中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040402

直線絕對值方程式研究

學校名稱：國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 楊容瑋 高二 劉丞邦 高二 林士堯	江青山

關鍵詞：三角形、凸多邊形、凹多邊形

摘要

在本文中，我們針對三條直線加了若干絕對值的方程式所形成的圖形，做了詳細的討論，並對封閉的圖形特別有興趣。發現方程式 $L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$ 的圖形若為封閉圖形，必為**凸四邊形**，也證明了所有凸四邊形皆可以被上述方程式唯一表示，方程式 $L_3+\alpha\left|L_1+\beta|L_2|\right|=0$ 的圖形若為封閉圖形，必為**凹四邊形**，也證明了所有凹四邊形皆可以被上式唯一表示，而方程式 $|L_3|+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=k$ 的主要封閉圖形為**凸六邊形**，及**花瓶凹六邊形**。最後，方程式 $|L_3|+\alpha\left|L_1+\beta|L_2|\right|=k$ 的主要封閉圖形為**狐狸凹八邊形**，以及**貓臉凹六邊形**，還有可能是**三角形**，並証明了此方程式的圖形為三角形時的條件。並且關於係數 α 、 β 對圖形的影響，以及三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 在方程式的圖形中所扮演的角色，在理論上做了盡可能的探討，並以 GSP 軟體動態模擬呈現。

壹、研究動機：

在高中許多題目都可見到絕對值方程式圖形的影子，不少題目畫出來的結果都是封閉且對稱的圖形，之前我們在課堂上學過一些方程式 $a|L_1|+\beta|L_2|=c$ ($c>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$) 的圖形，發現只要是此類型的方程式圖形，皆為點對稱的平行四邊形，在好奇心驅使下，我們試著在方程式前加了另一直線，變成 $L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$ 的形式，試算了許多類似的方程式後發現，加了新的直線 L_3 不但會破壞其圖形的對稱性，且可能形成封閉的四邊形或開放的折線圖形，於是我們開始對這類直線加了絕對值的方程式產生興趣而有底下的研究討論。

貳、研究目的：

一、探討三條直線加上兩個絕對值的方程式 $L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$ 、 $L_3+\alpha|L_1+\beta|L_2||=0$ ，在係數 α,β 及直線的變化下可能形成的圖形，特別是封閉多邊形的情形。

二、探討三條直線加上三個絕對值的方程式 $|L_3|+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=k$ 、 $|L_3|+\alpha|L_1+\beta|L_2||=k$ ，在係數 α,β 及直線的變化下可能形成的圖形，特別是封閉多邊形的情形。

三、探討直線 L_1 、 L_2 、 L_3 與上述方程式中圖形的關係，並研究瞭解各圖形的特徵與性質。

參、器材與設備：

電腦、軟體 Mathematica 6.0、GSP、紙、筆、Microsoft Word

肆、研究過程與方法：

研究問題一：方程式 $L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$ 圖形的研究。

由於一圖形經過平移或旋轉，並不改變圖形的大小或是形狀，所以我們可將方程式 $L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$ 經過適當的**平移**，使 L_1與L_2 交於原點，得 $L_3+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=0$ ，再將此方程式經過適當的**旋轉**，使得 L_3 為一平行 x 軸的水平線。所以接下來的討論，我們皆以方程式 $y+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=c$ 來進行。

1.令 $m_1x-y\ge 0$ 且 $m_2x-y\ge 0$

可得方程式 $(\alpha m_1+\beta m_2)x+(1-\alpha-\beta)y=c$ ，我們利用克拉瑪公式求其與 $L_1:m_1x-y=0$ 的交點 P，其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha m_1+\beta m_2 & 1-\alpha-\beta\\ m_1 & -1\end{vmatrix}=\beta(m_1-m_2)-m_1$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}c & 1-\alpha-\beta\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-c \quad , \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}\alpha m_1+\beta m_2 & c\\ m_1 & 0\end{vmatrix}=-cm_1$$

當 $\Delta\neq 0$ 時，得到 P 點座標如下：$P\ \left(\dfrac{-c}{\beta(m_1-m_2)-m_1},\dfrac{-cm_1}{\beta(m_1-m_2)-m_1}\right)$

再求其與 $L_2:m_2x-y=0$ 的交點Q:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha m_1+\beta m_2 & 1-\alpha-\beta\\ m_2 & -1\end{vmatrix}=\alpha(m_2-m_1)-m_2$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}c & 1-\alpha-\beta\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-c \quad , \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}\alpha m_1+\beta m_2 & c\\ m_2 & 0\end{vmatrix}=-cm_2$$

當$\Delta\neq 0$時，得到Q點座標如下： $Q(\frac{-c}{\alpha(m_2-m_1)-m_2},\frac{-cm_2}{\alpha(m_2-m_1)-m_2})$

2.令$m_1x-y\geq 0$且$m_2x-y\leq 0$

可得方程式$(\alpha m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\beta)y=c$，我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_1:m_1x-y=0$的交點$R$和其與$L_2:m_2x-y=0$的交點$Q$:

可求出$R(\frac{-c}{\beta(m_2-m_1)-m_1},\frac{-cm_1}{\beta(m_2-m_1)-m_1})$與 $Q(\frac{-c}{\alpha(m_2-m_1)-m_2},\frac{-cm_2}{\alpha(m_2-m_1)-m_2})$

3.令$m_1x-y\leq 0$且$m_2x-y\leq 0$

可得方程式$(-\alpha m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha+\beta)y=c$，我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_1:m_1x-y=0$的交點$R$和其與$L_2:m_2x-y=0$的交點$S$:

可求出$R(\frac{-c}{\beta(m_2-m_1)-m_1},\frac{-cm_1}{\beta(m_2-m_1)-m_1})$ 與$S(\frac{-c}{\alpha(m_1-m_2)-m_2},\frac{-cm_2}{\alpha(m_1-m_2)-m_2})$

4.令$m_1x-y\leq 0$且$m_2x-y\geq 0$

可得方程式$(-\alpha m_1+\beta m_2)x+(1+\alpha-\beta)y=c$，我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_1:m_1x-y=0$的交點$P$和其與$L_2:m_2x-y=0$的交點$S$:

可求出$P(\frac{-c}{\beta(m_1-m_2)-m_1},\frac{-cm_1}{\beta(m_1-m_2)-m_1})$與$S(\frac{-c}{\alpha(m_1-m_2)-m_2},\frac{-cm_2}{\alpha(m_1-m_2)-m_2})$

整理後可得到P,Q,R,S四點座標如下：

$P(\frac{-c}{\beta(m_1-m_2)-m_1},\frac{-cm_1}{\beta(m_1-m_2)-m_1})$， $Q(\frac{-c}{\alpha(m_2-m_1)-m_2},\frac{-cm_2}{\alpha(m_2-m_1)-m_2})$

$R(\frac{-c}{\beta(m_2-m_1)-m_1},\frac{-cm_1}{\beta(m_2-m_1)-m_1})$， $S(\frac{-c}{\alpha(m_1-m_2)-m_2},\frac{-cm_2}{\alpha(m_1-m_2)-m_2})$

以及四條直線：

$\overleftrightarrow{PQ}:(\alpha m_1+\beta m_2)x+(1-\alpha-\beta)y=c$ ， $\overleftrightarrow{QR}:(\alpha m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\beta)y=c$

$\overleftrightarrow{RS}:(-\alpha m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha+\beta)y=c$ ， $\overleftrightarrow{SP}:(-\alpha m_1+\beta m_2)x+(1+\alpha-\beta)y=c$

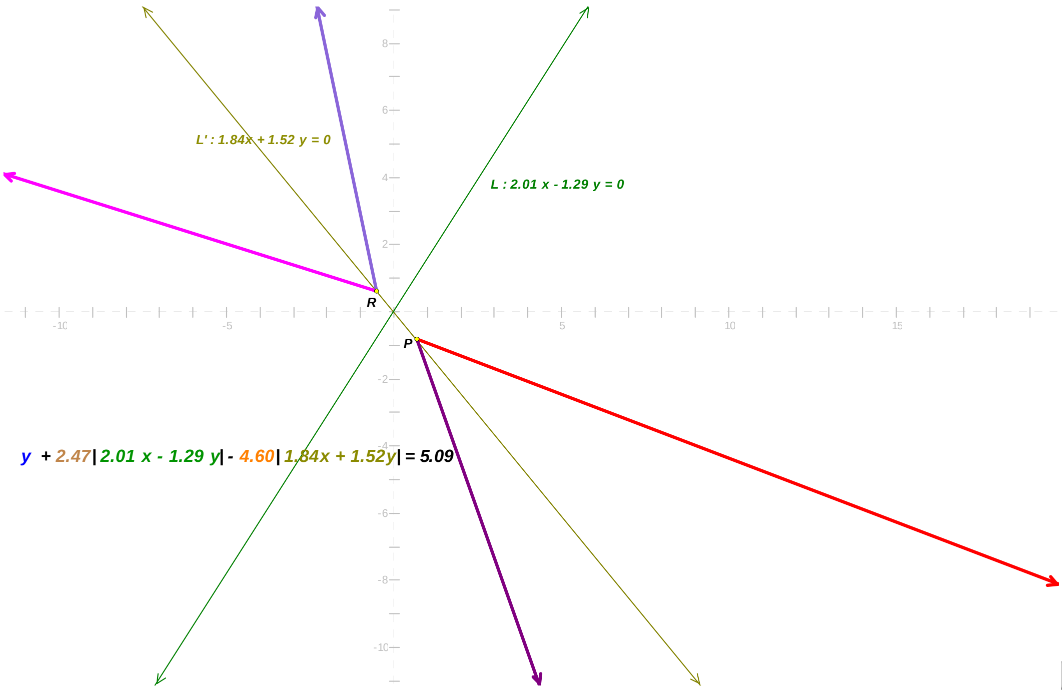
再經過計算與分析後，得以下**幾點推論**

(1) 因為在$\alpha,\beta\neq 0$的情況下，α 不會同時為$\pm\dfrac{m_2}{m_1-m_2}$，β 也不會同時為$\pm\dfrac{m_1}{m_1-m_2}$，所以 P,Q,R,S 四點有可能皆不存在，或是至少兩個點以上存在。

(2) 若 P,Q,R,S 四點皆不存在，則方程式 $y+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=c$ 沒有圖形。

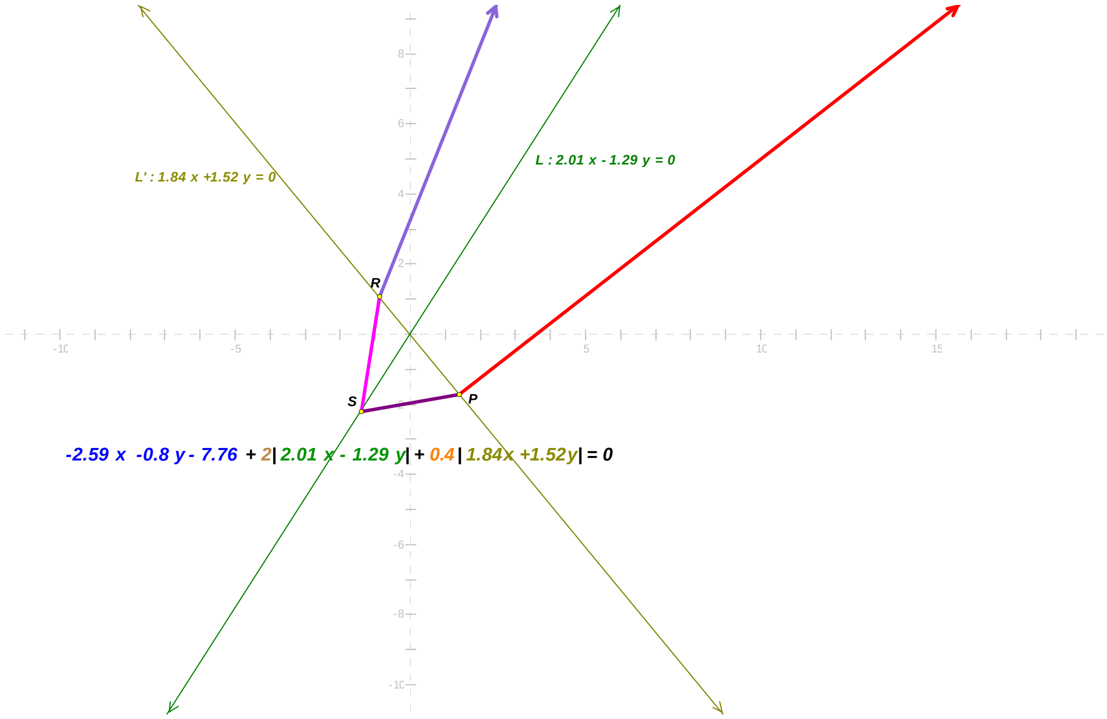
若 P,Q,R,S 中有兩點或三點存在，則 $y+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=c$ 為一折線圖。

如圖(一)為方程式 $y+2.47|2.01x-1.29y|-4.60|1.84x+1.52y|=5.09$ 的圖形。



圖(一)

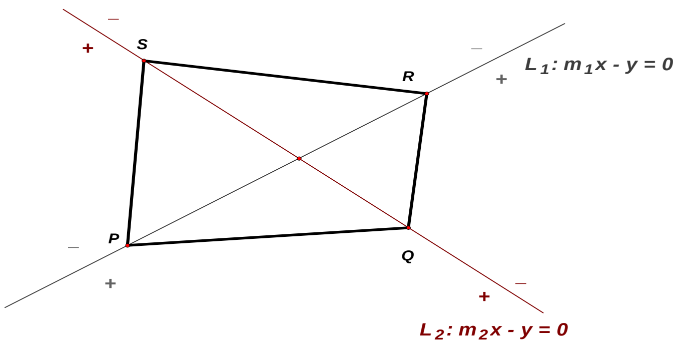
而圖(二)為方程式 $-2.59x-0.8y-7.76+2|2.01x-1.29y|+0.4|1.84x+1.52y|=0$ 的圖形。



