中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第一名

040406

小丑的秘密-循環跳躍的數列

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳珮珮 高二 郭懿慧 高二 黃映親	黃哲男

關鍵詞：Juggling Sequence、週期數列、數論

摘要

小丑手裡拿著各式各樣的球以五花八門的手法自在的拋接，在這樣拋接球的過程中，隱藏著奧妙的數學問題。若將拋接球的動作以數列的方式表示，則稱該數列稱爲《Juggling Sequences》，此數列不僅可以簡單的方法，辨別出小丑拋接球時所持的球數以及所丟的高度，更可表達各種拋接球的方式。

由於小丑拋接球時，球不能在同一時間落地，因此 Juggling Sequences 所代表的必須爲連續動作。固定週期與球數後，透過數列構成條件的探討，得到如下結果：

1. 當 $n < b$ 時，數列數之下界估計：$J_{\min}(b,n) = n!,\ \ \forall n < b$

2. 當 $n \geq b$ 時，數列數之下界估計：$J_{\min}(b,n) = (b+1)^{n-b} \times b!$ ，$\forall n \geq b$

3. 數列數之上界估計：

   $$J_{\max}(b,n) = \left\{\left[H_{bn}^{n} - \left(H_{bn\text{-}1}^{n\text{-}2} + H_{bn\text{-}3}^{n\text{-}2} + H_{bn\text{-}5}^{n\text{-}2} + \ldots + H_{\alpha}^{n\text{-}2}\right) - 1\right] \div n\right\} + 1,\ n\text{-}2 \leqq \alpha < n$$

4. 兩 Juggling Sequences T_A 與 T_B 可連接成一個新的 Juggling Sequences 的充要條件爲 $\sigma_A = \sigma_B$。

此外，由圖形可討論出三種多維丟球的丟法：

(1) 將 Juggling Sequences 由二維推廣成三維，在有 b 顆球的情形下，可將之推廣爲 $p\ (p \in N)$ 個人同時丟球。

(2) p 個人各以 b 個球依循不同的 Juggling Sequences（週期不一定相同）丟球，在丟球方向及球數固定的條件下，則 p 爲任意正整數。

(3) 若有 p 個人及 p 個球，每一個球都依循各自的 Juggling Sequences 運動，則此 p 個人可無限循環拋接此 p 個球。

壹、 研究動機

我們一直覺得小丑丟球是具有規律性的，那些球在空中停留的時間以及落下的時刻是具有某種數學模式，藉著這次科展的機會，我們得以對我們好奇也困惑已久的問題展開深入的研究與探討，於是找來了很多資料，發現這個動作的背後隱藏著十分有趣的數學問題。

貳、 研究目的

小丑丟球可以有各式各樣千奇百怪、五花八門的丟法以吸引觀眾的目光，在這麼多種丟法中，我們可以從中找到規律性，進一步將之歸納成數列。這些數列，我們稱之為 Juggling Sequences。

又，若已知每拋一次球，球在空中停留的時間，即一個 Juggling Sequences，小丑到底丟了幾個球便會成為一個有趣的問題，這也是我們想要去挖掘的答案。而在一切條件（如：球數、週期）固定的情況下，小丑能變出幾種花樣更是一個值得探討的問題。

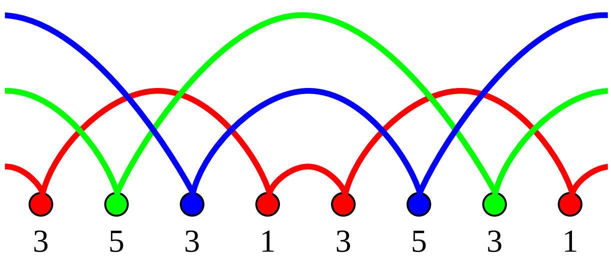
参、 研究問題

一、名詞定義

（一）時間(t_i)：球在空中停留的時間，即球自離開手至再次落回手中所經過的時間，又 i 為拋出時間點。如下圖，$t_1=3$，$t_2=5$，$t_3=3$，$t_4=1$。

（二）球數(b)：小丑拋球時所用到球的數量，我們以b表示之。

（三）週期(n)：球在空中停留時間所形成的數列$T=\langle t_1,t_2,t_3,\ldots\ldots,t_n\rangle$，循環一次所丟出球的次數，以$n$表示。



圖一：三顆球、週期為四的 Juggling Sequences（即$T=\langle 3,5,3,1\rangle,b=3,n=4$）

二、基於上述研究目的及名詞定義，我們的研究問題如下：

（一）怎樣的數列才可稱之為 Juggling Sequences？
（二）如何由一已知的 Juggling Sequences 求出它的球數？
（三）如何求出一指定球數和指定週期的 Juggling Sequences 數量？
（四）不同的 Juggling Sequences 是否可用何種方式組合？
（五）多隻手的丟球是否也有類似的表現方式？

肆、 研究過程

一、Juggling Sequences 的定義

Juggling Sequences 是一串有特定循環規律的數列。命名的由來則是小丑拋球，也因此若將這種數列繪製成圖將可形成一連續跳躍的形式。我們可以用以下一些圖片做更清楚的解釋。

