中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040407

從等邊三角形到等腰三角形

-Van Schooten 定理的推廣

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高一 蕭奕 高一 黃晟嘉	蕭健忠

關鍵詞：van Schooten 定理、托勒密定理、尺規作圖

摘要：

在平面上給一個正ΔABC，若 P 爲ΔABC 外接圓上的點，則三線段$\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ 中，最長爲較短兩段之和，這個性質稱爲 van Schooten 定理，可以視爲托勒密定理的一個推論。我們將正ΔABC 的條件改爲等腰三角形，研究在此條件下，使 van Schooten 定理成立時 P 點的軌跡問題。

在本文中，利用解析法，我們找出 P 點的軌跡圖形Γ。我們對於圖形Γ上的一些特別點的尺規作圖感到興趣，也得到一些有意思的結果；藉由研究這些特別點的尺規作圖，我們發現軌跡圖形Γ的一個性質，敘述如下：設$\overline{AB} = \overline{AC}$，$G$ 是ΔABC 的重心，G'是 G 關於 BC 直線的對稱點，若 D 是直線 BC 上的任一點，若 P、Q 兩點在 AD 直線上且滿足$\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$、$\overline{QA} = \overline{QB} + \overline{QC}$，且 H 是$\overline{PQ}$中點，則有$\overline{G'H} \perp \overline{PQ}$的性質。此外，我們也利用尺規作圖作出上述 P、Q 兩點。

從等邊三角形到等腰三角形

--- Van Schooten 定理的推廣

一、研究動機：

托勒密定理是關於圓內接四邊形的一個有名的定理，敘述如下：

【托勒密定理】：*對於四邊形* $ABCD$ *，都有* $\overline{AC}\times\overline{BD}\le\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$ *，其中等號成立的充要條件是四邊形* $ABCD$ *是圓內接四邊形。*

托勒密利用這個定理推導出三角函數的和差角公式，以製作正弦函數值表【1】。有很多方法可以來證明托勒密定理，托勒密定理也有許多應用，可參考【2】；其中，我們特別注意到底下的應用：

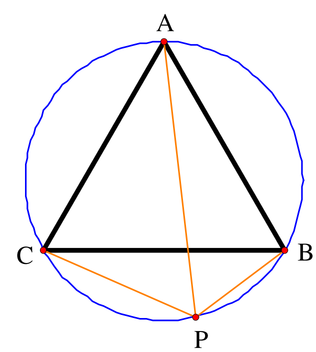
【性質 A】：*圓內接正*ΔABC*，設* P *是任一點，都有* $\overline{PA}\le\overline{PB}+\overline{PC}$ *；且僅當* P *在* $\overset{\frown}{BC}$ *上時，等號成立。*

【略證】：如圖(一)所示，由托勒密定理可得，

$\overline{PA}\times\overline{BC}\le\overline{PB}\times\overline{AC}+\overline{PC}\times\overline{AB}$

因為 $\overline{BC}=\overline{AC}=\overline{AB}$ ，故 $\overline{PA}\le\overline{PB}+\overline{PC}$ 。

並且等號成立時，A、B、P、C 四點必須共圓且 P 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上。 □



圖(一)

性質 A 稱為 van Schooten 定理，在高中幾何學課本裡曾經介紹過，但不是以托勒密定理證明【3】，van Schooten 定理告訴我們，給一個正三角形 ABC，僅在其外接圓上的點 P ，具有線段 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$ 中，最長為較短兩段之和。因此，若 P 不在正ΔABC 的外接圓上，則有 $\overline{PA}<\overline{PB}+\overline{PC}$ 、 $\overline{PB}<\overline{PC}+\overline{PA}$ 、 $\overline{PC}<\overline{PA}+\overline{PB}$ ，也就是說 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$ 可以圍成三角形，而這個三角形被稱為 *Pompeiu triangle*【4】。

我們查到 van Schooten 定理有兩類推廣，一類是推廣到一般的ΔABC，**Bui Quang Tuan** 證明：「設 P 是ΔABC 外接圓上一點，d_a，d_b，d_c 表示 P 到三邊 $a=\overline{BC},b=\overline{CA},c=\overline{AB}$ 的距離， $\dfrac{a}{d_a},\dfrac{b}{d_b},\dfrac{c}{d_c}$ 三數中，其中一數是另兩數的和。」當ΔABC 是正三角形時，很容

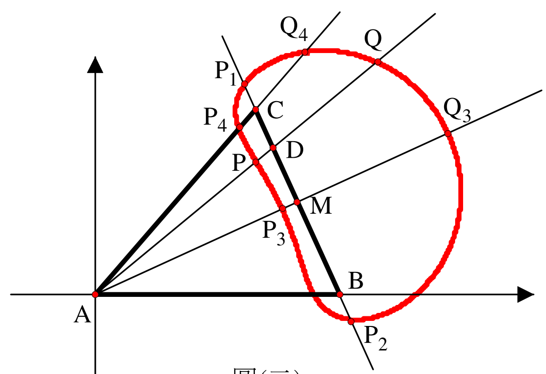
易得到$\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$中，最長爲較短兩段之和，這就推廣 van Schooten 定理【6】。另一類則是推廣到奇數邊的正多邊形：

「如果有一個奇數邊的正多邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_n$，對任一點 P，則有 $\overline{PA_1}-\overline{PA_2}+\overline{PA_3}-\overline{PA_4}+\ldots\ldots+\overline{PA_n}\geq 0$，僅當 P 在正多邊形的外接圓上時等號成立。」敘述中的不等式稱爲 *Ptolemaic Inequality*【5】。

而我們關心的則是 van Schooten 定理中，等號成立時，P 點的軌跡問題。當ΔABC是正三角形時，P 點的軌跡爲ΔABC的外接圓，如果ΔABC不是正三角形，情況會如何？本文主要考慮當ΔABC是等腰三角形的情形。設$\overline{AB}=\overline{AC}$並建立座標，使$A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(x_c,y_c)$，其中 $x_c^2+y_c^2=1$，動點 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$滿足$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$，我們可以導出 r , θ 所滿足的方程式：設 $r=f(\theta)$，則

$$f(\theta)=\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x_C\cdot\cos(\theta)+y_C\cdot\sin(\theta)+\cos(\theta)+\sqrt{(x_C\cdot\cos(\theta)+y_C\cdot\sin(\theta)+\cos(\theta))^2+3\cdot\left(\left(x_C{}^2\cdot\cos(2\cdot\theta)-x_C-x_C\cdot\cos(2\cdot\theta)\right)+x_C\cdot y_C\cdot\sin(2\cdot\theta)-y_C\cdot\sin(2\cdot\theta)\right)}\right)$$