圖(二)

若P,Q,R,S 四點皆存在，則有兩種可能。若$c=0$，則圖為以原點為中心的放射線。若$c\neq 0$則此四點可形成一封閉的四邊形(如圖三)，且其對角線為$L_1:m_1x-y=0$與$L_2:m_2x-y=0$。

不失一般性下，我們假設P,Q,R,S點的關係位置如右的參考圖示，其中$m_1>m_2$，又P,R兩點必在直線L_2的兩側，S,Q兩點必在L_1之兩側，**故方程式$y+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=c$若為封閉圖形，則必為凸四邊形**。



圖(三)

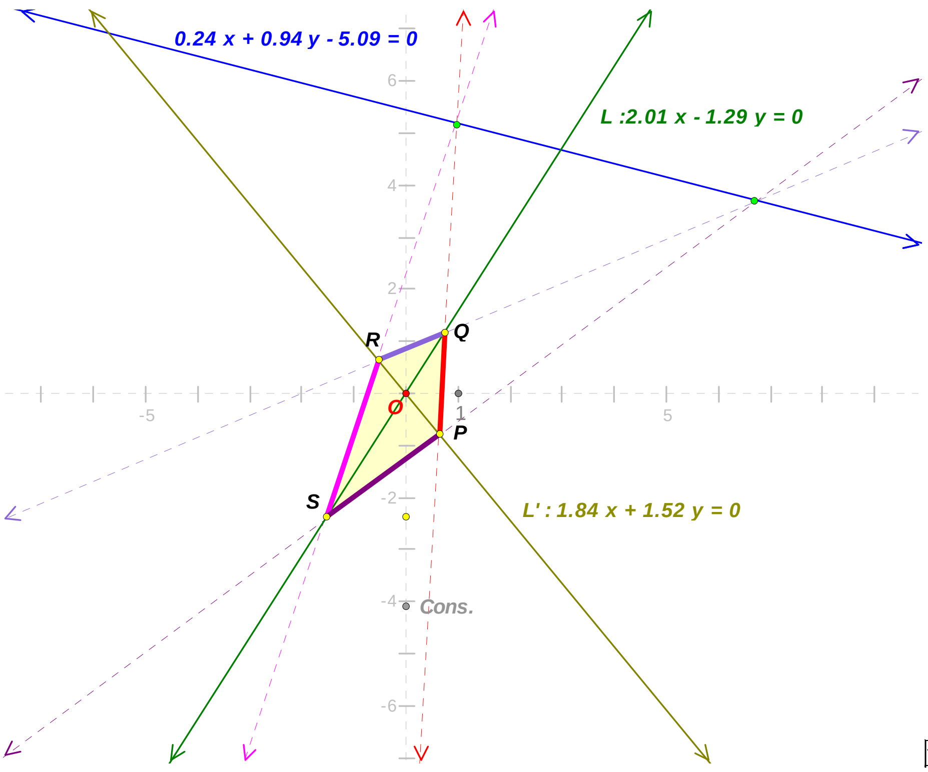
(3) 當$y+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=c$為凸四邊形時，若$c>0$，則$P$點之$\Delta>0$且$R$點之$\Delta<0$，移項後得$\beta>\dfrac{m_1}{(m_1-m_2)}$ 且$\beta>\dfrac{m_1}{(m_2-m_1)}$，所以$\beta>0$，以同樣的方法討論也可得到$\alpha>0$。再以相同的方式論證當$c<0$時，會得到結果$\alpha<0$ 且 β<0 。

(4) 如果我們把方程式旋轉和平移，使得方程式變回原方程式$L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$的形式，發

現α與β的正負號並不會因爲做以上的動作而改變，所以我們得到結論，**如果此類型方程式有相對應的封閉四邊形，α 與 β 必須爲同正或同負。**

(5) **若方程式 $L_3+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=0$ 可形成封閉的圖形，則圖形必爲凸四邊形，且 L_1 與 L_2 爲此凸四邊形的兩對角線，**而四個邊的方程式分別爲 $l_1: L_3+\alpha L_1+\beta L_2=0$，$l_2: L_3+\alpha L_1-\beta L_2=0$，$l_3: L_3-\alpha L_1-\beta L_2=0$，$l_4: L_3-\alpha L_1+\beta L_2=0$。又 $L_3=\dfrac{l_1+l_3}{2}$ 與 $L_3=\dfrac{l_2+l_4}{2}$，直線 L_3 爲 l_1,l_3 或爲 l_2,l_4 的線系組合，由直線系的性質知，**L_3 必過 l_1,l_3 的交點，同理，L_3 必過 l_2,l_4 的交點，而由此而知道了 L_3 的位置。**

如圖(四)爲方程式 $0.24x+0.94y+2.47|2.01x-1.29y|+1.2|1.84x+1.52y|=5.09$ 的圖形



圖(四)

(6) 由分析 P,Q,R,S 四點可得知，四邊形 $PQRS$ 若爲封閉四邊形，此時 $m_1\neq m_2$ 且 $c\neq 0$，由 $m_1\neq m_2$ 和 $c\neq 0$ 知 L_1與L_2 不平行，且三線不能共點，所以三線的可能只有 $\mathbf{L_1 // L_2}$ 或 $\mathbf{L_1 // L_3}$ 或三線兩兩交於一點。

定理一：

在平面上給任意凸四邊形，其中四點分別爲 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，且兩對角線爲 $\overleftrightarrow{AC}$ 和 $\overleftrightarrow{BD}$，則必存在**唯一**一組實數 a,b,α,β，使得凸四邊形 $ABCD$ 可以被 $ax+by+\alpha\left|m_1x-y+c_1\right|+\beta\left|m_2x-y+c_2\right|=1$ 這樣形式的方程式表示出來。

證明：

不失一般性下，設平面上凸四邊形 $ABCD$ 的四個頂點爲 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，且其兩條對角線爲 $\overleftrightarrow{AC}: m_1x-y=0$，$\overleftrightarrow{BD}: m_2x-y=0$，經過前面的分析已經知道，若 $ax+by+\alpha\left|\mathrm{m}_1x-y\right|+\beta\left|\mathrm{m}_2x-y\right|=1$ 爲封閉圖形，則必爲凸四邊形，故設所求爲

$\Gamma: ax+by+\alpha\left|\mathrm{m}_1x-y\right|+\beta\left|\mathrm{m}_2x-y\right|=1$，其中 a,b,α,β 爲待決定之未知係數。

將 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 分別代入 Γ 中，得到一聯立方程組：

$$\begin{cases} ax_1+by_1+\beta(m_2x_1-y_1)=1 \\ ax_2+by_2-\alpha(m_1x_2-y_2)=1 \\ ax_3+by_3-\beta(m_2x_3-y_3)=1 \\ ax_4+by_4+\alpha(m_1x_4-y_4)=1 \end{cases}, \quad 令\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & m_2x_1-y_1 \\ x_2 & y_2 & -(m_1x_2-y_2) & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & -(m_2x_3-y_3) \\ x_2 & y_2 & m_1x_4-y_4 & 0 \end{vmatrix}$$

由 $y_1=m_1x_1$、$y_2=m_2x_2$、$y_3=m_1x_3$、$y_4=m_2x_4$ 代入 Δ 得

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & m_1x_1 & 0 & m_2x_1-y_1 \\ x_2 & m_2x_2 & -(m_1x_2-m_2x_2) & 0 \\ x_3 & m_1x_3 & 0 & -(m_2x_3-y_3) \\ x_4 & m_2x_4 & m_1x_4-m_2x_4 & 0 \end{vmatrix} = (m_2-m_1)^2\begin{vmatrix} x_1 & m_1x_1 & 0 & x_1 \\ x_2 & m_2x_2 & x_2 & 0 \\ x_3 & m_1x_3 & 0 & -x_3 \\ x_4 & m_2x_4 & -x_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m_2-m_1)^2\begin{vmatrix} 2x_1 & m_1x_1 & 0 & x_1 \\ 2x_2 & m_2x_2 & x_2 & 0 \\ 0 & m_1x_3 & 0 & -x_3 \\ 0 & m_2x_4 & -x_4 & 0 \end{vmatrix} = 2(m_2-m_1)^2x_1x_2x_3x_4\begin{vmatrix} 1 & m_1 & 0 & 1 \\ 1 & m_2 & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & -1 \\ 0 & m_2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(m_2-m_1)^2x_1x_2x_3x_4\left(\begin{vmatrix} m_2 & 1 & 0 \\ m_1 & 0 & -1 \\ m_2 & -1 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 \\ m_1 & 0 & -1 \\ m_2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = 2(m_2-m_1)^2x_1x_2x_3x_4(-2m_2+2m_1)$$

$$= 4(m_1-m_2)^3x_1x_2x_3x_4$$

因爲$m_1 \neq m_2$，且x_1, x_2, x_3, x_4皆不爲 0，故$\Delta \neq 0$，由克拉瑪公式得知，此方程式必有解，且爲唯一解，此定理得證。

若上面的定理敘述與論證中，形如$\Gamma : ax + by + \alpha |L_1| + \beta |L_2| = 1$的方程式，直線$L_1$或$L_2$有一爲鉛直線，則同樣手法的推論，一樣容易證得如 **定理一** 的結論。

如令$A(0, y_1), B(x_2, y_2), C(0, y_3), D(x_4, y_4)$，$\Gamma : ax + by + \alpha |x| + \beta |m_2 x - y| = 1$，則可算得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 0 & -y_1 \\ x_2 & y_2 & -x_2 & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_3 \\ x_4 & y_4 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 4y_1 x_2 y_3 x_4 \neq 0$$

，因爲y_1, x_2, y_3, x_4皆不爲 0。

研究問題二： 方程式$L_3 + \alpha \left| L_1 + \beta |L_2| \right| = 0$圖形的研究。

由於一圖形經過平移或旋轉，並不改變圖形的大小或是形狀，所以我們可將方程式$L_3 + \alpha \left| L_1 + \beta |L_2| \right| = 0$經過適當的**平移**，使$L_1$與$L_2$交於原點，得$L_3 + \alpha \left| m_1 x - y + \beta |m_2 x - y| \right| = 0$，再將此方程式經過適當的**旋轉**，使得$L_3$爲一平行$x$軸的水平線。所以接下來的討論，我們皆以方程式$y + \alpha \left| m_1 x - y + \beta |m_2 x - y| \right| = c$來進行。

1. 令$m_2 x - y \geq 0$且$m_1 x - y + \beta m_2 x - \beta y \geq 0$

可得方程式$\alpha(m_1 + \beta m_2)x + (1 - \alpha - \alpha\beta)y = c$，我們利用克拉瑪公式求其與$L_2 : m_2 x - y = 0$的交點 P 和其與$(m_1 + \beta m_2)x - (1+\beta)y = 0$的交點 Q:

$$\mathrm{P}\left(\frac{c}{\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2}, \frac{cm_2}{\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2}\right) \qquad \mathrm{Q}\left(\frac{c(1+\beta)}{m_1 + \beta m_2}, c\right)$$

2. 令$m_2 x - y \geq 0$且$m_1 x - y + \beta m_2 x - \beta y \leq 0$

可得方程式$-\alpha(m_1 + \beta m_2)x + (1 + \alpha + \alpha\beta)y = c$，我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_2 : m_2 x - y = 0$的交點 R 和其與$(m_1 + \beta m_2)x - (1+\beta)y = 0$的交點 Q:

$$\mathrm{R}\left(\frac{c}{-\alpha m_1 + (1+\alpha)m_2}, \frac{cm_2}{-\alpha m_1 + (1+\alpha)m_2}\right) \qquad \mathrm{Q}\left(\frac{c(1+\beta)}{m_1 + \beta m_2}, c\right)$$

3. 令 $m_2x-y\le 0$ 且 $m_1x-y-\beta m_2x+\beta y\le 0$

可得方程式 $-\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha-\alpha\beta)y=c$ ，我們一樣利用克拉瑪公式求其與

$L_2:m_2x-y=0$ 的交點 R 和其與 $(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$ 的交點 S:

$$\mathrm{R}\left(\frac{c}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2},\frac{cm_2}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}\right)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{c(1-\beta)}{m_1-\beta m_2},c\right)$$

4. 令 $m_2x-y\le 0$ 且 $m_1x-y-\beta m_2x+\beta y\ge 0$

可得方程式 $\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\alpha\beta)y=c$ ，我們一樣利用克拉瑪公式求其與

L_2:$m_2x-y=0$ 的交點 P 和其與 $(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$ 的交點 S:

$$\mathrm{P}\left(\frac{c}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2},\frac{cm_2}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}\right)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{c(1-\beta)}{m_1-\beta m_2},c\right)$$

由 1、2、3、4 整理後得到:

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{c}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}，\dfrac{cm_2}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}\right) & \text{在} m_2x-y=0 \text{上} \\ Q\left(\dfrac{c(1+\beta)}{m_1+\beta m_2}，c\right) & \text{在} (m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0 \text{上} \\ \mathrm{R}\left(\dfrac{c}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2},\dfrac{cm_2}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}\right) & \text{在} m_2x-y=0 \text{上} \\ \mathrm{S}\left(\dfrac{c(1-\beta)}{m_1-\beta m_2}，c\right) & \text{在} (m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0 \text{上} \end{cases}$$

以及四條直線

$\overleftrightarrow{PQ}:\alpha(m_1+\beta m_2)x+(1-\alpha-\alpha\beta)y=c$ ， $\overleftrightarrow{QR}:-\alpha(m_1+\beta m_2)x+(1+\alpha+\alpha\beta)y=c$

$\overleftrightarrow{RS}:-\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha-\alpha\beta)y=c$ ， $\overleftrightarrow{SP}:\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\alpha\beta)y=c$