如上述例子，取一數列$T=\langle 3,5,3,1\rangle$，其中定義$n=4$、$b=3$，則可知這是一個使用三顆球、週期為四的 Juggling Sequence。

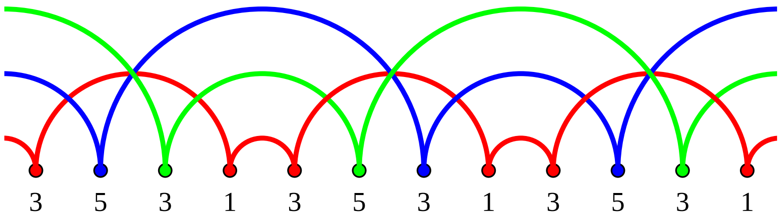


圖 1-1：三顆球、週期四的 Juggling Sequences 範例一（即$T=\langle 3,5,3,1\rangle, b=3, n=4$）

上圖 1-1 中，紅、藍、綠分別代表三顆球，拋物線表示該球離開小丑的手後在空中停留的時間和高度的示意。當然，我們是以物理運動學中的$x-t$圖的方式呈現這些拋物線（實際上小丑拋球所做的運動是鉛直上拋而非斜向拋射）。

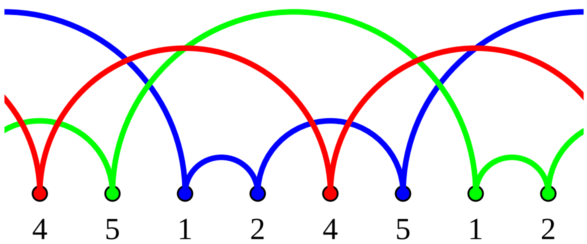


圖 1-2：三顆球、週期四的 Juggling Sequences 範例二（即$T=\langle 4,5,1,2\rangle, b=3, n=4$）

從圖1－1及圖1－2中，我們可以發現每顆球的軌跡都是連續不斷的，也就是：

（性質 1）Juggling Sequences 的首要條件是它必須要連續「跳躍」不間斷。

因故，像是$T=\langle 3,4,1,2\rangle$便不構成一個 Juggling Sequence。

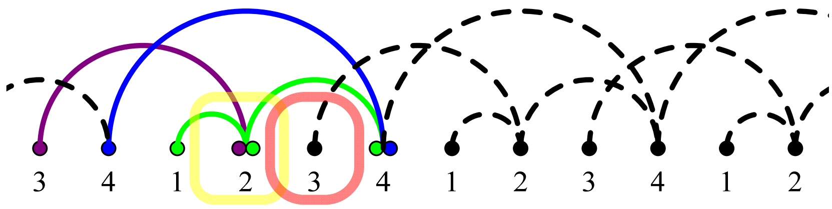


圖 1-3：不構成 Juggling Sequences 的例子

如上圖1－3中的紅色方框標示的地方（放大如下圖1－4），數字3代表的是第二次循環的第一個時間點，但因爲沒有任何一顆在第一次循環中拋出的球落在該時間點，所以此數列並沒有「跳躍」的動作，因此不構成 Juggling Sequences。

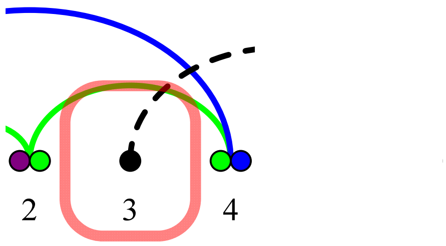
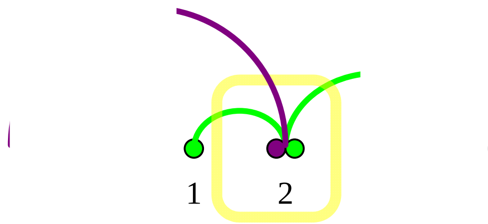


圖 1-4：$x-t$ 圖不連續（沒有球落在$t_5=3$的時間點）

另外，因爲我們所研究的 Juggling Sequences 是建立在小丑只用一隻手拋球的情況，因故我們可以得知 Juggling Sequences 的另一項特點：

（性質 2）同一個時間點不能有兩顆球落地。

所以由圖 1-3 的例子$T=\langle 3,4,1,2\rangle$可知，黃色方框標示處（放大如下圖1－5）出現問題了。在第一個時間點出發的紫色球（$t_1=3$）和在第三個時間點出發的綠色球（$t_3=1$）同樣落在第四個時間點（$t_4=2$）上。兩顆球相撞，小丑就沒辦法再繼續拋球了。



圖$1-5$：兩顆球同時落在$t_4=2$的時間點

二、Juggling Sequences 的檢驗方法

由性質二，我們也可以找到一個檢驗該數列是否爲 Juggling Sequences 的方法。

設拋球的時間間隔是1，初始時間是0，我們可以從性質二發現：因爲兩球不能在同一時間點落地，所以第一顆球停留在空中的時間t_1加上一個時間間隔1不能等於第二顆球在空中停留的時間t_2加上兩個時間間隔2，同理類推。