這個方程式依照頂角$\angle A$的大小，分成三種情形，利用 GSP 軟體可以畫出 $r=f(\theta)$的圖形Γ：

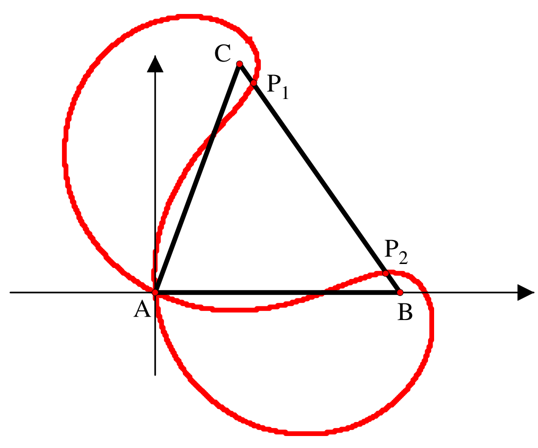


圖(二)

(1) 當頂角$\angle A<60°$，Γ表示滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$的所有 P 點的圖形（圖(二))；

(2) 當頂角$\angle A>60°$，Γ表示滿足 $\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PC}$與$\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$的所有 P 點的圖形（圖(三))；

(3) 當頂角$\angle A=60°$，Γ表示ΔABC的外接圓。



圖(三)

Γ似乎不是常見的平面曲線。爲了更了解Γ，我們先觀察一些特殊點，如圖(二)中 P_1、P_2、P_3、P_4、Q_3、Q_4，並嘗試利用尺規作圖作出這些點，這個過程是蠻辛苦的。

成功的作圖之後，我們思考曲線Γ上的一般點 P 的尺規作圖可能性；另外在作圖的過程

中，我們也發現 P_3 與 Q_3、P_4 與 Q_4 的對稱性。我們是以解析方法得出這兩個問題的答案。

二、研究目的：

(一) 尺規作圖作出圖(二)中 P_1、P_2、P_3、P_4、Q_3、Q_4。

(二) 研究 P_3 與 Q_3、P_4 與 Q_4 的對稱性。

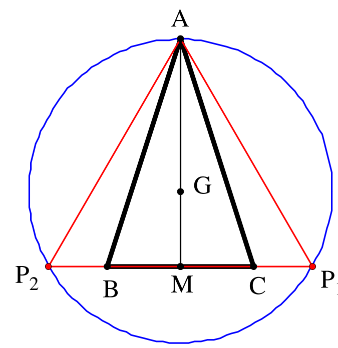
(三) 研究圖(二) 中曲線 Γ 上一般點的尺規作圖可能性。

(四) 研究圖(三) 的情況，是否與圖(二)有同樣的性質。

三、研究過程與方法：

(一) P_1、P_2、P_3、P_4、Q_3、Q_4 的作圖：

在以下的討論中，ΔABC 是等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，頂角 $\angle A<60°$，G 是 ΔABC 的重心，M 為 $\overline{BC}$ 中點，G' 是 G 關於 $\overline{BC}$ 的對稱點。



圖(四)

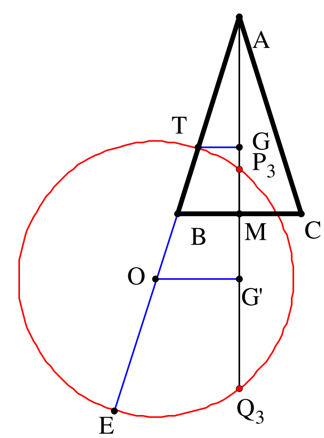
【性質 1】：以 G 為圓心 $\overline{AG}$ 為半徑畫圓 G，延長 $\overline{BC}$ 交圓 G 於 P_1,P_2，如圖(四)，則 $\overline{P_1A}=\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 且 $\overline{P_2A}=\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$。

【證明】：$\because \overline{P_2B}=\overline{P_1C}$，$\therefore \overline{P_1B}+\overline{P_1C}=\overline{P_1P_2}$，

又因 ΔAP_1P_2 是正三角形(重心 G 為外接圓圓心)

$\therefore \overline{P_1B}+\overline{P_1C}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_1A}$，

同理可得 $\overline{P_2A}=\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$。 □



圖(五)

【性質 2】：作 $\overline{GT} // \overline{BC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 T，延長 $\overline{AT}$ 使 $\overline{OT}=\overline{AT}$，以 O 為圓心，$\overline{OT}$ 為半徑畫圓，交 $\overleftrightarrow{AM}$ 於 P_3、Q_3，如圖(五)，則 $\overline{P_3A}=\overline{P_3B}+\overline{P_3C}$ 且 $\overline{Q_3A}=\overline{Q_3B}+\overline{Q_3C}$。

【證明】: $\because \overline{AT}=2\overline{BT}$ ，$\overline{AE}=2\overline{AB}$ ，以 $\overline{ET}$ 爲直徑，作一圓 O 交 $\overleftrightarrow{AM}$ 於 P_3、Q_3，

由阿波羅圓知：$\overline{P_3A}=2\overline{P_3B}$ ，$\overline{Q_3A}=2\overline{Q_3B}$ ，

且 $\overline{P_3B}=\overline{P_3C}$ (中垂線上任一點到兩端距離相等)

$\therefore \overline{P_3A}=\overline{P_3B}+\overline{P_3C}$ ，同理可得，$\overline{Q_3A}=\overline{Q_3B}+\overline{Q_3C}$ 。 □

【性質 3】: 以 G 爲圓心，$\overline{GB}$ 爲半徑畫圓，交 $\overline{AC}$ 於 P'，在 $\overline{AC}$ 做一點 P_4，使 $\overline{AP'}=\overline{P_4C}$ ，如圖(六)，則 (1) $\overline{P_4A}=\overline{P_4B}+\overline{P_4C}$ 。(2)BGP_4C 共圓。

【證明】: (1)設 N 是 $\overline{AC}$ 中點，

$\because \overline{AN}-\overline{AP'}=\overline{NC}-\overline{CP_4}$ $\therefore \overline{P'N}=\overline{NP_4}$ ，