由此可知，若存在 P,Q,R,S 點，則 $\alpha m_1+(1-\alpha)m_2\ne 0$ 且 $m_1+\beta m_2\ne 0$ 且 $m_1-\beta m_2\ne 0$ 且 $-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2\ne 0$

$$\Rightarrow m_1\ne\frac{1+\alpha}{\alpha}m_2 \text{ 且 } m_1\ne\pm\beta m_2 \text{ 且 } m_1\ne\frac{\alpha-1}{\alpha}m_2$$

在不失一般性下，我們令方程式 $y+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=c$ 其中 $\beta>0$ 且 $m_1>m_2$ ，且

Γ:$m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|=0$ 進行討論：

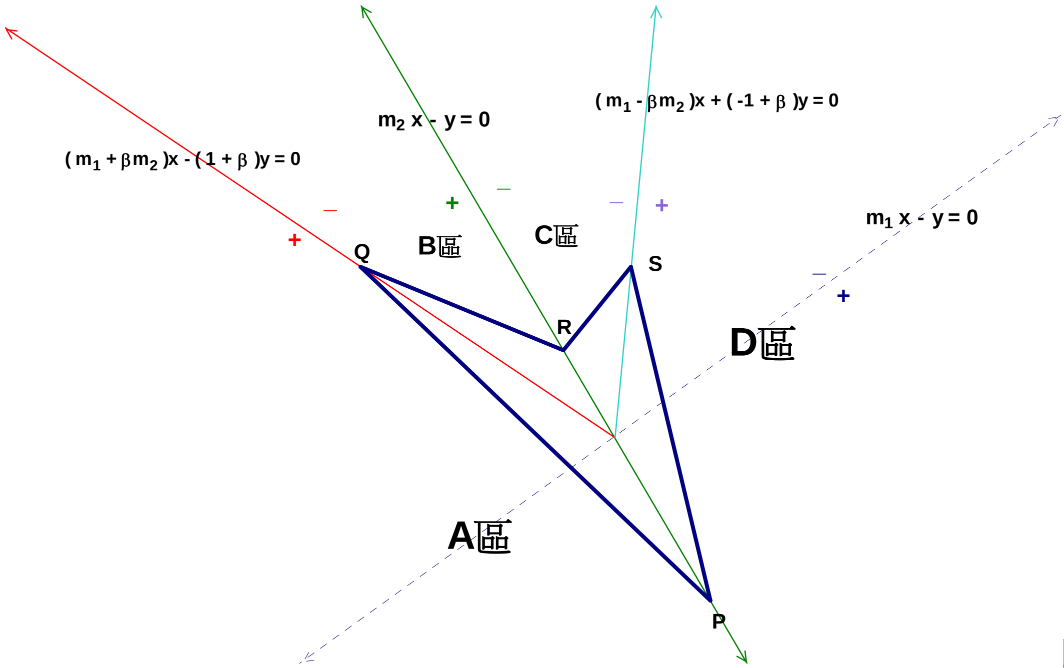
(1) 如下圖(五)，當 $m_2-y>0$ ，得 $\Gamma_+:(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0$ ，將 Γ_+ 上一點

$\left((1+\beta),(m_1+\beta m_2)\right)$ 分別代入 L_1 和 L_2，分別得 $\beta(m_1-m_2)$ 和 (m_2-m_1)，將之相乘得

$-\beta(m_1-m_2)^2<0$，則可知 $\left((1+\beta),(m_1+\beta m_2)\right)$ 在 $m_2-y>0$ 且 $m_1-y<0$ 的區域，又 Γ_+ 過

$\left((1+\beta),(m_1+\beta m_2)\right)$ 和 $(0,0)$ $\quad\Rightarrow\quad m_1>m_{\Gamma_+}=\dfrac{m_1+\beta m_2}{1+\beta}>m_2$

(2) 當 $m_2-y<0$，得 $\Gamma_-:(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$，將 Γ_- 上一點 $\left((-1+\beta),-(m_1-\beta m_2)\right)$ 分別代入 L_1 和 L_2，分別得 $\beta(m_1-m_2)$ 和 $(-m_2+m_1)$，將之相乘得 $\beta(m_1-m_2)^2>0$，則可知 $\left((-1+\beta),-(m_1-\beta m_2)\right)$ 在 $m_2-y<0$ 且 $m_1-y<0$ 的區域，又 Γ_- 過 $\left((-1+\beta),-(m_1-\beta m_2)\right)$ 和 $(0,0)$ $\quad\Rightarrow\quad m_{\Gamma_-}=\dfrac{-(m_1-\beta m_2)}{-1+\beta}>m_1>m_2$ 或 $m_1>m_2>m_{\Gamma_-}=\dfrac{-(m_1-\beta m_2)}{-1+\beta}$。



圖(五)

我們開始正式討論:

(1) 從圖中我們不難發現，Q 點的 y 分量與 S 點的 y 分量相同，若**存在** P,Q,R,S **點**，則 S 點的 y 值必爲正值，**也就是** $c>0$，**否則不會存在** P,Q,R,S **點**，因此 $(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0$ 的斜率是負的 $\Rightarrow \dfrac{m_1+\beta m_2}{1+\beta}<0$ 且 $m_2<0$。

(2) 由於 R 點之 y 分量將決定圖形爲凸四邊形或是凹四邊形，所以我們將 R 點之 y 分量減去 c 來判斷圖形的凹凸。由 $m_2<0$ 可知 $R\left(\dfrac{c}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2},\dfrac{cm_2}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}\right)$ 之 x 分量必爲負實數且 $c>0$，則 $-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2<0$。再由 $P\left(\dfrac{c}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2},\dfrac{cm_2}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}\right)$ 之 x 分量必爲正實數且 $c>0$，則 $\alpha m_1+(1-\alpha)m_2>0$。

$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2<0\\ \alpha m_1+(1-\alpha)m_2>0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2<0\\ -\alpha m_1+(-1+\alpha)m_2<0\end{cases}$ $\Rightarrow -2\alpha m_1+2\alpha m_2<0$

$\Rightarrow \alpha(-m_1+m_2)<0$

$\Rightarrow \alpha>0$ ($\because m_1>m_2$)

則 $\dfrac{cm_2}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}-c=\dfrac{c(m_1-m_2)\alpha}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}=\dfrac{c(m_1-m_2)\alpha}{m_2+\alpha(m_2-m_1)}<0$

所以方程式 $L_3+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=0$ 若可以形成封閉圖形，則必為凹四邊形。

(3) 又 $\Gamma_+:(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0$ 其斜率為負值，和 $\Gamma_-:(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$ 之 x 項係數必為正實數，否則C、D區位置會不同 $\Rightarrow m_1-\beta m_2>0$ 且 $\dfrac{m_1+\beta m_2}{1+\beta}<0\ \Rightarrow \beta m_2<m_1<-\beta m_2$。

(4) 因為 P 點 $\left(\dfrac{c}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2},\dfrac{cm_2}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}\right)$ 之 x 分量必為正實數且 $c>0$，則

$\alpha m_1+(1-\alpha)m_2>0\ \Rightarrow\ \alpha>\dfrac{-m_2}{m_1-m_2}>0$。

結論 1：

在 $m_1>m_2$ 時，若 $\beta>0$，$m_1\neq\dfrac{\alpha-1}{\alpha}m_2$ 且 $m_1\neq\pm\beta m_2$ 且 $m_1\neq\dfrac{1+\alpha}{\alpha}m_2$，則必定：

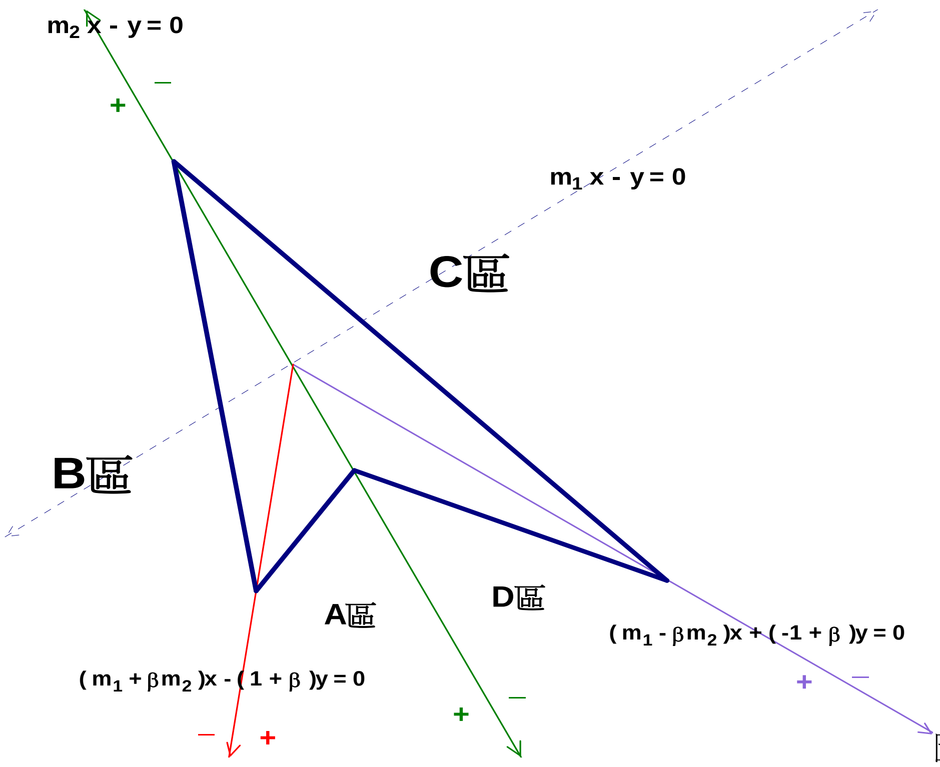
1. $c>0$
2. $m_2<0$
3. $\beta m_2<m_1<-\beta m_2$
4. $\alpha>\dfrac{-m_2}{m_1-m_2}>0$

滿足上述 4 個條件時，有圖形為凹四邊形。

接下來我們令 $\beta<0$ 進行討論：

(1) 當 $m_2-y>0$，得 $\Gamma_+:(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0$，同前面的方法討論後可得 $m_1>m_2>m_{\Gamma_+}$ 或 $m_{\Gamma_+}>m_1>m_2$，其中 $m_{\Gamma_+}=\dfrac{-(m_1+\beta m_2)}{1+\beta}$。

(2) 當 $m_2-y<0$，得 $\Gamma_-:(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$，一樣同上面的手法，可得 $m_1>m_{\Gamma_-}>m_2$，其中 $m_{\Gamma_-}=\dfrac{m_1-\beta m_2}{-1+\beta}$。



圖(六)

用相同討論後可得到結論 2：

在 $m_1 > m_2$ 時，若 $\beta < 0$ ，$m_1 \neq \dfrac{\alpha-1}{\alpha} m_2$ 且 $m_1 \neq \pm\beta m_2$ 且 $m_1 \neq \dfrac{1+\alpha}{\alpha} m_2$ ，則必定：

1. $c < 0$
2. $m_2 < 0$
3. $\beta m_2 > m_1 > -\beta m_2$
4. $\alpha < 0$

滿足上述 4 個條件時，有圖形為凹四邊形。

而且當 $m_2 > m_1$ 的假設下，有類似結論 1 與論 2 的結果。

而當 $m_1 = m_2$ 時，由 P,Q,R,S 的坐標公式可得知，此四點皆退化到**一點** 。

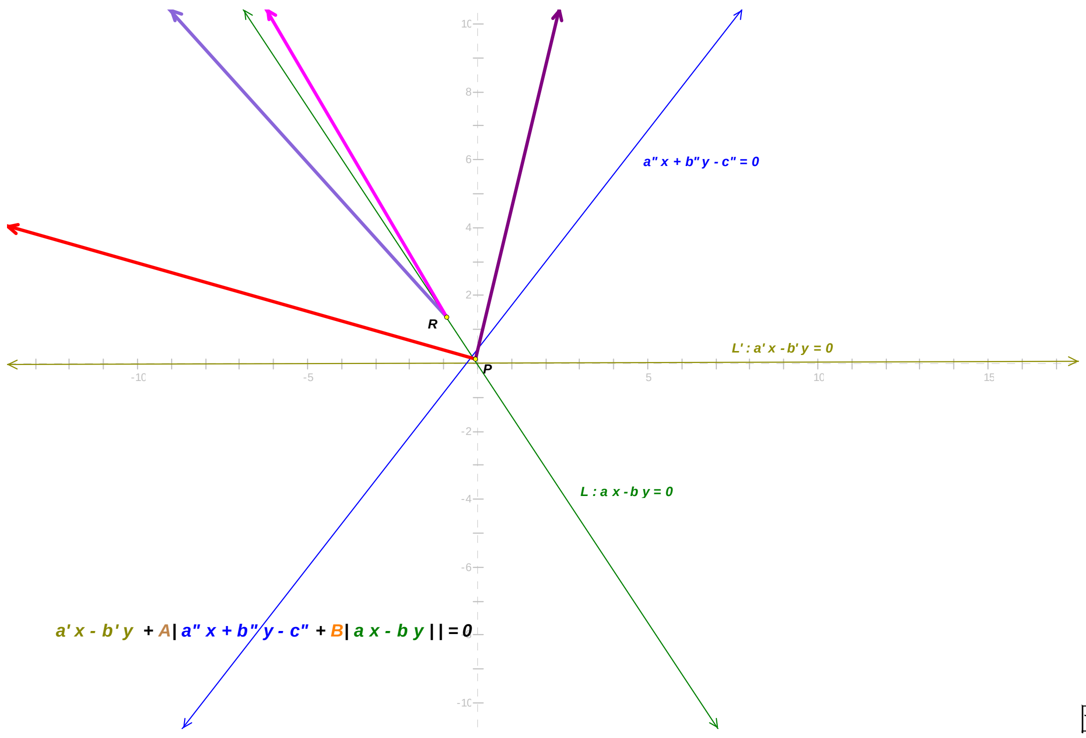
經過以上分析，可得到以下**幾點推論**：

(1) P,Q,R,S 四點有可能皆不存在，或是至少兩點以上存在。

(2) 若 P,Q,R,S 四點皆不存在，則方程式 $y+\alpha\left|m_1x-y+\beta|m_2x-y|\right|=c$ **沒有圖形。**