因此上述說明便可以下式表示之：

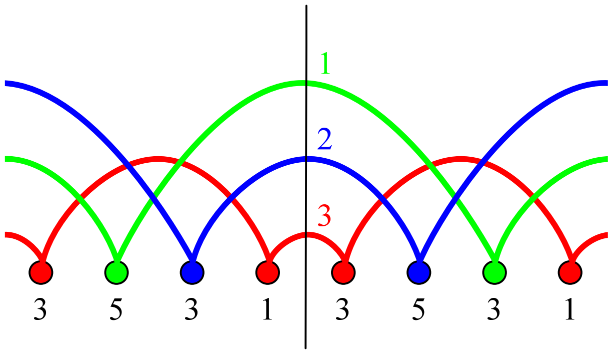
$$\boxed{t_i+i\neq t_m+m \quad \text{其中}\ i,m\ \text{皆爲不等於零的正整數。}}$$

歸納上述，我們已經得知 Juggling Sequences 的定義，以及如何檢驗一數列是否爲 Juggling Sequences 的方法。

三、由一已知的 Juggling Sequences 求出球數

若將 Juggling Sequences 以$x-t$圖來表示，且在兩週期之間對時間軸畫一條鉛直線，則此一鉛直線會與b條弧線相交：因爲 Juggling Sequences 爲一具規律性且不斷循環的數列，所以某一週期結束時，必有且恰好有b顆球進入下一週期，以重複循環。

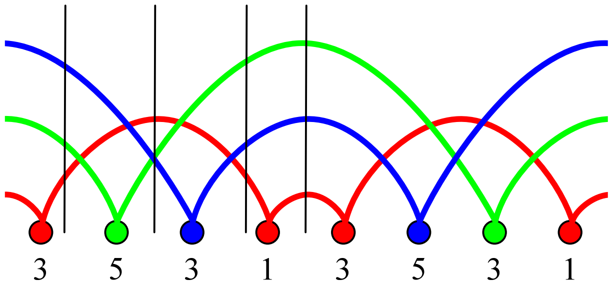
如圖$3-1$，$T=\langle 3,5,3,1\rangle$，在兩週期間的鉛直線與三條弧線相交，可得知此 Juggling Sequences 有三顆球。



圖$3-1$：$T=\langle 3,5,3,1\rangle$，在t_4與t_5間的鉛直線與三條弧線相交

又因爲 Juggling Sequences 爲一無限循環之數列，所以對某 Juggling Sequences 而言，從任一時間點切入來看，皆可視爲同一型態。因此事實上，對於任意兩相臨時間點，其間的一條鉛直線皆會與b條弧線相交。

如圖$3-2$，在$\langle t_i,t_{i+1}\rangle=\langle 3,5\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle$間之鉛直線各與三條弧線相交。



圖$3-2$：從任一時間點切入來看，皆爲$n=4$的 Juggling Sequences

且已知在空中停留時間爲t_i的球，在$x-t$圖之時間軸上，會形成t_i個時間間隔，即與t_i條鉛直線各相交於一點，共t_i個交點。則可推得：總交點數$\sum_{i=1}^{n}t_i$對於鉛直線個數n之平均值即爲球數b。我們將之表示成 $\boxed{b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}}$。例如$T=\langle 3,5,3,1\rangle$，由上式可知$b=\dfrac{3+5+3+1}{4}=3$

另外，也能以此種求出球數的方法來驗證某一數列是否爲 Juggling Sequences：已知$b\in N$，所以 $\boxed{\text{當 } b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}\notin N \text{ 時，我們得知此種球數不存在，即此數列非 Juggling Sequences。}}$

例如$T=\langle 3,4,1,2\rangle$，由公式可得$b=\frac{3+4+1+2}{4}=\frac{5}{2}$，則此數列非 Juggling Sequences。又如圖 3-3，可看出在某一時間點有兩顆球同時落下，此 Juggling Sequences 確實不存在。

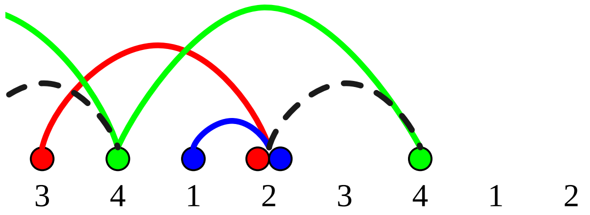


圖3−3：$b \notin N$ 的例子

歸納上述，我們已知一可行的求算球數方法。

四、Juggling Sequences 的σ

爲方便接下來的討論，我們定義每一數列可對應另一由 0 和 1 所構成的數列σ，代表任一 Juggling Sequence 在拋出所有球之後的下一個週期各時間點球落下的情況，如下圖。其中在某時間點若有球落下便以 1 表示，沒有則以 0 表示，寫至空中之球完全落下爲止，並且 T 的σ以σ_T表示。

