1 2 3 4 4 3 2 1 ⋯

第二序元：1 2 3 4 5 6 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 6 5 4 3 2 1 ⋯

因此探討經過的格子數可轉換為探討一個序組依此規則不斷變動所出現的相異序組數。

參、研究目的

一、原生數列起始項 1、間隔 1 取項所成序元列之 n 維序組列的相異序組數。

二、原生數列起始項任意數 a、間隔 1 取項所成序元列之 n 維序組列的相異序組數。

三、原生數列起始項 1、間隔 d 取項所成序元列之 n 維序組列的相異序組數。

四、原生數列起始項任意數 a、間隔 d 取項所成序元列之 n 維序組列的相異序組數。

肆、研究設備及器材

紙、筆、腦、電腦軟體 (DEV C++)。

伍、研究過程及理論

爲了方便以下敘述，我們先說明過程中會用到的一個重要引理：

(引理) $n \geq 2$，給定 $2n$ 個整數 q_i , r_i , $i = 1, 2, \cdots, n$

則方程組 $\begin{cases} p = r_1 + q_1 t_1 \\ p = r_2 + q_2 t_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p = r_n + q_n t_n \end{cases}$ $t_i \in Z$ 有解的充要條件爲 $(q_i , q_j) \mid r_i - r_j$, $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$

此時 $p = p^* + [\, q_1 , q_2 , \cdots, q_n]\, t$, $t \in Z$，其中 p^* 爲 p 某一解 (證明於附錄 A)

透過 t 的調整可使 p^* 落入範圍：$0 \leq p^* < [\, q_1 , q_2 , \cdots, q_n]$，以下使用本引理時，$p^*$ 皆視爲調整後範圍。

四個子題的研究：

一、探討原生數列起始項 **1**、間隔 **1** 取項所成序元列之 ***n*** 維序組列的相異序組數

第 i 原生數列：$1\ 2 \cdots m_i\, m_i \cdots 2\ 1\ 1\ 2 \cdots m_i\, m_i \cdots 2\ 1 \cdots$ $(m_i \in N)$

間隔 1 取項得

第 i 序元列：$1\ 2 \cdots m_i\, m_i \cdots 2\ 1\ 1\ 2 \cdots m_i\, m_i \cdots 2\ 1 \cdots$

序組列會循環，週期 $T = [2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n]$，所以整個序組列的相異序組數等於一週期內的相異序組數。 以下透過對相同序組出現規則的研究得到問題的解答。設相同序組出現在第 k_1 與 k_2 項，考慮其中序元出現的位置是在原生數列的順區 **1 2** ⋯ ***m*** 或逆區 ***m*** ⋯ **2 1**：

對第 i 序元列而言，第 k_j 項若位於順區，則該序元$= k_j - 2m_i\, l_{ij}$ $(l_{ij} \in Z,\ 1 \leq k_j - 2m_i\, l_{ij} \leq m_i)$

若位於逆區，則該序元$= 2m_i + 1 - (k_j - 2m_i\, l_{ij})$

$(l_{ij} \in Z,\ m_i + 1 \leq k_j - 2m_i\, l_{ij} \leq 2m_i)$

當第 i 序元列的第 k_1 與 k_2 項位於同區，得 $k_2 - k_1 = 2m_i\,(l_{i2} - l_{i1})$

當第 i 序元列的第 k_1 與 k_2 項位於異區，得 $(k_1 + k_2) = 2m_i\,(l_{i1} + l_{i2} + 1) + 1$

因此相同序組出現的狀況可能爲三：

(一)所有序元列的第 k_1 與 k_2 項位於同區，則 k_1 與 k_2 相差了 T 的某一整數倍。

[證明]：$k_2 - k_1 = 2m_i\,(l_{i2} - l_{i1})$, $\forall\ 1 \leq i \leq n \Rightarrow 2m_i \mid k_2 - k_1$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow\ [2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n] \mid k_2 - k_1 \Rightarrow T \mid k_2 - k_1$

(二)所有序元列的第 k_1 與 k_2 項位於異區，則 $k_1 + k_2 = 1 + Tt$, $t \in Z$。

[證明]：$(k_1 + k_2) = 2m_i\,(l_{i1} + l_{i2} + 1) + 1$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow k_1 + k_2 = 1 + [2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n]\, t = 1 + Tt$, $t \in Z$

此狀況下，考慮一週期項數 k：1 2 3 ⋯ T−2 T−1 T

可兩兩配對成功，所以同一序組皆出現兩次，計有 $\frac{1}{2}$T 個相異序組。

(三)有些序元列的第 k_1 與 k_2 項位於同區，有些位於異區，不可能發生。

[證明]：設第 i 序元列位於同區，第 j 序元列位於異區

則 $\begin{cases} k_2 - k_1 = 2m_i\,(l_{i2} - l_{i1}) \\ k_1 + k_2 = 2m_j\,(l_{j1} + l_{j2} + 1) + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 兩式相加得 $2k_2 = 2m_i(l_{i2} - l_{i1}) + 2m_j(l_{j1} + l_{j2} + 1) + 1$

兩邊奇偶不同，矛盾！

二、探討原生數列起始項任意數 *a*、間隔 1 取項所成序元列之 *n* 維序組列的相異序組數

原生數列起使項任意時，有兩種情形：

(情形 1) 由 a 逆排到 1，再不斷 $1\ 2 \cdots m\ m \cdots 2\ 1$ 循環

(情形 2) 由 a 順排到 m，再不斷 $m \cdots 2\ 1\ 1\ 2 \cdots m$ 循環

將(情形 2)中每一項 x 改成 $(m+1)-x$ 即可回到(情形 1)，且此動作不影響相異序組數計算，所以只討論(情形 1)。此時：

第 i 原生數列：$a_i\ a_i-1 \cdots 2\ 1\ 1\ 2 \cdots m_i\ m_i \cdots 2\ 1 \cdots \quad (m_i \in \mathrm{N})$

