

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

佳作

040405

“孟”幻泡影

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者： 高二 林柏僑 高二 蔡長佑 高二 施順瀚 高二 許唐瑋	指導老師： 李文堂 吳博仁
---	-----------------------------

關鍵詞：孟氏定理、泡泡接合

“孟”幻泡影

摘要

在以下所提到的泡膜，皆只討論由相同液體所構成，且泡泡以不同大小兩兩接合。當泡泡互相接合時，因為表面張力與泡泡內外壓力差的關係，會慢慢移動至最穩定的狀態，我們由兩個泡泡結合時的 Plateau 結構理論，嘗試去推論三個泡泡相接達穩定時的結構公式，發現此結構公式符合孟氏定理的圖形，再由這個理論架構去推導四個泡泡相接情形達穩定後的結構之公式，發現也符合孟氏定理，再延伸討論 n 個泡泡時的可能狀態。



圖一：四個泡泡接合之情況。

壹、 研究動機

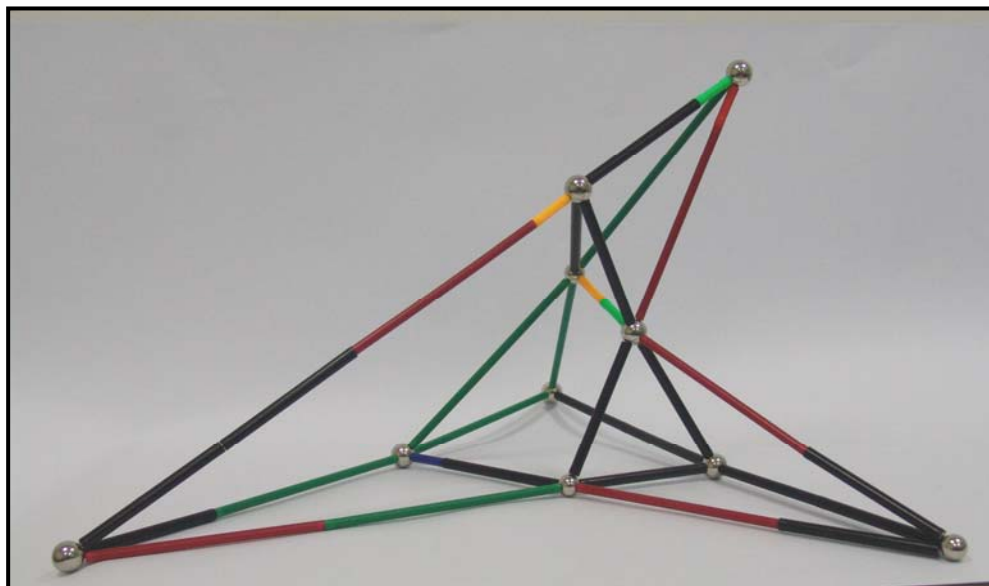
在一次物理課中，物理老師在介紹流體力學時，提及泡泡的膜與表面張力的關係，正巧提到泡膜表面張力與泡泡內外氣壓差。在下課時間，我們四位志同道合的朋友就找老師討論：若有二個或二個以上的泡泡接合，泡膜達穩定時的形狀是否有規則可尋？正巧，老師在幾篇論文中看過一些利用數學對此議題的研究，於是我們四人決定對「泡膜結構」做個深入的探討。