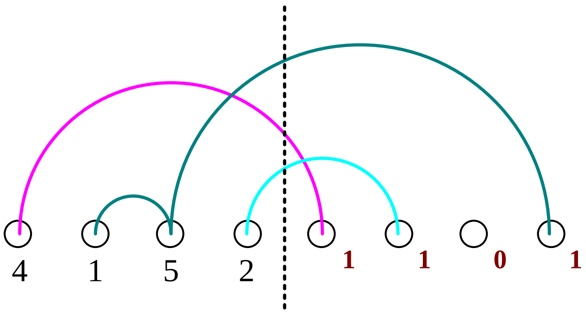


圖4−1： $T=\langle 4,1,5,2\rangle$， $\sigma_T=\langle 1,1,0,1\rangle$

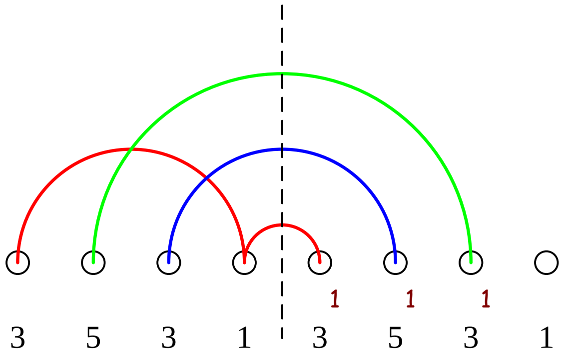


圖4−2：$T=\langle 3,5,3,1\rangle$， $\sigma_T=\langle 1,1,1\rangle$

五、一指定球數和指定週期的 Juggling Sequences 估計數量

欲探討在固定球數與週期固定之情況下符合條件之 juggling sequences 數量，我們定義週期爲n，球數爲b的 Juggling Sequences 個數爲$J(b,n)$，上界估計數量爲$J_{Max}(b,n)$，下界估計數量爲$J_{\min}(b,n)$。

（一）下界估計

分兩種情況討論：

1° 當$n<b$時

令$T'=\langle t_1+1,t_2+2,t_3+3,\cdots,t_n+n\rangle$

由問題一得知：

$t_i+i\neq t_m+m$，先算σ中沒有 0 的情況，條件如右式：$b+1\leq t_i+i\leq b+n$

$\Rightarrow T'\in[b+1,b+n]$

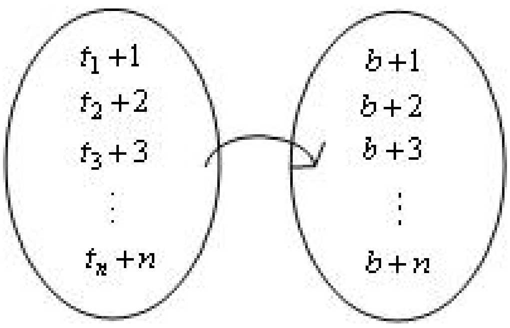


圖 5-1：$T'\in[b+1,b+n]$

$\Rightarrow$ 數列T'的組合方式存在P_n^n種可能

又因$T=\langle t_1,t_2,t_3,\cdots,t_n\rangle$

數列T的組合亦存在P_n^n，$P_n^n=n!$

2° 當$n\geq b$時

令$T'=\langle t_1+1,t_2+2,t_3+3,......,t_n+n\rangle$

由問題一得知：

$t_i+i\neq t_m+m$，又$b+1\leq t_i+i\leq b+n$（一樣先取σ中不含 0 的數列）

$\Rightarrow T' \in [b+1, b+n]$

又 $T = \langle t_1, t_2, t_3, ..., t_n \rangle$，其中 $t_1, t_2, t_3, \cdots\cdots, t_n$ 皆爲非負整數

$\Rightarrow$ $t_i + i \geqq i$

綜合上述條件可得：

$$\left.\begin{array}{l} t_1 + 1 \in [b+1, b+n] \Rightarrow n \text{ 個選擇} \\ t_2 + 2 \in [b+1, b+n] \Rightarrow n \text{ 個選擇} \\ \quad\vdots \\ t_b + b \in [b+1, b+n] \Rightarrow n \text{ 個選擇} \end{array}\right\} \text{共 } b \text{ 項}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_{b+1} + (b+1) \in [b+1, b+n] \Rightarrow n \text{ 個選擇} \\ t_{b+2} + (b+2) \in [b+2, b+n] \Rightarrow (n-1) \text{ 個選擇} \\ \quad\vdots \\ t_{b+(n-b-1)} + b + (n-b-1) \in [b+(n-b-1), b+n] \Rightarrow (b+2) \text{ 個選擇} \\ t_{b+(n-b)} + b + (n-b) \in [b+(n-b), b+n] \Rightarrow (b+1) \text{ 個選擇} \end{array}\right\} \text{共} (n-b) \text{項}$$

$\Rightarrow T' = \langle t_1+1, t_2+2, t_3+3, ..., t_n+n \rangle$ 的組合個數爲：

$$\{[(b+1)-0] \times [(b+2)-1] \times [(b+3)-2] \times \cdots\cdots \times [n-(n-b-1)]\} \times p_b^b = (b+1)^{n-b} \times b!$$