又$\because 2\overline{GN}=\overline{GB}$ (G 爲 ΔABC 之重心)

$\therefore G$ 爲 $\Delta P'BP_4$ 之重心，

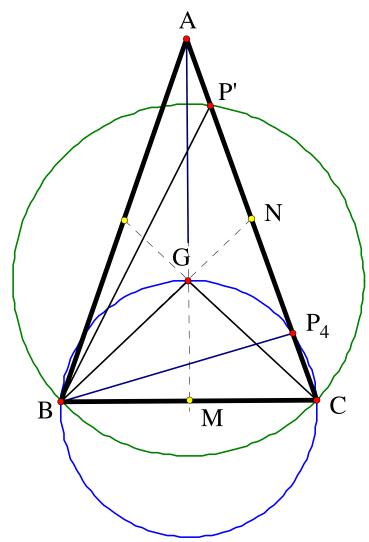
又$\because \overline{GP'}=\overline{GB}$ (半徑)，$\therefore \overline{P'P_4}=\overline{P_4B}$ ，得

$\overline{P_4B}+\overline{P_4C}=\overline{P_4P'}+\overline{AP'}=\overline{P_4A}$ 。 □

(2) $\because \angle BGC=2\angle BP'C=2\angle P'BP_4$

$=\angle BP'C+\angle P'BP_4=\angle BP_4C$ ，

$\therefore BG\,P_4C$ 四點共圓。 □



圖(六)

【性質 4】: 作 $\overline{G'H}\perp\overleftrightarrow{AC}$ 且交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 H，則 $\overline{P_4C}=\overline{CH}$ 。

【證明】: 接續圖(六)的符號，作 $\Delta G'CH$ 的外接圓 O，交圓 G 於 R，令 $\overrightarrow{BG}$ 交圓 G 於 F，$\overleftrightarrow{GP_4}$ 交圓 G 於 E 且交 $\overline{BP'}$ 於 T，如圖(七)；

(1)$\because \angle NGP_4=\angle BGT=\angle P'GT=\angle P_4GR$ ，

$2\angle GBR=\overparen{REF}=\angle RGF=2\angle RGE$ ，

$\therefore \angle RGE=\angle GBR$ ，

$\because \angle GBR = \angle BRG (\because \overline{BG} = \overline{GR})$，

$\therefore \angle RGP_4 = \angle BRG$，

得 $\overline{BR} // \overline{GP_4}$ (內錯角相等)

$\because \overline{TG} // \overline{BR}$，$\overline{P'R} = 2\overline{P'G}$，$\therefore \overline{BR} = 2\overline{TG}$，

故 $\overline{BR} = \overline{GP_4}$，$\therefore$四邊形 BGP_4R 為平行四邊形。

(2) 在四邊形 $BGCG'$ 中，$\because$對角線互相垂直平分，$\therefore$四邊形 $BGCG'$ 為菱形。

(3) 由(1)(2)知，$\because \overline{G'C} = \overline{BG} = \overline{RP_4}$，

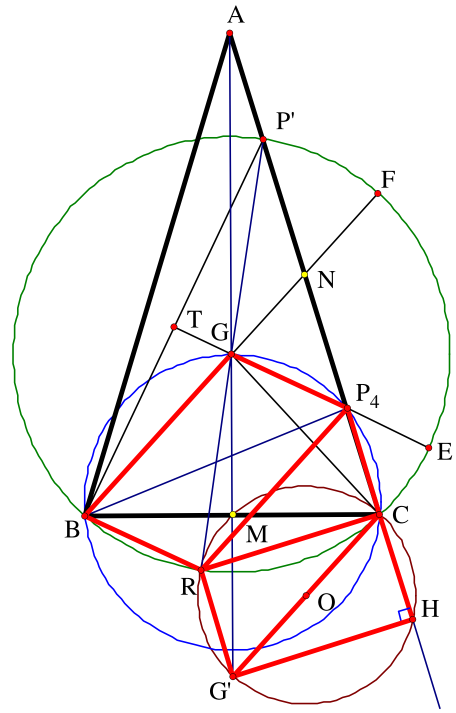
$\overline{G'C} // \overline{BG} // \overline{RP_4}$，$\therefore$四邊形 RP_4CG' 為平行四邊形。

(4) $\because \angle G'RC = \angle RCP' = \angle G'HC = 90°$，

($\because \overline{G'C}$、$\overline{P'R}$ 分別為圓 O、圓 G 的直徑)

$\therefore$四邊形 $RG'HC$ 為長方形。

(5) 由(3),(4)知 $\overline{P_4C} = \overline{RG'} = \overline{CH}$ 。 □



圖(七)

【性質 5】：在圖(七)中，做點 Q_4，使得 H 為 $\overline{P_4Q_4}$ 中點，作 $\overline{BP_4}$ 中點 S，如圖(八)，則

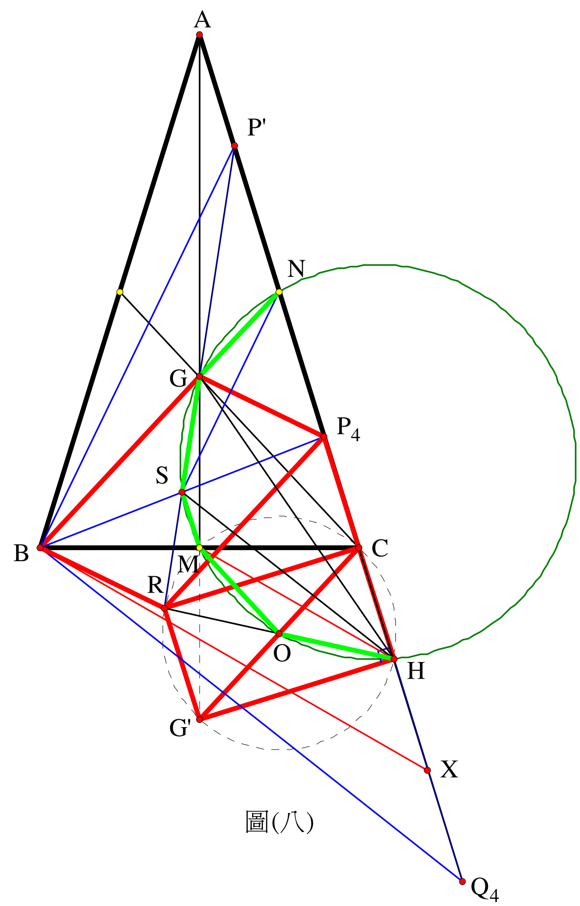
(1) N、G、S、M、O、H 六點共圓；

(2) $\overline{Q_4A} = \overline{Q_4B} + \overline{Q_4C}$ 。

【證明】：(1)$\because S$ 為平行四邊形 BRP_4G 對角線 $\overline{BP_4}$ 的中點，$\therefore$ S 為 $\overline{GR}$ 的中點；

