中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040404

三角錐展開圖形之研究

學校名稱：國立台東女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 鍾怡柔 高二 林姝廷 高二 許欣平	林志全

關鍵詞：三角錐

摘要：

本研究主要在探討三角錐的展開圖形，我們首先討論三角錐的所有展開圖共有幾種（十種），接著從這十種展開圖的立體圖形開始研究，然後討論這十種三角錐的限制情形及相關性質。本研究發現如下：

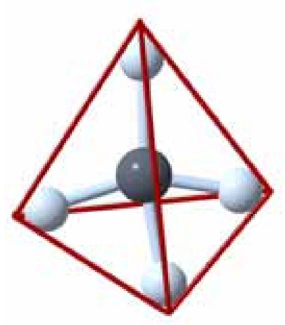
1.三角錐的所有展開圖共有十種（平平平、凸凸凸、凹凹凹、平凸凸、平凹凹、平平凸、平平凹、凸凸凹、凹凹凸、平凸凹）。

2.部分的展開圖有其相關限制條件。

根據以上的發現，我們還發現了三角錐的其他相關性質及特性。

壹、研究動機：

高二的許多課程裡都遇到三角錐(數學第三冊-空間概念)，尤其是非常完美的正四面體，讓我們產生興趣，而且不只在數學課程裡碰到，就連化學都有遇到－甲烷的立體結構（如圖），就是一個典型的正四面體喔！所以我們詢問老師這個奇妙的立體圖形，對所有三角錐的展開圖，來探討其存在性及相關性質。



貳、研究目的：

探討三角錐所有可能的展開圖形存在性及相關性質。

參、研究設備及器材：

紙、筆、電腦、三角錐模型、GSP 幾何畫板。

肆、研究過程

一、名詞定義

(一)平角

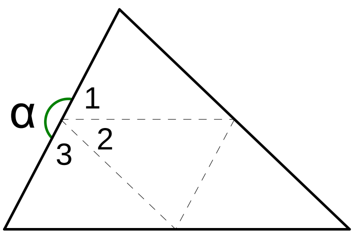
三角錐展開圖如下圖（1），若$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$，我們就稱 α 爲平角。

(二) 凹角

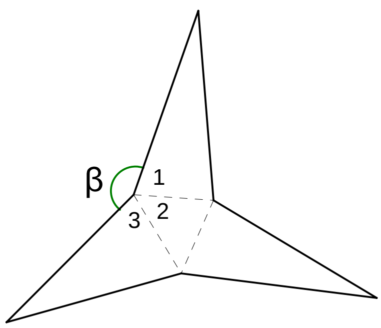
三角錐展開圖如下圖（2），若$\angle 1+\angle 2+\angle 3>180^\circ$，此時 $\beta<180^\circ$，我們就稱 β 爲凹角。

(三)凸角

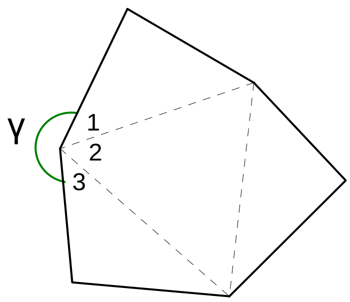
三角錐展開圖如下圖（3），若$\angle 1+\angle 2+\angle 3<180^\circ$，此時 $\gamma>180^\circ$，我們就稱 γ 爲凸角。



圖（1）



圖（2）

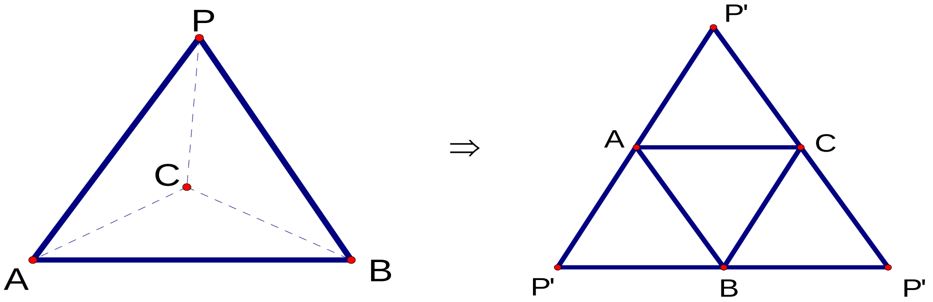


圖（3）

二、實例探討

三角錐的展開圖形經過計算後最多有 10 種可能，但這 10 種展開圖形式是否都存在呢？我們先嘗試從實際的例子來找尋部分展開圖形的存在性。

（一）平平平類型：例如正四面體的展開圖。



(二)凹凹凹類型：

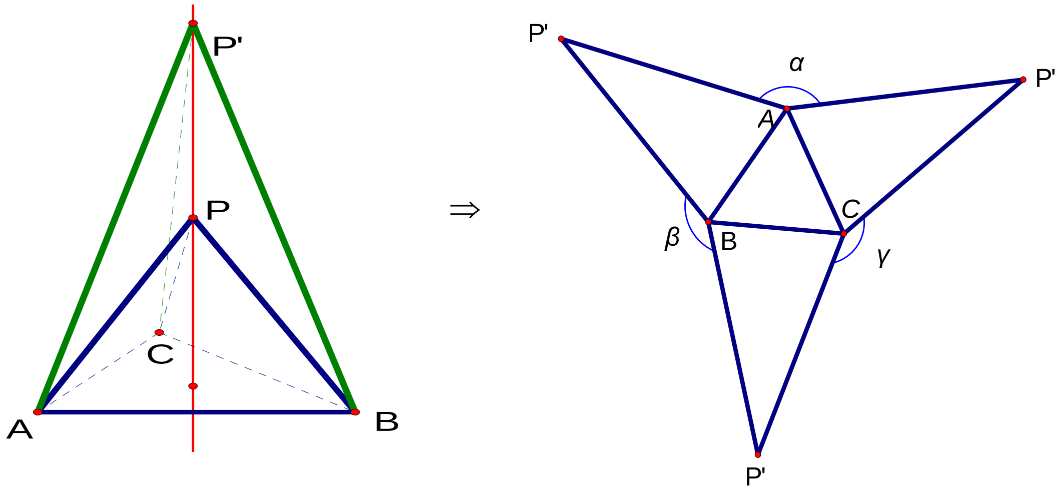
例如在正四面體 P－ABC 的高 h 所在的直線上任取一點 P' (P' 在 P 的上方)

選取 P' －ABC 爲一新的三角錐，如圖

此時 $\overline{P'A} > \overline{PA}$

在展開圖中，$\angle P'AB > \angle PAB = 60°$ ，$\angle$ P' AC$>\angle$ PAC$=60°$

不難得證 $\alpha < 180°$ ，同理可得 $\beta < 180°$ 、$\gamma < 180°$ ⇒凹凹凹類型



(三)凸凸凸類型：

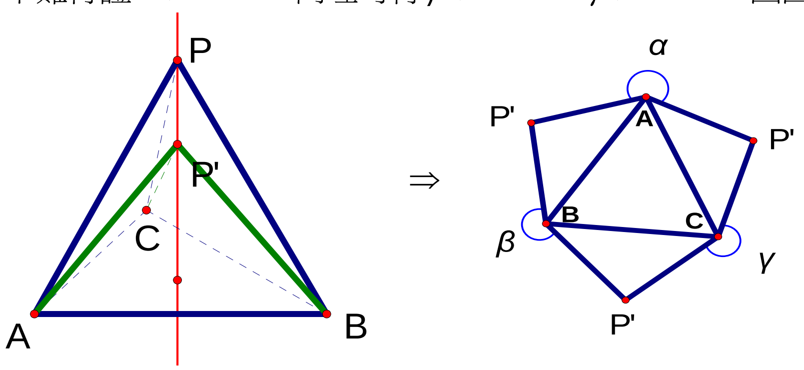
例如在正四面體 P－ABC 的高 h 所在的直線上任取一點 P' (P' 在 P 的下方)

選取 P' －ABC 爲一新的三角錐，如圖

此時 $\overline{P'A} < \overline{PA}$

在展開圖中，$\angle P'AB < \angle PAB = 60°$

不難得證 $\alpha > 180°$ ，同理可得 $\beta > 180°$ 、$\gamma > 180°$ ⇒凸凸凸類型



(四)凹凹凸類型：

如圖，將兩個全等的正四面體放置在一起，選取P'－ABC 為一新的三角錐

$\overline{P'B}=\overline{P'C}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AC}$=a

$\overline{P'A}=\sqrt{\overline{P'H'}^2+\overline{AH'}^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\sqrt{2}a$

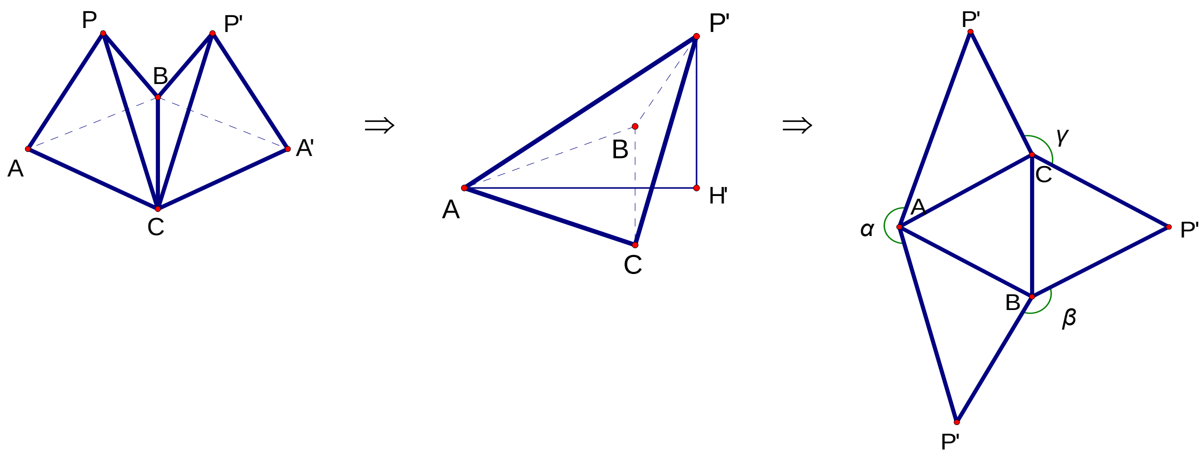
$\overline{P'B}$：$\overline{AB}$：$\overline{P'A}$=1：1：$\sqrt{2}$ $\Rightarrow \angle ACP'=90°$、$\angle P'AC=45°$