由 $1^{\circ}, 2^{\circ}$ ：

$$\boxed{\begin{cases} J_{\min}(b,n) = n! \ , \ \forall n < b \\ J_{\min}(b,n) = (b+1)^{n-b} \times b! \ , \ \forall n \geq b \end{cases}}$$

（二）上界估計

已知 $t_i + i \neq t_m + m \cdots (a)$, $t_1 + t_2 + ... + t_n = bn \cdots (b)$, $t_i \in \mathrm{N} \cup \{0\} \cdots$ (c)

若先不討論(a)的狀況，則$J(b,n)=H_{bn}^{n}=\dfrac{[bn+(n-1)]!}{(n-1)!(bn)!}$，爲使上界估計準確度增加，我們加入了$t_1+1\neq t_2+2$的條件，故原先的估計需再扣掉$t_1+1=t_2+2$的情況，可得

$J_{\max}(b,n)=H_{bn}^{n}-\left(H_{bn-1}^{n-2}+H_{bn-3}^{n-2}+H_{bn-5}^{n-2}+\ldots+H_{\alpha}^{n-2}\right),\ n-2\leqq\alpha<n$，又$\langle 4,5,1,2\rangle,\langle 5,1,2,4\rangle,\langle 1,2,4,5\rangle,\langle 2,4,5,1\rangle$在小丑丟球的實際情況下是一樣的，故上界估計值爲：

$$\boxed{J_{\max}(b,n)=\left\{\left[H_{bn}^{n}-\left(H_{bn-1}^{n-2}+H_{bn-3}^{n-2}+H_{bn-5}^{n-2}+\ldots+H_{\alpha}^{n-2}\right)-1\right]\div n\right\}+1,\ n-2\leqq\alpha<n}$$

六、Juggling Sequences 的相連接

設兩相異數列T_A，T_B，T_A，T_B之球數相同，討論T_B接於T_A後之情況：

（一） 若數列T_A，T_B之σ相同，顯然兩數列可直接相接，球的數量也不因此而改變，週期則爲T_A，T_B之週期相加，如下圖。

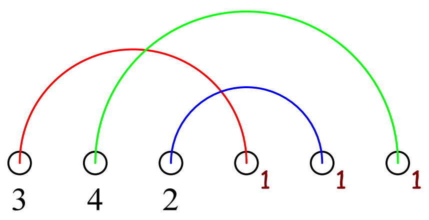


圖6－1： $T_A=\langle 3,4,2\rangle$，$\sigma_A=\langle 1,1,1\rangle$

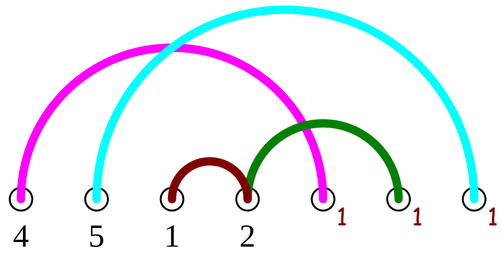


圖6－2：$T_B=\langle 4,5,1,2\rangle$，$\sigma_B=\langle 1,1,1\rangle$

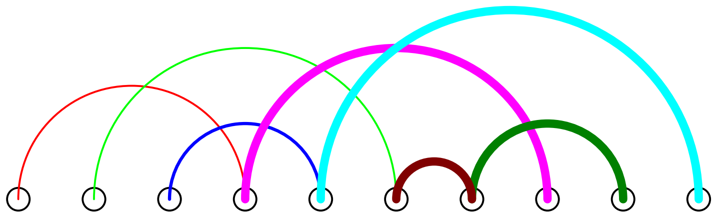


圖 $6-3$：將數列 T_A 和數列 T_B 相連接，$\langle 3,4,2,4,5,1,2\rangle$ 仍爲 Juggling Sequence

（二） 若數列 T_A，T_B 之 σ 不同，因數列 T_A 的落地點與 T_B 的拋球點不相同，T_A，T_B 不能相連接，範例如下：$T_A=\langle 3,1,6,2\rangle$，$\sigma_A=\langle 1,1,0,0,1\rangle$，若要使 T_B 可接在 T_A 之後，T_B 之第四項及第五項必爲 0，但當 T_B 之第四、五項爲 0 時，$\sigma_A=\sigma_B$，與原假設矛盾，故若欲使兩數列可以相接，兩數列之 σ 不可不同。

（三） 上述結論可推廣至任意數量的 Jugglings Sequences 相連接，即只要是 σ 相同的數列，皆可不限次數連接在一起。

七、多隻手 Juggling Sequences 的表示法

（一）將先前所述之 Juggling Sequences 由二維衍生成三維

我們規定一個時間點僅有一隻手動作，且依照 $a_1,a_2,a_3......a_p$ 等 p 隻手之順序循環，並使在任一時間點僅有一球落下。則任一符合先前所述定義之 Juggling Sequences 皆可改爲由 p 隻手所丟出的 Juggling Sequences，循環而不間斷。