貳、 研究目的

- 一、探討兩個泡泡相接合時之情形及關係。
- 二、由兩個泡泡相接合之情形，推廣至 n 個時的情形及關係。

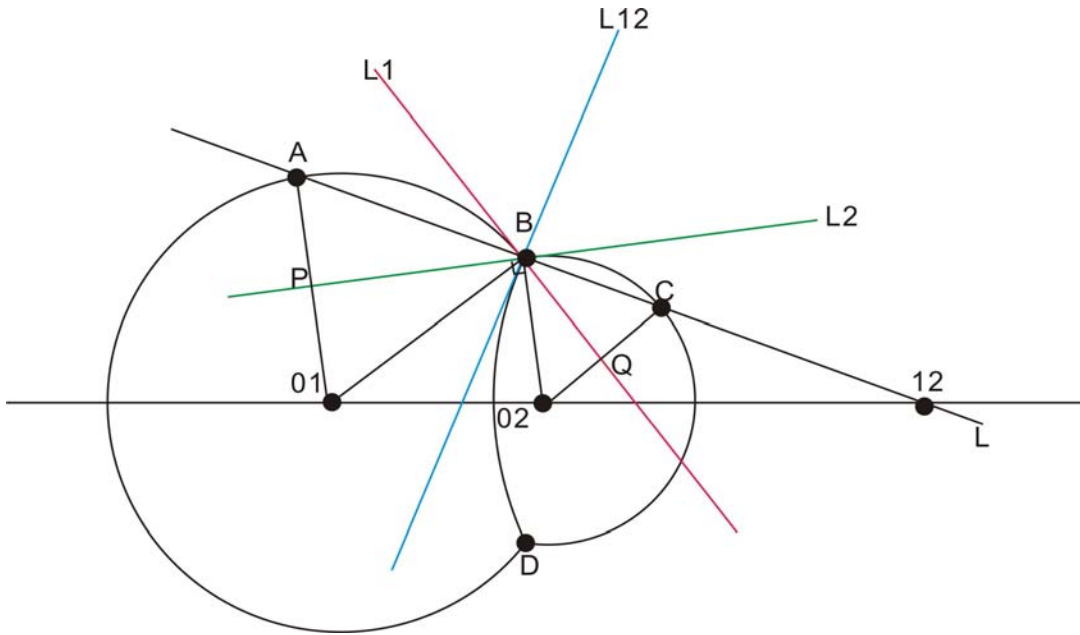
參、 研究設備及器材

吸管、甘油、沐浴乳、電腦、繪圖程式 (Archimedes Geo3D、Calques3D)、maple、照相機、攝影機、磁鐵教具。



圖二：以磁鐵教具模擬四個泡泡之接合情形。

2. 如圖四所示，兩兩球面之切線成 120 度。



圖四：三泡膜之切線兩兩互成 120 度。

(三) 如圖四所示，過 O_{12} 與 B (B 為兩泡泡交點) 的直線為 L ，分別交 O_{01} 、 O_{02} 於 A 、 C 兩點。

(四) 分別做三圓的切線 L_1 、 L_2 及 L_{12} 。

(五) 依 Plateau's laws 知 $\angle PBQ = 120^\circ$

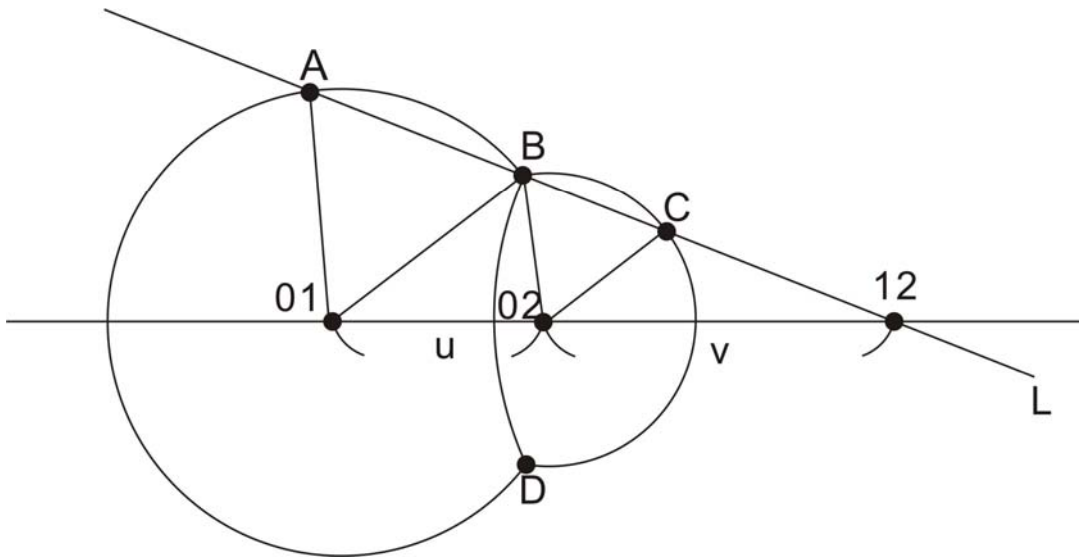
由於 L_2 為切線，因此 $\angle PBO_{02} = 90^\circ$

$$\therefore \angle O_{02}BQ = 30^\circ \quad \text{同理} \quad \angle CBQ = 30^\circ$$

$$\therefore \angle O_{02}BC = 60^\circ \quad \text{同理} \quad \angle ABO_{01} = 60^\circ$$

$$\therefore \angle O_{01}BO_{12} = 120^\circ (\text{與} \angle ABO_{01} \text{互補}) \quad \text{同理} \quad \angle O_{02}CO_{12} = 120^\circ$$

$$\therefore \Delta O_{01}BO_{12} \sim \Delta O_{02}CO_{12}$$



圖五：兩泡泡接合時線段比例關係。

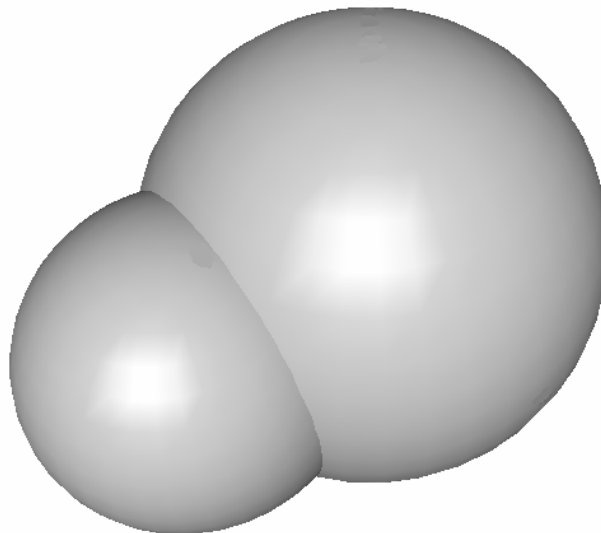
(六) 設 $\overline{O_{01}O_{02}} = u$, $\overline{O_{02}O_{12}} = v$

依相似三角形 $\Delta O_{01}BO_{12} \sim \Delta O_{02}CO_{12}$ 可知

$$\frac{v}{u+v} = \frac{r_{02}}{r_{01}} \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{u}{u+v} = \frac{r_{02}}{r_{12}} \quad \dots\dots(2)$$

$$\therefore r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1} = u : v : (u+v) \quad \dots\dots(3)$$

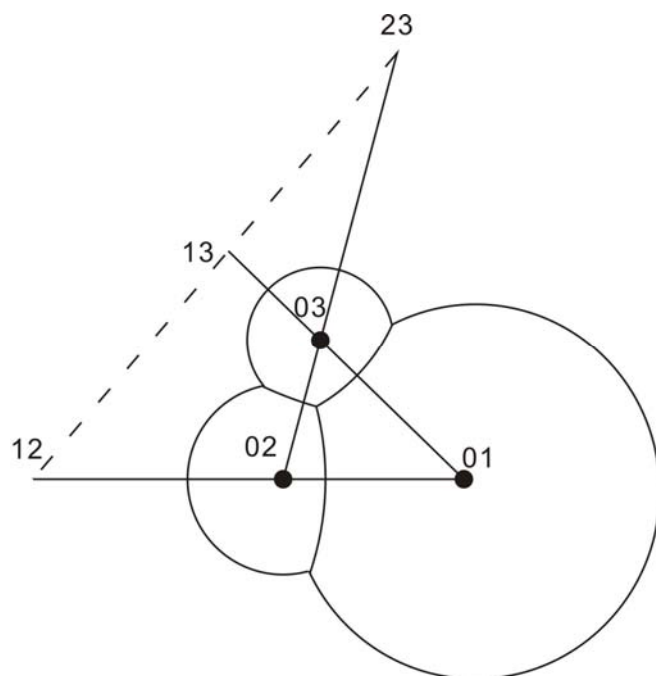


圖六：兩泡泡電腦模擬圖。

二、三個泡泡接合狀況

觀察三個泡泡接合時，各球心似乎符合孟氏定理的圖形

欲証： O_{12} 、 O_{23} 、 O_{13} 共線。(r 表半徑，其中 $r_{01} > r_{02} > r_{03}$)