P'－ABC 的展開圖如中

$\angle P'AC+\angle CAB+\angle P'AB=45°+60°+45°=150°$

$\angle P'CA+\angle ACB+\angle BCP'=90°+60°+60°=210°$

$\Rightarrow \alpha=360°-150°=210°$、$\beta=\gamma=360°-210°=150° \Rightarrow$ 凹凹凸類型



(五)凹凸凸類型：

將正四面體 P－ABC 的 P 平移至 A 的正上方，得一新的三角錐P'－ABC

此時$\overline{P'A}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AC}$=a

$\overline{P'B}=\overline{P'C}=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2+a^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}a$，$\cos\angle P'CA=\dfrac{a^2+(\frac{\sqrt{15}}{3}a)^2-(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}a}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

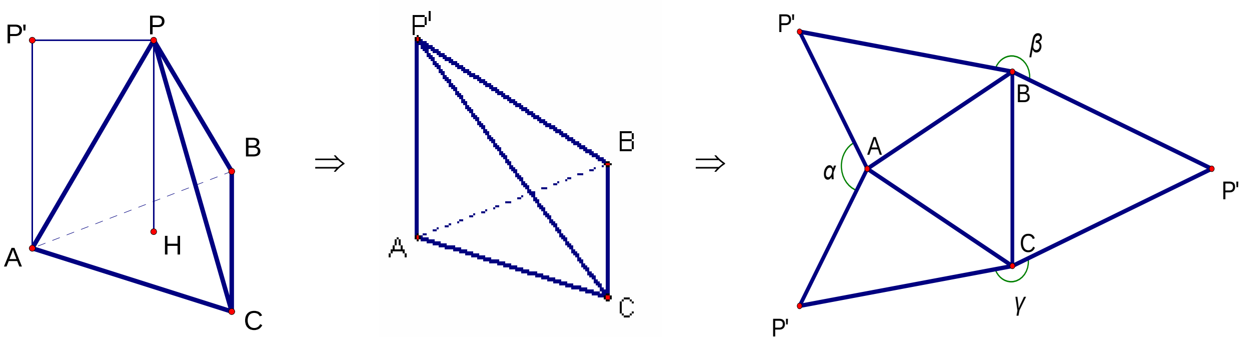
$$\cos\angle P'CB=\frac{a^2+(\frac{\sqrt{15}}{3}a)^2-(\frac{\sqrt{15}}{3}a)^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}a}=\frac{\sqrt{15}}{10}$$

則展開圖中$\angle P'CA \fallingdotseq 39°$、$\angle P'CB \fallingdotseq 67°$

$\Rightarrow \angle P'CP'=39°+67°+60°=166°$

$\Rightarrow \gamma=360°-166°=194°$

$\Rightarrow \gamma=194°>180° \Rightarrow$ 凹凸凸類型



(六)平凹凹類型：

將正四面體 P－ABC 的 P 沿著 $\overline{PA}$ 向上移動 $\frac{1}{2}a$ ，得一新的三角錐 P'－ABC

則展開圖中 $\angle P'AB=\angle P'AC=\angle BAC=60°$

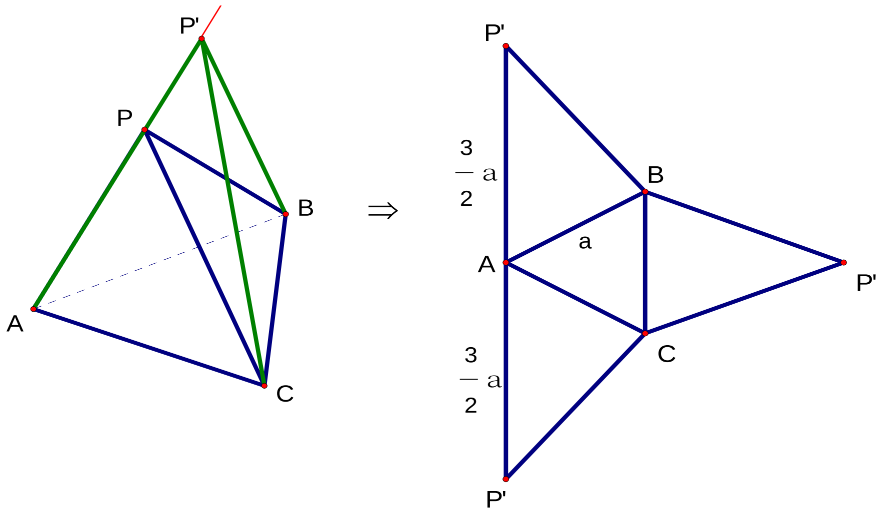
$\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AC}$ =a， $\overline{P'A}=\frac{3}{2}a$

$$\overline{P'B}=\overline{P'C}=\sqrt{a^2+(\frac{3}{2}a)^2-2\cdot a\cdot\frac{3}{2}a\cdot\cos 60°}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$\cos\angle P'CA=\frac{a^2+(\frac{\sqrt{7}}{2}a)^2-(\frac{3}{2}a)^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}a}=\frac{\sqrt{7}}{14}\text{，}\cos\angle P'CB=\frac{a^2+(\frac{\sqrt{7}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{7}}{2}a)^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}a}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$\angle P'CA \fallingdotseq 79°$ 、 $\angle P'CB \fallingdotseq 68°$

$\Rightarrow \angle P'CP'=79°+68°+60°=207°>180° \Rightarrow$ 平凹凹類型



(七)平凸凸類型：

將正四面體 P－ABC 的 P 沿著 $\overline{PA}$ 向下移動 $\frac{1}{2}a$ ，得一新的三角錐 P'－ABC

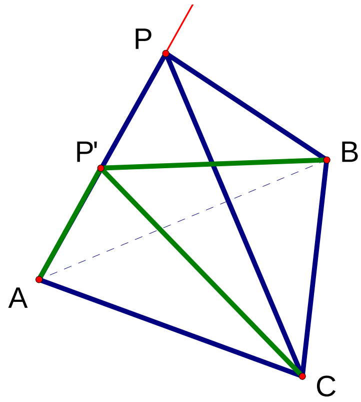
$\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AC}$ =a， $\overline{P'A}=\frac{1}{2}a$

$$\overline{P'B}=\overline{P'C}=\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2-2a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cos 60°}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

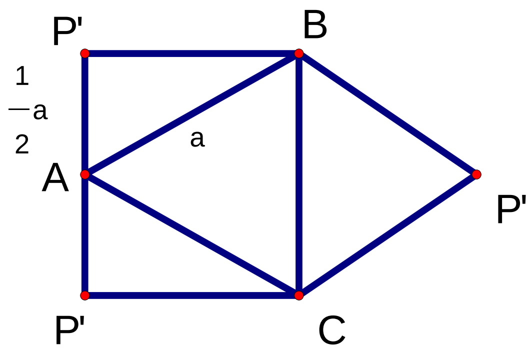
則展開圖中 $\angle P'AB=\angle P'AC=\angle BAC=60°$

$$\cos\angle P'CB=\frac{a^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\angle P'CB \fallingdotseq 55^\circ$ 、 $\angle P'CA=30^\circ \Rightarrow \angle P'CP'=30^\circ+55^\circ+60^\circ=145^\circ<180^\circ \Rightarrow$ 平凸凸類型



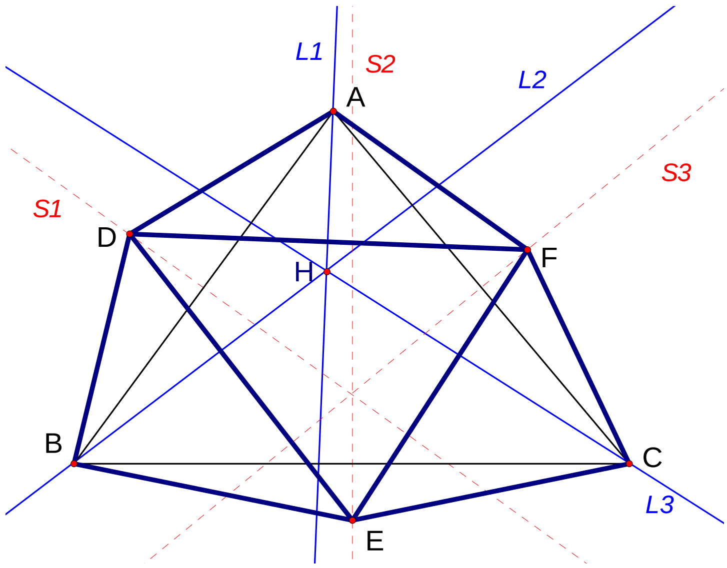
⇒



三、展開圖

三角錐的展開圖用凹凸平來做組合，其組合數共有 $H_3^3=C_3^{3+3-1}=C_3^5=10$ 種，目前從實際三角錐的立體圖形來展開可確定了 7 種三角錐展開圖形的存在，剩餘的 3 種展開圖是否同樣存在呢？由於從立體的三角錐圖形去探討其展開圖形，似乎比較不容易，我們將反過來嘗試直接從展開圖來討論。

(一)說明



1.任選一個三角錐的展開圖如上，若將△ADF、△BDE、△CEF 分別以 $\overline{DF}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 爲軸折起而能成爲三角錐，此時 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 重疊，即 $\overline{AD}=\overline{BD}$，所以 D 必在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，同理 E、F 亦分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中垂線上。