以 $T=\langle 3,5,2,2\rangle$ 爲例，它爲 $n=4,b=3$，符合我們所定的條件之 Juggling Sequences

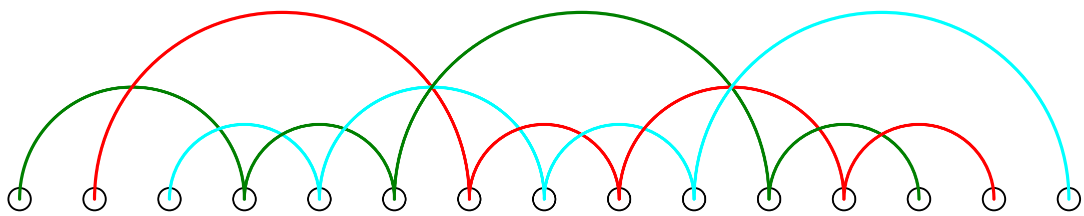


圖 $7-1$：$T=\langle 3,5,2,2\rangle$

若想由三隻手丟出 $T=\langle 3,5,2,2\rangle$ 之 Juggling Sequences，則可將 t_i 分爲 3 組：$i\equiv 1(\bmod 3)$，

$i \equiv 2(\bmod 3)$，$i \equiv 0(\bmod 3)$，並將$t_{i\equiv 1}$排在第一列、$t_{i\equiv 2}$排在第二列、$t_{i\equiv 0}$排在第三列，即將原 Juggling Sequences 的$x-t$圖垂直拉開，$t_1,t_2,t_3,\text{L L},t_n$所代表的意義仍然不變。如圖 7-2

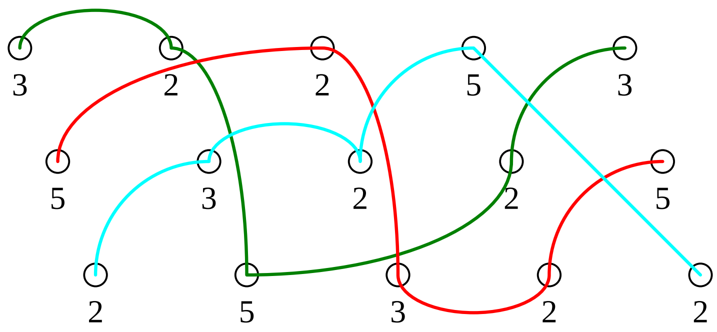


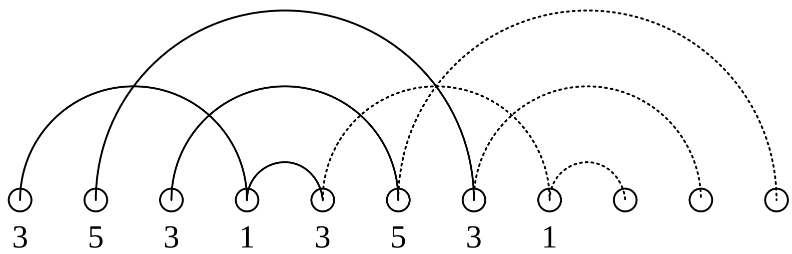
圖 7-2： $T=\langle 3,5,2,2\rangle, p=3$

（二）每人持b顆球，分別以不同的數列丟球

限制：球數b相同。

假設有$a_1,a_2,a_3......a_p$等p個人，為方便討論，我們設定a_1只能將球丟給a_2、a_2只能將球丟給a_3……諸如此類。

以$b=3$的情況為例，假設a_1需丟週期為$T_{a_1}=(3,5,3,1)$的數列、a_2需丟週期為$T_{a_2}=(3,4,2)$的數列、a_3需丟週期為$T_{a_3}=(4,5,1,2)$的數列。則在球數相等的情況下，我們發現，無論哪個週期，在球全部丟出後(a_1丟給a_2、a_2丟給a_3、a_3丟給a_1)每個人會接到前一個人丟來的球，並以接到的球再繼續丟自己的數列，如下圖示。