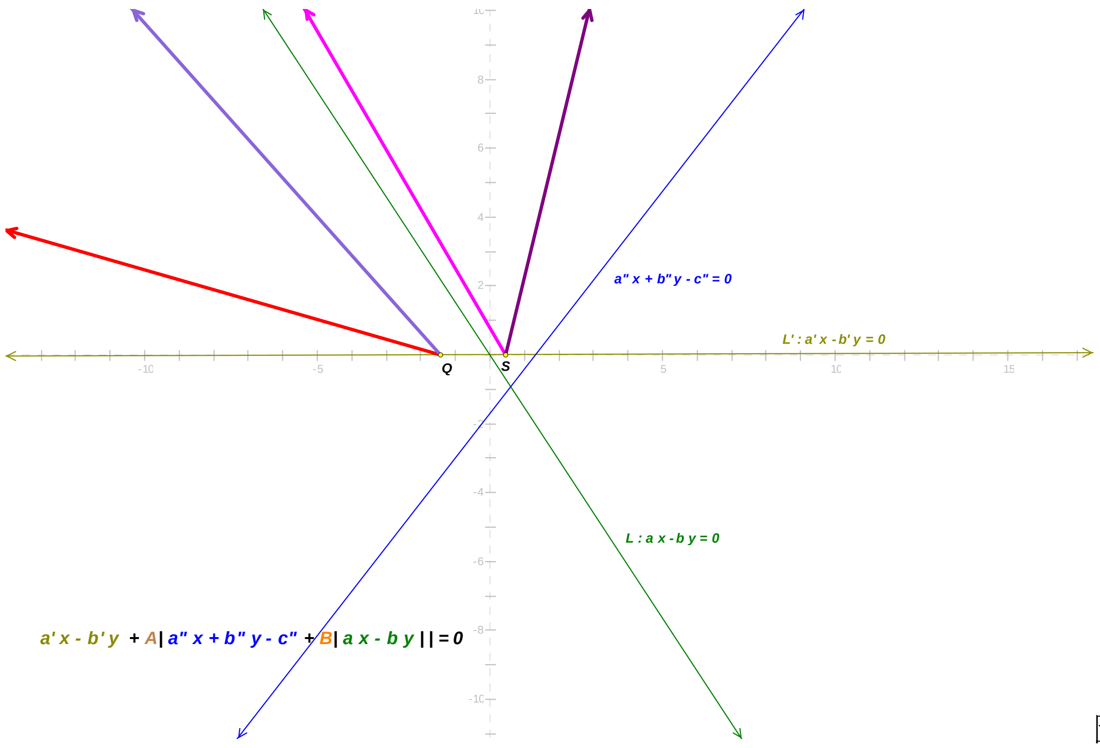
若 P,Q,R,S 有兩點或是三點存在，則方程式 $y+\alpha\left|m_1x-y+\beta|m_2x-y|\right|=c$ 圖形為**折線圖。**

如下圖(七)為方程式 $0.99y-0.64\left|1.28x-y+0.4+3.01|-0.83x-0.54y|\right|=0$ 的圖形。



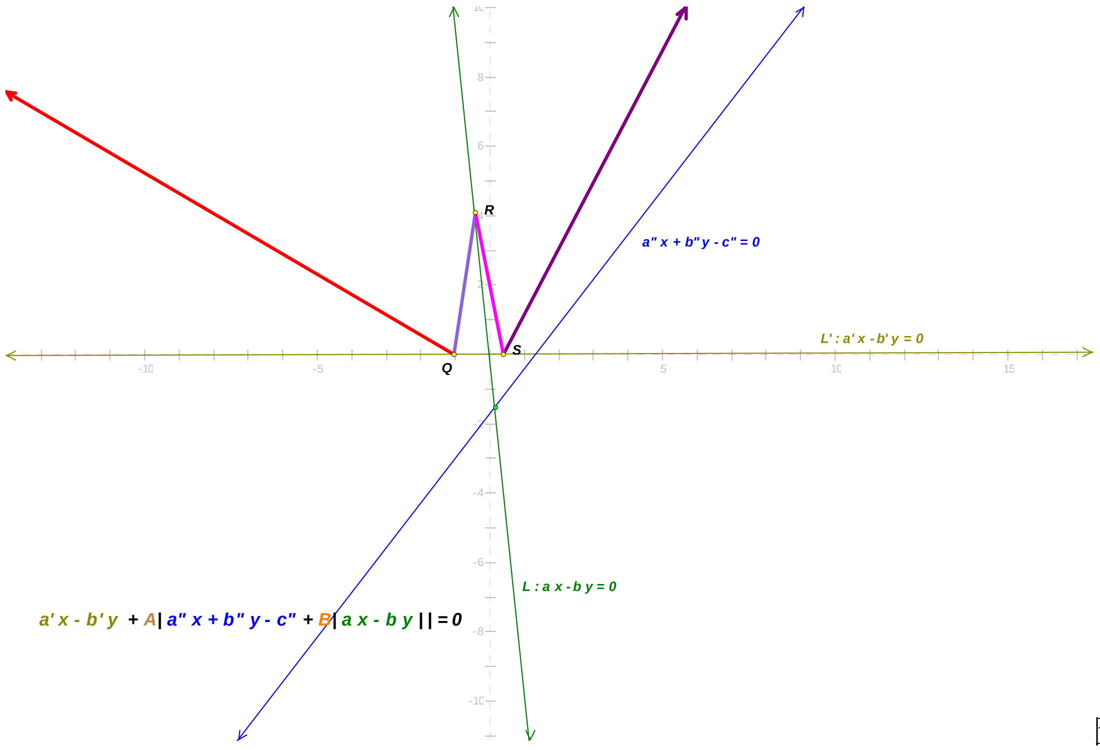
圖(七)

而下圖(八)爲$0.99y-0.64\left|1.28x-y-1.72+3.01\left|-0.83x-0.54y\right|\right|=0$的圖形。



圖(八)

下圖(九)爲方程式$0.99y-0.64\left|1.28x-y-1.72+3.01\left|-0.98x-0.10y\right|\right|=0$的圖形。



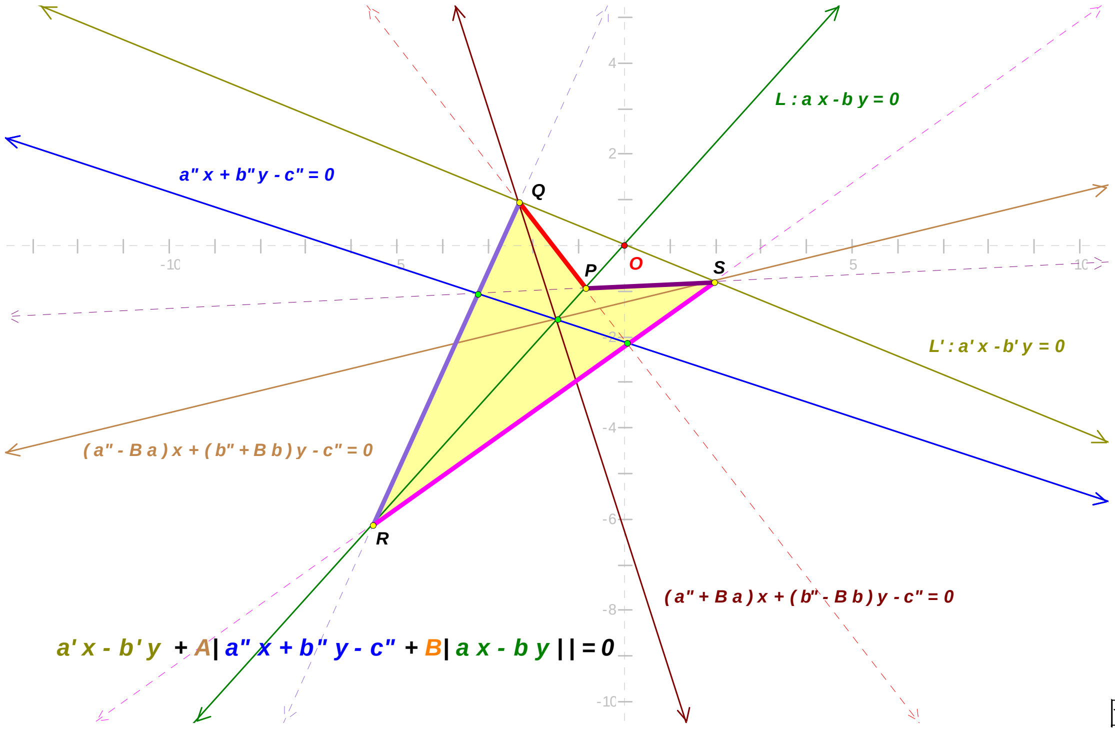
圖(九)

(3) P,Q,R,S 四點皆存在，方程式 $y+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=c$ 的圖形為一封閉四邊形或是以原點為出發點的射線。**若圖形為封閉的四邊形，則兩對角線為 $m_2x-y=0$ 和 $y=c$，且此圖形必為凹四邊形。**

(4) 若方程式 $y+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=c$ 中 P,Q,R,S 四點皆存在，且形成一凹四邊形，如果我們將方程式旋轉和平移，使方程式變回 $L_3+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=0$ 的形式，圖形並不因作以上動作而改變，**但與研究問題一不同的是，α、β 可能會因為方程式同乘一個負號，而出現異號的情況。**

(5) 若程式 $L_3+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=0$ 形成一凹四邊形，其中 L_2 與 L_3 為此凹四邊形的兩對角線，四個邊的方程式為 $l_1:L_3+\alpha(L_1+\beta L_2)=0$，$l_2:L_3+\alpha(L_1-\beta L_2)=0$，$l_3:L_3-\alpha(L_1-\beta L_2)=0$ 與 $l_4:L_3-\alpha(L_1+\beta L_2)=0$。又 $L_1=\dfrac{l_1-l_3}{2\alpha}$ 與 $L_1=\dfrac{l_2-l_4}{2\alpha}$，直線 L_1 為 l_1,l_3 或為 l_2,l_4 的線性組合，由**直線系**的性質知，**L_1 必過 l_1,l_3 的交點，同理，L_1 必過 l_2,l_4 的交點，由此而知道了 L_1 的位置。**

如下圖(十)為方程式 $0.37x+0.91y+0.85\left|0.51x+1.55y+3.29-1.54\left|-0.73x+0.66y\right|\right|=0$ 的圖形



圖(十)

(6) 由分析 P,Q,R,S 四點可得知，四邊形 $PQRS$ 若為封閉四邊形，因為 P,Q,R,S 為相異四點，所以 $m_1 \neq m_2$ 且 $c \neq 0$ 且 $m_2 \neq 0$ ，由 $m_1 \neq m_2$ 和 $c \neq 0$ 和 $m_2 \neq 0$ 知 L_1與L_2 不平行、 L_2與L_3 不平行，且三線不能共點，所以三線的可能只有 **$\mathbf{L_1 // L_3}$ 或三線兩兩交於一點**。

定理二：

設一凹四邊形 $ABCD$ 四個頂點座標分別為 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ 、 $D(x_4,y_4)$ ，且此凹四邊形兩對角線 $\overleftrightarrow{AC}: m_2x - y = 0,\ \overleftrightarrow{BD}: m_1x - y = 0$ 交於原點 $O(0,0)$，則必存在**唯一**一組實數 a,b,α,β ，使得此凹四邊形 $ABCD$ 可被 $m_1x - y + \alpha\left|ax + by + 1 + \beta\left|m_2 - y\right|\right| = 0$ 這樣形式的方程式所表示出來。

證明：

不失一般性，設凹四邊形 $ABCD$ 四個頂點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，又已知方程式 $m_1x - y + \alpha\left|ax + by + 1 + \beta\left|m_2 - y\right|\right| = 0$ 的圖形若為封閉圖形，則必為凹四邊形。

故設所求凹四邊形 $ABCD$ 的方程式為 $\Gamma: m_1x - y + \alpha\left|ax + by + 1 + \beta\left|m_2 - y\right|\right| = 0$ 其中 a,b,α,β 為待決定的未知係數。

將 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$ 分別帶入 Γ ，可得到一聯立方程組：

$$\begin{cases} m_1x_1-y_1-\alpha(ax_1+by_1+1)=0 \\ ax_2+by_2+1+\beta(m_2x_2-y_2)=0 \\ m_1x_3-y_3+\alpha(ax_3+by_3+1)=0 \\ ax_4+by_4+1-\beta(m_2x_4-y_4)=0 \end{cases}$$

會發現有未知數相乘的情況，所以我們又將未知數分別設爲 $a\alpha, b\alpha, \alpha, \alpha\beta$ ，若可以證明出此四未知數必有解，就相當於a,b,α,β必有解。

將第二式和第四式乘上一個α ，令$\Delta=\begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & (m_2x_2-y_2) \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & 1 & -(m_2x_4-y_4) \end{vmatrix}$