2.若 L_1 爲過A點且和 $\overleftrightarrow{DF}$ 垂直的直線、L_2 爲過B點且和 $\overleftrightarrow{DE}$ 垂直的直線、L_3 爲過C點且和 $\overleftrightarrow{EF}$ 垂直的直線，將△ADF折起時，A點必沿著過A點且垂直 $\overleftrightarrow{DF}$ 的平面上移動，因此A點的位置必在直線 L_1 的上方，同理B、C兩點的位置必分別在直線 L_2、L_3 的上方。

3.由於A、B、C三點折起後會重合爲一點，即爲此三角錐的頂點，因此 L_1、L_2、L_3 三直線會交於一點，反過來說，若我們發現這樣的圖形中 L_1、L_2、L_3 三直線共點，則知此

可能爲三角錐的展開圖，接下來將以此爲討論。

(二)討論、操作、證明：

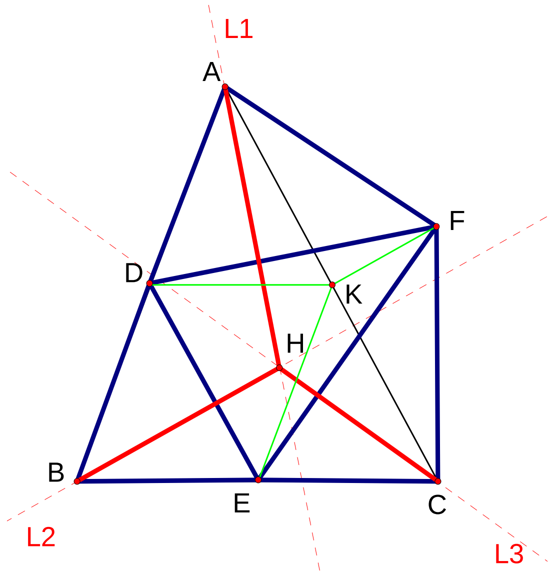
1.我們將討論當 D、E、F 三個動點如何相對應變動時，所得到的圖形爲三角錐的展開圖，以及此時展開圖的類型。由於 D、E、F 爲三邊中垂線上的動點，我們先將 D、E 固定於 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點上，單純由 F 在 $\overline{AC}$ 中垂線上的變動先來討論(即探討平平凸以及平平凹的情形)。

2.選定任意△ABC，希望找出F點移動到何處時，L_1、L_2、L_3三直線會共點，我們先借助GSP(幾何畫板)軟體操作，得到令人訝異的結果，似乎不論F如何變動，L_1、L_2、L_3三直線都會共點。

3.證明一：

已知：L_1和L_3的交點爲H，K爲 $\overline{AC}$ 的中點，連接 $\overline{BH}$ 。

欲證： $\overline{BH} \perp \overline{DE}$ 。



證明：

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BH} \cdot (\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EF})$$

$$= \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EF}$$

$$=(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{DF} - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{EF}$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{EF}$$

$$=2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DF} + 0 - 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{EF} - 0$$

$$=2\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{EF}$$

$$=2\overrightarrow{EK} \cdot (\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KF}) - 2\overrightarrow{DK} \cdot (\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KF})$$

$$=2\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DK} + 2\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{KF} - 2\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{EK} - 2\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{KF}$$

$=2\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{KF}-2\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{KF}$

$=2(\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{DK})\cdot\overrightarrow{KF}$

$=2\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{KF}$

$=\overleftrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{KF}$

$=0$

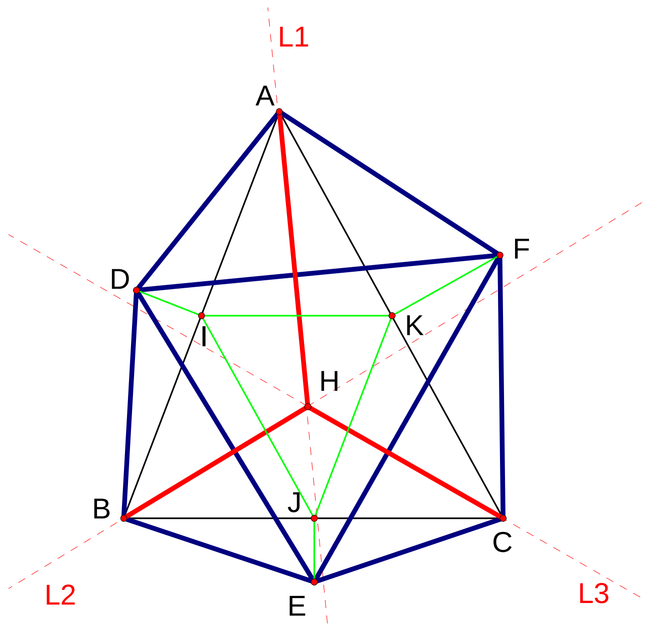
$\Rightarrow\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{DE}$

4.得到這個令人振奮的結果，我們同樣期待當D、E兩點在兩個中垂線上變動時，是否也會有同樣的結果呢？仍舊先用GSP軟體先操作試試看，結果發現不論D、E、F如何在三邊的中垂線上變動，L_1、L_2、L_3三直線都會共點。

5.證明二：

已知：L_1和L_3的交點爲H，I、J、K爲分別爲$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中點，連接$\overline{BH}$。

欲證：$\overline{BH}\perp\overline{DE}$。



證明：

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BH}\cdot(\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{EF})$

$=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}\quad=2\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{EF}$

$=2\overrightarrow{BI}\cdot(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KF})-2\overrightarrow{BJ}\cdot(\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KF})$

$=2\overrightarrow{JK}\cdot(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KF})-2\overrightarrow{IK}\cdot(\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KF})$

$=2\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{IK}+2\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{KF}-2\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{EJ}-2\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{JK}-2\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{KF}$

$=2\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{KF}-2\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{KF}$

$=2\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{KF}$

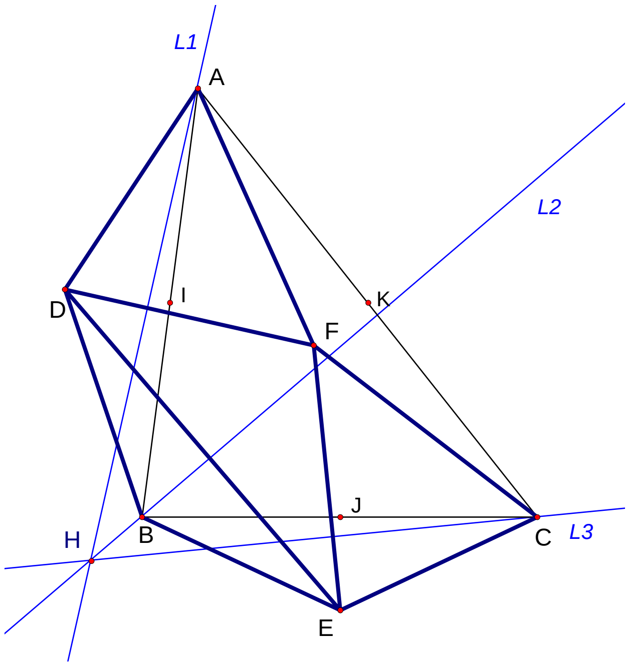
$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{KF}$

$=0$

$\Rightarrow \overline{BH}\perp\overline{DE}$

四、限制情形

前面證明了無論在△ABC各邊的中垂線上的D、E、F三點如何變動，L_1、L_2、L_3三直線都能共點，但是不是所有滿足這樣三線共點的情形，就都會是三角錐的展開圖呢？以△BDE來觀察，由於△BDE是沿著$\overline{DE}$折起，所以L_1、L_2、L_3三直線的交點若是位於B點的另一側(含B點)，則顯然是不能折成三角錐的。如下圖。



以此觀點，我們分以下兩點來討論：

(一)△ABC 的形狀

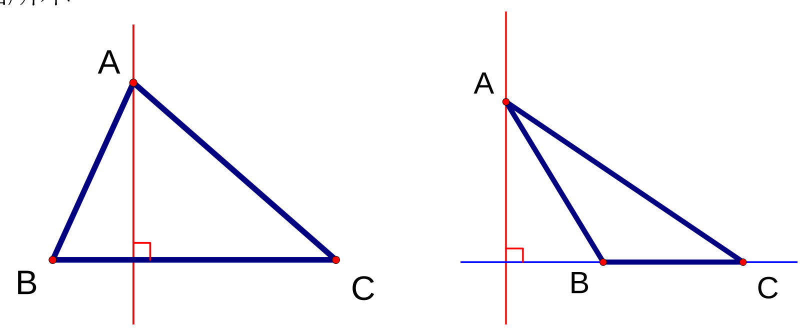
1.由於我們的討論都是由△ABC 爲基準出發，當△ABC 的形狀不同時，是不是都一定能夠存在這 10 種的展開圖呢？我們先藉助 GSP 軟體，分別就銳角、直角、鈍角△ABC 來討論，得到以下的結果。

類型 \ △ABC		銳角 （θ＜90°）	直角 （θ＝90°）		鈍角 （θ＞90°）	
平平平		✓	×	圖（a）	×	圖（m）
凸凸凸		✓	✓		✓	
凹凹凹		✓	×	圖（b）	×	圖（n）
平凸凸	平θ凸凸	✓	✓		✓	
	平凸θ凸	✓	×	圖（c）	×	圖（o）
平凹凹	平θ凹凹	✓	×	圖（d）	×	圖（p）
	平凹θ凹	✓	×	圖（e）	×	圖（q）
平平凸	平θ平凸	✓	✓		✓	
	平平θ凸	✓	×	圖（f）	×	圖（r）
平平凹	平θ平凹	✓	×	圖（g）	×	圖（s）
	平平θ凹	✓	×	圖（h）	×	圖（t）
凸凸凹	凸θ凸凹	✓	×	圖（i）	×	圖（u）
	凸凸θ凹	✓	✓		✓	
凹凹凸	凹θ凹凸	✓	✓		✓	
	凹凹θ凸	✓	×	圖（j）	×	圖（v）
平凸凹	平θ凸凹	✓	×	圖（k）	×	圖（w）
	平凸θ凹	✓	×	圖（l）	×	圖（x）
	平凸凹θ	✓	✓		✓	