間隔 1 取項得

第 i 序元列：$a_i\ a_i-1 \cdots 2\ 1\ 1\ 2 \cdots m_i\ m_i \cdots 2\ 1 \cdots$

序組列會循環，週期 $\mathrm{T} = [2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n]$。設相同序組出現在第 k_1 與 k_2 項：

對第 i 序元列而言，第 k_j 項若位於順區，則該序元$= k_j - a_i - 2m_i l_{ij}$

$(l_{ij} \in \mathrm{Z},\ 1 \le k_j - a_i - 2m_i l_{ij} \le m_i)$

若位於逆區，則該序元$= 2m_i + 1 - (k_j - a_i - 2m_i l_{ij})$

$(l_{ij} \in \mathrm{Z},\ m_i + 1 \le k_j - a_i - 2m_i l_{ij} \le 2m_i)$

當第 i 序元列的第 k_1 與 k_2 項位於同區，得 $k_2 - k_1 = 2m_i(l_{i2} - l_{i1})$

當第 i 序元列的第 k_1 與 k_2 項位於異區，得 $(k_1 + k_2) = 2m_i(l_{i1} + l_{i2} + 1) + (2a_i + 1)$

相同序組出現的狀況可能有三：

(一)所有序元列的第 k_1 與 k_2 項位於同區，則 k_1 與 k_2 相差了 T 的某一整數倍。

(二)所有序元列的第 k_1 與 k_2 項位於異區的充要條件爲 $(m_i, m_j) \mid a_i - a_j,\ \forall 1 \le i < j \le n$，
此時 $k_1 + k_2 = k^* + \mathrm{T}t,\ t \in \mathrm{Z},\ k^*$奇數。

[證明]：$(k_1 + k_2) = 2m_i(l_{i1} + l_{i2} + 1) + (2a_i + 1),\ \forall 1 \le i \le n$

由【引理】知有解的充要條件爲 $(2m_i, 2m_j) \mid (2a_i + 1) - (2a_j + 1),\ \forall 1 \le i < j \le n$

得 $(m_i, m_j) \mid a_i - a_j,\ \forall 1 \le i < j \le n$

此時 $k_1 + k_2 = k^* + [2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n]\, t = k^* + \mathrm{T}t,\ t \in \mathrm{Z}$。由關係式知 $k_1 + k_2$ 奇數，所以 k^*奇數

此狀況下，考慮一週期項數 k：$1 \quad 2 \quad \cdots \quad k^*-2 \quad k^*-1 \quad k^* \quad k^*+1 \quad \cdots \quad \mathrm{T}-1 \quad \mathrm{T}$

奇 偶 奇 偶 奇 偶 奇 偶

可兩兩配對成功，所以同一序組皆出現兩次，計有 $\frac{1}{2}\mathrm{T}$ 個相異序組。

(三)有些序元列的第 k_1 與 k_2 項位於同區，有些位於異區，不可能發生。

三、探討原生數列起始項 1、間隔 *d* 取項所成序元列之 *n* 維序組列的相異序組數

第 i 原生數列：$1\ 2 \cdots m_i\ m_i \cdots 2\ 1\ 1\ 2 \cdots m_i\ m_i \cdots 2\ 1 \cdots \quad (m_i \in \mathrm{N})$

間隔 d_i 取項得

第 i 序元列：$1 \quad 1 + d_i \quad 1 + 2d_i \cdots\cdots$

$$序組列會循環，週期\ \mathrm{T} = \left[\frac{[2m_1, d_1]}{d_1}, \frac{[2m_2, d_2]}{d_2}, \cdots, \frac{[2m_n, d_n]}{d_n}\right]$$

$$= \left[\frac{2m_1}{(d_1, 2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2, 2m_2)}, \cdots, \frac{2m_n}{(d_n, 2m_n)}\right]。$$

設相同序組出現在第 k_1+1 與 k_2+1 項，考慮其中序元出現的位置是在原生數列的 順區或逆區：

對第 i 序元列而言，第 k_j+1 項若位於順區，則該序元$= 1 + k_j d_i - 2m_i l_{ij}$

$(l_{ij} \in \mathrm{Z},\ 1 \le 1 + k_j d_i - 2m_i l_{ij} \le m_i)$

若位於逆區，則該序元$= 2m_i + 1 - (1 + k_j d_i - 2m_i l_{ij})$

$(l_{ij} \in \mathrm{Z},\ m_i + 1 \le 1 + k_j d_i - 2m_i l_{ij} \le 2m_i)$

當第 i 序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區，得 $\frac{2m_i}{(d_i,2m_i)} \mid k_2-k_1$

當第 i 序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於異區，得 $(k_1+k_2)d_i-2m_i(l_{i1}+l_{i2}+1)=-1$

相同序組出現的狀況可能有三：

(一)所有序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區，則 k_1 與 k_2 相差了 T 的某一整數倍。

(二)所有序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於異區的充要條件爲

d_i 爲奇數, $(d_i, 2m_i) = 1$, $\forall 1\le i\le n$ 且 $(2m_i, 2m_j) \mid d_i-d_j$, $\forall 1\le i<j\le n$

此時 $k_1+k_2=k^*+\mathrm{T}t$, $t\in\mathrm{Z}$, k^*奇數。

[證明]：$(k_1+k_2)d_i-2m_i(l_{i1}+l_{i2}+1)=-1$, $\forall 1\le i\le n$ 有解的充要條件爲 $(d_i, 2m_i)=1$