又$\because \overline{GN} = \overline{SG} = \overline{SR}$，$\overline{GN} = \overline{RO} = \overline{OH}$，

$\therefore \Delta GRH$ 為等腰，得 $\angle SGH = \angle OHG$ 。



圖(八)

在ΔGOH，ΔSGH中，$\because \angle SGH=\angle OHG$，$\overline{GH}=\overline{GH}$，$\overline{SG}=\overline{OH}$，

$\therefore \Delta GOH \cong \Delta SGH$ (SAS)，得$\angle GSH=\angle GOH$， 故S、G、O、H四點共圓….①

$\because$四邊形$SMOG$、$GOHN$皆為等腰梯形，

$\therefore$ S、M、O、G四點共圓….②

且G、O、H、N四點共圓….③

由①,②,③知，N、G、S、M、O、H六點共圓(三點決定一圓)。

(2) 由$\overline{SM} // \overline{NH}$可知四邊形$SMHN$為等腰梯形，故對角線$\overline{SH}=\overline{MN}$，

$\because M$、N為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$中點，$\therefore \overline{AB}=2\overline{MN}$；

同理，得$\overline{BQ_4}=2\overline{SH}$，故$\overline{BQ_4}=\overline{AB}$，

又$\overline{AB}=\overline{AC}$，得$\overline{Q_4A}=\overline{AC}+\overline{Q_4C}=\overline{Q_4B}+\overline{Q_4C}$ □

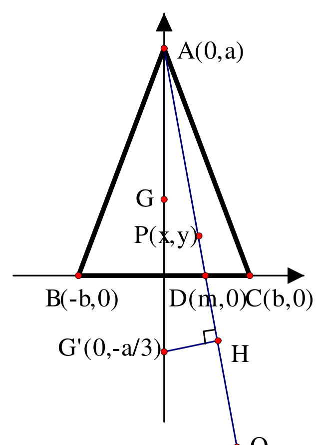
性質 3、性質 4 與性質 5 說明了P_4、Q_4尺規作圖的方法，而且我們也知道$\overline{Q_4C}=3\overline{P_4C}$。

能夠發現N、G、S、M、O、H六點共圓，是經過不斷嘗試錯誤的成果。藉著 GSP 軟體的幫助，提供我們作圖的方便性與準確性，我們可以大膽猜測，然後馬上驗證，沒有這套軟體，我們勢必要花上更長的時間。

性質 5 說明「若H為$\overline{P_4Q_4}$中點，則$\overline{G'H} \perp \overline{P_4Q_4}$」，底下我們想推廣這個性質。

(二) P與Q的對稱性：

由特殊點的觀察，發現若P、Q兩點在$\overleftrightarrow{AD}$上，滿足$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{QA}=\overline{QB}+\overline{QC}$，且$H$是$\overline{PQ}$中點，則有$\overline{G'H} \perp \overline{PQ}$的現象，如圖(九)。



圖(九)

以下利用解析法，證明我們的猜測。

如圖(九)，設$A(0,a), B(-b,0), \quad C(b,0), G'(0,-\dfrac{a}{3})$，

$D(m,0)$是x軸上的動點，$P(x,y)$是$\overleftrightarrow{AD}$上滿足

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$ 的點。利用直線$\overleftrightarrow{AD}$參數式，

設$\overrightarrow{AP}=t\ \overrightarrow{AD}$，則$P(mt,a-at)$，注意此時$t>0$：

由$\overline{PA}-\overline{PB}=\overline{PC}\Rightarrow\sqrt{(m^2+a^2)t^2}-\sqrt{(mt-b)^2+(a-at)^2}=\sqrt{(mt+b)^2+(a-at)^2}$

兩邊平方$\Rightarrow(m^2+a^2)t^2+(mt-b)^2+(a-at)^2-2\sqrt{(m^2+a^2)t^2}\sqrt{(mt-b)^2+(a-at)^2}$

$=(mt+b)^2t^2+(a-at)^2$

$\Rightarrow(m^2+a^2)t^2+(mt-b)^2-(mt+b)^2=2\sqrt{(m^2+a^2)t^2}\sqrt{(mt-b)^2+(a-at)^2}$

$\Rightarrow(m^2+a^2)t^2-4bmt=2\sqrt{(m^2+a^2)t^2}\sqrt{(mt-b)^2+(a-at)^2}$

$\because t>0$，約去t $\Rightarrow(m^2+a^2)t-4bm=2\sqrt{(m^2+a^2)t^2}\sqrt{(mt-b)^2+(a-at)^2}$

兩邊平方，得

$(m^2+a^2)^2t^2-8bm(m^2+a^2)t+16b^2m^2=4(m^2+a^2)[(m^2+a^2)t^2-2bmt-2a^2t+b^2+a^2]$

整理可得 $3(m^2+a^2)^2t^2-8a^2(m^2+a^2)t+4(m^2+a^2)(b^2+a^2)-16b^2m^2=0\ldots\ldots(*)$

設δ是二次方程式$(*)$的判別式，

$\delta=[8a^2(m^2+a^2)]^2-4\cdot3(m^2+a^2)^2[4(m^2+a^2)(b^2+a^2)-16b^2m^2]^2$

$=64a^4(m^2+a^2)^2-48(m^2+a^2)^3(b^2+a^2)+192b^2m^2(m^2+a^2)^2$

$=16(m^2+a^2)^2(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)$

得方程式$(*)$的解 $t=\dfrac{8a^2(m^2+a^2)\pm4\sqrt{(m^2+a^2)^2(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)}}{6(m^2+a^2)^2}$

$=\dfrac{4a^2\pm2\sqrt{(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)}}{3(m^2+a^2)}$