※「×」指這樣的圖形一定不存在。

2.證明：

引理：△ABC，由 A 作 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂線，若△ABC 為銳角三角形，則此垂線必通過 $\overline{BC}$，若△ABC 為鈍角三角形(∠B＞90°)，則此垂線和 $\overleftrightarrow{BC}$ 的交點不在 $\overline{BC}$ 上，在 B 點的另一側，如下圖所示。



直角△ABC(不存在的圖形如附圖)：

(1)如圖(c)

顯然L_1、L_2、L_3三直線的交點H和B點重合，所以無法折成三角錐。同理可說明圖(a)(e)(f)(h)(l)不為三角錐的展開圖。

(2)如圖(d)

∠ADF=∠ADK+∠KDF=90°+∠KDF＞90°

⇒△ADF 為鈍角三角形

由於 $\overleftrightarrow{AD}$ 和直線L_2交於B點，所以此時L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不為三角錐的展開圖。同理可證圖(g)(k)。

(3)如圖(b)

∠AGD=∠GID+∠GDI=90°+∠GDI＞90°

⇒△AGD 為鈍角三角形

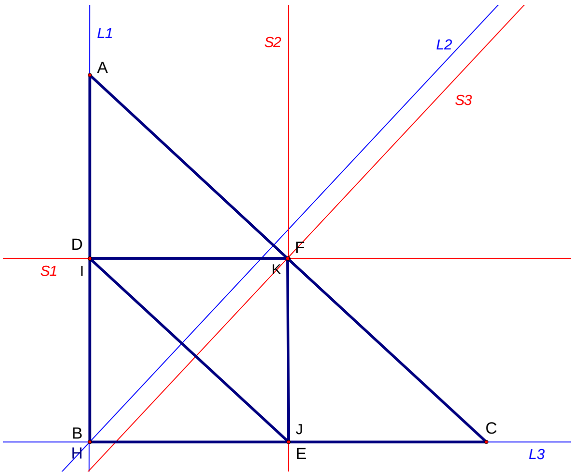
此時L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不為三角錐的展開圖。同理可證圖(j)

(4)圖(i)

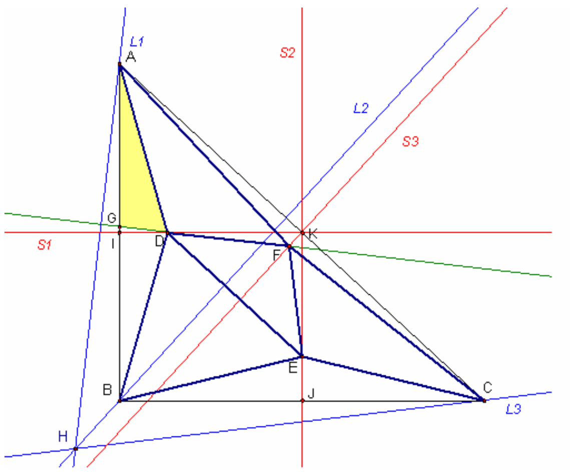
∠AGF=∠GID+∠GDK=90°+∠GDK＞90°

⇒△AGF 為鈍角三角形

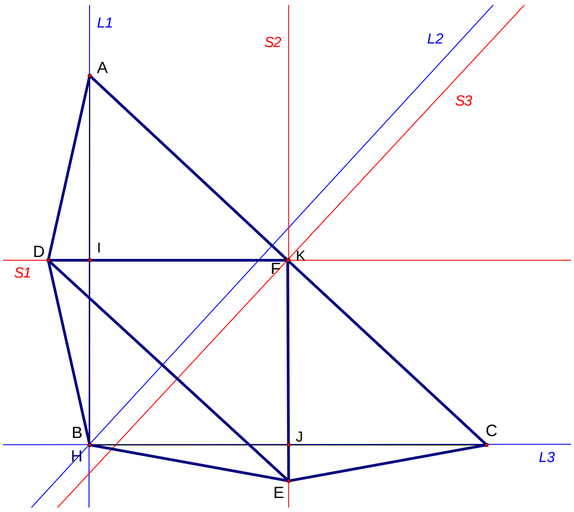
此時L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不為三角錐的展開圖。