圖七：三泡泡接合示意圖。

利用孟氏定理(請見附錄)的逆定理，如果：

$$\frac{\overline{O_{01}O_{12}}}{\overline{O_{12}O_{02}}} \cdot \frac{\overline{O_{02}O_{23}}}{\overline{O_{23}O_{03}}} \cdot \frac{\overline{O_{03}O_{13}}}{\overline{O_{13}O_{01}}} = 1 \quad ,$$

得 O_{12} 、 O_{13} 、 O_{23} 共線，證明如下：

$$\frac{\overline{O_{01}O_{12}}}{\overline{O_{12}O_{02}}} = \frac{r_{02}^{-1}}{r_{01}^{-1}} \dots\dots(4) \Rightarrow \text{如同} \frac{u+v}{v}$$

$$\frac{\overline{O_{02}O_{23}}}{\overline{O_{23}O_{03}}} = \frac{r_{03}^{-1}}{r_{02}^{-1}} \dots\dots(5) \Rightarrow \text{如同} \frac{u+v}{v}$$

$$\frac{\overline{O_{03}O_{13}}}{\overline{O_{13}O_{01}}} = \frac{r_{01}^{-1}}{r_{03}^{-1}} \dots\dots(6) \Rightarrow \text{如同} \frac{v}{u+v}$$

∴ (4)×(5)×(6)

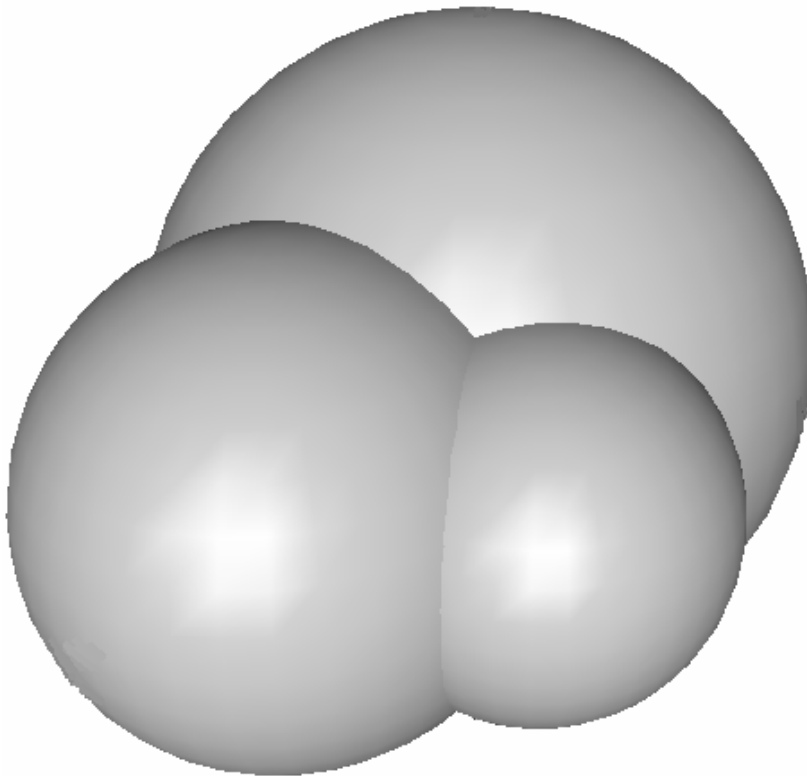
$$\frac{\overline{O_{01}O_{12}}}{O_{12}O_{02}} \cdot \frac{\overline{O_{02}O_{23}}}{O_{23}O_{03}} \cdot \frac{\overline{O_{03}O_{13}}}{O_{13}O_{01}} = \frac{r_{02}^{-1}}{r_{01}^{-1}} \cdot \frac{r_{03}^{-1}}{r_{02}^{-1}} \cdot \frac{r_{01}^{-1}}{r_{03}^{-1}} = 1 \quad \dots\dots(7)$$

(備註：之後即以 $\frac{(01,12)}{(12,02)} \times \frac{(02,23)}{(23,03)} \times \frac{(03,13)}{(13,01)} = 1$