由$y_1=m_2x_1,\ y_2=m_1x_2,\ y_3=m_2x_3,\ y_4=m_1x_4$代入$\Delta$，得

$$\Delta=\begin{vmatrix} -x_1 & -m_2x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & m_1x_2 & 1 & (m_2x_2-m_1x_2) \\ x_3 & m_2x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & m_1x_4 & 1 & -(m_2x_4-m_1x_4) \end{vmatrix}=(m_1-m_2)\begin{vmatrix} x_1 & m_2x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & m_1x_2 & 1 & x_2 \\ x_3 & m_2x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & m_1x_4 & 1 & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$=(m_1-m_2)\begin{vmatrix} x_1-x_3 & m_2(x_1-x_3) & 0 & 0 \\ x_2 & m_1x_2 & 1 & x_2 \\ x_3 & m_2x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & m_1x_4 & 1 & -x_4 \end{vmatrix}=(m_1-m_2)(x_1-x_3)\begin{vmatrix} 1 & m_2 & 0 & 0 \\ x_2 & m_1x_2 & 1 & x_2 \\ x_3 & m_2x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & m_1x_4 & 1 & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$=(m_1-m_2)(x_1-x_3)\frac{1}{m_2}\begin{vmatrix} m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2x_2 & m_1x_2 & 1 & x_2 \\ m_2x_3 & m_2x_3 & 1 & 0 \\ m_2x_4 & m_1x_4 & 1 & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$=(m_1-m_2)(x_1-x_3)\frac{1}{m_2}\begin{vmatrix} m_2 & 0 & 0 & 0 \\ m_2x_2 & (m_1-m_2)x_2 & 1 & x_2 \\ m_2x_3 & 0 & 1 & 0 \\ m_2x_4 & (m_1-m_2)x_4 & 1 & -x_4 \end{vmatrix}=(m_1-m_2)^2(x_1-x_3)\begin{vmatrix} x_2 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$=-2x_2x_4(m_1-m_2)^2(x_1-x_3)$$

因爲$m_1\neq m_2$ ，且x_2,x_4皆不爲 0，又L_2不會垂直，使得x_1-x_3不爲 0，故$\Delta\neq 0$，而由克拉瑪公式得知， a,b,α,β有唯一解，此定理得證。

若上面的定理敘述與論證中，形如$\Gamma: L_1+\alpha\left|ax+by+1+\beta|L_2|\right|=0$的方程式，直線$L_1$或$L_2$有一爲鉛直線，則同樣手法的推論，一樣容易證得如 **定理二** 的結論。

如令L_2垂直， $A(0,y_1),B(x_2,y_2),C(0,y_3),D(x_4,y_4)$ ， $\Gamma: m_1x-y+\alpha\left|ax+by+1+\beta|x|\right|=0$ ，

則可算得$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -y_1 & -1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & -x_2 \\ 0 & y_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 2x_2x_4(y_1-y_3)\neq 0 \quad (\because y_1 \neq y_3)$

令L_1垂直，$A(x_1,y_1),B(0,y_2),C(x_3,y_3),D(0,y_4)$，$\Gamma: x+\alpha\left|ax+by+1+\beta|m_2x-y|\right|=0$，則可

算得$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 & y_2 \\ -x_3 & -y_3 & -1 & 0 \\ 0 & y_4 & 1 & -y_4 \end{vmatrix} = 2y_2y_4(x_1-x_3)\neq 0$

研究問題三：方程式$\Gamma: |L_3|+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=k$圖形的研究。

由於一圖形經過平移或旋轉，並不改變圖形的大小或是形狀，所以我們可將方程式$|L_3|+\alpha|L_1|+\beta|L_2|=k$經過適當的**平移**，使$L_1$與$L_2$交於原點，得$|L_3|+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$，再將此方程式經過適當的**旋轉**，使得$L_3$爲一平行$x$軸的水平線。所以接下來的討論，我們皆以方程式$\Gamma: |y-c|+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$來進行。

設$|y-c|+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$，其中$\alpha\neq 0,\beta\neq 0,k\neq 0$

令$y-c\geq 0$

1. 令$m_1x-y\geq 0$且$m_2x-y\geq 0$

   可得方程式$l_1^+:(\alpha m_1+\beta m_2)x+(1-\alpha-\beta)y=k+c$，我們利用克拉瑪公式求其與

   $m_1x-y=0$、$m_2x-y=0$與$y-c=0$的交點，分別得到$P_+\left(\dfrac{k+c}{\beta(m_2-m_1)+m_1},\dfrac{(k+c)m_1}{\beta(m_2-m_1)+m_1}\right)$

   $Q_+\left(\dfrac{k+c}{\alpha(m_1-m_2)+m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha(m_1-m_2)+m_2}\right)$，$C_1^+\left(\dfrac{k+\alpha c+\beta c}{\alpha m_1+\beta m_2},c\right)$

2. 令$m_1x-y\geq 0$且$m_2x-y\leq 0$

   可得方程式$l_2^+:(\alpha m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\beta)y=k+c$，我們利用克拉瑪公式求其與

   $m_1x-y=0$、$m_2x-y=0$與$y-c=0$的交點，分別得到

   $R_+\left(\dfrac{k+c}{\beta(m_1-m_2)+m_1},\dfrac{(k+c)m_1}{\beta(m_1-m_2)+m_1}\right)$，$Q_+\left(\dfrac{k+c}{\alpha(m_1-m_2)+m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha(m_1-m_2)+m_2}\right)$，

$C_2^+\ (\dfrac{k+\alpha c-\beta c}{\alpha m_1-\beta m_2},c)$

3. 令 $m_1x-y\le 0$ 且 $m_2x-y\le 0$

可得方程式 $l_3^+:(-\alpha m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha+\beta)y=k+c$ ，我們利用克拉瑪公式求其與

$m_1x-y=0$ 、 $m_2x-y=0$ 與 $y-c=0$ 的交點，分別得到

$R_+\ (\dfrac{k+c}{\beta(m_1-m_2)+m_1},\dfrac{(k+c)m_1}{\beta(m_1-m_2)+m_1})$ ， $S_+\ (\dfrac{k+c}{\alpha(m_2-m_1)+m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha(m_2-m_1)+m_2})$ ，

$C_3^+\ (\dfrac{k-\alpha c-\beta c}{-\alpha m_1-\beta m_2},c)$

4. 令 $m_1x-y\le 0$ 且 $m_2x-y\ge 0$

可得方程式 $l_4^+:(-\alpha m_1+\beta m_2)x+(1+\alpha-\beta)y=k+c$ ，我們利用克拉瑪公式求其與

$m_1x-y=0$ 、 $m_2x-y=0$ 與 $y-c=0$ 的交點，分別得到

$P_+\ (\dfrac{k+c}{\beta(m_2-m_1)+m_1},\dfrac{(k+c)m_1}{\beta(m_2-m_1)+m_1})$ ， $S_+\ (\dfrac{k+c}{\alpha(m_2-m_1)+m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha(m_2-m_1)+m_2})$ ，

$C_4^+\ (\dfrac{k-\alpha c+\beta c}{-\alpha m_1+\beta m_2},c)$

由 1、2、3、4 整理後得到:

$$\begin{cases} P_+(\dfrac{k+c}{\beta(m_2-m_1)+m_1},\dfrac{(k+c)m_1}{\beta(m_2-m_1)+m_1}) & \text{在} m_2x-y=0\ ,\ l_1^+\ ,\ l_4^+\ \text{上} \\ Q_+(\dfrac{k+c}{\alpha(m_1-m_2)+m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha(m_1-m_2)+m_2}) & \text{在} m_1x-y=0\ ,\ l_1^+\ ,\ l_2^+\ \text{上} \\ R_+(\dfrac{k+c}{\beta(m_1-m_2)+m_1},\dfrac{(k+c)m_1}{\beta(m_1-m_2)+m_1}) & \text{在} m_2x-y=0\ ,\ l_2^+\ ,\ l_3^+\ \text{上} \\ S_+(\dfrac{k+c}{\alpha(m_2-m_1)+m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha(m_2-m_1)+m_2}) & \text{在} m_1x-y=0\ ,\ l_3^+\ ,\ l_4^+\ \text{上} \end{cases}$$

令 $y-c\le 0$

1. 令 $m_1x-y\ge 0$ 且 $m_2x-y\ge 0$

可得方程式 $\ell_1^-:(\alpha m_1+\beta m_2)x+(-1-\alpha-\beta)y=k-c$ ，我們利用克拉瑪公式求其與

$m_1x-y=0$、$m_2x-y=0$ 與 $y-c=0$ 的交點，分別得到 $P_-\ (\dfrac{k-c}{\beta(m_2-m_1)-m_1},\dfrac{(k-c)m_1}{\beta(m_2-m_1)-m_1})$ ，

$Q_-\ (\dfrac{k-c}{\alpha(m_1-m_2)-m_2},\dfrac{(k-c)m_2}{\alpha(m_1-m_2)-m_2})$ ， $C_1^-\ (\dfrac{k+\alpha c+\beta c}{\alpha m_1+\beta m_2},c)$

2. 令 $m_1x-y\ge 0$ 且 $m_2x-y\le 0$

可得方程式$\ell_2^-:(\alpha m_1-\beta m_2)x+(-1-\alpha+\beta)y=k-c$，我們利用克拉瑪公式求其與

$m_1x-y=0$ 、 $m_2x-y=0$ 與 $y-c=0$ 的交點，分別得到

$R_-\left(\dfrac{k-c}{\beta(m_1-m_2)-m_1},\dfrac{(k-c)m_1}{\beta(m_1-m_2)-m_1}\right)$，$Q_-\left(\dfrac{k-c}{\alpha(m_1-m_2)-m_2},\dfrac{(k-c)m_2}{\alpha(m_1-m_2)-m_2}\right)$，

$C_2^-\left(\dfrac{k+\alpha c-\beta c}{\alpha m_1-\beta m_2},c\right)$

3. 令 $m_1x-y\le 0$ 且 $m_2x-y\le 0$

可得方程式$\ell_3^-:(-\alpha m_1-\beta m_2)x+(-1+\alpha+\beta)y=k-c$，我們利用克拉瑪公式求其與

$m_1x-y=0$ 、 $m_2x-y=0$ 與 $y-c=0$ 的交點，分別得到

$R_-\left(\dfrac{k-c}{\beta(m_1-m_2)-m_1},\dfrac{(k-c)m_1}{\beta(m_1-m_2)-m_1}\right)$，$S_-\left(\dfrac{k-c}{\alpha(m_2-m_1)-m_2},\dfrac{(k-c)m_2}{\alpha(m_2-m_1)-m_2}\right)$，

$C_3^-\left(\dfrac{k-\alpha c-\beta c}{-\alpha m_1-\beta m_2},c\right)$

4. 令 $m_1x-y\le 0$ 且 $m_2x-y\ge 0$

可得方程式$\ell_4^-:(-\alpha m_1+\beta m_2)x+(-1+\alpha-\beta)y=k-c$，我們利用克拉瑪公式求其與

$m_1x-y=0$ 、 $m_2x-y=0$ 與 $y-c=0$ 的交點，分別得到

$P_-\left(\dfrac{k-c}{\beta(m_2-m_1)-m_1},\dfrac{(k-c)m_1}{\beta(m_2-m_1)-m_1}\right)$，$S_-\left(\dfrac{k-c}{\alpha(m_2-m_1)-m_2},\dfrac{(k-c)m_2}{\alpha(m_2-m_1)-m_2}\right)$，

$C_4^-\left(\dfrac{k-\alpha c+\beta c}{-\alpha m_1+\beta m_2},c\right)$

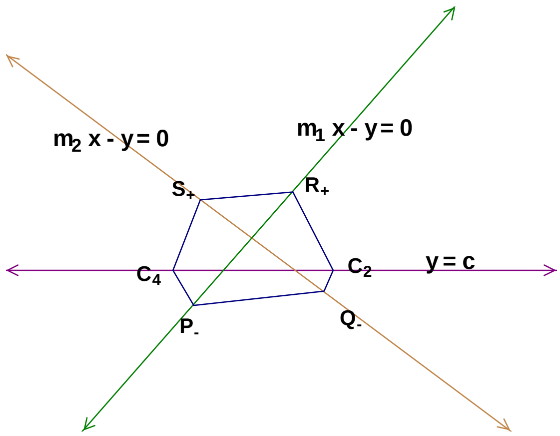
由 1、2、3、4 整理後得到:

$$\begin{cases} P_-\left(\dfrac{k-c}{\beta(m_2-m_1)-m_1},\dfrac{(k-c)m_1}{\beta(m_2-m_1)-m_1}\right) & \text{在} m_2x-y=0\text{，}l_1^-\text{，}l_4^-\text{ 上} \\ Q_-\left(\dfrac{k-c}{\alpha(m_1-m_2)-m_2},\dfrac{(k-c)m_2}{\alpha(m_1-m_2)-m_2}\right) & \text{在} m_1x-y=0\text{，}l_1^-\text{，}l_2^-\text{ 上} \\ R_-\left(\dfrac{k-c}{\beta(m_1-m_2)-m_1},\dfrac{(k-c)m_1}{\beta(m_1-m_2)-m_1}\right) & \text{在} m_2x-y=0\text{，}l_2^-\text{，}l_3^-\text{ 上} \\ S_-\left(\dfrac{k-c}{\alpha(m_2-m_1)-m_2},\dfrac{(k-c)m_2}{\alpha(m_2-m_1)-m_2}\right) & \text{在} m_1x-y=0\text{，}l_3^-\text{，}l_4^-\text{ 上} \end{cases}$$