圖$7-3$： a_1的週期，$T_{a_1}=(3,5,3,1)$。

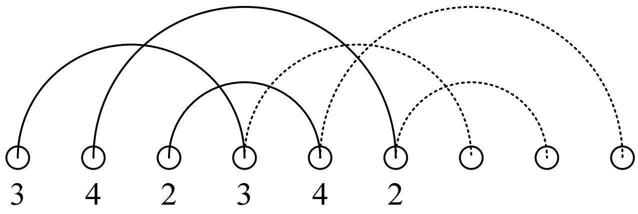


圖 7－4 ： a_2 的週期， $T_{a_2}=(3,4,2)$ 。

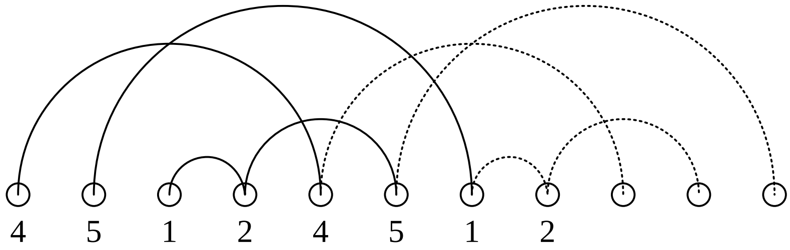


圖 7－5 ： a_3 的週期， $T_{a_3}=(4,5,1,2)$ 。

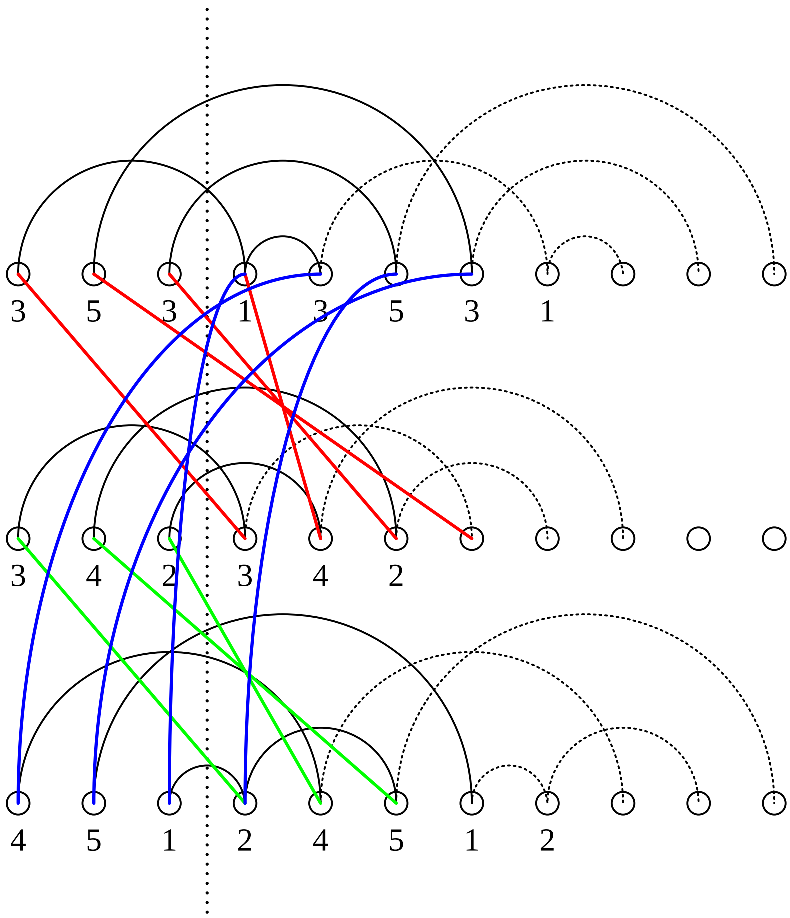


圖 7－6 ：將三者的圖形對齊畫在一起，紅線表 a_1 丟出的球所走的路線、綠線表 a_2 丟出的球所走的路線、藍線表 a_3 丟出的求所走的路線。

（三）每個球有各自的$T=\langle t_1,t_2,t_3,\cdots,t_n\rangle$，可互不相同

有$a_1,a_2,a_3......a_p$等p個人於第一個時間點，各丟出一顆球，共p顆球，且規定a_1只能將球丟給a_2，a_2只能將球丟給a_3⋯⋯，a_{p-1}只能將球丟給a_p，a_p只能將球丟給a_1，如此形成一循環。此表示法雖容許在同一時間點可有至多p顆球落下，但不能大或等於兩顆球同時落在同一隻手。

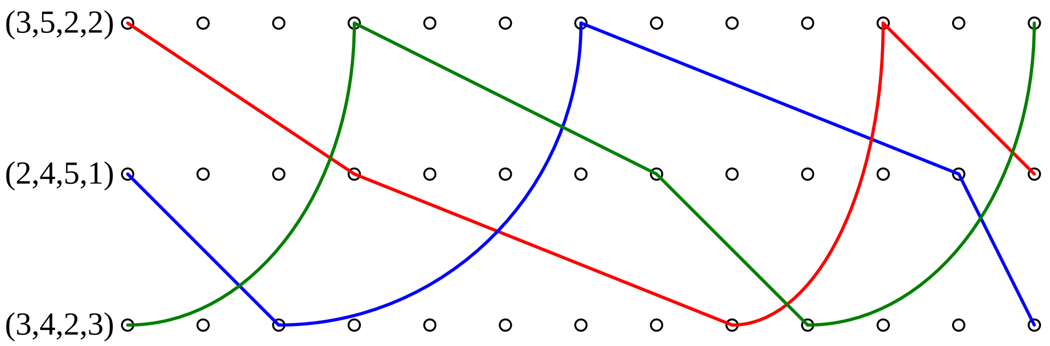
以下圖$T_{b_1}=\langle 3,5,2,2\rangle,T_{b_2}=\langle 2,4,5,1\rangle,T_{b_3}=\langle 3,4,2,3\rangle$為例：

b_1的路徑為$a_1\xrightarrow{3個單位時間}a_2\xrightarrow{5個單位時間}a_3\xrightarrow{2個單位時間}a_1\xrightarrow{2個單位時間}a_2\cdots$，

b_2的路徑為$a_2\xrightarrow{2個單位時間}a_3\xrightarrow{4個單位時間}a_1\xrightarrow{5個單位時間}a_2\xrightarrow{1個單位時間}a_3\cdots$，

b_3的路徑為$a_3\xrightarrow{3個單位時間}a_1\xrightarrow{4個單位時間}a_2\xrightarrow{2個單位時間}a_3\xrightarrow{3個單位時間}a_1\cdots$，