簡化方程式(7))。

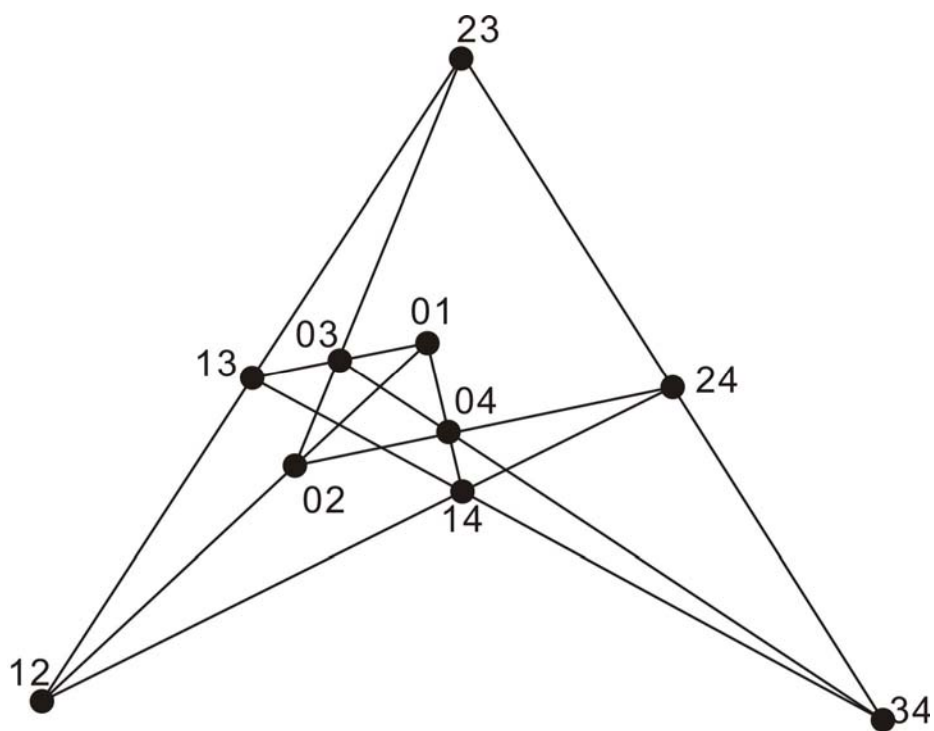
∴ 故得証：O₁₂、O₁₃、O₂₃ 共線。

∴ 三個泡泡接合時各球心連線符合孟氏定理的圖型。



圖八：三泡泡接合之電腦模擬圖。

三、四個泡泡接合狀況



圖九：四泡泡接合之球心關係圖。

(一)、圖九 $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$

取圖中任三個 O_i 點 ($i = 01, 02, 03, 04$) 連線成一三角形，並找出其三邊延伸之線段，可行成一個「孟氏定理」的圖形。

(二)、取 O_{01}, O_{02}, O_{03} 依照方程式(7)形成路徑為

$$O_{01} \Rightarrow O_{12} \Rightarrow O_{02} \Rightarrow O_{23} \Rightarrow O_{03} \Rightarrow O_{13} \Rightarrow O_{01}$$

$$\frac{(01, 12)}{(12, 02)} \cdot \frac{(02, 23)}{(23, 03)} \cdot \frac{(03, 13)}{(13, 01)} = 1 \quad \dots\dots(8)$$

同理

$$\frac{(01,12)}{(12,02)} \cdot \frac{(02,24)}{(24,04)} \cdot \frac{(04,14)}{(14,01)} = 1 \quad \dots\dots(9)$$

$$\frac{(01,13)}{(13,03)} \cdot \frac{(03,34)}{(34,04)} \cdot \frac{(04,14)}{(14,01)} = 1 \quad \dots\dots(10)$$

$$\frac{(02,23)}{(23,03)} \cdot \frac{(03,34)}{(34,04)} \cdot \frac{(04,24)}{(24,02)} = 1 \quad \dots\dots(11)$$

(三)、將(8)÷(9)得

$$\frac{(02,23)}{(23,03)} \times \frac{(03,31)}{(31,01)} \times \frac{(01,14)}{(14,04)} \times \frac{(04,42)}{(42,02)} = 1 \quad \dots\dots(12)$$

(其中 13 與 31 同，24 與 42 同)

(四)、觀察上式，此式似乎有一個規律可尋，即從 O_{02} 到 O_{03} 到 O_{04} 到 O_{01} 且以之接觸面的球面球心為橋樑，組合成一個連續不斷的路徑。

(五)、進一步猜想此有規律的路徑是否可從任一泡泡的球心開始，且不重覆地經過其他三個泡泡球心並回到原出發點。

(六)、令 $p, q, r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ 且 p, q, r, s 皆相異

$$\frac{(op, pq)}{(pq, oq)} \times \frac{(oq, qr)}{(qr, or)} \times \frac{(or, rp)}{(rp, op)} = 1 \quad \dots\dots(13)$$

$$\frac{(op, pq)}{(pq, oq)} \times \frac{(oq, qs)}{(qs, os)} \times \frac{(os, sp)}{(sp, op)} = 1 \quad \dots\dots(14)$$

$$\frac{(13)}{(14)} = \frac{(oq, pr)}{(qr, or)} \times \frac{(or, rp)}{(rp, op)} \times \frac{(qs, os)}{(oq, qs)} \times \frac{(sp, op)}{(os, sp)} = 1$$

整理後得

$$\Rightarrow \frac{(oq, qr)}{(qr, or)} \times \frac{(or, rp)}{(rp, op)} \times \frac{(op, sp)}{(sp, os)} \times \frac{(os, qs)}{(qs, oq)} = 1 \quad \dots\dots(15)$$

(七)、觀察上式可知，可任選四個泡泡其中之任一個球心，依照任一種特定順序經過其他三個泡泡球心，其中兩兩泡泡球心以其交接面的第三球心為橋樑，最後可以用不中斷的路徑「走」完全程。

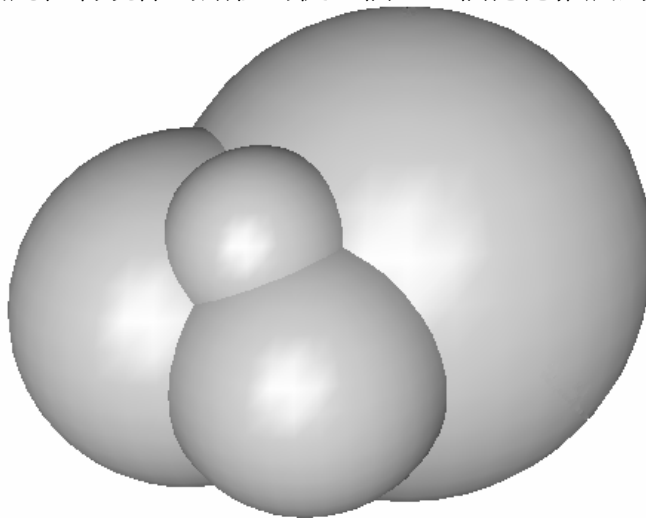
例如：

if : p=1, q=2, r=4, s=3

$$\frac{(02, 24)}{(24, 04)} \times \frac{(04, 41)}{(41, 01)} \times \frac{(01, 13)}{(13, 03)} \times \frac{(03, 32)}{(32, 02)} = 1$$