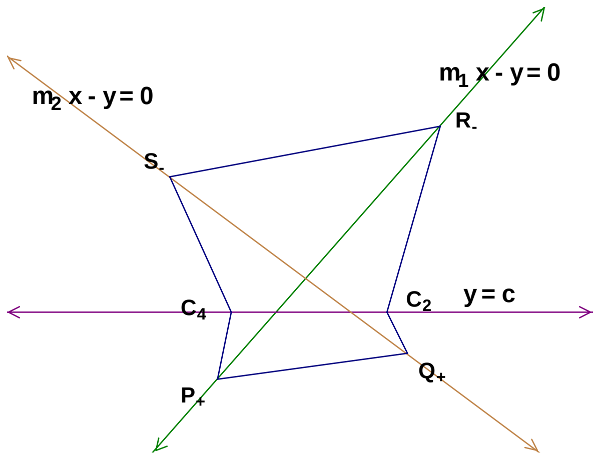
而綜觀來看，我們將 $y-c\ge 0$ 與 $y-c\le 0$ 時的 C 整理出來，發現都爲兩兩重疊：

$$\begin{cases} C_1^+ = C_1^- = C_1(\dfrac{k+\alpha c+\beta c}{\alpha m_1+\beta m_2}, c) & 為\ l_1^+，l_1^-，y-c=0 之交點 \\ C_2^+ = C_2^- = C_2(\dfrac{k+\alpha c-\beta c}{\alpha m_1-\beta m_2}, c) & 為\ l_2^+，l_2^-，y-c=0 之交點 \\ C_3^+ = C_3^- = C_3(\dfrac{k-\alpha c-\beta c}{-\alpha m_1-\beta m_2}, c) & 為\ l_3^+，l_3^-，y-c=0 之交點 \\ C_4^+ = C_4^- = C_4(\dfrac{k-\alpha c+\beta c}{-\alpha m_1+\beta m_2}, c) & 為\ l_4^+，l_4^-，y-c=0 之交點 \end{cases}$$

接下來我們把$\Gamma:|y-c|+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$的圖形畫出來，其中$m_1>m_2$。



圖(十一)



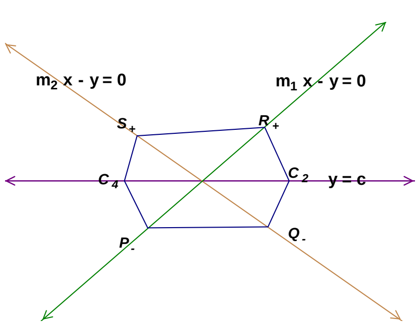
圖(十二)

在一般情形下，如上圖，我們可以畫出**凸六邊形**與對角頂點凹的六邊形(以下簡稱**花瓶六邊形**)，而以下是我們討論此圖形成的方式：

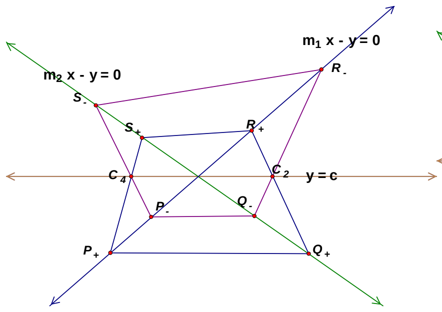
我們可將$\Gamma:|y-c|+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$，區分為$y-c\ge 0$和$y-c\le 0$的情況，可分別得到$y-c+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$與$-y+c+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$的兩方程式。而這兩個方程式在**研究問題**一中就有詳細討論過了，其圖形可能為凸四邊形或發散圖形。

所以我們可以把$\Gamma:|y-c|+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$，視成是以$y-c=0$作為分界線，在$y-c=0$的正號區(上半部)，顯示出$y-c+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$，在$y-c=0$的負號區(下半部)，顯示出$-y+c+\alpha|m_1x-y|+\beta|m_2x-y|=k$。將兩圖形組合，即為$\Gamma$的圖形。

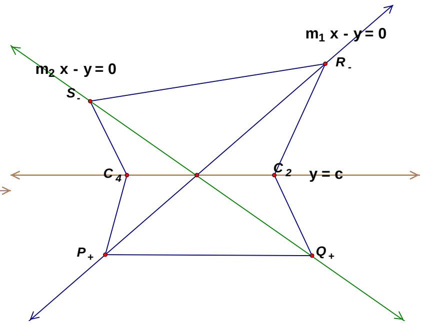
舉例：



圖(十三)



圖(十四)



圖(十五)

如上圖(十三)為方程式$\Gamma:\left|0.8y\right|+\left|\frac{4}{3}x-y\right|+\frac{4}{3}\left|-\frac{3}{4}x-y\right|=5$的圖形，其中水平線為$0.8y=5$，這條線的作用就是上述的分界線。

接下來我們了解Γ圖形的成因，因此將Γ做分區討論，繪出如上圖(十四)：$0.8y+\left|\frac{4}{3}x-y\right|+\frac{4}{3}\left|-\frac{3}{4}x-y\right|=5$ ($P_+Q_+R_+S_+$) 與 $-0.8y+\left|\frac{4}{3}x-y\right|+\frac{4}{3}\left|-\frac{3}{4}x-y\right|=5$ ($P_-Q_-R_-S_-$)的圖形。由此得知$\Gamma:\left|0.8y\right|+\left|\frac{4}{3}x-y\right|+\frac{4}{3}\left|-\frac{3}{4}x-y\right|=5$的圖形，是由圖(十四)中，分界線上半部的$\Gamma_+$圖形與分界線下半部的$\Gamma_-$圖形所組成。

由圖(十四)看來，若將方程式改為$\Gamma:-\left|0.8y\right|+\left|\frac{4}{3}x-y\right|+\frac{4}{3}\left|-\frac{3}{4}x-y\right|=5$，即可得到圖(十五)，因為在$0.8y=0$的上半部會畫出圖(十四)中的$\Gamma_-$圖形，下半部則會畫出圖(十四) Γ_+的圖形，與圖(十三)正好相反。

而我們從圖(十四)，也可驗證上述以克拉瑪算出的值。先看l_2^+($\overleftrightarrow{R_+Q_+}$)、$l_2^-$($\overleftrightarrow{R_-Q_-}$)的交點與$l_4^+$($\overleftrightarrow{S_+P_+}$)、$l_4^-$($\overleftrightarrow{S_-P_-}$)的交點，發現都正好位於$0.8y=0$上，再仔細看$l_1^+$($\overleftrightarrow{P_+Q_+}$)、$l_1^-$($\overleftrightarrow{P_-Q_-}$)的延長線交點與$l_3^+$($\overleftrightarrow{R_+S_+}$)、$l_3^-$($\overleftrightarrow{R_-S_-}$)的延長線交點，也都位於$0.8y=0$上，這個結果，與我們算的相符合。

研究問題四：方程式$\left|L_3\right|+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=k$圖形的研究。

由於一圖形經過平移或旋轉，並不改變圖形的大小或是形狀，所以我們可將方程式$\left|L_3\right|+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=k$經過適當的**平移**，使$L_1$與$L_2$交於原點，得$\left|L_3\right|+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=k$，再將此方程式經過適當的**旋轉**，使得$L_3$為一平行$x$軸的水平線。所以接下來的討論，我們皆以方程式$\Gamma_+:\left|y-c\right|+\alpha\left|m_1x-y\right|+\beta\left|m_2x-y\right|=k$來進行。

我們將方程式分成兩大部份進行討論，首先，先令$y-c\geq 0$討論，得方程式

$\Gamma_+:y-c+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=k$。

Part1：

1. 令$m_2x-y\ge 0$且$m_1x-y+\beta m_2x-\beta y\ge 0$

可得方程式$l_1^+:\alpha(m_1+\beta m_2)x+(1-\alpha-\alpha\beta)y=k+c$，我們利用克拉瑪公式求其與$L_2:m_2x-y=0$的交點$P_+$和其與$(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0$的交點$Q_+$，還有其與$y-c=0$的交點$C_1^+$。

2. 令$m_2x-y\ge 0$且$m_1x-y+\beta m_2x-\beta y\le 0$

可得方程式$l_2^+:-\alpha(m_1+\beta m_2)x+(1+\alpha+\alpha\beta)y=k+c$我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_2:m_2x-y=0$的交點$R_+$和其與$(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0$的交點$Q_+$，還有其與$y-c=0$的交點$C_2^+$。

3. 令$m_2x-y\le 0$且$m_1x-y-\beta m_2x+\beta y\le 0$

可得方程式$l_3^+:-\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha-\alpha\beta)y=k+c$我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_2:m_2x-y=0$的交點$R_+$和其與$(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$的交點$S_+$，還有其與$y-c=0$的交點$C_3^+$。

4. 令$m_2x-y\le 0$且$m_1x-y-\beta m_2x+\beta y\ge 0$

可得方程式$l_4^+:\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\alpha\beta)y=k+c$我們一樣利用克拉瑪公式求其與$L_2$:$m_2x-y=0$的交點$P_+$和其與$(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0$的交點$S_+$，還有其與$y-c=0$的交點$C_4^+$。

由 1、2、3、4 整理後得到：

$$\begin{cases} P_+\left(\dfrac{k+c}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}\right) & \text{在}m_2x-y=0\text{，}l_1^+\text{，}l_4^+\text{上} \\ Q_+\left(\dfrac{(k+c)(1+\beta)}{m_1+\beta m_2},k+c\right) & \text{在}(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0\text{，}l_1^+\text{，}l_2^+\text{上} \\ R_+\left(\dfrac{k+c}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2},\dfrac{(k+c)m_2}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}\right) & \text{在}m_2x-y=0\text{，}l_2^+\text{，}l_3^+\text{上} \\ S_+\left(\dfrac{(k+c)(1-\beta)}{m_1-\beta m_2},k+c\right) & \text{在}(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0\text{，}l_3^+\text{，}l_4^+\text{上} \end{cases}$$

由此可知，若存在P_+,Q_+,R_+,S_+點，則$\alpha m_1+(1-\alpha)m_2\neq 0$ 且 $m_1+\beta m_2\neq 0$且 $m_1-\beta m_2\neq 0$ 且 $-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2\neq 0$

$\Rightarrow m_1\neq\dfrac{1+\alpha}{\alpha}m_2$ 且 $m_1\neq\pm\beta m_2$ 且 $m_1\neq\dfrac{\alpha-1}{\alpha}m_2$

在不失一般性下，我們令方程式$|y-c|+\alpha\big|m_1x-y+\beta|m_2x-y|\big|=k$其中$\beta>0$且$m_1>m_2$，且

$\Gamma{:}m_1x-y+\beta|m_2x-y|=0$ 進行討論：

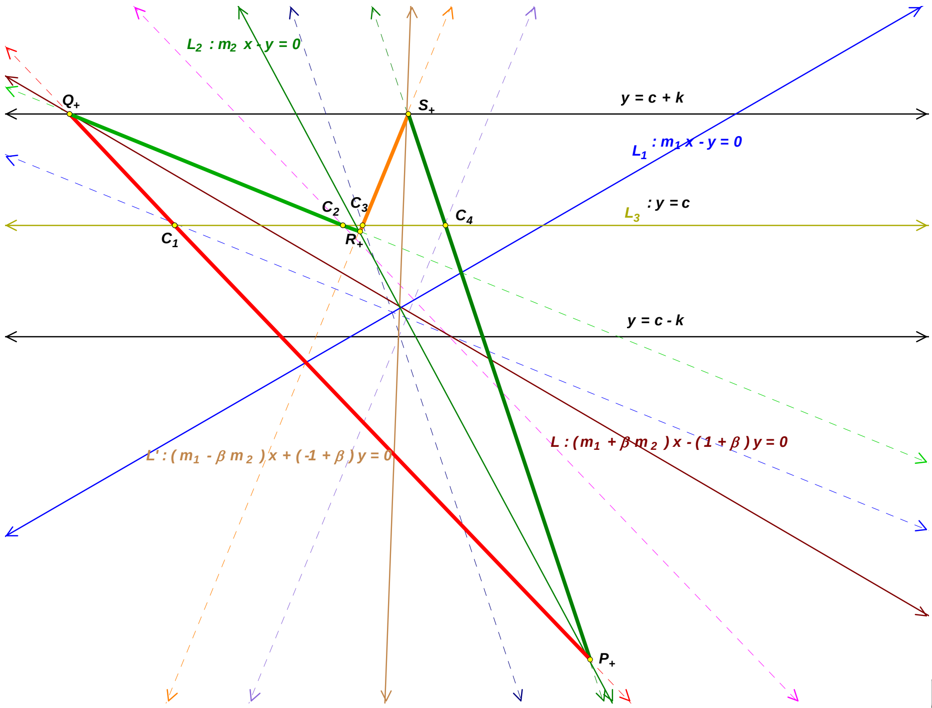
由於接下來的討論與凹四邊形的討論相似，於是我們省略計算過程，以下爲結果:

在$m_1>m_2$時，存在P_+,Q_+,R_+,S_+點，若$\beta>0$，$m_1\neq\dfrac{1+\alpha}{\alpha}m_2$ 且 $m_1\neq\pm\beta m_2$ 且 $m_1\neq\dfrac{\alpha-1}{\alpha}m_2$，則必有

結論 1：

1. $k+c>0$
2. $m_2<0$
3. $\beta m_2<m_1<-\beta m_2$
4. $\alpha>\dfrac{-m_2}{m_1-m_2}>0$

滿足上述 **4** 個條件時，有圖形爲凹四邊形，如圖(十六)



圖(十六)

Part2：

再以相同的方法討論 $y-c\le 0$，得到

$l_1^-:\alpha(m_1+\beta m_2)x-(1+\alpha+\alpha\beta)y=k-c$ 、 $l_2^-:-\alpha(m_1+\beta m_2)x-(1-\alpha-\alpha\beta)y=k-c$

$l_3^-:-\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1+\alpha-\alpha\beta)y=k+c$ 、 $l_4^-:\alpha(m_1-\beta m_2)x+(1-\alpha+\alpha\beta)y=k+c$

$$\begin{cases} P_-\left(\dfrac{-(k-c)}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2},\dfrac{-(k-c)m_2}{-\alpha m_1+(1+\alpha)m_2}\right) & \text{在}m_2x-y=0\text{，}l_1^-\text{，}l_4^-\text{ 上} \\ Q_-\left(\dfrac{-(k-c)(1+\beta)}{m_1+\beta m_2},-(k-c)\right) & \text{在}(m_1+\beta m_2)x-(1+\beta)y=0\text{，}l_1^-\text{，}l_2^-\text{ 上} \\ R_-\left(\dfrac{-(k-c)}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2},\dfrac{-(k-c)m_2}{\alpha m_1+(1-\alpha)m_2}\right) & \text{在}m_2x-y=0\text{，}l_2^-\text{，}l_3^-\text{ 上} \\ S_-\left(\dfrac{-(k-c)(1-\beta)}{m_1-\beta m_2},-(k-c)\right) & \text{在}(m_1-\beta m_2)x+(-1+\beta)y=0\text{，}l_3^-\text{，}l_4^-\text{ 上} \end{cases}$$