設$t_P=\dfrac{4a^2-2\sqrt{(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)}}{3(m^2+a^2)}$、$t_Q=\dfrac{4a^2+2\sqrt{(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)}}{3(m^2+a^2)}$，而$t_H=\dfrac{t_P+t_Q}{2}$，

我們得到圖(九)中P、Q的座標分別為$(mt_P,a-at_P)$、$(mt_Q,a-at_Q)$，而$\overline{PQ}$中點H的座標

為$(mt_H,a-at_H)=(\dfrac{4ma^2}{3(m^2+a^2)},a-\dfrac{4a^3}{3(m^2+a^2)})$，又$G'(0,-\dfrac{a}{3})$，利用向量內積，

$\overrightarrow{G'H}\cdot\overrightarrow{AH}=(\dfrac{4ma^2}{3(m^2+a^2)},\dfrac{4am^2}{3(m^2+a^2)})\cdot(\dfrac{4ma^2}{3(m^2+a^2)},\dfrac{-4a^3}{3(m^2+a^2)})$

$$=\frac{16m^2a^2}{9(m^2+a^2)^2}+\frac{-16m^2a^2}{9(m^2+a^2)^2}=0，$$

故 $\overline{G'H}\perp\overline{AH}$ ，證畢。 □

觀察方程式(∗)的判別式 $\delta=16(m^2+a^2)^2(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)$ ，因爲我們假設頂角 $\angle A<60°$，即 $a^2-3b^2>0$ ，所以方程式(∗)要有解，條件是 $a^2-3m^2>0$ ，亦即 $D(m,0)$必須在 $\overline{P_1P_2}$ 上(圖(二))，注意，因爲 ΔAP_1P_2 是正三角形。

(三) P、Q 的尺規作圖：

從方程式(∗)的解只牽涉開平方，我們就知道 P、Q 的尺規作圖是可行的，但是直接利用 t_P 、 t_Q 作圖似乎較複雜。我們發現利用 $\frac{\overline{PH}}{\overline{DH}}$ 、 $\frac{\overline{QH}}{\overline{DH}}$ 兩比值，可以有簡單的作圖法。

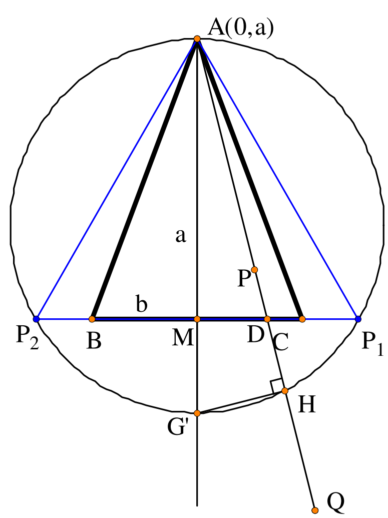
由 P、Q、D、H 的參數 t_P 、 t_Q 、1、 t_H ，

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=\frac{t_H-t_P}{t_H-t_D}=\frac{2\sqrt{(a^2-3b^2)(a^2-3m^2)}}{4a^2-3(m^2+a^2)}=2\frac{\sqrt{a^2-3b^2}}{\sqrt{a^2-3m^2}}。$$

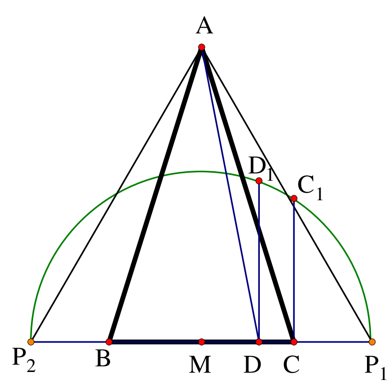
觀察圖(十)，因爲 ΔAP_1P_2 是正三角形，所以 $\overline{P_1M}=\overline{P_2M}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ ，得

$$a^2-3b^2=3(\frac{a}{\sqrt{3}}-b)(\frac{a}{\sqrt{3}}+b)=3(\overline{P_1M}-\overline{CM})(\overline{P_2M}+\overline{CM})=3\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_2}，$$

$$a^2-3m^2=3(\frac{a}{\sqrt{3}}-m)(\frac{a}{\sqrt{3}}+m)=3(\overline{P_1M}-\overline{DM})(\overline{P_2M}+\overline{DM})=3\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}，$$



圖(十)

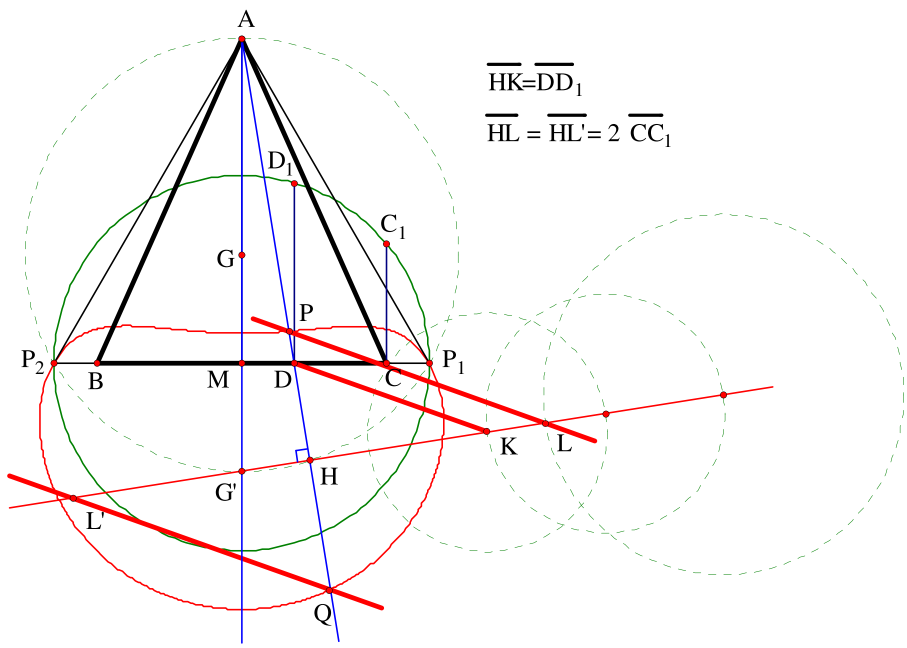


圖(十一)

故$\dfrac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=2\sqrt{\dfrac{\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_2}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}}}$。$\because \overline{QH}=\overline{PH}$，$\therefore \dfrac{\overline{QH}}{\overline{DH}}=2\sqrt{\dfrac{\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_2}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}}}$。