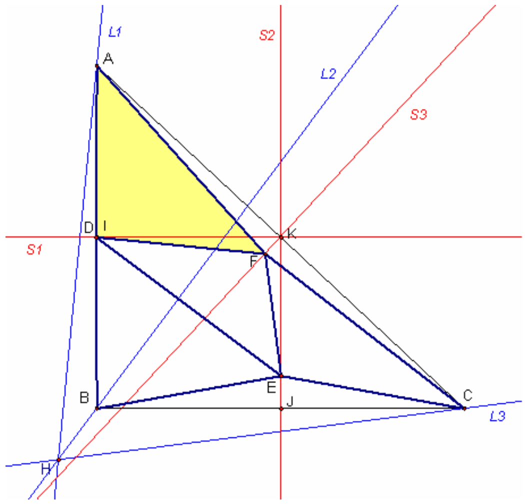
圖（a）



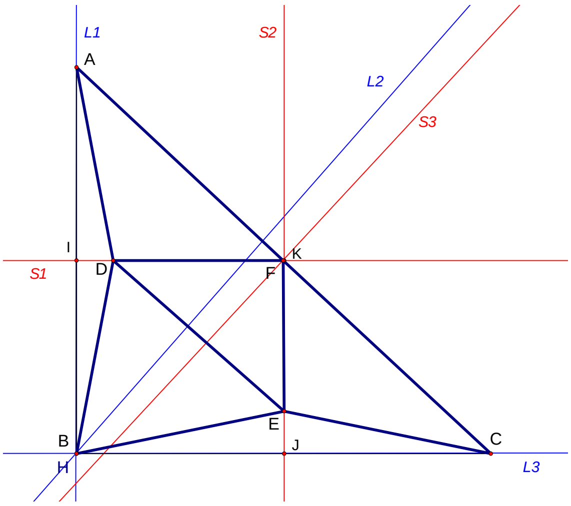
圖（b）



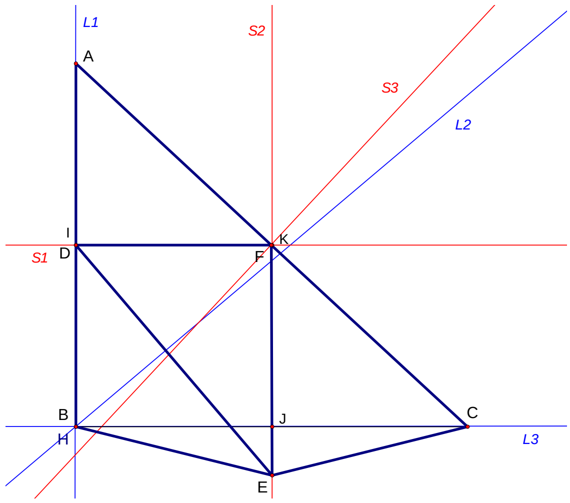
圖（c）



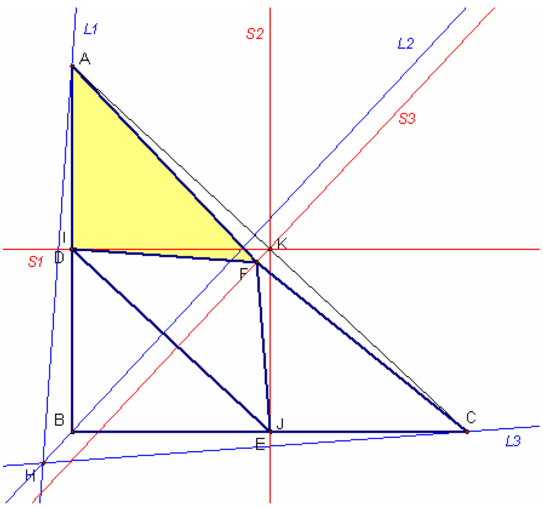
圖（d）



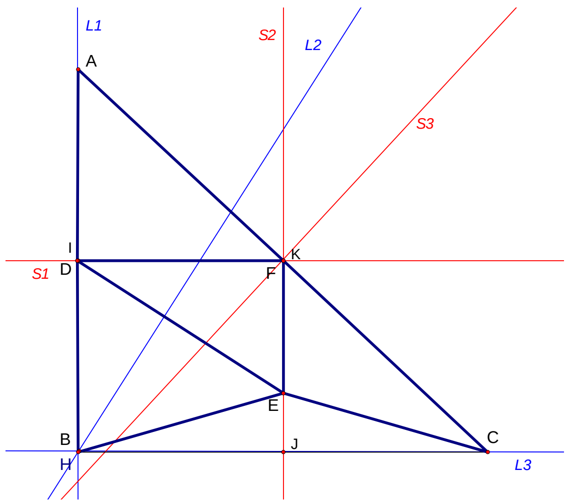
圖（e）



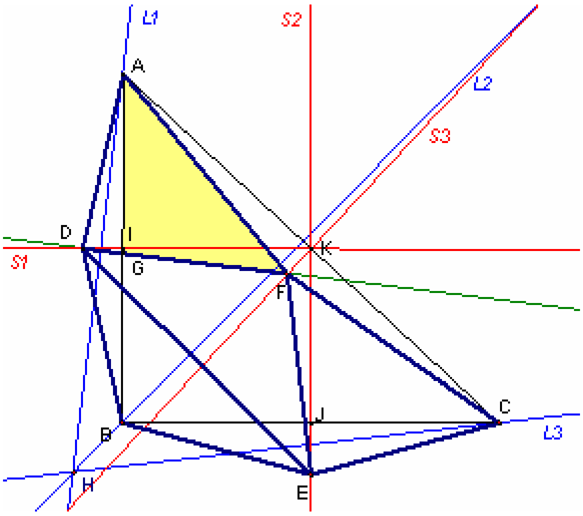
圖（f）



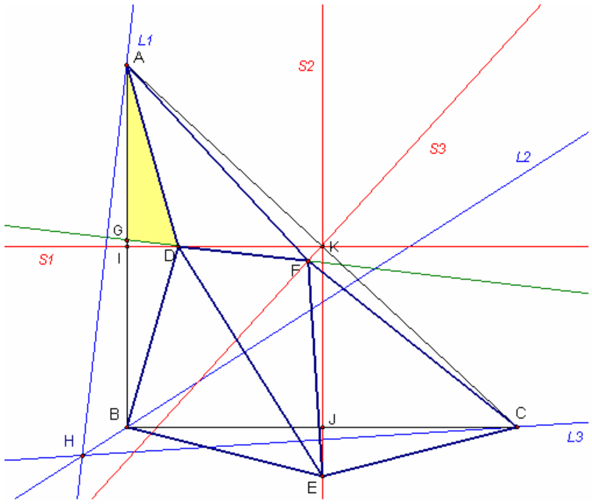
圖（g）



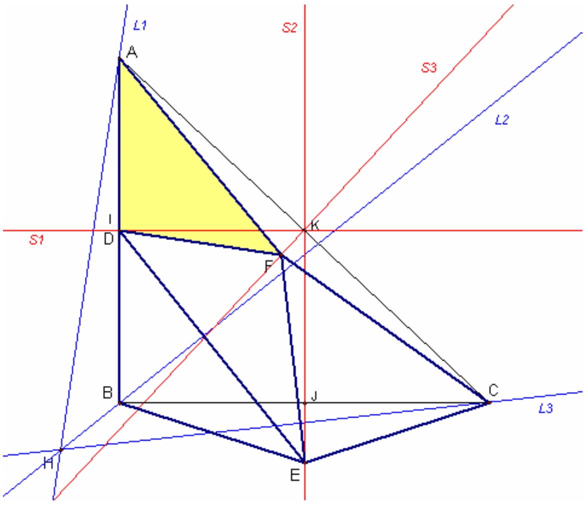
圖（h）



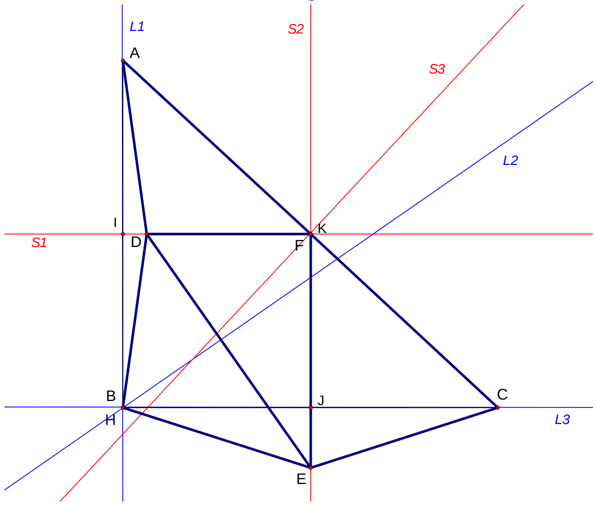
圖（i）



圖（j）



圖（k）



圖（l）

鈍角△ABC(不存在的圖形如附圖)：

(1)如圖(m)

由於 $\overleftrightarrow{AD}$ 和直線S_1垂直，則∠ADM=90°

∠ADF=∠ADM+∠MDF=90°+∠MDF＞90°

⇒△ADF 爲鈍角三角形，

此時L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不爲三角錐的展開圖。同理可證圖(s)

(2)如圖(n)

∠AGD=∠GID+∠GDI=90°+∠GDI＞90°

⇒△AGD 爲鈍角三角形

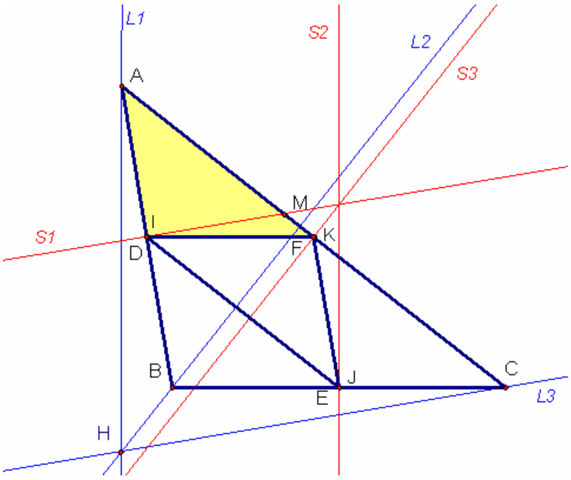
此時L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不爲三角錐的展開圖。同理可證圖(p)(q)(t)(v)

(3)如圖(o)

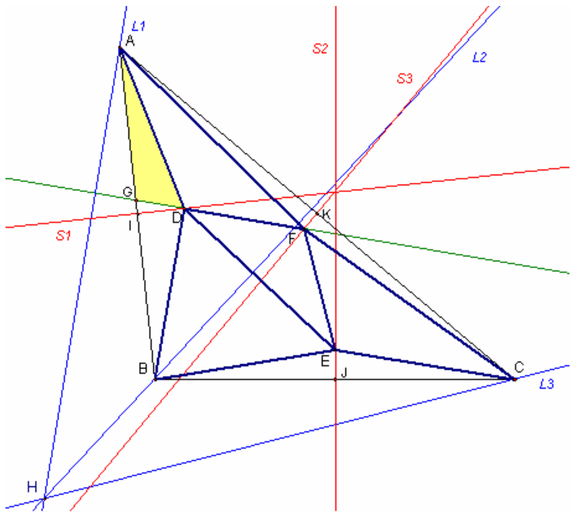
∠AGF=∠GID+∠GDI=90°+∠GDI＞90°

⇒△AGF 爲鈍角三角形

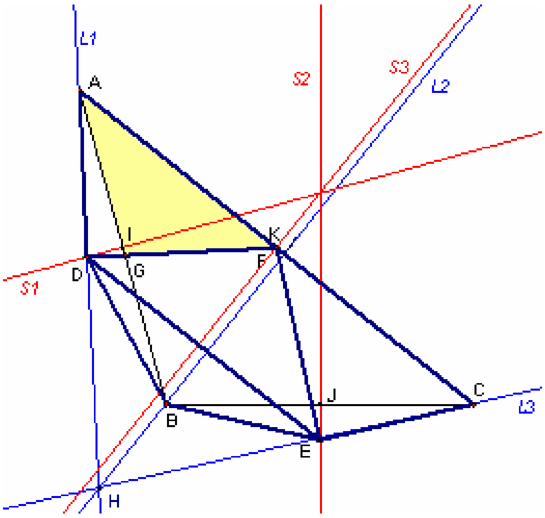
此時L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不爲三角錐的展開圖。同理可證圖(r)(u)(w)(x)