$\Rightarrow$得 d_i 奇數, $\forall 1\le i\le n$

此時 $k_1+k_2=\alpha_i+2m_i t_i$, $t_i\in\mathrm{Z}$, $\forall 1\le i\le n$

由【引理】知上 n 式同時成立的充要條件爲 $(2m_i, 2m_j) \mid \alpha_i-\alpha_j$, $\forall 1\le i<j\le n$

將 $k_1+k_2=\alpha_i+2m_i t_i$ 與 $k_1+k_2=\alpha_j+2m_j t_j$ 分別代回原關係的第 i 式與第 j 式

得 $\begin{cases}\alpha_i d_i-2m_i X_i=-1 & \text{——— ①}\\ \alpha_j d_j-2m_j X_j=-1 & \text{——— ②}\end{cases}$

其中 $X_i=l_{i1}+l_{i2}+1-t_i d_i$, $X_j=l_{j1}+l_{j2}+1-t_j d_j$

由①$\times d_j$－②$\times d_i$ 得 $(\alpha_i-\alpha_j)d_i d_j-2m_iX_i d_j+2m_jX_j d_i=d_i-d_j$

$\because (d_i, 2m_i)=(d_j, 2m_j)=1$ $\therefore ((2m_i, 2m_j), d_i d_j)=1$,

即$(2m_i, 2m_j) \mid \alpha_i-\alpha_j \Leftrightarrow (2m_i, 2m_j) \mid (\alpha_i-\alpha_j)d_i d_j$

又$\because (2m_i, 2m_j) \mid 2m_i$ 且 $(2m_i, 2m_j) \mid 2m_j$

$\therefore (2m_i, 2m_j) \mid (\alpha_i-\alpha_j)d_i d_j \Leftrightarrow (2m_i, 2m_j) \mid d_i-d_j$

此時 $k_1+k_2=k^*+\left[\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2,2m_2)}, \cdots, \frac{2m_n}{(d_n,2m_n)}\right]t=k^*+\mathrm{T}t$, $t\in\mathrm{Z}$

因$\left[\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2,2m_2)}, \cdots, \frac{2m_n}{(d_n,2m_n)}\right]=[2m_1, 2m_2,\cdots,2m_n]$偶數且由原式知 k_1+k_2 奇數，所以 k^*奇數。

此狀況下，仿子題二第(二)部分的配對方式，可知同一序組皆出現兩次，計有 $\frac{1}{2}$T 個相異序組。

(三)有些序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區，有些位於異區

(設 $N_n=\{1, 2,\cdots, n\}$, $I_n\subset \mathrm{N}_n$, $\phi\ne I_n\ne N_n$

$i\in I_n$，第 i 序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區；

$i\in N_n-I_n$，第 i 序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於異區)

充要條件爲 d_i 偶數, $\frac{2m_i}{(d_i,2m_i)}$ 奇數, $\forall i\in I_n$

且 d_i 奇數, $(d_i, 2m_i)=1$, $i\in N_n-I_n$；$(2m_i, 2m_j) \mid d_i-d_j$, $\forall i, j\in N_n-I_n$, $i\ne j$

此時 $M_{I_n}\left[\frac{2m_i}{(d_i,2m_i)}\right] \mid k_2-k_1$； $k_1+k_2=k^*+M_{N_n-I_n}\left[\frac{2m_i}{(d_i,2m_i)}\right]t$, $t\in\mathrm{Z}$, k^*爲奇數。

符號 $\boldsymbol{M_J[x_i]}$表示$\forall \boldsymbol{i}\in \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{x_i}$的最小公倍數；但若 $\boldsymbol{J}$ 只有一個元素 $\boldsymbol{j}$，則表示 $\boldsymbol{x_j}$。

[證明]：$\begin{cases}\frac{2m_i}{(d_i,2m_i)} \mid k_2-k_1, \quad \forall i\in I_n & \text{——— ①}\\ (k_1+k_2)d_i-2m_i(l_{i1}+l_{i2}+1)=-1, \quad \forall i\in N_n-I_n & \text{—— ②}\end{cases}$

①式知 $M_{I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}] \mid k_2-k_1$ —————————— ③

由上面(二)的討論知②式有解的充要條件爲

d_i 奇數, $(d_i, 2m_i) = 1$, $i\in N_n-I_n$ 且 $(2m_i, 2m_j) \mid d_i-d_j$, $\forall i, j\in N_n-I_n, i\neq j$

此時 $k_1 + k_2 = k^* + M_{N_n-I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}]\, t$, $t\in Z$

其中 $M_{N_n-I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}] = M_{N_n-I_n}[2m_i]$爲偶數,

又由②知 $k_1 + k_2$ 奇數，所以 k^*奇數

k_1, k_2 一奇一偶 $\Leftrightarrow$ k_2-k_1 奇數 $\Leftrightarrow$ [③有解] $M_{I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}]$奇數。

得 $\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}$ 奇數, d_i 偶數, $\forall i\in I_n$

此狀況下, $T= [M_{I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}], M_{N_n-I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}]] = [M_{I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}], M_{N_n-I_n}[2m_i]]$

令$(M_{I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}], M_{N_n-I_n}[2m_i]) = e$, $M_{I_n}[\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}] = ep$, $M_{N_n-I_n}[2m_i] = e\,(2q)$,

e, p 爲奇數且$(p , 2q) = 1$

此時 $ep \mid k_2-k_1$ 且 $k_1 + k_2 = k^* + (2eq)\,t$, $t\in Z$, 其中 k^*奇數

將一週期 $T= ep(2q)$ 內的項數依下面方式排成方陣：

第一行依序排入 $1+ ep, 2 + ep,\cdots, ep + ep$,

第二行依序排入 $1+ 2ep, 2+2ep,\cdots, ep + 2ep$,……………………………………………

如圖 一週期

項數 $k=$				
1	$1 + ep$	$1 + 2ep$	$\cdots$	$1 + (2q)ep$
2	$2 + ep$	$2 + 2ep$	$\cdots$	$2 + (2q)ep$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
e	$e + ep$	$e + 2ep$	$\cdots$	$e + (2q)ep$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
ep	$ep + ep$	$ep +2ep$	$\cdots$	$ep + (2q)ep$