至於$\sqrt{\dfrac{\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_2}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}}}$的作圖，只要利用一般的根式作圖(圖(十一))，以$\overline{P_1P_2}$爲直徑作半圓，分別過$C$、$D$做直線垂直$\overline{P_1P_2}$，假設與半圓交於$C_1$、$D_1$，則$\dfrac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=\dfrac{\overline{QH}}{\overline{DH}}=2\sqrt{\dfrac{\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_2}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}}}=\dfrac{2\overline{CC_1}}{\overline{DD_1}}$。

總結以上的討論，P、Q的尺規作圖如下(圖(十二))：



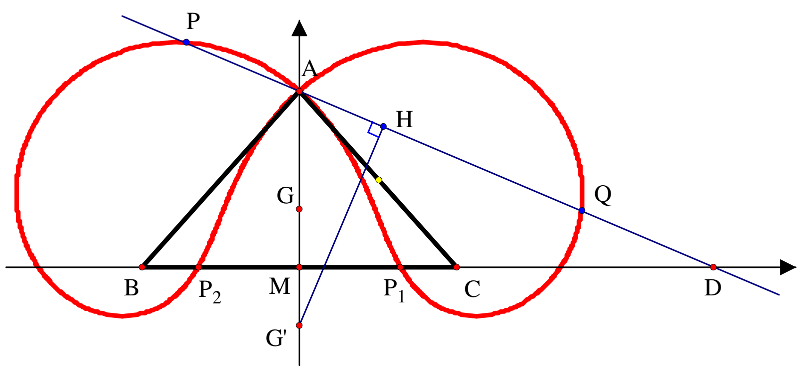
圖(十二)

圖(十二)中，$\overline{HK}=\overline{DD_1}$，$\overline{HL'}=\overline{HL}=2\overline{CC_1}$且$\overline{DK}\,//\,\overline{PL}\,//\,\overline{QL'}$，從圖中也可看出四邊形PLQL’爲菱形。

(四) 頂角$\angle A>60°$時：

(1) 在推導二次方程式(＊)時，曾經將方程式做了兩次平方，因此方程式(＊)其實也包含$\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PC}$與$\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$兩條件的解。 當$\angle A<60°$時，這兩個條件是無解的(除了$A$點)，而當$\angle A>60°$時，滿足方程式(＊)的解所成的圖形$\Gamma$，則有左右兩葉。其中右葉

上的點 P，滿足 $\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PC}$；左葉上的點 P，滿足 $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$。檢視方程式(＊)的判別式：$\delta=16(m^2+a^2)^2\,(3b^2-a^2)\,(3m^2-a^2)$，因為 $\angle A>60°$ 時，有 $3b^2-a^2>0$，所以方程式(＊)要有解，條件是 $3m^2-a^2>0$，亦即 $D(m,0)$ 必須在 $\overline{P_1P_2}$ 之外，即兩射線 $\overrightarrow{P_1C}$、$\overrightarrow{P_2B}$ 上(圖(十三))。



圖(十三)

而方程式(＊)的兩根可寫成

$$t_P=\frac{4a^2-2\sqrt{(3b^2-a^2)(3m^2-a^2)}}{3(m^2+a^2)}\text{、}t_Q=\frac{4a^2+2\sqrt{(3b^2-a^2)(3m^2-a^2)}}{3(m^2+a^2)}$$

，這裡 t_P、t_Q 可能小於 0，例如圖(十三)中 $t_P<0$ 而 $t_Q>0$。同樣的，作 $\overline{G'H}\perp\overleftrightarrow{AD}$ 且交 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 H，可以證明 H 是 $\overline{PQ}$ 的中點。

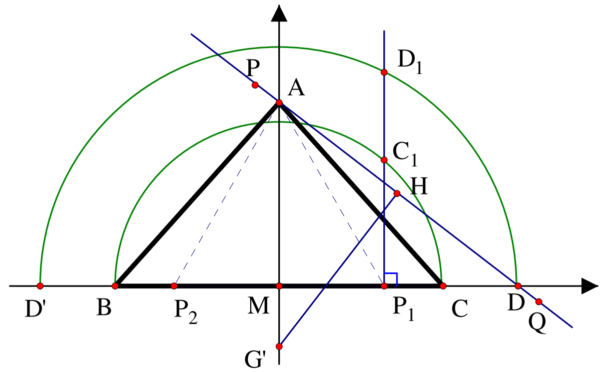
(2) $$\frac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=\frac{t_H-t_P}{t_H-t_D}=\frac{2\sqrt{(3b^2-a^2)(3m^2-a^2)}}{3(m^2+a^2)-4a^2}=2\frac{\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3m^2-a^2}}$$ 。

觀察圖(十四)，$\overline{DM}=\overline{D'M}$，因為 ΔAP_1P_2 是正三角形，所以 $\overline{P_1M}=\overline{P_2M}=\frac{a}{\sqrt{3}}$，得

$$3b^2-a^2=3(b-\frac{a}{\sqrt{3}})(b+\frac{a}{\sqrt{3}})=3(\overline{CM}-\overline{P_1M})(\overline{BM}+\overline{P_1M})=3\overline{CP_1}\cdot\overline{BP_1}\text{，}$$

$$3m^2-a^2=3(m-\frac{a}{\sqrt{3}})(m+\frac{a}{\sqrt{3}})=3(\overline{DM}-\overline{P_1M})(\overline{D'M}+\overline{P_1M})=3\overline{DP_1}\cdot\overline{D'P_1}\text{，}$$