且與 C 的交點皆爲：

$$\begin{cases} C_1^+=C_1^-=C_1\left(\dfrac{\alpha c(1+\beta)+k}{\alpha(m_1+\beta m_2)},c\right) & \text{爲 }l_1^+\text{，}l_1^-\text{，}y-c=0\text{之交點} \\ C_2^+=C_2^-=C_2\left(\dfrac{\alpha c(1+\beta)-k}{\alpha(m_1+\beta m_2)},c\right) & \text{爲 }l_2^+\text{，}l_2^-\text{，}y-c=0\text{之交點} \\ C_3^+=C_3^-=C_3\left(\dfrac{\alpha c(1-\beta)-k}{\alpha(m_1-\beta m_2)},c\right) & \text{爲 }l_3^+\text{，}l_3^-\text{，}y-c=0\text{之交點} \\ C_4^+=C_4^-=C_4\left(\dfrac{\alpha c(1-\beta)+k}{\alpha(m_1-\beta m_2)},c\right) & \text{爲 }l_4^+\text{，}l_4^-\text{，}y-c=0\text{之交點} \end{cases}$$

經分析後得結果爲：

結論 2：

在$m_1 > m_2$時，**存在**P_-, Q_-, R_-, S_-**點**，若$\beta > 0$，$m_1 \neq \frac{1+\alpha}{\alpha} m_2$ 且 $m_1 \neq \pm\beta m_2$ 且 $m_1 \neq \frac{\alpha-1}{\alpha} m_2$，

則必定:

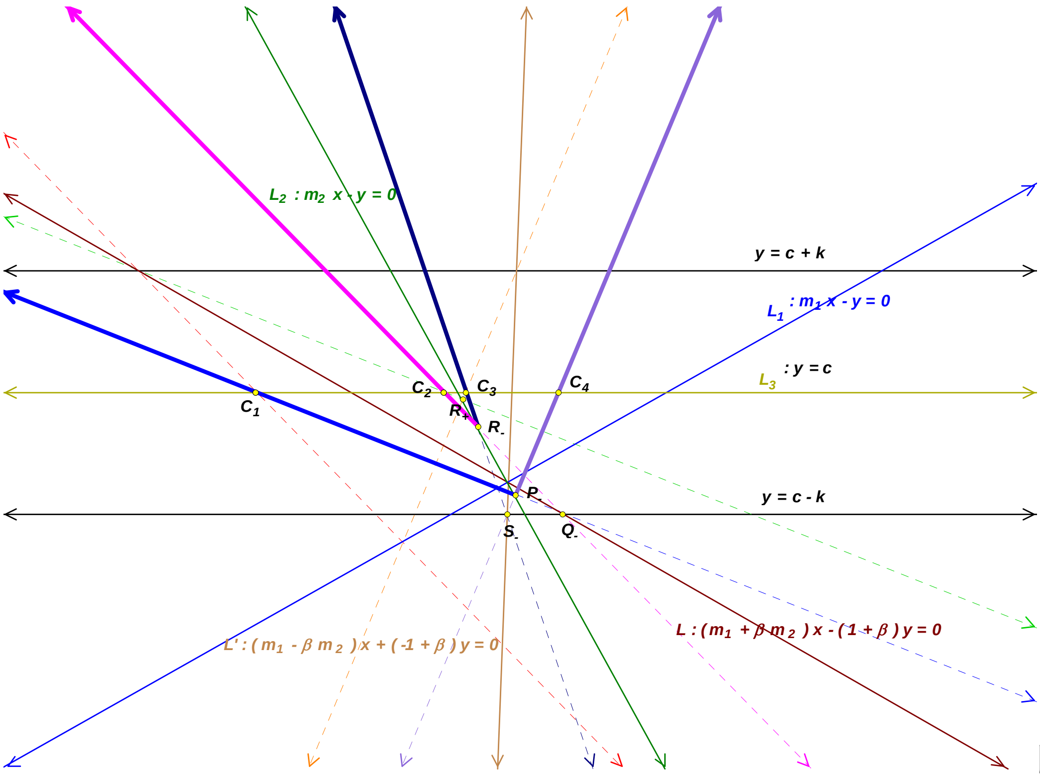
1. $-k + c > 0$
2. $m_2 < 0$
3. $\beta m_2 < m_1 < -\beta m_2$
4. $\alpha < \frac{m_2}{m_1 - m_2} < 0$

滿足上述 4 個條件時，有圖形爲凹四邊形

接下來我們要將 Part1 和 Part2 的圖形結合，但事實上，Part1 和 Part2 的圖形不會同時出現，因爲由結論 1 可知道，若要出現 Part1 的圖形則$\alpha > \frac{-m_2}{m_1 - m_2} > 0$。由結論 2 可以知道，若要出現 **Part2** 的圖形則$\alpha < \frac{m_2}{m_1 - m_2} < 0$，**但$\alpha$不能同時大於零和小於零**，所以不仿以結論 1 做爲條件限制，進行討論:

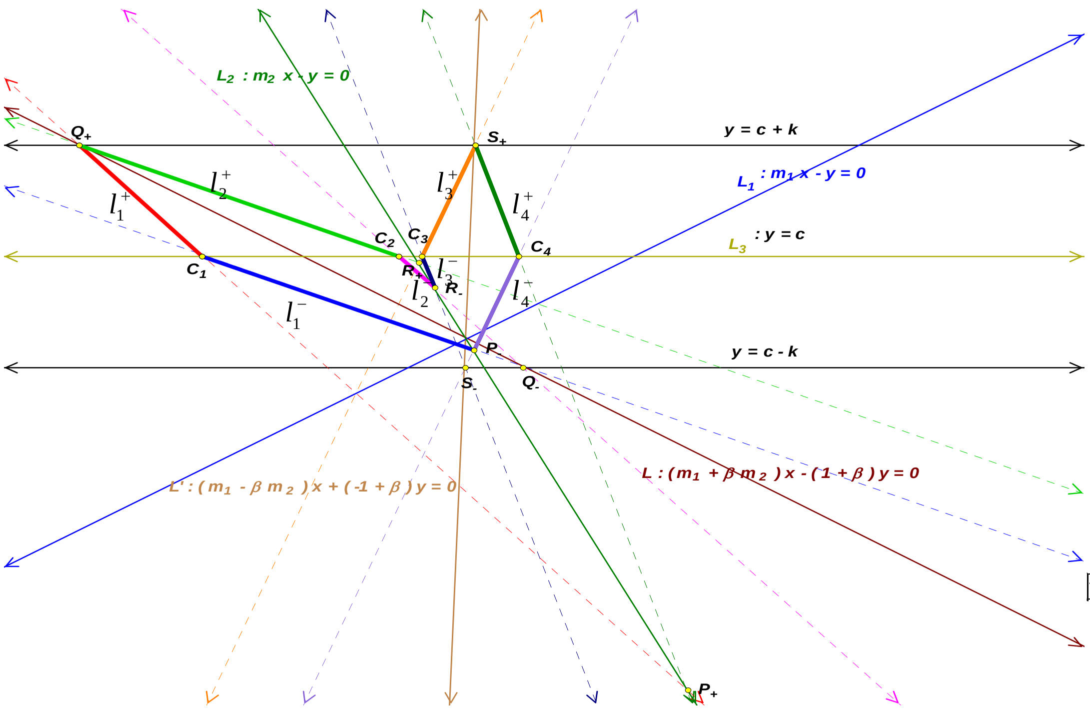
討論：

首先我們先找$Q_-(\frac{-(k-c)(1+\beta)}{m_1 + \beta m_2}, -(k-c))$和$S_-(\frac{-(k-c)(1-\beta)}{m_1 - \beta m_2}, -(k-c))$的位置，**假設** $-(k-c) < 0$，則$P_-(\frac{-(k-c)}{-\alpha m_1 + (1+\alpha) m_2}, \frac{-(k-c) m_2}{-\alpha m_1 + (1+\alpha) m_2})$ 的位置可以確定，因爲我們由之前的討論已經知道，P_-在$m_2 x - y = 0$上，且在第四象限，但我們不知道其與Q_-、R_-、S_-的相對位置，所以將P_-之 y 分量減去Q_-、R_-、S_-之 y 分量，則可知P_-、Q_-、R_-、S_-之 y 分量的大小爲$y_{R_-} > y_{P_-} > y_{S_-} = y_{Q_-}$ 即$\frac{-(k-c) m_2}{\alpha m_1 + (1-\alpha) m_2} > \frac{-(k-c) m_2}{-\alpha m_1 + (1+\alpha) m_2} > -(k-c) = -(k-c)$，以下爲示意圖：



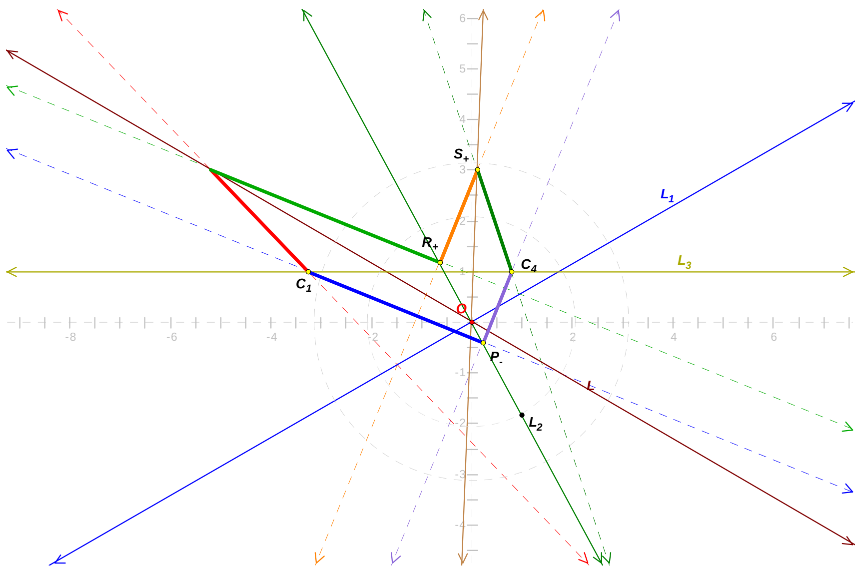
圖(十七)

則由此可知其圖形，我們再將此圖形與結論 1 之圖形合併得到圖(十八)，此圖形即爲 $\left|y-c\right|+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=k$,其中 $\alpha\neq0,\beta\neq0,k>0$ 的圖形。

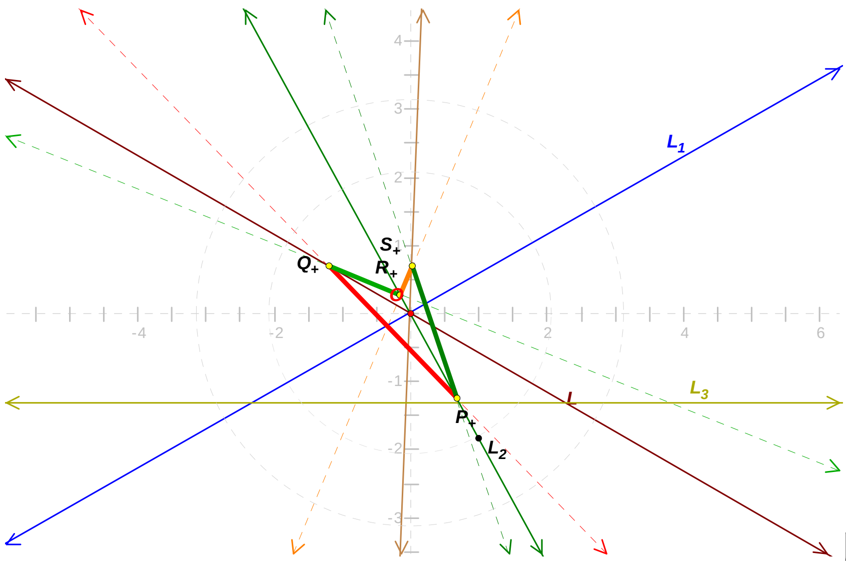


圖(十八)

事實上，當 $-(k-c)<0$ 時，若 $-(k-c)$ 的值漸漸變小，則圖形將從狐狸凹八邊形漸漸退化成貓臉凹六邊形，若 $-(k-c)$ 的值再繼續漸漸變小，則圖形將繼續從凹六邊形漸漸退化成凹四邊形，直到 $-k-c=0$ 時，圖形就會消失:

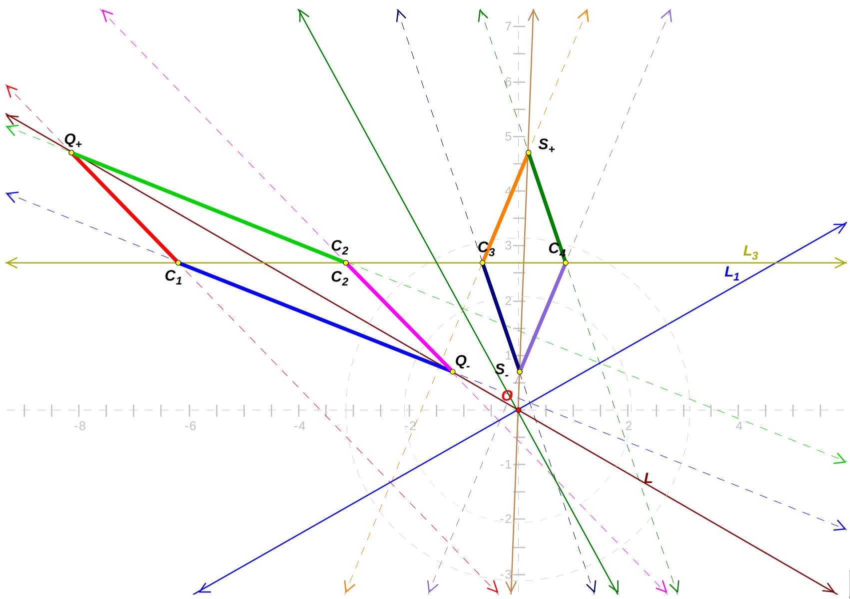


圖(十九)