可看出同一列的項數奇偶相間，且因除以 ep 的餘數皆相同，所以任兩項數 k_1, k_2 滿足 $ep \mid k_2-k_1$。

以下證無論 k^*是哪一奇數 $(1, 3,\cdots, 2eq-1)$, 第 1 列至第 e 列中恰有一列的項數可兩兩配對成 $k^* + (2eq)\,t$

且從此列開始每隔 e 列皆可達成：

(1)第 i 列中任一奇數項 $i + (2j_1 + 1)ep$ 與偶數項 $i + (2j_2)ep$ 配對除以 $2eq$ 的餘數和第一項 $i + ep$ 與偶數項 $i + 2\,(j_1 + j_2)ep$ [若 $j_1 + j_2 > q$, 則修正爲 $i + 2\,(j_1 + j_2-q)ep$] 配對除以 $2eq$ 的餘數相同。且若第 i 列中第一項 $i + ep$ 與某偶數項 $i + (2j)ep$ 可配對成功，則該列所有項皆可由以下方法兩兩配對成功。

項數 k：$i + ep$ $\quad i + 2ep$ $\cdots$ $i + (2j-1)ep$ $\quad i + (2j)ep$ $\quad i + (2j +1)ep$ $\cdots$ $i + (2q)ep$

(2)連續 e 列的每列中第一項 $i + ep$ 與同列所有偶數項 $i + (2j)ep$ 配對後除以 $2eq$ 的餘數皆是不同奇數 。

證明如下：首先 $i + ep$ 與 $i + (2j)ep$ 的奇偶性不同，所以 $i + ep + i + (2j)ep$ 除以 $2eq$ 的餘數爲奇數 。

其次假設 $i_1+ep+i_1+(2j_1)ep$ 與 $i_2+ep+i_2+(2j_2)ep$ 除以 $2eq$ 的餘數相同,

$|i_1-i_2|<e$, $1\le 2j_1, 2j_2\le 2q$

則 $2eq \mid [i_1+ep+i_1+(2j_1)ep]-[i_2+ep+i_2+(2j_2)ep]$

$\Rightarrow 2eq \mid (2i_1-2i_2)+(2j_1-2j_2)ep$

即 $2e \mid (2i_1-2i_2)+(2j_1-2j_2)ep$

因 $2e \mid (2j_1-2j_2)ep$，所以 $2e \mid 2i_1-2i_2$，又 $|2i_1-2i_2|<2e$,

所以 $2i_1=2i_2$, $i_1=i_2$ 代回④

得 $2eq \mid (2j_1-2j_2)ep \Rightarrow 2q \mid (2j_1-2j_2)p$

因 $(p, 2q)=1$，所以 $2q \mid 2j_1-2j_2$，又 $|2j_1-2j_2|<2q$，所以 $2j_1=2j_2$,

即 $i_1+(2j_1)ep=i_2+(2j_2)ep$

(3)每列有 q 個偶數項，同列中第一項與所有偶數項配對後除以 $2eq$ 的餘數會得 q 個不同奇數，連續 e 列做同樣的動作共得到 eq 個不同奇數，而除以 $2eq$ 的奇餘數也只可能是 $1, 3,\cdots, 2eq-1$ 等 eq 個，所以連續 e 列每列第一項與同列所有偶數項配對後除以 $2eq$ 的餘數正好與 $1,3,\cdots, 2eq-1$ 一一相對。

(4)由(3)知第 $i\sim(i+e-1)$列每列第一項與同列所有偶數項配對後除以 $2eq$ 的餘數正好與 $1, 3,\cdots, 2eq-1$ 一一相對。又知第$(i+1)\sim(i+e)$列情況亦相同，兩者去掉重疊的第$(i+1)\sim(i+e-1)$列，剩下的第 i 列與第 $i+e$ 列配對出來的餘數種類必相同。這說明了從配對成功的那一列開始，間隔 e 列也都會成功。

所以一週期內, pq 個序組會出現兩次，其餘皆一次,

計有 $pq(2e-1)=\dfrac{2e-1}{2e}T$ 個相異序組。

四、探討原生數列起始項任意數 *a*、間隔 *d* 取項所成序元列之 *n* 維序組列的相異序組數

不失一般性，原生數列只考慮由 a 逆排到 1，再不斷 $1\ 2\cdots m\ m\cdots 2\ 1$ 循環的情形

第 i 原生數列：$a_i\quad a_i-1\cdots 1\ 1\ 2\cdots m_i\ m_i\cdots 2\ 1\cdots\quad (m_i\in\mathrm{N})$

間隔 d_i 取項得

第 i 序元列：$a_i\quad a_i-d_i\quad a_i-2d_i\cdots\cdots$

序組列會循環，週期 $T=[\dfrac{2m_1}{(d_1,2m_1)},\dfrac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\cdots,\dfrac{2m_n}{(d_n,2m_n)}]$。

設相同序組出現在第 k_1+1 與 k_2+1 項：

對第 i 序元列而言，第 k_j+1 項若位於順區，則該序元 $=1+k_jd_i-a_i-2m_i l_{ij}$

$(l_{ij}\in\mathrm{Z},\ 1\le 1+k_jd_i-a_i-2m_i l_{ij}\le m_i)$

若位於逆區，則該序元 $=2m_i+1-(1+k_jd_i-a_i-2m_i l_{ij})$

$(l_{ij}\in\mathrm{Z},\ m_i+1\le 1+k_jd_i-a_i-2m_i l_{ij}\le 2m_i)$

當第 i 序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區，得 $\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)} \mid k_2-k_1$