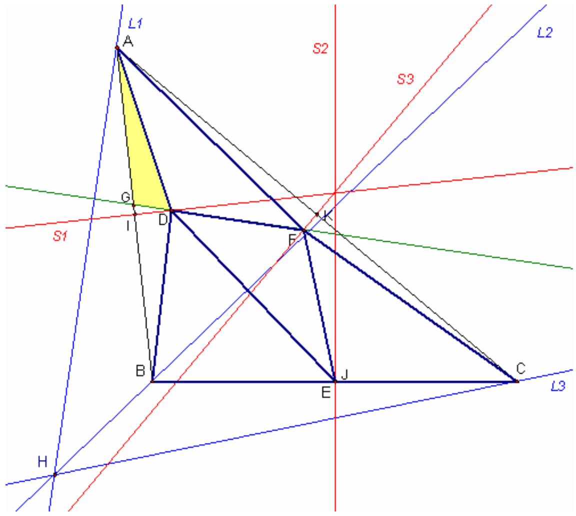
圖（m）



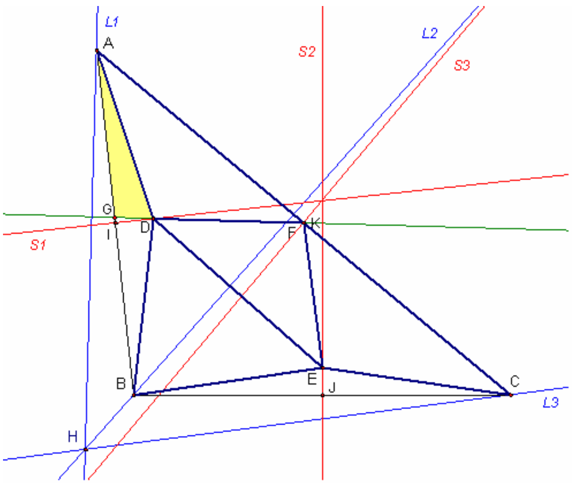
圖（n）



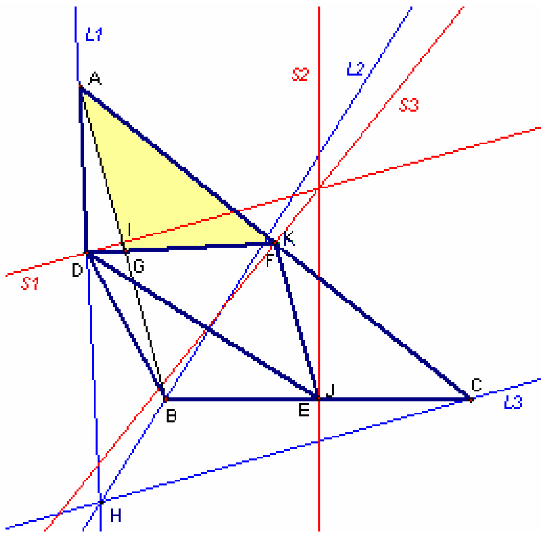
圖（o）



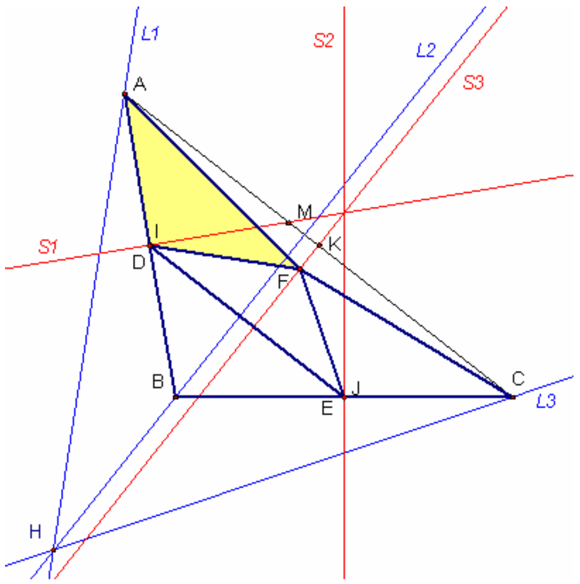
圖（p）



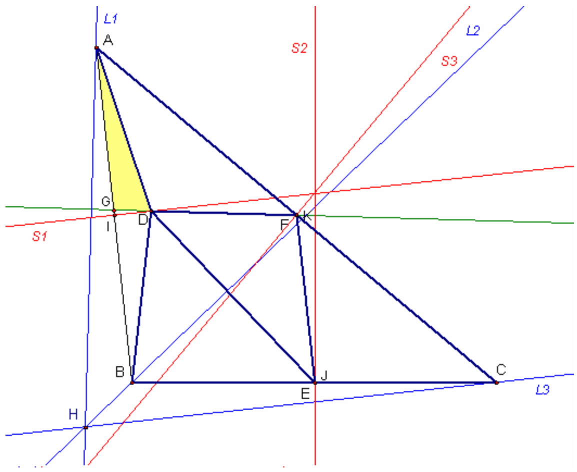
圖（q）



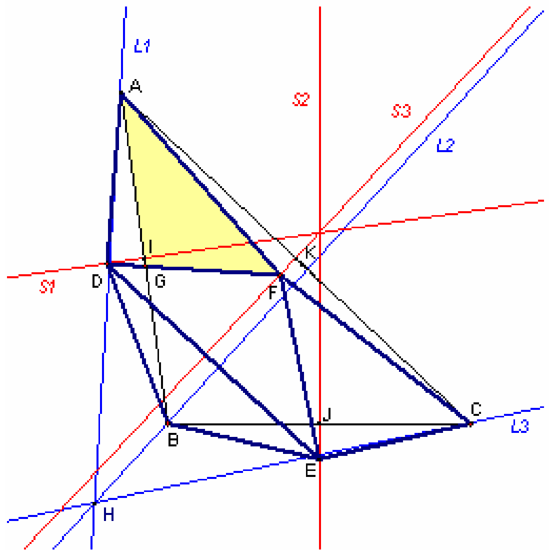
圖（r）



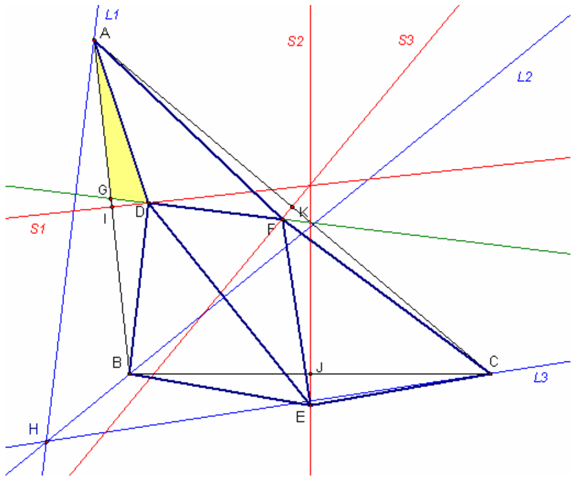
圖（s）



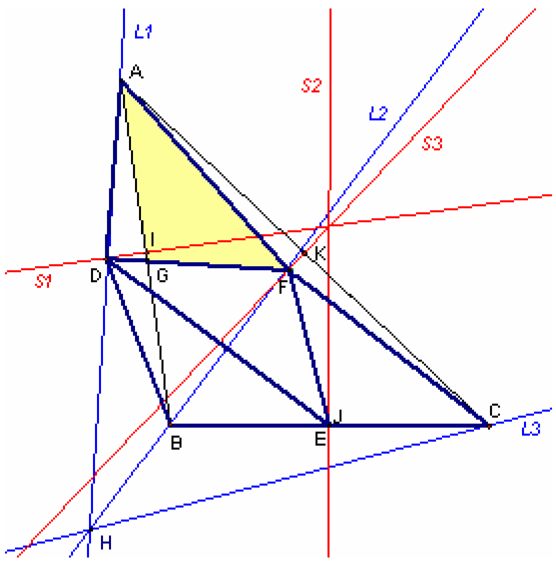
圖（t）



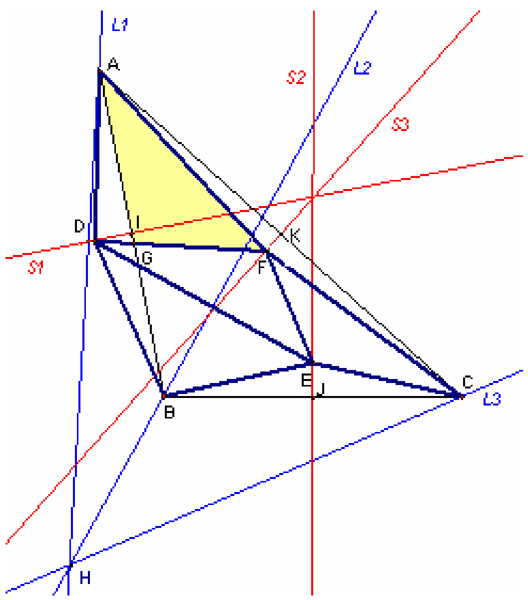
圖（u）



圖（v）



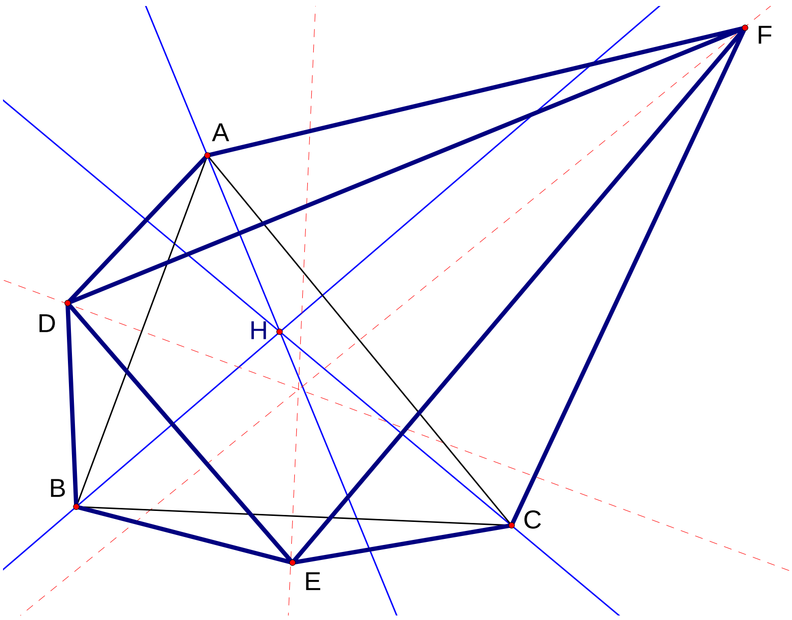
圖（w）



圖（x）

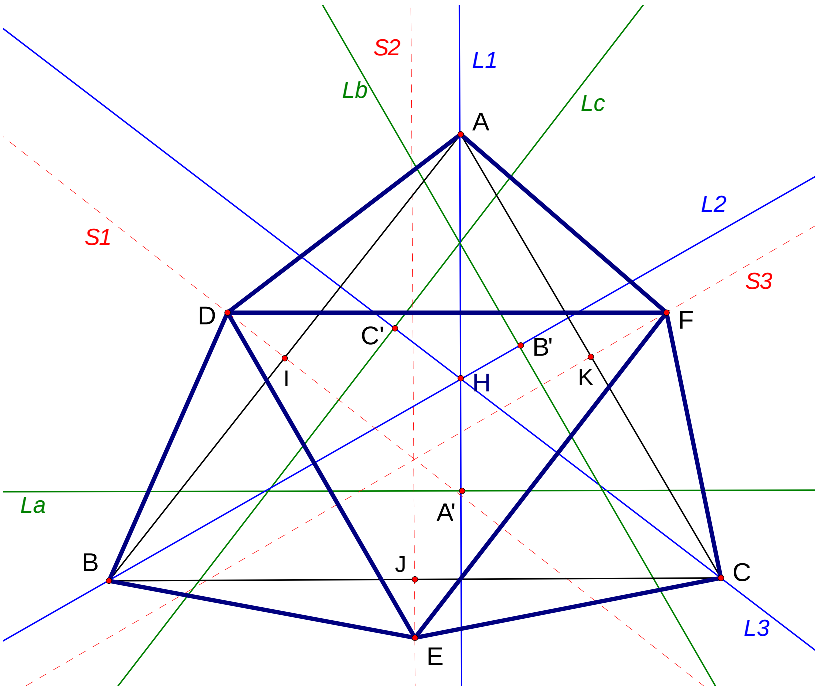
(二)D、E、F 三點的變動限制

從以上的討論可以知道 D、E、F 三點的變動而形成三角錐的各種展開圖形，當△ABC 的形狀變化，有些展開圖形是不存在的，但其他存在的展開圖形，是否還有限制情形呢？是否這三個動點是否都可以在直線上任意的延伸，而能讓所產生的圖形一樣爲三角錐的展開圖形呢？如圖