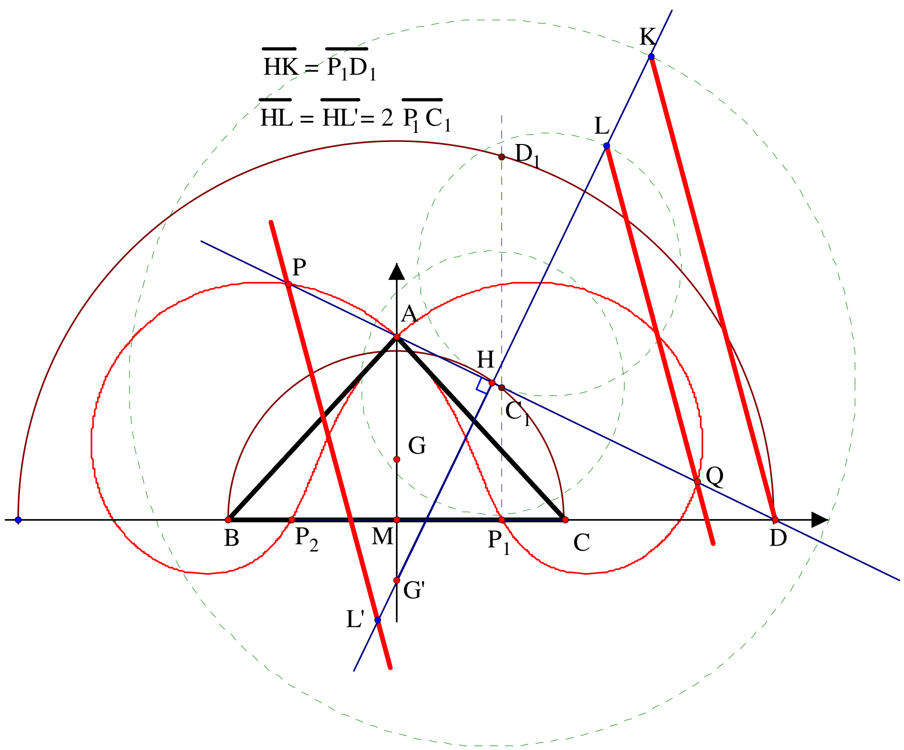
分別以 $\overline{BC}$、$\overline{DD'}$ 為直徑作兩半圓，過 P_1 作直線垂直 $\overleftrightarrow{BC}$，與前兩半圓各交於 C_1、D_1，



圖(十四)

可得 $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=2\dfrac{\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3m^2-a^2}}=2\sqrt{\dfrac{\overline{CP_1}\cdot\overline{BP_1}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{D'P_1}}}=\dfrac{2\overline{P_1C_1}}{\overline{P_1D_1}}$，同理 $\dfrac{\overline{QH}}{\overline{DH}}=\dfrac{2\overline{P_1C_1}}{\overline{P_1D_1}}$。

總結以上討論，P、Q 的尺規作圖如下(圖(十五))：



圖(十五)

圖(十五)中，$\overline{HK}=\overline{P_1D_1}$，$\overline{HL'}=\overline{HL}=2\overline{P_1C_1}$ 且 $\overline{DK}//\overline{PL'}//\overline{QL}$，從圖中也可看出四邊形 PLQL’爲菱形。

四、研究結論：

ΔABC 是等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$P$ 是平面上任一點，本文在討論滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$ 或 $\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{PA}$ 或 $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$ 的 P 點的性質。

我們首先在尺規作圖上得到一些還不錯的成果(性質 3、4、5)，接著以解析法得到更進一步的結果，我們將這些結果整理成下列幾點：

1. 當頂角 $\angle A=60°$，ΔABC 是等邊三角形，則 $\overline{PA}\le\overline{PB}+\overline{PC}$ 、 $\overline{PB}\le\overline{PC}+\overline{PA}$ 、 $\overline{PC}\le\overline{PA}+\overline{PB}$；且當 P 在 ΔABC 的外接圓上時，有一等號成立。這是 van Schooten 定理 。

2. (1)當頂角 $\angle A<60°$，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$ 的所有 P 點的圖形是封閉曲線 Γ (圖(二))；若 P 點在 Γ 的內部則 $\overline{PA}>\overline{PB}+\overline{PC}$，若 P 點在 Γ 的外部則 $\overline{PA}<\overline{PB}+\overline{PC}$。且除了 A 點以外，平面上所有 P 點都滿足 $\overline{PB}<\overline{PC}+\overline{PA}$ 、 $\overline{PC}<\overline{PA}+\overline{PB}$。

   (2) G 是 ΔABC 的重心，G'是 G 關於 $\overline{BC}$ 的對稱點。令 D 是 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的點，若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與曲線 Γ 有兩個交點 P、Q，且 H 是 $\overline{PQ}$ 中點，則 $\overline{G'H}\perp\overline{PQ}$。

   (3) 設 P_1 、 P_2 是 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的點，且 ΔAP_1P_2 是正三角形。P、Q、H 如(2)所述，則

   $$\frac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{QH}}{\overline{DH}}=2\sqrt{\frac{\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_2}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}}}$$ 。

3. (1)當頂角 $\angle A>60°$，平面上所有 P 點都滿足 $\overline{PA}<\overline{PB}+\overline{PC}$。滿足 $\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{PA}$ 或 $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$ 的所有 P 點的圖形是封閉曲線 Γ，曲線 Γ 有左右兩葉(圖(三))；若 P 點在右葉(包含 C 點，滿足 $\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{PA}$)的內部，則 $\overline{PB}>\overline{PC}+\overline{PA}$，若 P 點在右葉的外部，則 $\overline{PB}<\overline{PC}+\overline{PA}$。若 P 點在左葉(包含 B 點，滿足 $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$)的內部，則 $\overline{PC}>\overline{PA}+\overline{PB}$，若 P 點在左葉的外部，則 $\overline{PC}<\overline{PA}+\overline{PB}$。

(2) G 是 ΔABC 的重心，G' 是 G 關於 $\overline{BC}$ 的對稱點。令 D 是 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的點，若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與曲線 Γ 有兩個交點 P、Q，且 H 是 $\overline{PQ}$ 中點，則 $\overline{G'H} \perp \overline{PQ}$。

(3) 設 P_1、P_2 是 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的點，且 ΔAP_1P_2 是正三角形，D' 是 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的點，且 $\Delta ADD'$ 是等腰三角形，P、Q、H 如(2)所述，則 $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{DH}}=\dfrac{\overline{QH}}{\overline{DH}}=2\sqrt{\dfrac{\overline{CP_1}\cdot\overline{BP_1}}{\overline{DP_1}\cdot\overline{D'P_1}}}$。

五、討論：

我們先前利用作圖的方法證明性質 5 圖(八)，後來也知道也可以利用三角函數來證明性質 5。在圖(十六)中，令 $\overline{AB}=\overline{AC}=c$，$\overline{P_4C}=x$，$\angle A=\theta$，