當第 i 序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於異區，得 $(k_1+k_2)d_i-2m_i(l_{i1}+l_{i2}+1)=2a_i-1$

相同序組出現的狀況可能有三：

(一)所有序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區，則 k_1 與 k_2 相差了 T 的某一整數倍。

(二)所有序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於異區的充要條件只要將子題三第(二)部分 $(d_i, 2m_i)=1$ 改成 $(d_i, 2m_i) \mid 2a_i-1$；

$(2m_i, 2m_j) \mid d_i-d_j$ 改成$(d_i, 2m_i)(d_j, 2m_j)(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}) \mid (2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i$

即可。

[證明]：$(k_1+k_2)d_i-2m_i(l_{i1}+l_{i2}+1)=2a_i-1,\ \forall 1\le i\le n$

有解的充要條件爲 $(d_i, 2m_i) \mid 2a_i-1$

$\Rightarrow$ 得$(d_i, 2m_i)$奇數、d_i 奇數$\Rightarrow \dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}$ 偶數, $\forall 1\le i\le n$

此時 $k_1+k_2=\alpha_i+\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}t_i$, $t_i\in Z$

由【引理】知上 n 式同時成立的充要條件爲

$\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid \alpha_i-\alpha_j$, $\quad\forall 1\le i<j\le n$

將 $k_1+k_2=\alpha_i+\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}t_i$ 與 $k_1+k_2=\alpha_j+\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}t_j$ 分別代回原關係的第 i 式與第 j 式，得 $\begin{cases}\alpha_i d_i-2m_iX_i=2a_i-1 & \text{—— ①}\\ \alpha_j d_j-2m_jX_j=2a_j-1 & \text{—— ②}\end{cases}$

其中 $X_i=l_{i1}+l_{i2}+1-t_i\cdot\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}$, $X_j=l_{j1}+l_{j2}+1-t_j\cdot\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}$

由①×d_j－②×d_i 得 $(\alpha_i-\alpha_j)d_id_j-2m_iX_id_j+2m_jX_jd_i=(2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i$

同除以$(d_i, 2m_i)(d_j, 2m_j)$得 $(\alpha_i-\alpha_j)\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}\cdot\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}-$

$\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}\cdot\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}X_i+\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\cdot\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}X_j=\dfrac{(2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i}{(d_i,2m_i)(d_j,2m_j)}$

$\because\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}\right)=\left(\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)},\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}\right)=1$

$\therefore\left(\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right),\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}\cdot\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}\right)=1$

即 $\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid \alpha_i-\alpha_j$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid (\alpha_i-\alpha_j)\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}\cdot\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}$

又$\because\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid \dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}$ 且 $\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid \dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}$

$\therefore\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid (\alpha_i-\alpha_j)\dfrac{d_i}{(d_i,2m_i)}\cdot\dfrac{d_j}{(d_j,2m_j)}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid \dfrac{(2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i}{(d_i,2m_i)(d_j,2m_j)}$

$\Leftrightarrow (d_i, 2m_i)(d_j, 2m_j)\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right) \mid (2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i$

(三)有些序元列的第 k_1+1 與 k_2+1 項位於同區，有些位於異區，充要條件只要將子題三第(三)部分

$(d_i, 2m_i)=1$ 改成 $(d_i, 2m_i) \mid 2a_i-1$；

$(2m_i, 2m_j) \mid d_i-d_j$ 改成$(d_i, 2m_i)(d_j, 2m_j)\left(\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\dfrac{2m_i}{(d_i,2m_i)}\right) \mid (2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i$

即可。

陸、結論

一、原生數列起始項 1、間隔 1 取項所成序元列 $(1\ 2 \cdots m_i\ m_i \cdots 2\ 1\cdots)$ 之 n 維序組列

(週期 $T = [\,2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n\,]$)，有 $\frac{1}{2}T$ 個相異序組。

二、原生數列起始項任意數 a、間隔 1 取項所成序元列 $(a_i\ a_i-1\ a_i-2 \cdots 1\ 1\ 2 \cdots m_i\ m_i \cdots 2\ 1\cdots)$ 之 n 維序組列

(週期 $T = [\,2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n\,]$)

(一)若$(m_i, m_j) \mid a_i - a_j$, $\forall 1 \le i < j \le n$, 則有 $\frac{1}{2}T$ 個相異序組。

(二)不滿足(一)的條件，則有 T 個相異序組。

三、原生數列起始項 1、間隔 d 取項所成序元列 $(1\ 1+d_i\ 1+2d_i \cdots)$ 之 n 維序組列

(週期 $T = [\frac{2m_1}{(d_1, 2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2, 2m_2)}, \cdots, \frac{2m_n}{(d_n, 2m_n)}]$)。 令 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, $I_n \subset N_n$,

$\forall i \in I_n$, d_i 偶數, $\frac{2m_i}{(2m_i, d_i)}$ 奇數；$\forall i \in N_n - I_n$, d_i 奇數, $(d_i, 2m_i) = 1$；$\forall i, j \in N_n - I_n$, $i < j$, $(2m_i, 2m_j) \mid d_i - d_j$。

(一) $I_n = \phi$, 則有 $\frac{1}{2}T$ 個相異序組。

(二) $\phi \ne I_n \ne N_n$, 則有 $\frac{2e-1}{2e}T$ 個相異序組。其中 $e = (\boldsymbol{M}_{I_n}[\frac{2m_i}{(d_i, 2m_i)}], \boldsymbol{M}_{N_n - I_n}[\frac{2m_i}{(d_i, 2m_i)}])$