圖(二十)

另外，$-(k-c)>0$時，圖形將會變成兩個平行四邊形:



圖(二十一)

經過以上的分析，我們有以下**幾點推論:**

1. $\left|y-c\right|+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=k$，此類型方程式最具代表性的圖形為狐狸凹八邊形，圖形必在 $y=c+k$ 和 $y=c-k$ 之間。

2.如果我們把方程式 $\left|y-c\right|+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|m_2x-y\right|\right|=k$ 旋轉和平移，使得方程式變回原方程式

$\left|L_3\right|+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=k'$，則此類型方程式最具代表性的圖形為狐狸凹八邊形。

3.以狐狸凹八邊型為例，

L_1 和 $\overleftrightarrow{S_+C_4}$ 和 $\overleftrightarrow{Q_+C_2}$ 三線共點於 $\left(\dfrac{k+c}{\alpha\beta(m_1-m_2)+m_1},\dfrac{m_1(k+c)}{\alpha\beta(m_1-m_2)+m_1}\right)$，因為 $\dfrac{l_4^+-l_2^+}{2\alpha}=L_1$，

L_1 和 $\overleftrightarrow{P_-C_4}$ 和 $\overleftrightarrow{R_-C_2}$ 三線共點於 $\left(\dfrac{k-c}{\alpha\beta(m_1-m_2)-m_1},\dfrac{m_1(k-c)}{\alpha\beta(m_1-m_2)-m_1}\right)$，因為 $\dfrac{l_4^--l_2^-}{2\alpha}=L_1$，

L_1 和 $\overleftrightarrow{P_-C_1}$ 和 $\overleftrightarrow{R_-C_3}$ 三線共點於 $\left(\dfrac{c-k}{\alpha\beta(m_1-m_2)+m_1},\dfrac{m_1(c-k)}{\alpha\beta(m_1-m_2)+m_1}\right)$，因為 $\dfrac{l_1^--l_3^-}{2\alpha}=L_1$，

L_1 和 $\overleftrightarrow{S_+C_3}$ 和 $\overleftrightarrow{Q_+C_1}$ 三線共點於 $\left(\dfrac{-c-k}{\alpha\beta(m_1-m_2)-m_1},\dfrac{m_1(-c-k)}{\alpha\beta(m_1-m_2)-m_1}\right)$，因為 $\dfrac{l_1^+-l_3^+}{2\alpha}=L_1$，

另外，L_2 通過 R_-、P_-，而 L_3 通過 C_1、C_2、C_3、C_4。

4.事實上，此類型方程式除了形成狐狸凹八邊形外，還可能退化到貓臉凹六邊形、凸六邊形、凹五邊形、凸五邊形、凹四邊形、凸四邊形、三角形、兩個平行四邊形、開放圖形。

5.其中，我們對於三角形的形成條件特別有興趣，以下我們將證明方程式圖形為三角形的條件：

定理三：

設 $\Gamma:\left|a_3x+b_3y+c_3\right|+\alpha\left|a_1x+b_1y+c_1+\beta\left|a_2x+b_2y+c_2\right|\right|=k$ **中，若** $L_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ **與** $L_3:a_3x+b_3y+c_3=0$ **重合，其係數完全相等，或只差一個負號，** $L_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ **與** $L_2=L_3$ **交於一點，且** $\alpha,k>0$，$\left|\alpha\beta\right|=1$ **則** Γ **為三角形**

證明：

因為圖形經過旋轉與平移不變，所以我們將座標軸的點平移至 $L_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $L_2=L_3$ 的交點，並以此原點為旋轉中心，將 $L_2=L_3$ 轉成水平線，使得 L_1,L_2,L_3 在新座標系之下的方程式為 $\Gamma:\left|y\right|+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|-y\right|\right|=k$。

比較 $\Gamma:\left|y\right|+\alpha\left|m_1x-y+\beta\left|-y\right|\right|=k$ 與 $\Gamma:\left|a_3x+b_3y+c_3\right|+\alpha\left|a_1x+b_1y+c_1+\beta\left|a_2x+b_2y+c_2\right|\right|=k$，

將$c=m_2=0$代入之前所求得$P_-,Q_-,R_-,S_-,P_+,Q_+,R_+,S_+,C_1,C_2,C_3,C_4$的座標公式下，因爲在

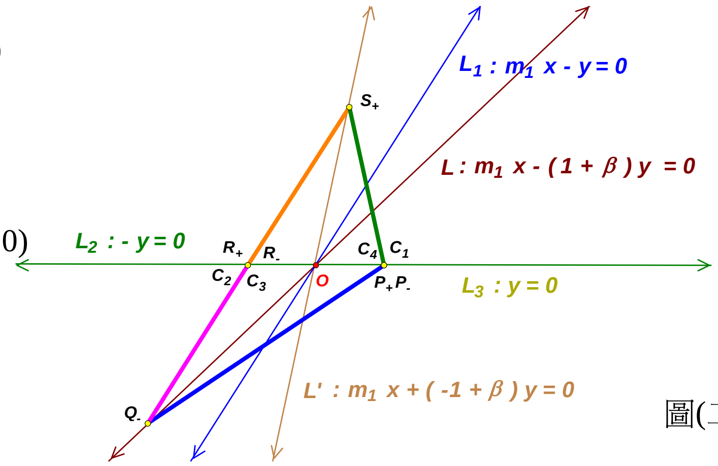
$y\ge 0$下只有l_3^+,l_4^+存在，在$y\le 0$下只有l_1^-,l_2^- 存在，故得到以下座標與參考示意圖:

$$P_-=P_+=C_1=C_4=P(\frac{k}{\alpha m_1},0)$$

$$Q_-(\frac{-k(1+\beta)}{m_1},-k)$$

$$R_-=R_+=C_2=C_3=R(\frac{k}{-\alpha m_1},0)$$

$$S_+(\frac{k(1-\beta)}{m_1},k)$$



圖(二十二)

不失一般性，如圖(二十二)所示，設$\beta,m_1>m_2=0$，則P,R在$y=0$上，因爲$\alpha,k>0$，P在原點右邊，R在原點左邊，Q_-在$y=0$下方$L:m_1x-(1+\beta)y=0$上，S_+在$y=0$上方$L':m_1x+(-1+\beta)y=0$。

於是以$L':m_1x+(-1+\beta)y=0$爲界，當L'左側三點R,Q_-,S_+共線時，方程式$\Gamma:|y|+\alpha\big|m_1x-y+\beta|-y|\big|=k$的圖形爲三角形$\Delta PS_+Q_-$。

此時，由直線$\overleftrightarrow{S_+R}$與$\overleftrightarrow{RQ_-}$斜率相等，令$\dfrac{k-0}{\dfrac{k(1-\beta)}{m_1}-\dfrac{-k}{\alpha m_1}}=\dfrac{0-(-k)}{\dfrac{-k}{\alpha m_1}-\dfrac{-k(1+\beta)}{m_1}}$，得

$\alpha(1-\beta)+1=-1+\alpha(1+\beta)$，而有$\alpha\beta=1$。

同理，若將$L_2=L_3$旋轉過原點的成水平線，取L_2,L_3方程式皆爲$y=0$時，一樣的方法分析計算$\Gamma:|y|+\alpha\big|m_1x-y+\beta|y|\big|=k$，可以得到當$\Gamma$的圖形爲三角形$\Delta PS_+Q_-$時，其條件爲

$\alpha\beta=-1$

再將座標系旋轉平移，還原$\Gamma:|a_3x+b_3y+c_3|+\alpha\big|a_1x+b_1y+c_1+\beta|a_2x+b_2y+c_2|\big|=k$爲原方程式時，只會改變$L_1,L_2,L_3$的方程式，而不會改變$\alpha,\beta$的值，故$|\alpha\beta|=1$，定理三得證。

但此方程式並無法表示所有三角形，因爲此方程式的三角形ΔPS_+Q_-有一個特徵，即R爲$\overline{S_+Q_-}$邊的中點，而O爲$\overline{PR}$中點，且$L_1:m_1x-y=0$平行$\overline{S_+Q_-}$，其中L_1又由$\overleftrightarrow{Q_-O}=L$與$\overleftrightarrow{S_+O}=L'$

決定，$L_1=\dfrac{L+L'}{2}$,但並不是每一個三角形這樣的性質，故定理三中的條件不為充要條件。

伍、結論

一、若方程式 $L_3+\alpha\left|L_1\right|+\beta\left|L_2\right|=0$ 可形成封閉的圖形，則圖形必為凸四邊形，且證明了所有凸四邊形皆可以被上式唯一表示，得到**定理一**。其中 L_1 與 L_2 為此凸四邊形的兩對角線，而四個邊的方程式分別為 l_1,l_2,l_3,l_4，又 $L_3=\dfrac{l_1+l_3}{2}$ 與 $L_3=\dfrac{l_2+l_4}{2}$，直線 L_3 為 l_1,l_3 或為 l_2,l_4 的線系組合，所以 L_3 必過 l_1,l_3 的交點，同理，L_3 必過 l_2,l_4 的交點。α 係數的調整，會影響對角線 L_2 上兩個頂點的伸縮變化，β 係數的調整，則會影響對角線 L_1 上兩個頂點的伸縮變化。

二、若方程式 $L_3+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=0$ 可形成封閉的圖形，則圖形必為凹四邊形，且證明了所有凹四邊形皆可以被上式唯一表示，得到**定理二**。其中 L_3 與 L_2 為此凹四邊形的兩對角線，而四個邊的方程式分別為 l_1,l_2,l_3,l_4，又 $L_1=\dfrac{l_1-l_3}{2\alpha}$ 與 $L_1=\dfrac{l_2-l_4}{2\alpha}$，直線 L_1 為 l_1,l_3 或為 l_2,l_4 的線性組合，所以 L_1 必過 l_1,l_3 的交點，同理，L_1 必過 l_2,l_4 的交點。α 係數的調整，會影響對角線 L_2 上兩個頂點的伸縮變化，β 係數的調整，則會影響對角線 L_3 上兩個頂點的伸縮變化。

三、方程式 $\left|L_3\right|+\alpha\left|L_1\right|+\beta\left|L_2\right|=k$ 的主要封閉圖形為凸六邊形，及花瓶凹六邊形，其中 L_1,L_2,L_3 分別為六邊形的對角線。而此六邊形其實為兩個凸四邊形 $L_3+\alpha\left|L_1\right|+\beta\left|L_2\right|=k$ 以及 $-L_3+\alpha\left|L_1\right|+\beta\left|L_2\right|=k$ 各取 L_3 兩側的部份所合併組成，且這兩個凸四邊形邊的交點以及邊延長線的交點，皆在直線 L_3 上。然而所有凸六邊形並沒有辦法被此方程式所表示出來，在某些特殊情況下，此方程式圖形有可能為凸五邊形及凸四邊形。

四、方程式 $\left|L_3\right|+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=k$ 的主要封閉圖形為狐狸八邊形，以及貓臉六邊形，此兩圖形其實為一個凹四邊形 $L_3+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=k$，以及一個開放折線圖 $-L_3+\alpha\left|L_1+\beta\left|L_2\right|\right|=k$ 各取 L_3 兩側的部份所合併組成，L_2 為其中一條主要對角線，其餘邊與邊延長線的交點皆在

L_1 上。此方程式的圖形還有可能是三角形，我們也証明了此方程式的圖形為三角形時的條件，得到**定理三**，但並不是所有的三角形都可以被此方程式表示出來。在某些情況下，此方程式的圖形有可能為凸五邊形、凹五邊形、凸四邊形及凹四邊形。

五、我們發現這些凸多邊形的方程式都不是唯一的，而且一直線絕對值的方程式，其圖形有非常多的可能，在上面的研究過程中，我們主要使用了克拉瑪公式、直線系、以及平移旋轉的觀念來處理問題，我們希望在未來，能找到更簡潔有力的方法，以及不同的觀點，來有效研究直線絕對值方程式的問題，期望能得到更一般性或其它更豐富的有關於凹凸多邊形方程式的結論。

陸、參考資料

[1] 高中教科用書　數學甲上冊　第二章，康熙圖書網路股份有限公司

[2] 楊世明　主編，中國初等數學研究之集 P.722~P.754，河南教育出版社

[3] 曾振彥、蟻智聰、李雨仰、陳勁甫，正偶邊形與正偶圓弧的方程式，中華民國第 43 屆中小學科展

[4] 佚名　科展作品:對稱狂想曲

【評語】**040402**

1、 直線是一種自然的幾何物件，絕對值方程式所代表的是一種不自然的運算與結合，是數學研究中被認為高度人工化的問題。本作品當中所出現的絕對值中又有絕對值牽涉到極端複雜的數學邏輯。在策劃科展時，要朝向膾炙人口的方向而避免陷入死胡同的地步。

2、 請注意用語是否足夠嚴謹。試問：「主要封閉圖形」的定義是什麼？

3、 判斷所做的數學是否為「主流數學」的最好方法是尋找相關的已發表的論文。如果只找到書本而找不到論文，則其研究極有可能陷入閉門造車的困境。