(點 14 與點 41 同，23 與 32 同)

(八)、推測此種有規律的路徑可從三個、四個泡泡推展到無限多個泡泡。



圖十：四泡泡接合之電腦模擬圖。

四、n 個泡泡接合情況

欲証：當 n 個泡泡兩兩相接時，是否符合上述之規律。

<證明>

利用數學歸納法

(一)、已知當三個泡泡相接時符合此一路徑。

(二)、設：當有(n-1)個泡泡時符合此一規律路徑 ($n \geq 4$)

$$\frac{(o a_1, a_1 a_2)}{(a_1 a_2, o a_2)} \times \frac{(o a_2, a_2 a_3)}{(a_2 a_3, o a_3)} \cdots \frac{(o a_{n-2}, a_{n-2} a_{n-1})}{(a_{n-2} a_{n-1}, o a_{n-1})} \times \frac{(o a_{n-1}, a_{n-1} a_1)}{(a_{n-1} a_1, o a_1)} = 1 \cdots (16)$$

(a_i ($i=1,2,\dots,n-1$) 是 1 到 $n-1$ 中任一數且互不相等 。)

依方程式(7)可知

$$\frac{(o a_{n-1}, a_{n-1} a_1)}{(a_{n-1} a_1, o a_1)} \times \frac{(o a_1, a_1 a_n)}{(a_1 a_n, o a_n)} \times \frac{(o a_n, a_n a_{n-1})}{(a_n a_{n-1}, o a_{n-1})} = 1 \cdots (17)$$

當(16)÷(17)得

$$\frac{(o a_1, a_1 a_2)}{(a_1 a_2, o a_2)} \times \frac{(o a_2, a_2 a_3)}{(a_2 a_3, o a_3)} \times \cdots \times \frac{(o a_{n-1}, a_{n-1} a_n)}{(a_{n-1} a_n, o a_n)} \times \frac{(o a_n, a_n a_1)}{(a_n a_1, o a_1)} = 1 \cdots (18)$$

∴ 當有 n 個泡泡時也符合此一規律路徑。

五、探討泡泡兩兩接合數目的極限

(一)、原有 1 個泡泡

$$O_i(x_i, y_i, z_i)$$

$$\overline{O_i O_j} = u_{ij} = \sqrt{r_i + r_j - r_i r_j} \quad (r_i \neq r_j)$$

$$\text{令 } O_1 = (0, 0, 0)$$

(二)、接上第 2 個泡泡

$$\because \overline{O_1 O_2} = u_{12}$$

$$\Rightarrow O_2 : x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = u_{12}^2$$

$$\Rightarrow \text{令 } O_2(x_2, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm u_{12}$$

$$\therefore O_2(u_{12}, 0, 0)$$

(三)、接上第 3 個泡泡

$$\because \overline{O_1 O_3} = u_{13}$$

$$\overline{O_2 O_3} = u_{23}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_3 - u_{12})^2 + y_3^2 + z_3^2 = u_{23}^2 \dots\dots(19) \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = u_{13}^2 \dots\dots\dots(20) \end{cases}$$

$$(20) - (19) \Rightarrow x_3 = \frac{u_{13}^2 + u_{12}^2 - u_{23}^2}{2u_{12}} \quad \text{代回(20)}$$

$$\Rightarrow y_3^2 + z_3^2 = u_{13}^2 - x_3^2$$

$$O_3 \text{ 在 } \begin{cases} x_3 = \frac{u_{13}^2 + u_{12}^2 - u_{23}^2}{2u_{12}} \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = u_{13}^2 \end{cases} \quad \text{之圓上任一點}$$

$$\text{取 } z_3 = 0 \Rightarrow y_3 = \sqrt{u_{13}^2 - x_3^2}, \quad -\sqrt{u_{13}^2 - x_3^2}$$

(四)、接上第4個泡泡

$$\because \overline{O_1 O_4} = u_{14}$$

$$\overline{O_2 O_4} = u_{24}$$

$$\overline{O_3 O_4} = u_{34}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = u_{14}^2 \dots\dots\dots(21) \\ (x_4 - u_{12})^2 + y_4^2 + z_4^2 = u_{24}^2 \dots\dots\dots(22) \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + z_4^2 = u_{34}^2 \dots\dots\dots(23) \end{cases}$$

(21) - (22)

$$\Rightarrow x_4 = \frac{u_{12}^2 + u_{14}^2 - u_{24}^2}{2u_{12}} \dots\dots\dots(24)$$

(22) - (23)

$$\Rightarrow y_4 = \frac{-2u_{12}x_4 + u_{12}^2 + 2x_3x_4 - x_3^2 - y_3^2 - u_{24}^2 + u_{34}^2}{-2y_3} \dots\dots\dots(25)$$

(24)(25)代入(21)

$$\Rightarrow z_4 = \sqrt{-x_4^2 - y_4^2 + u_{14}^2}, \quad -\sqrt{-x_4^2 - y_4^2 + u_{14}^2}$$

(五)、接上第5個泡泡

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = u_{15}^2 \dots\dots\dots(26) \\ (x_5 - u_{12})^2 + y_5^2 + z_5^2 = u_{25}^2 \dots\dots\dots(27) \\ (x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 + z_5^2 = u_{35}^2 \dots\dots\dots(28) \\ (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 = u_{45}^2 \dots\dots(29) \end{cases}$$

(26)-(27)

$$\Rightarrow x_5 = \frac{-u_{25}^2 + u_{12}^2 + u_{15}^2}{2u_{12}} \dots\dots\dots(30)$$

(27)-(28)

$$\Rightarrow y_5 = \frac{-2u_{12}x_5 + u_{12}^2 + 2x_3x_5 - x_3^2 - y_3^2 - u_{25}^2 + u_{35}^2}{-2y_3} \dots\dots(31)$$