1.討論方法

(1)A、B、C 分別對 $\overline{DF}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 作對稱點 A'、B'、C'，當 A、B、C 折起時，A、B、C 三點的軌跡必分別位於 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 上方。



(2)過A'作 $\overline{DF}$ 的平行線L_a，過B'作 $\overline{DE}$ 的平行線L_b、過C'作 $\overline{EF}$ 的平行線L_c，先將D、E兩點固定(ex.凸凸)，當F點變動時，H必須在A和直線L_a之間，同理H也必須在B和L_b以及C和L_c之間。

(3)利用GSP軟體操作可以觀察出，當F移動至△ABC的外心時，L_1、L_2、L_3的交點H和B點重合，但當F往另一方向移動至某一個特定位置，此時L_1、L_2、L_3、L_a、L_b、L_c六直線剛好會重合於一點，我們將此一特定位置稱為T點。

(4)大部分的圖形，當 F 在外心和 T 之間(不包含外心和 T 點)變動時，可以折成三角錐，反之則無法成立。

(5)利用 GSP 軟體，針對所有可能的展開圖做探討，我們將先將 D、E 兩點固定，然後依照 F 點的變動來討論，得到以下的結果：

	DEF	**F 點的限制情形**					
		銳角		直角		鈍角	
平平 **X**	平θ平平	✓	$\overline{AC}$ 中點	×		×	
	平θ平凸	✓	無限制	✓	無限制	✓	外心
	平θ平凹	✓	外心	×		×	
	平平θ平	✓	$\overline{AC}$ 中點	×		×	
	平平θ凸	✓	無限制	×		×	
	平平θ凹	✓	外心	×		×	
凸凸 **X**	凸θ凸平	✓	$\overline{AC}$ 中點	×		×	
	凸θ凸凸	✓	**T** 點	✓	**T** 點	✓	外心 **T** 點
	凸θ凸凹	✓	外心	×		×	
	凸凸θ平	✓	$\overline{AC}$ 中點	✓	無限制	✓	*無限制
	凸凸θ凸	✓	**T** 點	✓	**T** 點	✓	***T** 點
	凸凸θ凹	✓	外心	✓	外心	✓	*外心
凹凹 **X**	凹θ凹平	✓	$\overline{AC}$ 中點	×		×	
	凹θ凹凸	✓	無限制	✓	無限制	✓	外心
	凹θ凹凹	✓	外心	×		×	
	凹凹θ平	✓	$\overline{AC}$ 中點	×		×	
	凹凹θ凸	✓	無限制	×		×	
	凹凹θ凹	✓	外心	×		×	

平凸 **X**	平θ凸平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	平θ凸凸	✓	**T** 點	✓	**T** 點	✓	外心 **T** 點
	平θ凸凹	✓	外心	×		×	
	平凸θ平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	平凸θ凸	✓	**T** 點	×		×	
	平凸θ凹	✓	外心	×		×	
	凸平θ平	✓	$\overline{AC}$中點	✓	無限制	✓	*無限制
	凸平θ凸	✓	**T** 點	✓	**T** 點	✓	***T** 點
	凸平θ凹	✓	外心	✓	外心	✓	*外心
平凹 **X**	平θ凹平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	平θ凹凸	✓	無限制	✓	無限制	✓	外心
	平θ凹凹	✓	外心	×		×	
	平凹θ平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	平凹θ凸	✓	無限制	×		×	
	平凹θ凹	✓	外心	×		×	
	凹平θ平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	凹平θ凸	✓	無限制	×		×	
	凹平θ凹	✓	外心	×		×	
凸凹 **X**	凸θ凹平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	凸θ凹凸	✓	**T** 點	✓	**T** 點	✓	外心 **T** 點
	凸θ凹凹	✓	外心	×		×	
	凸凹θ平	✓	$\overline{AC}$中點	✓	無限制	✓	*無限制
	凸凹θ凸	✓	**T** 點	✓	**T** 點	✓	***T** 點
	凸凹θ凹	✓	外心	✓	外心	✓	*外心
	凹凸θ平	✓	$\overline{AC}$中點	×		×	
	凹凸θ凸	✓	**T** 點	×		×	
	凹凸θ凹	✓	外心	×		×	

※凸：指在固定 D 或 E 點使其爲凸時，D、E 兩點需介於外心與 T 之間(不包含外心和 T 點)。

※凹：指在固定 D 或 E 點使其爲凹時，D、E 兩點不得超過外心。

※T點作法：作B對 $\overline{DE}$ 的對稱點B’，作 $\overline{AB'}$ 的中垂線，和 $\overleftrightarrow{AC}$ 中垂線L_2交於一點，此點即爲T點。

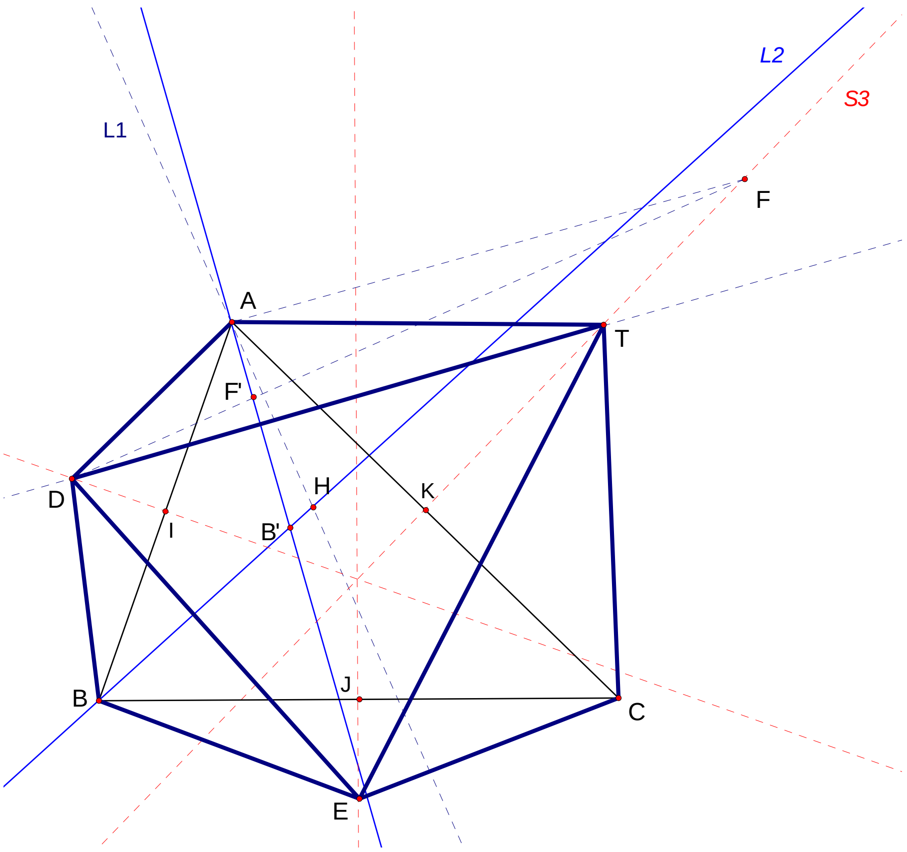
2.證明：(以凸凸 X 類型爲例)

(1)若動點 F 的位置超過 T 點時(如圖所示)

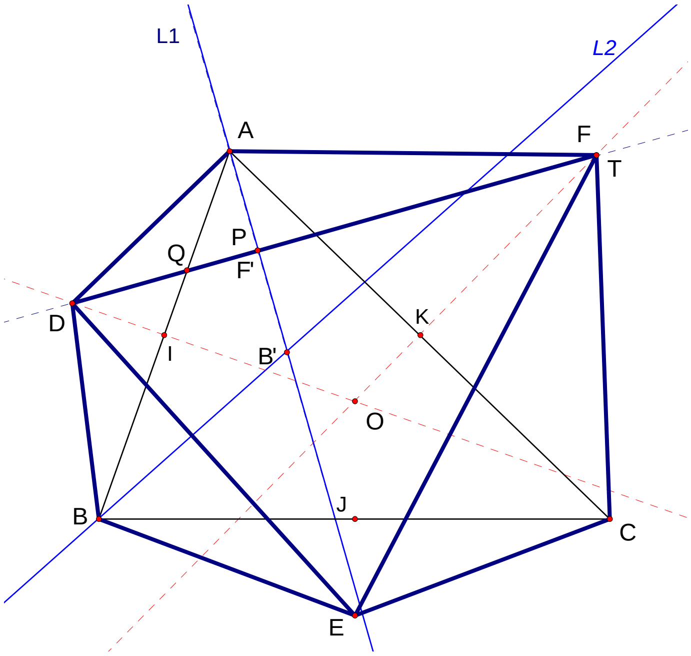
∠AF’F=∠DF’B’=90°-∠ F’DT ＜90°

⇒∠AF’F 爲銳角

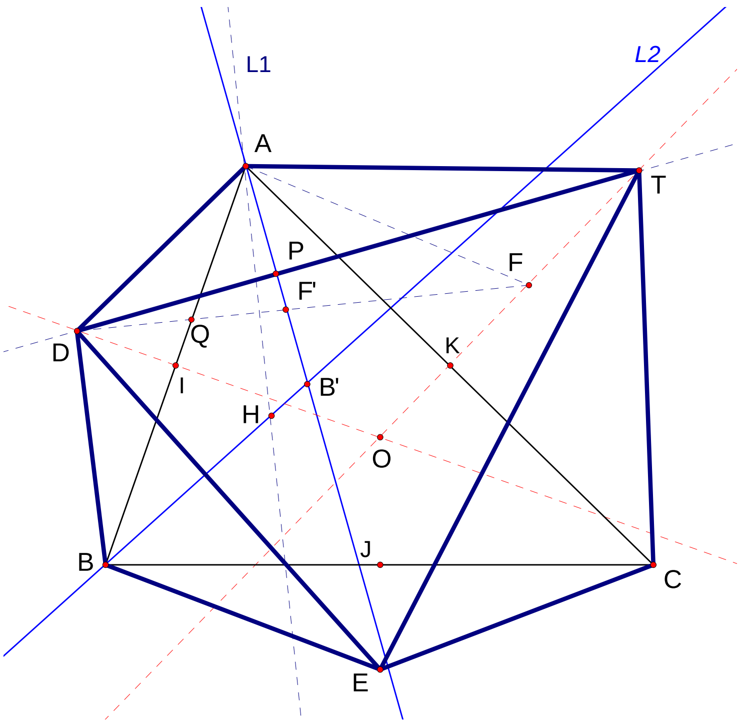
此時L_1必通過 $\overline{F'F}$ ，所以L_1和L_2的交點H必不在B和B’之間，所以此種情形必不爲三角錐的展開圖。