(三)其餘情形有 T 個相異序組。

四、原生數列起始項任意數 a、間隔 d 取項所成序元列 $(a_i\ a_i-d_i\ a_i-2d_i \cdots)$ 之 n 維序組列

(週期 $T = [\frac{2m_1}{(d_1, 2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2, 2m_2)}, \cdots, \frac{2m_n}{(d_n, 2m_n)}]$)。令 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, $I_n \subset N_n$,

$\forall i \in I_n$, d_i 偶數, $\frac{2m_i}{(2m_i, d_i)}$ 奇數；$\forall i \in N_n - I_n$, d_i 奇數, $(d_i, 2m_i) \mid 2a_i - 1$；

$\forall i, j \in N_n - I_n$, $i < j$, $(d_i, 2m_i)(d_j, 2m_j)(\frac{2m_i}{(d_i, 2m_i)}, \frac{2m_j}{(d_j, 2m_j)}) \mid (2a_i - 1)d_j - (2a_j - 1)d_i$。

(一) $I_n = \phi$, 則有 $\frac{1}{2}T$ 個相異序組。

(二) $\phi \ne I_n \ne N_n$, 則有 $\frac{2e-1}{2e}T$ 個相異序組。其中 $e = (\boldsymbol{M}_{I_n}[\frac{2m_i}{(d_i, 2m_i)}], \boldsymbol{M}_{N_n - I_n}[\frac{2m_i}{(d_i, 2m_i)}])$

(三)其餘情形有 T 個相異序組。

柒、展望

一、將原生數列的 1 與 m 改成不重複出現：1　2 ⋯ $m-1$　m　$m-1$ ⋯ 2　1　2 ⋯ $m-1$　m　$m-1$ ⋯ 2　1 ⋯

在一週期內不同序組出現次數有一次 、二次及四次，明顯複雜。

二、將原生數列的順逆循環擴大成順順逆逆循環，如下：

$\underbrace{1\,2\cdots m}_{順}\quad\underbrace{1\,2\cdots m}_{順}\quad\underbrace{m\cdots 2\,1}_{逆}\quad\underbrace{m\cdots 2\,1}_{逆}\quad\underbrace{1\,2\cdots m}_{順}\quad\underbrace{1\,2\cdots m}_{順}\quad\underbrace{m\cdots 2\,1}_{逆}\quad\underbrace{m\cdots 2\,1}_{逆}\cdots\cdots$,

結果又如何？若擴大成 n 個($n\geq3$)不同的順逆組合，結果又如何？

捌、參考資料

一、高中數學課本第一冊。
二、趙文敏：數論淺談，協進圖書有限公司(民 74)。

附錄 A：引理的證明

(引理) $n \ge 2$, 給定 $2n$ 個整數 q_i , r_i , $i = 1, 2,\cdots, n$

則方程組 $\begin{cases} p = r_1 + q_1 t_1 \\ p = r_2 + q_2 t_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p = r_n + q_n t_n \end{cases}$ $t_i \in Z$ 有解的充要條件爲 $(q_i , q_j) \mid r_i - r_j$, $\forall\ 1 \le i < j \le n$

此時 $p = p^* + [q_1 , q_2 ,\cdots, q_n]\, t$, $t \in Z$, 其中 p^* 爲 p 某一解

[證明]：1.先證方程組有解時, $p = p^* + [q_1 , q_2 ,\cdots, q_n]\, t$, $t \in Z$, 其中 p^*爲 p 某一解

設 $p^* = r_i + q_i t_i^{\,*}$, $i = 1, 2,\cdots, n$

又設 p' 爲 p 其他解且 $p' = r_i + q_i t_i'$, $i = 1, 2,\cdots, n$

由 $p' - p^* = (r_i + q_i t_i') - (r_i + q_i t_i^{\,*}) = q_i (t_i' - t_i^{\,*})$, 知 $q_i \mid p' - p^*$, $\forall 1 \le i \le n$

所以 $[q_1 , q_2 ,\cdots, q_n] \mid p' - p^*$

令 $p' - p^* = [q_1 , q_2 ,\cdots, q_n]\, t$, $t \in Z$, 得 $p' = p^* + [q_1 , q_2 ,\cdots, q_n]\, t$, $t \in Z$

2.再證方程組有解的充要條件，對 n 作數學歸納

(1)當 $n = 2$ 時

方程組 $\begin{cases} p = r_1 + q_1 t_1 \\ p = r_2 + q_2 t_2 \end{cases}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在 $t_1, t_2 \in Z$, 使 $r_1 + q_1 t_1 = r_2 + q_2 t_2$

$\Leftrightarrow$ 存在 $t_1, t_2 \in Z$, 使 $q_2 t_2 - q_1 t_1 = r_1 - r_2$

$\Leftrightarrow$ 不定方程式 $q_2 x - q_1 y = r_1 - r_2$ 有整數解

$\Leftrightarrow (q_1 , q_2) \mid r_1 - r_2$

$\therefore$充要條件成立

(2)設 $n \le k$ 時充要條件成立

當 $n = k + 1$ 時

方程組 $\begin{cases} p = r_1 + q_1 t_1 \\ p = r_2 + q_2 t_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p = r_k + q_k t_k \\ p = r_{k+1} + q_{k+1} t_{k+1} \end{cases}$ 有解

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} p = r_1 + q_1 t_1 \\ p = r_2 + q_2 t_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p = r_k + q_k t_k \end{cases}$ 有解, 此時 $p = p_r + [q_1 , q_2 ,\cdots, q_k]\, t_r$, $t_r \in Z$