如此b_1,b_2,b_3得以在a_1,a_2,a_3間循環不中斷，根據我們先前所述之 Juggling Sequences 的性質一：Juggling Sequences 的首要條件是它必須要連續「跳躍」不間斷，可以得知此亦為一 Juggling Sequences。



圖$7-7$：
第一列為a_1，第二列為a_2，第三列為a_3
紅線表b_1的軌跡，藍線表b_2的軌跡，綠線表b_3的軌跡
橫軸表時間，如在第四個時間點時，b_3落在a_1手上且b_1落在a_2手上

伍、 結論

在經過簡單的統整之後，我們現在知道 Juggling Sequences 的定義，即它必須要能呈現出有１.連續跳動曲線的$x-t$圖以及２.不能有兩顆球同時落下；另外我們也找出了檢驗數列的方

法，即利用兩顆球不能同時落下的性質求出關係式，也就是$t_i + i \neq t_m + m$，其中i,m屬於正整數。

另外，如何由一已知的 Juggling Sequence 反推出小丑所用的球數，我們在這裡也得到了解決辦法。將 Juggling Sequence 繪成$x-t$圖之後，利用每個週期都會用到相同的球數b這點可以知道，在圖上所畫出的每一條鉛直線與圖形的交點即可視為其球數，於是我們便可以用$b=\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$這樣的等式來表示球數$b$；同時亦利用這點發展出另外一種檢驗 Juggling Sequences 的方法，也就是如果某數列依此法求出來的球數不屬於整數的話，那麼該數列就不會是一個 Juggling Sequence。

並且，在知道球數及週期的情況下，我們運用排列組合的觀念求出了下界估計——當$n<b$時，$J_{\min}(b,n)=n!$，當$n \geq b$時，$J_{\min}(b,n)=(b+1)^{n-b}\times b!$，上界估計——
$J_{\max}(b,n)=\left\{\left[H_{bn}^{n}-\left(H_{bn\text{-}1}^{n\text{-}2}+H_{bn\text{-}3}^{n\text{-}2}+H_{bn\text{-}5}^{n\text{-}2}+\ldots+H_{\alpha}^{n\text{-}2}\right)-1\right]\div n\right\}+1,\ n\text{-}2 \leqq \alpha < n$。

在結合兩數列的部份，我們發現若數列的σ相同，則兩數列可相連接，反之則不可能相連接，即$\sigma_A = \sigma_B \Leftrightarrow$ A, B可連接為一新數列。

此外，由圖形可討論出三種多維丟球的丟法：

(1) 將 Juggling Sequences 由二維推廣成三維，在有b顆球的情形下，可將之推廣為$p\ (p \in N)$個人同時丟球。
(2) p個人各以b個球依循不同的 Juggling Sequences（週期不一定相同）丟球，在丟球方向及球數固定的條件下，則p為任意正整數。
(3) 若有p個人及p個球，每一個球都依循各自的 Juggling Sequences 運動，則此p個人可無限循環拋接此p個球。

陸、 未來展望

我們已可求出給定球數及週期的 Juggling Sequences 個數之上下限，相信未來以電腦程式能逐漸縮小此估計範圍，至得到確切數目。另外，我們也發現一些不同 Juggling Sequences 間的交互關係，如數列相連接，並且我們相信此類特性不在少數，期望未來能發掘更多。目前我們著重於「原始」的 Juggling Sequences，即最簡單、只用一隻手接拋球的方式，然小丑真正表演時，用雙手變化出的花樣是那麼的豐富又難以猜測，因此我們粗略找出幾種可以用來表示之的方法，並試著從兩隻手再推論到多隻手皆適用的表示法，得知其中一些值得更深的討論，期盼能研究討論出多人多隻手所拋出的 Juggling Sequences 又有何數學關係。

柒、 參考資料

1. Fan Chung, &Ron Graham (2008.03). Primitive Juggling Sequences. Retrieved August, 2008, from the World Wide Web:

http://www.math.ucsd.edu/~fan/wp/pjs.pdf

2. Anthiny Mays(2006.11). Combinatorial aspects of juggling. Retrieved October, 2008, from World Wide Web:

http://www.ms.unimelb.edu.au/publications/AnthonyMaysHonoursThesis.pdf

【評語】040406

1、 本研究探討的問題十分新穎，為數學科展帶來興奮與喜悅。

2、 本研究具有深遠的排對理論上的含義，對於電腦工作程序、網路效率最佳化等方面有具體的應用。

3、 參賽者臨場反應迅速靈敏，對於作品的確作過深入的思想。