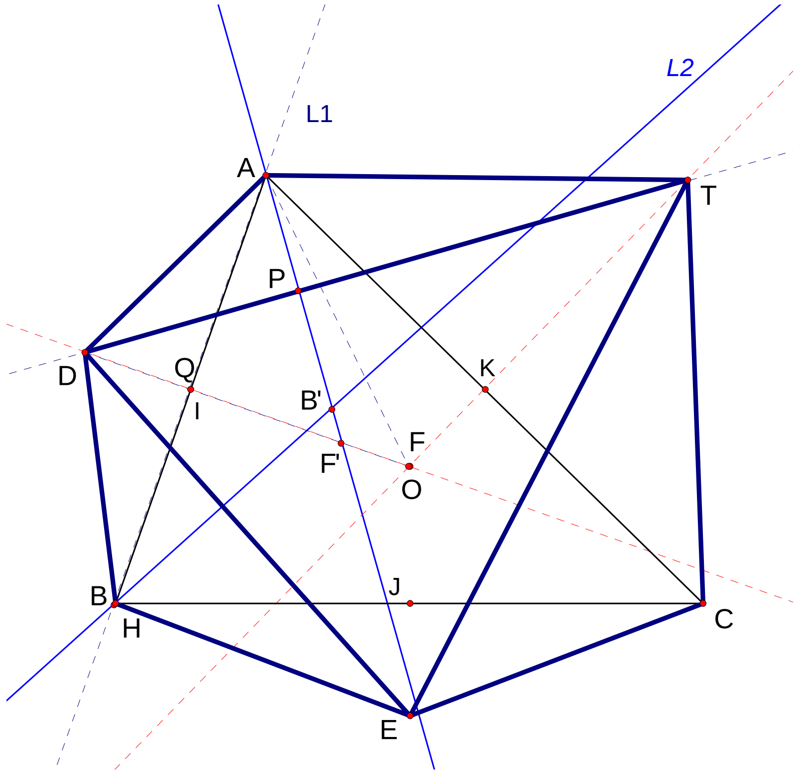
(2)F位於T點，由T點的作法可知，此時顯然L_1和L_2的交點剛好在B'上，所以此種情形必不爲三角錐的展開圖。



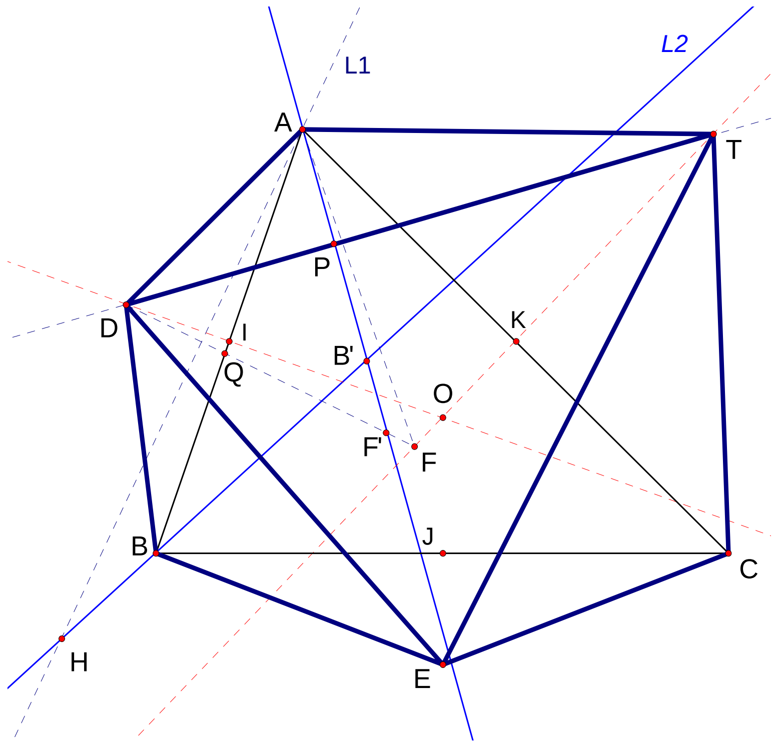
(3)F介於外心O和T點之間，$\angle AF'Q=90°-\angle FDP<90°$，$\angle AQF'=\angle DQI=90°-\angle IDQ<90°$，所以在$\triangle AQF'$中，$\angle Q$、$\angle F'$皆爲銳角，若此時過A作$\overleftrightarrow{QF}$的垂線$L_2$，$L_2$必通過$\overline{QF}$(不含端點)，所以$L_2$和$L_1$的交點H必介於B和B'之間，此時這樣的圖形可爲三角錐的展開圖。



(4)F位於外心O點，很顯然L_2和L_1的交點H和B點重合，所以此種情形必不為三角錐的展開圖。

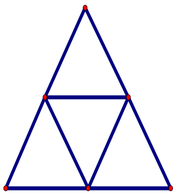


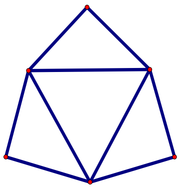
(5)F位於外心O的另一側，如圖，此時∠AQF=∠DIQ+∠QDI=90°+∠QDI＞90°，在△AQF中，∠Q為鈍角，若此時過A作$\overleftrightarrow{QF}$的垂線L_1，L_1和L_2的交點H在B點的另一側(△ABC的外部)，所以此種情形必不為三角錐的展開圖。

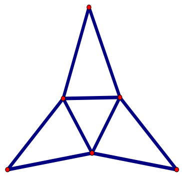


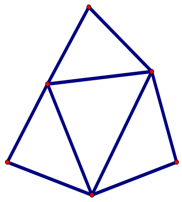
伍、結論

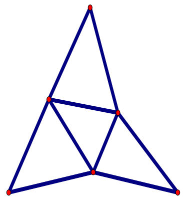
一、三角錐的展開圖形總共有 10 種，有平平平、凸凸凸、凹凹凹、平凸凸、平凹凹、平平凸、平平凹、凸凸凹、凹凹凸、平凸凹 10 種類型，此 10 種類型的展開圖都存在。

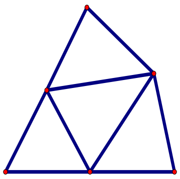

平平平

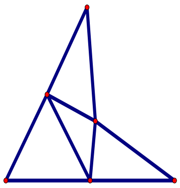

凸凸凸

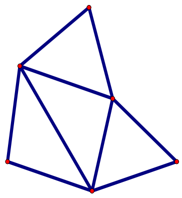

凹凹凹

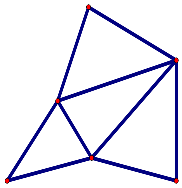

平凸凸

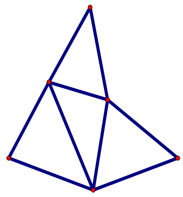

平凹凹


平平凸


平平凹


凸凸凹


凹凹凸


平凸凹

二、可以選定基準△ABC，利用三邊中垂線上的動點來尋找三角錐的展開圖。

三、當△ABC 的形狀變化，或是其三邊中垂線上動點變化時，所探討的部分類型展開圖形是不存在的，亦即部分類型的展開圖形是有其限制條件的。

陸、參考資料

朱恩寬、藍紀正譯(1991)。歐幾里得(P.515~520)。台北市：九章出版社。

李善文、楊壬孝、蔡天鉞、蔡杰、葉德祥、鍾祺聰合著(2008)。高中數學(二)課本(第二章 三角函數的基本概念，第三章 三角函數的性質與應用)。台北市：全華出版社。

李善文、楊壬孝、蔡天鉞、蔡杰、葉德祥、鍾祺聰合著(2008)。高中數學(三)課本(第一章 向量，第二章 空間中的直線與平面)。台北市：全華出版社。

庫蘭特、羅賓士(1992)。數學導論(L3 幾何作圖 P.130~134)。台北市：水牛出版社。

陳清風、許志農、許琬青、曾政清、謝銘峰合著(2006)。高中數學(二)課本(第二章 三角函數的基本概念，第三章 三角函數的性質與應用)。台北市：龍騰出版社。

陳清風、許志農、許琬青、曾政清、謝銘峰合著(2007)。高中數學(三)課本(第一章 向量，第二章 空間向量)。台北市：龍騰出版社。

趙文敏(1992)。幾何學概論 (4-4 平面 P.234~246 ，6-4 橢圓幾何 P.457~471)。台北市：九章出版社。

【評語】040404

1、 三角錐是立體幾何物件，而展開圖乃是平面幾何物件。猶如將圓圈拉直成為線段完全喪失圓圈的幾何性質一般，展開圖喪失三角錐空間性質。透過展開圖來研究立體幾何物件實在並不是有效的研究方法。

2、 動態幾何軟體能夠增強人們對於數學猜測的信心，本研究結合古典幾何及動態幾何的方法進行探討，請注意：透過動態幾何軟體的展示卻並不一定代表嚴謹的數學証明。

3、 探討立體幾何，應該考慮使用 Cabri 3D 作為實驗工具。該軟體除了提供逼真的空間知覺，對於製作三角錐的展開圖更是輕鬆無比。