其中 $p_r = r_i + q_i t_{ri}$, $i = 1, 2,\cdots, k$

且 $\begin{cases} p = p_r + [q_1, q_2, \cdots q_k] t_r \\ p = r_{k+1} + q_{k+1} t_{k+1} \end{cases}$ 亦有解

$\Leftrightarrow$ [由歸納假設知] $(q_i , q_j) \mid r_i - r_j$, $\forall 1 \le i < j \le k$

且$([q_1 , q_2 ,\cdots, q_k] , q_{k+1}) \mid p_r - r_{k+1}$

$\Leftrightarrow (q_i , q_j) \mid r_i - r_j$, $\forall 1 \le i < j \le k$

且$[(q_1, q_{k+1}) , (q_2 , q_{k+1}) ,\cdots, (q_k , q_{k+1})] \mid p_r - r_{k+1}$

$\Leftrightarrow (q_i\,,\,q_j) \mid r_i - r_j\,,\ \forall 1 \le i < j \le k$
且$(\,q_i\,,\,q_{k+1}) \mid p_r - r_{k+1}\,,\ \forall 1 \le i \le k$
$\Leftrightarrow (q_i\,,\,q_j) \mid r_i - r_j\,,\ \forall 1 \le i < j \le k$
且$(\,q_i\,,\,q_{k+1}) \mid (r_i + q_i\,t_{ri}) - r_{k+1}\,,\ \forall 1 \le i \le k$
$\Leftrightarrow (q_i\,,\,q_j) \mid r_i - r_j\,,\ \forall 1 \le i < j \le k$
且$(\,q_i\,,\,q_{k+1}) \mid (r_i - r_{k+1}) + q_i\,t_{ri}\,,\ \forall 1 \le i \le k$
$\Leftrightarrow (q_i\,,\,q_j) \mid r_i - r_j\,,\ \forall 1 \le i < j \le k$
且$(\,q_i\,,\,q_{k+1}) \mid r_i - r_{k+1},\ \forall 1 \le i \le k \quad [\because (\,q_i\,,\,q_{k+1}) \mid q_i\,t_{ri}\,]$
$\Leftrightarrow (q_i\,,\,q_j) \mid r_i - r_j\,,\quad 1 \le i < j \le k+1$
$\therefore$充要條件成立

附錄 B：實例驗證

以下我們利用電腦軟體寫出程式，依結論的次序實際驗證之：

一、$n = 2,\ m_1 = 4,\ a_1 = 1,\ d_1 = 1$；$m_2 = 5,\ a_2 = 1,\ d_2 = 1$

週期 $T=[2m_1, 2m_2] = 40$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4
	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1

項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數
1	40	11	30	21	20	31	10
2	39	12	29	22	19	32	9
3	38	13	28	23	18	33	8
4	37	14	27	24	17	34	7
5	36	15	26	25	16	35	6
6	35	16	25	26	15	36	5
7	34	17	24	27	14	37	4
8	33	18	23	28	13	38	3
9	32	19	22	29	12	39	2
10	31	20	21	30	11	40	1

由上表知，一週期內有 20 個相異序組與結論 $\frac{1}{2}T$ 符合。

二、(一)滿足 $(m_1,m_2)\mid a_1-a_2$

$n=2,\ m_1=6,\ a_1=2,\ d_1=1$； $m_2=9,\ a_2=5,\ d_2=1$

週期 $T=[2m_1,\ 2m_2]=36$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	1	1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	6	5	4	3
3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6

項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數
1	28	11	18	21	8	31	34
2	27	12	17	22	7	32	33
3	26	13	16	23	6	33	32
4	25	14	15	24	5	34	31
5	24	15	14	25	4	35	30
6	23	16	13	26	3	36	29
7	22	17	12	27	2		
8	21	18	11	28	1		
9	20	19	10	29	36		
10	19	20	9	30	35		

由上表知，一週期內有 18 個相異序組與結論 $\frac{1}{2}T$ 符合。

(二)不滿足 $(m_1,m_2)\mid a_1-a_2$

$n=2,\ m_1=6,\ a_1=2,\ d_1=1$； $m_2=9,\ a_2=3,\ d_2=1$

週期 $T=[2m_1,\ 2m_2]=36$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	1	1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4	3	2

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	6	5	4	3
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4

由上表知，一週期內有 36 個相異序組與結論 T 符合。

三、(一)滿足 d_i 奇數, $(d_i, 2m_i) = 1, \forall 1 \le i \le 3$；$(2m_i, 2m_j) \mid d_i - d_j, \forall 1 \le i < j \le 3$

$n = 3, m_1 = 3, a_1 = 1, d_1 = 1$；$m_2 = 4, a_2 = 1, d_2 = 3$；$m_3 = 6, a_3 = 1, d_3 = 7$

週期 $T = [\frac{2m_1}{(d_1, 2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2, 2m_2)}, \frac{2m_3}{(d_3, 2m_3)}] = 24$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	2	3	3	2	1	1	2	3	3	2	1	1	2	3	3	2	1	1	2
	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2
	1	5	3	3	5	1	6	2	4	4	2	6	1	5	3	3	5	1	6	2

21	22	23	24
3	3	2	1
4	1	3	3
4	4	2	6

項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數
1	6	11	20	21	10
2	5	12	19	22	9
3	4	13	18	23	8
4	3	14	17	24	7
5	2	15	16		
6	1	16	15		
7	24	17	14		
8	23	18	13		
9	22	19	12		
10	21	20	11		