(30)(31)代入(28)

$$\Rightarrow z_5 = \sqrt{-x_5^2 - y_5^2 + u_{15}^2}, -\sqrt{-x_5^2 - y_5^2 + u_{15}^2}$$

取 $y_3 < 0, z_4 > 0, z_5 < 0$ 代入(29)時

$$(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 - u_{45}^2 =$$

$$\begin{aligned} & (2((3r_1^2r_2^2 + 3r_3^2r_1^2 + 3r_3^2r_2^2 - 2r_3^2r_1r_2 - 2r_1r_3r_2^2 - 2r_1^2r_3r_2)(-r_4^2r_1^2r_3r_2 \\ & + 2r_1^2r_3^2r_2^2 + 2r_1^2r_2^2r_4^2 + 2r_4^2r_3^2r_1^2 - r_1^2r_4r_3^2r_2 - r_1r_4^2r_3^2r_2 - r_4^2r_1r_3r_2^2 - r_1^2r_4r_3r_2^2 \\ & - r_1r_4r_3^2r_2^2 + 2r_4^2r_3^2r_2^2))^{1/2}((3r_1^2r_2^2 + 3r_3^2r_1^2 + 3r_3^2r_2^2 - 2r_3^2r_1r_2 - 2r_1r_3r_2^2 \\ & - 2r_1^2r_3r_2)(-r_1^2r_5r_3^2r_2 - r_1^2r_5^2r_3r_2 + 2r_5^2r_3^2r_2^2 + 2r_1^2r_5^2r_3^2 + 2r_1^2r_3^2r_2^2 - r_1r_5^2r_3^2r_2 \\ & + 2r_1^2r_5^2r_2^2 - r_1r_5r_3^2r_2^2 - r_1^2r_2^2r_5r_3 - r_1r_5^2r_3r_2^2))^{1/2} - 3r_5r_1^4r_3r_2^4 - r_5r_1^4r_2^3r_3^2 \\ & - r_5r_1^4r_3^3r_2^2 - 3r_5r_1^4r_3^4r_2 - r_5r_1^3r_2^4r_3^2 + 6r_5r_1^3r_2^3r_3^3 - r_5r_1^3r_3^4r_2^2 - r_5r_1^2r_2^4r_3^3 \\ & - r_5r_1^2r_2^3r_3^4 - 3r_5r_3^4r_2^4r_1 - 3r_4r_1^4r_3r_2^4 - r_4r_1^4r_2^3r_3^2 - r_4r_1^4r_3^3r_2^2 - 3r_4r_1^4r_3^4r_2 \\ & - r_4r_1^3r_2^4r_3^2 + 6r_4r_1^3r_2^3r_3^3 - r_4r_1^3r_3^4r_2^2 - r_4r_1^2r_2^4r_3^3 + 3r_5r_4r_3^4r_2^4 + 3r_4r_5r_1^4r_2^4 \\ & + 3r_4r_5r_3^4r_1^4 - r_4r_1^2r_2^3r_3^4 - 3r_4r_3^4r_2^4r_1 - 2r_4r_5r_1^4r_2^3r_3 + 6r_4r_5r_1^4r_3^2r_2^2 - 2r_4r_5r_1^4r_3^3r_2 \\ & - 2r_4r_5r_1^3r_2^4r_3 - 2r_4r_5r_1^3r_2^3r_3^2 - 2r_4r_5r_1^3r_3^3r_2^2 - 2r_4r_5r_3^4r_1^3r_2 + 6r_4r_5r_1^2r_2^4r_3^2 \\ & - 2r_4r_5r_1^2r_3^3r_3 + 6r_4r_5r_3^4r_1^2r_2^2 - 2r_4r_5r_1r_3^3r_2^4 - 2r_4r_5r_3^4r_2^3r_1 + 12r_3^4r_2^4r_1^2 \\ & + 12r_1^4r_2^4r_3^2 - 8r_1^4r_2^3r_3^3 + 12r_1^4r_3^4r_2^2 - 8r_1^3r_2^4r_3^3 - 8r_1^3r_2^3r_3^4)/(9r_3^4r_2^4 + 9r_3^4r_1^4 \\ & + 9r_1^4r_2^4 + 22r_3^4r_1^2r_2^2 - 12r_3^4r_1^3r_2 - 12r_1^4r_2^3r_3 - 4r_1^3r_3^3r_2^2 - 4r_1^3r_2^3r_3^2 - 12r_1^3r_2^4r_3 \\ & - 12r_1^4r_3^3r_2 + 22r_1^4r_3^2r_2^2 - 12r_1r_3^3r_2^4 - 4r_1^2r_3^3r_2^3 + 22r_1^2r_2^4r_3^2 - 12r_3^4r_2^3r_1) \end{aligned}$$

當上式等於0時

$r_5 =$

$$\begin{aligned} & ((r_1 r_2 r_3 + r_1 r_4 r_3 + r_1 r_4 r_2 + r_2 r_3 r_4 + 2(3r_4^2 r_1^2 r_3 r_2 - 6r_1^2 r_3^2 r_2^2 - 6r_1^2 r_2^2 r_4^2 \\ & - 6r_4^2 r_3^2 r_1^2 + 3r_1^2 r_4 r_3^2 r_2 + 3r_1 r_4^2 r_3^2 r_2 + 3r_4^2 r_1 r_3 r_2^2 + 3r_1^2 r_4 r_3 r_2^2 + 3r_1 r_4 r_3^2 r_2^2 \\ & - 6r_4^2 r_3^2 r_2^2)^{1/2}) r_4 r_3 r_2 r_1) / (5r_1^2 r_3^2 r_2^2 + 5r_1^2 r_2^2 r_4^2 - 2r_1^2 r_4 r_3 r_2^2 - 2r_1^2 r_4 r_3^2 r_2 \\ & - 2r_4^2 r_1^2 r_3 r_2 + 5r_4^2 r_3^2 r_1^2 - 2r_1 r_4 r_3^2 r_2^2 - 2r_4^2 r_1 r_3 r_2^2 - 2r_1 r_4^2 r_3^2 r_2 + 5r_4^2 r_3^2 r_2^2) \end{aligned}$$