則 $\overline{P_4A}=c-x$，$\overline{P_4B}=c-2x$，

再利用餘弦定理可列出方程式

$$(c-2x)^2=c^2+(c-x)^2-2c(c-x)\cos\theta$$

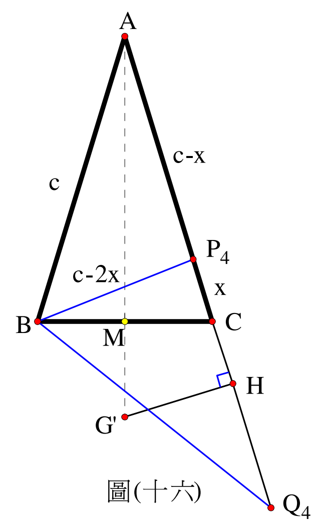
$\Rightarrow -4x(c-x)=(c-x)^2-2c(c-x)\cos\theta$，

若 $x\neq c$，可約去 $(c-x)$，

得到 $x=\dfrac{c}{3}(2\cos\theta-1)$，$\cos\theta=\dfrac{c+3x}{2c}$，

此時 Q_4 可用 $\cos\theta$ 求出，因為 $\overline{Q_4B}=\overline{AB}$，故可算出

$\overline{AQ_4}=2c\cdot\cos\theta=c+3x$，因此



圖(十六)

(1) $\overline{Q_4C}=3x=3\overline{P_4C}$。

(2)令 H 在 $\overline{AQ_4}$ 上，且 $\overline{G'H}\perp\overline{AQ_4}$，

$$\because \overline{AM}=c\cdot\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \overline{AG'}=\frac{4}{3}\overline{AM}=\frac{4}{3}c\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \overline{AH}=\overline{AG'}\cdot\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{3}c\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{4}{3}c\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)=\frac{2}{3}c(1+\cos\theta)$$

又 $\because \overline{AP_4}=c-x, \overline{AQ_4}=c+3x$，

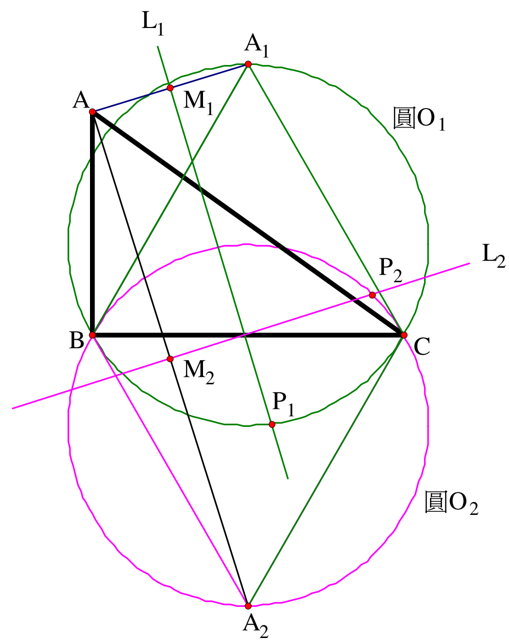
$$\therefore \quad \frac{\overline{AP_4}+\overline{AQ_4}}{2}=c+x=c+\frac{c(2\cos\theta-1)}{3}=\frac{2}{3}c(\cos\theta+1)=\overline{AH} \text{ 。}$$

這證明了 H 爲 $\overline{P_4Q_4}$ 中點。

六、展望：

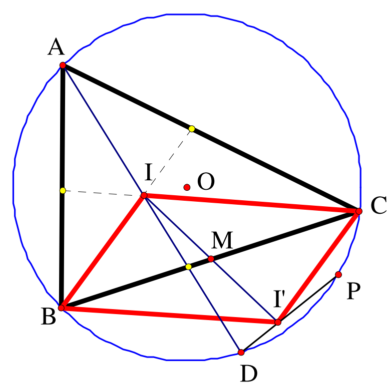
本文是將 van Schooten 定理中的等邊三角形條件改成等腰三角形而得。當然，對於一般的三角形，會有什麼樣的結果，也是我們感興趣的。

給定ΔABC，以$\overline{BC}$爲一邊作正ΔA_1BC與正ΔA_2BC，如圖(十七)所示，圓O_1是ΔA_1BC的外接圓、圓O_2是ΔA_2BC的外接圓，L_1是$\overline{AA_1}$的中垂線、L_2是$\overline{AA_2}$的中垂線，P_1是L_1與圓O_1的一個交點(在$\overset{\frown}{BC}$上)，P_2是L_2與圓O_2的一個交點(在$\overset{\frown}{BC}$上)，由 van Schooten 定理容易知道$\overline{P_1A}=\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$且$\overline{P_2A}=\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$。同理，利用$\overline{AC}$或$\overline{AB}$爲一邊作正三角形，也可作出特別的$P$點。



圖(十七)

我們也在網路上找到一個高明的作圖【7】，如圖(十八)：圓O是ΔABC的外接圓，I是ΔABC的的內心，直線$\overleftrightarrow{AD}$交圓O於D，M爲$\overline{BC}$中點，$\overline{MI}=\overline{MI'}$，若直線$\overleftrightarrow{DI'}$交圓$O$於$P$，則$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$。上面的作法，說明對於一般的$\Delta ABC$，如何在$\Delta ABC$的外接圓上找到滿足$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$的點，我們希望可以從這個作圖法得到一些靈感，但是時間有限，只好留待以後研究。



圖(十八)

七、參考資料：

【1】曹亮吉(民 77)，數學導論，科學月刊社，pp 48－53

【2】張澄清(民 85)，托勒密幾何定理及運用，凡異出版社

【3】余文卿、吳志揚主編(民 92)，幾何學(上)，龍騰文化事業公司，p. 8

【4】J. Sándor(2005)：On the Geometry of Equilateral Triangles，Forum Geometricorum Volumn 5，pp 107－117

【5】Smith,J.D(1996)：Ptolemaic Inequalities,*Geom, Dedicata* **61**, pp 181－190

【6】Bui Quang Tuan(2009)：An Extension of van Schooten's Theorem，http：//www.cut-the-knot.org/pythagoras/PointOnCircumcircle2.shtml

【7】http://www.mjtd.com/bbs/dispbbs.asp?boardID=37&ID=72065&page=2

【評語】040407

1、 取材自然，利用綜合幾何或三角函數處理基本問題。

2、 利用解析法解題，得到一些特別點的尺規做圖。

3、 唯基本初級綜合幾何之說明技術欠佳。