由上表知, 一週期內有 12 個相異序組與結論 $\frac{1}{2}$T 符合。

(二)滿足 d_1 偶數, $\frac{2m_1}{(2m_1, d_1)}$ 奇數

且 d_2, d_3 奇數, $(d_2, 2m_2) = (d_3, 2m_3) = 1$；$(2m_2, 2m_3) \mid d_2 - d_3$

$n = 3, m_1 = 3, a_1 = 1, d_1 = 2$；$m_2 = 4, a_2 = 1, d_2 = 3$；$m_3 = 6, a_3 = 1, d_3 = 7$

週期 $T = [\frac{2m_1}{(d_1, 2m_1)}, \frac{2m_2}{(d_2, 2m_2)}, \frac{2m_3}{(d_3, 2m_3)}] = 24$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3
	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2
	1	5	3	3	5	1	6	2	4	4	2	6	1	5	3	3	5	1	6	2

21	22	23	24
2	1	3	2
4	1	3	3
4	4	2	6

項數	相同序組 出現項數	項數	相同序組 出現項數	項數	相同序組 出現項數
1	無	11	20	21	無
2	5	12	無	22	無
3	無	13	無	23	8
4	無	14	17	24	無
5	2	15	無		
6	無	16	無		
7	無	17	14		
8	23	18	無		
9	無	19	無		
10	無	20	11		

由上表知，一週期內有 20 個相異序組與結論($\frac{2e-1}{2e}$)T 符合。

其中 $e = (\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)},[\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}]) = (3 , [8 , 12]) =3$

(三)與(二)比較不滿足 $(2m_2 , 2m_3) \mid d_2 - d_3$

$n = 3, m_1 = 3, a_1 = 1, d_1 = 2$；$m_2 = 4, a_2 = 1, d_2 = 3$；$m_3 = 6, a_3 = 1, d_3 = 5$

週期 $T= [\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)},\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}] = 24$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3
	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2
	1	6	2	4	4	2	6	1	5	3	3	5	1	6	2	4	4	2	6	1

21	22	23	24
2	1	3	2
4	1	3	3
5	3	3	5

由上表知，一週期內有 24 個相異序組與結論 T 符合。

四、(一)滿足 d_i 奇數, $(d_i\,,2m_i)\mid 2a_i-1,\ \forall 1\le i\le 3$；

$$(d_i\,,2m_i)(d_j\,,2m_j)\left(\frac{2m_i}{(d_i,2m_i)},\frac{2m_j}{(d_j,2m_j)}\right)\mid(2a_i-1)d_j-(2a_j-1)d_i\,,\forall 1\le i<j\le 3$$

$n=3,\ m_1=3,\ a_1=2,\ d_1=3$；$m_2=4,\ a_2=3,\ d_2=3$；$m_3=6,\ a_3=2,\ d_3=5$

週期 $T=\left[\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)},\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}\right]=24$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2
	2	4	4	2	6	1	5	3	3	5	1	6	2	4	4	2	6	1	5	3

21	22	23	24
2	2	2	2
2	4	1	3
3	5	1	6

項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數
1	16	11	6	21	20
2	15	12	5	22	19
3	14	13	4	23	18
4	13	14	3	24	17
5	12	15	2		
6	11	16	1		
7	10	17	24		
8	9	18	23		
9	8	19	22		
10	7	20	21		

由上表知, 一週期內有 12 個相異序組結論 $\frac{1}{2}T$ 符合。

(二)滿足 d_1 偶數, $\frac{2m_1}{(2m_1,d_1)}$ 奇數

且 d_2, d_3 奇數, $(d_2\,,2m_2)\mid 2a_1-1,\ (d_3\,,2m_3)\mid 2a_2-1$；

$$(d_2\,,2m_2)(d_3\,,2m_3)\left(\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}\right)\mid(2a_2-1)d_3-(2a_3-1)d_2$$

$n=3,\ m_1=3,\ a_1=2,\ d_1=2$；$m_2=4,\ a_2=3,\ d_2=3$；$m_3=6,\ a_3=2,\ d_3=5$

週期 $T=\left[\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)},\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}\right]=24$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2
	2	4	4	2	6	1	5	3	3	5	1	6	2	4	4	2	6	1	5	3

21	22	23	24
3	2	1	3
2	4	1	3
3	5	1	6

項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數	項數	相同序組出現項數
1	16	11	無	21	無
2	無	12	無	22	19
3	無	13	4	23	無
4	13	14	無	24	無
5	無	15	無		
6	無	16	1		
7	10	17	無		
8	無	18	無		
9	無	19	22		
10	7	20	無		

由上表知，一週期內有 20 個相異序組與結論$(\frac{2e-1}{2e})$T 符合。

其中 $e = (\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)},[\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}]) = (3 , [\ 8,12\ ]) = 3$

(三)與(二)比較不滿足

$(d_2\,,\,2m_2)(d_3\,,\,2m_3)(\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}) \mid (2a_2-1)d_3-(2a_3-1)d_2$

$n = 3,\ m_1 = 3,\ a_1 = 2,\ d_1 = 2$

$m_2 = 4,\ a_2 = 3,\ d_2 = 3$

$m_3 = 6,\ a_3 = 2,\ d_3 = 3$

週期 $T= [\frac{2m_1}{(d_1,2m_1)},\frac{2m_2}{(d_2,2m_2)},\frac{2m_3}{(d_3,2m_3)}] = 24$

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2	2	4	1	3	3	1	4	2
	2	2	5	5	2	2	5	5	2	2	5	5	2	2	5	5	2	2	5	5

21	22	23	24
3	2	1	3
2	4	1	3
2	2	5	5

由上表知，一週期內有 24 個相異序組與結論 T 符合。

【評語】040408

1、 構造 n 維序組列，探討相異序組個數的問題，取材尚稱自然合適。

2、 獲致結果以電腦軟體驗證符合科展精神。

3、 尚有進一步的發展空間。