觀察上式如果 r_5 有解，則分子中根號內的值要為正數或零

∴ 欲證

$$\begin{aligned} & 3(r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 + r_1^2 r_3^2 r_2 r_4 + r_1^2 r_4^2 r_2 r_3 + r_2^2 r_3^2 r_1 r_4 + r_2^2 r_4^2 r_1 r_3 + r_3^2 r_4^2 r_1 r_2) \\ & - 6(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2) \geq 0 \end{aligned}$$

由算幾不等式

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 3(r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2)) + 3(r_1^2 r_3^2 r_2 r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2)) \\ & + 3(r_1^2 r_4^2 r_2 r_3 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2)) + 3(r_2^2 r_3^2 r_1 r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2)) \\ & + 3(r_2^2 r_4^2 r_1 r_3 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2)) + 3(r_3^2 r_4^2 r_1 r_2 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2)) \\ & - \frac{3}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2) \\ & \leq -\frac{3}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2) < 0 \end{aligned}$$

∴ r_5 恆為虛數，所以無法接上第五個泡泡

伍、 結果討論

一、如果吹二個不同大小泡泡，使其接合達穩定狀態：

- (一). 泡泡相接的膜是一個球面，球心位置符合由 $r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1}$
 $= u : v : (u + v)$ 。

二、如果吹三個不同大小泡泡，使其兩兩接合達穩定狀態：

- (一). 其中接合穩定後，多出的三個點共線。
(二). 三點中任一點是在原三個點(原三球心)兩兩所成的射線上。

三、自三個泡泡結構推導回數學上：

假設：如果平面上有六個點符合以下兩條件

- (一). 其中的三個點共線(符合兩個泡泡中三點的相交圖形)。
(二). 此三點中任一點是在另三點兩兩所成的射線上。
(即如有 A、B、C、D、E、F 六點，其中 A、B、C 三點共線且 A、B、C 分別在 DE、DF、EF 射線上)即定可畫出此六個點符合平面上的孟氏定理圖形(唯一畫法，且明顯成立)。

四、如果吹四個不同大小泡泡，使其兩兩接合達穩定狀態：

- (一). 其中接合穩定後，多出的六個點(即多出來的六個泡膜的球心)共平面且符合孟式定理的圖形(符合三個泡泡中六點的相交圖形)。
(二). 此六點中任一點是在另四點兩兩所成的射線上。
(三). 接合達穩定後必符合(15)式：

$$\Rightarrow \frac{(oq, qr)}{(qr, or)} \times \frac{(or, rp)}{(rp, op)} \times \frac{(op, sp)}{(sp, os)} \times \frac{(os, qs)}{(qs, oq)} = 1$$

五、自四個泡泡結構推導回數學上：

假設：如果平面上有十個點符合

- (一). 其中六個點共平面且符合孟式定理的圖形。
(二). 此六點中任一點是在另四點兩兩所成的射線上，即可用繪圖軟體畫出(唯一畫法)，此十個點符合四個泡泡相接時的結構，且可進一步找出與其相對應的四個泡泡，換言之其十個點符合我們所推導的有規律的(15)式。

六、以三維座標模擬泡泡兩兩接合

(一).第 1 泡泡要接上第 2 個時，第 2 個泡泡的球心在 1 個球面 (此球面為以 O_1 為球心， u_{12} 為半徑)上的任一點。

(二).在球面上任取一點為第 2 個泡泡的球心，接上第 3 個泡泡時，第 3 個泡泡為圓 (圓為分別以 O_1 、 O_2 為球心， u_{13} 、 u_{23} 為半徑之兩球交圓)上的任一點。

(三).當前 3 個泡泡位置都固定時，接上第 4 個泡泡，第 4 個泡泡的球心只有 2 個位置可以接合。

(四).當 4 個泡泡要接上第 5 個時，解出之 r_5 為虛數，所以最多只能以 4 個泡泡以任意大小兩兩接合。

七、觀察後發現的規律：

如果在空間中若干點要符合 n 個($n=2,3,4$)大小相異泡泡相接時形成的相關式，要兩個條件：

(一).其中 C_2^n 個點(泡泡相接形成的膜的球心)符合($n-1$)個泡泡組成的圖形。

(二).此 C_2^n 點中任一點是在另 n 點中兩兩所成的射線上。



圖十一：以吸管將泡泡接合之照片。

陸、 結論

依之前的討論可推導出：

- 一. 當二半徑不同泡泡相接時，相接處的新膜為一個泡泡球的一部分。新泡膜的球心與原二泡泡球心依 Plateau's laws 可知其比例關係。

如果 $r_1 > r_2$ 則 O_{12} 即在 O_1 到 O_2 的射線上，

而且 $r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1} = u : v : (u + v)$ 。

- 二. 當三個半徑相異泡泡兩兩相接時，形成三個新的球面膜，三個新膜的新球心與原三泡泡球心共六點，其距離有一特定比例(如上方第一點)，而我們利用球心之間距離的比例關係與孟氏定理做結合，可知三個新球心共線。

- 三. 當四個半徑相異泡泡兩兩相接時，任三個泡泡的球心及其兩兩相交球面之球心之間符合孟氏定理，所以更可造成四個孟氏定理之圖形。

所形成六個新的球面膜的新球心與原四泡泡球心共十點，其距離有一特定比例，而我們利用之間的比例關係與孟氏定理做結合，推出一個固定的式子。

可任選四個泡泡之任一個球心，依照任一特定順序不重覆經過所有的泡泡球心，其中兩兩泡泡球心以其交接面的第三球心為橋樑，最後可以用不中斷的路徑「走」完全程，當泡泡達穩定時一連串乘除的答案等於 1。

- 四. n 個泡泡兩兩相接時，其球心與其兩兩相接球面的球心之間的關係符合孟氏定理的推廣：

$$\frac{(O a_1, a_1 a_2)}{(a_1 a_2, O a_2)} \times \frac{(O a_2, a_2 a_3)}{(a_2 a_3, O a_3)} \times \dots \times \frac{(O a_{n-1}, a_{n-1} a_n)}{(a_{n-1} a_n, O a_n)} \times \frac{(O a_n, a_n a_1)}{(a_n a_1, O a_1)} = 1$$

n 個泡泡兩兩相接時，可任選 n 個泡泡其中之任一個球心，依照任一種特定順序不重覆經過所有的泡泡球心，其中兩兩泡泡球心以其交接面的第三球心為橋樑，最後可以用不中斷的路徑「走」完全程，當泡泡達穩定時一連串乘除的答案等於 1。

- 五. 如果空間中若干點要符合 N 個泡泡相接時形成的相關式，要兩個條件：

(一). 其中 C_2^n 個點符合 $(N-1)$ 個泡泡組成的圖形

(二). 此 C_2^n 點中任一點是在另 N 點中兩兩所成的射線上

- 六. 泡泡任意大小兩兩接合：

(一). 只有當 4 個以下(包含 4 個)的泡泡兩兩接合時，可以任意大小接合。

(二). 當 4 個泡泡要接上第 5 個時，解出之 r_5 為虛數，所以最多只能以 4 個泡泡兩兩互相接合。

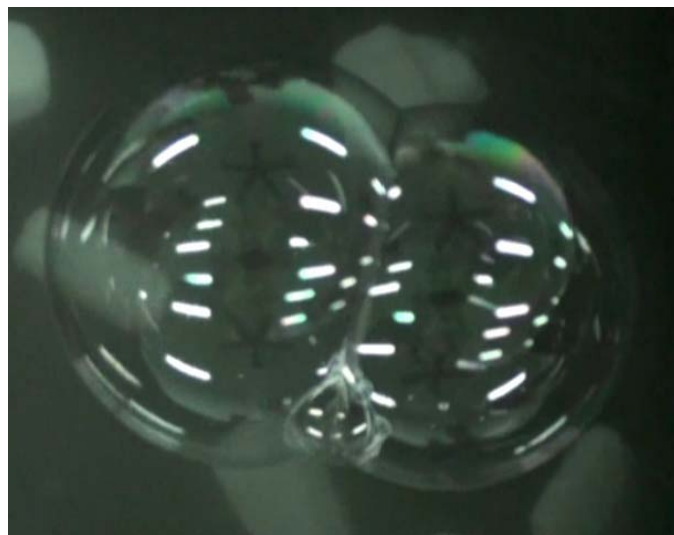
柒、參考資料及其他

一、Stuwe · M. 1989. *Plateau's Problem and the Calculus of Variations*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

二、Wikipedia 維基百科 http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau's_laws



圖十二：二泡泡接合之照片。



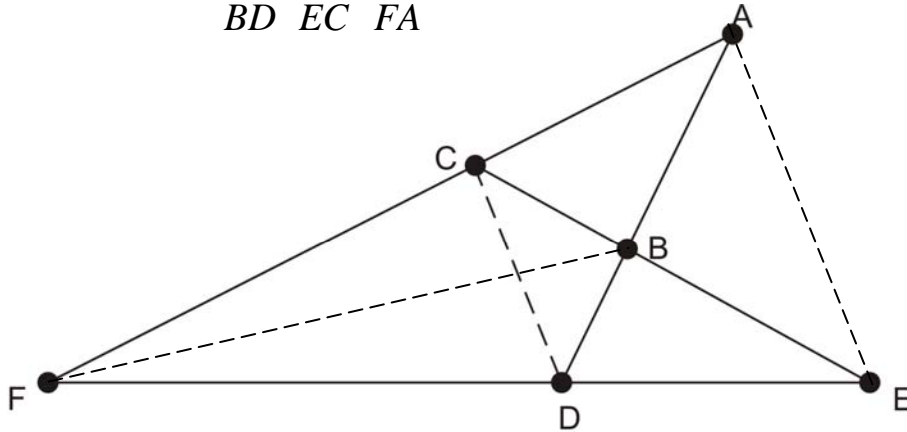
圖十三：三泡泡接合之照片。



圖十四：四泡泡接合之照片。

附錄

以下為「孟氏定理 $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$ 」的證明：



圖十五：孟氏定理圖形。

作三輔助線 \overline{CD} 、 \overline{BF} 、 \overline{AE}

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\Delta ACD}{\Delta BCD} \dots(\text{I}) \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\Delta BDE}{\Delta CDE} \dots(\text{II}) \quad \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{\Delta CDF}{\Delta ADF} \dots(\text{III})$$

$$\therefore (\text{I}) \times (\text{II}) \times (\text{III}) : \frac{\Delta ACD}{\Delta BCD} \cdot \frac{\Delta BDE}{\Delta CDE} \cdot \frac{\Delta CDF}{\Delta ADF}$$

$$= \frac{\Delta ACD}{\Delta ADF} \cdot \frac{\Delta CDF}{\Delta CDE} \cdot \frac{\Delta BDE}{\Delta BCD}$$

$$= \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{\Delta ABC}{\Delta ABF} \cdot \frac{\Delta ABF}{\Delta ABE} \cdot \frac{\Delta ABE}{\Delta ABC} = 1$$

$$\therefore \text{得證 } \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$$

【評語】 040405

- 1、 本研究結合物理及數學方法探討幾何現象，其過程雖然嚴謹但是製作出來的模型卻由於以（看來像）吸管為材料而呈現出應該三點共線而不共線的失真現象。探討立體幾何時，應該考慮使用 Cabri 3D 作為實驗工具。該軟體提供逼真的空間知覺，除了能夠帶來更有效的數學實驗更能夠為數學實驗添增環保意識。
- 2、 若排除物理上的考量，本研究可獲得空間中球面與球面共切圓錐頂點共線的結果，其結果乃是 Monge 之三圓定理在空間上之推廣。
- 3、 請留意所展示錄影畫面要通過安全審查才可公開播放。