中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040401

「非對稱性螺旋槳定理」之探討

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 萬昇 高二 周宗德 高二 陳郁	莊添丁 藍錦文

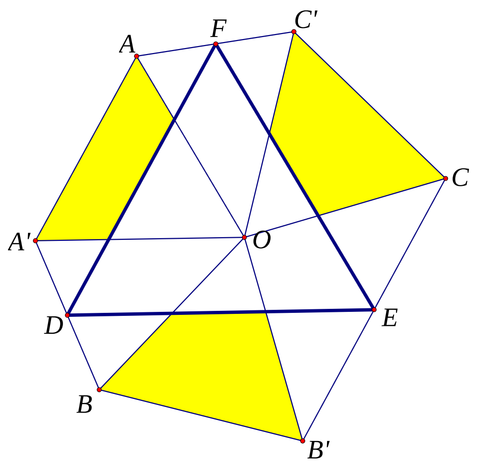
關鍵詞：非對稱性螺旋槳定理、正三角形

摘要

「非對稱性螺旋槳定理」是一個很有趣的定理，並且有好幾個相類似的推廣性質。我們　　試著自己提出這些性質的證明，並且嘗試作一些推廣的探討。

壹、研究動機

某次在“ 打開魔術箱 ”這本書中看到一個有趣的定理：「非對稱性螺旋槳定理」。所謂「非對稱性螺旋槳定理（ASYMMETRIC PROPELLER THEOREM，底下簡稱 APT）」是指如果有三個全等的正三角形，相交於一點 O，像螺旋槳一般，他們不一定處於對稱模式，可任意繞著交點 O 旋轉。如圖（一）。連接 $\overline{A'B}$ 、 $\overline{B'C}$ 和 $\overline{C'A}$ ，分別取三邊的中點，連接成三角形，則此三角形為正三角形。

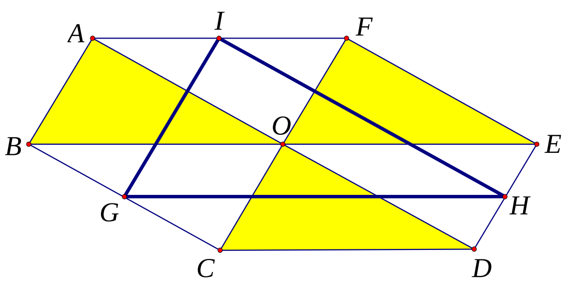


圖（一）

我們對這個結果感到詫異！但書中並沒有加以證明，只有提出結論，讓我們懷疑是否是巧合，還是其中有一些特殊的關連？

貳、研究目的

在該書中還提到一些延伸的性質。例如：當三個相似三角形連接時，也會出現相似的性質，如圖（二）。但書中卻同樣沒有給出證明！



圖（二）

所以我們將進一步研究此定理以及相關性質：

一、全等正三角形之 APT 的證明。

二、相似正三角形之 APT 的證明。

三、全等三角形之 APT 的證明。

四、相似三角形之 APT 的證明。

五、關於正方形之類似性質的證明。

六、從空間的觀點來思考 APT，並加以證明。

七、探討 APT 之極值問題。

參、研究設備

筆，紙，電腦，GSP 和 CABRI 3D 軟體。

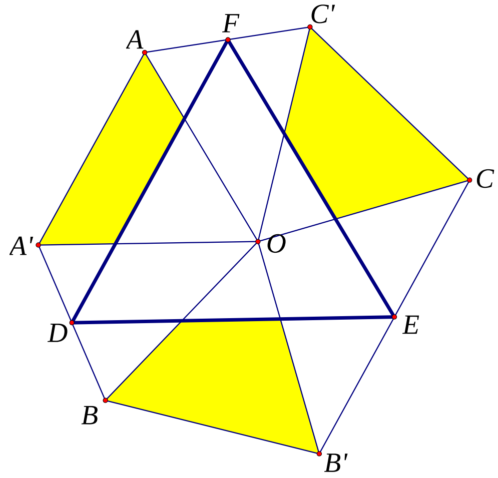
肆、研究過程與方法

一、全等正三角形之 APT 的證明

（一）何謂 APT？

已知三個全等的正$\Delta OAA'$，OBB'和OCC'，相交於一點 O，如圖（一）。

連接$\overline{A'B}$ 、 $\overline{B'C}$和$\overline{C'A}$，取三邊的中點 D，E 和 F，連接成一個三角形。則不論正$\Delta OAA'$，OBB'和OCC'的相對位置為何，亦即可任意繞著交點 O 旋轉，此ΔDEF 為正三角形。



圖（一）

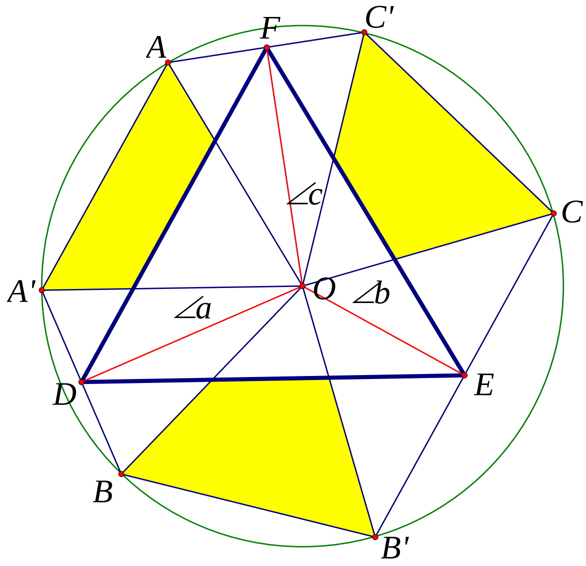
（二）以代數方法證明

證明：設正$\Delta OAA'$，OBB'和OCC'的邊長為 R，$\angle A'OD=\angle a$ ，$\angle B'OE=\angle b$ 和$\angle C'OF=\angle c$ 。如圖（三）。

所以，$\overline{OD}=R\cos\angle a$、$\overline{OE}=R\cos\angle b$ 和$\overline{OF}=R\cos\angle c$。則

$$\overline{EF}^2=R^2\cos^2\angle c+R^2\cos^2\angle b-2\,R\cos\angle c\cdot R\cos\angle b\cdot\cos(\angle c+\angle b+60^\circ)$$

$$\overline{DE}^2=R^2\cos^2\angle a+R^2\cos^2\angle c-2\,R\cos\angle a\cdot R\cos\angle c\cdot\cos(\angle a+\angle c+60^\circ)$$



圖（三）

因爲$\angle a+\angle b+\angle c=90^\circ$，所以

$$\overline{EF}^2=R^2\cos^2\angle c+R^2\cos^2\angle b-2R\cos\angle c\cdot R\cos\angle b\cdot\cos(\angle c+\angle b+60^\circ)$$

$$=R^2\cos^2\angle c+R^2\sin^2(\angle a+\angle c)-2R\cos\angle c\cdot R\sin(\angle a+\angle c)\cdot\sin(\angle a-60^\circ)$$

$$=R^2\cos^2\angle c+[R^2(\sin\angle a\cdot\cos\angle c+\sin\angle c\cdot\cos\angle a)]^2$$

$$-2R^2\cos\angle c\cdot[\sin\angle a\cdot\cos\angle c+\sin\angle c\cdot\cos\angle a]\cdot[\frac{1}{2}\sin\angle a-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle a]$$

$$=R^2\cos^2\angle c+R^2\sin^2\angle a\cdot\cos^2\angle c+2R^2\sin\angle a\cdot\cos\angle c\cdot\sin\angle c\cdot\cos\angle a+R^2\sin^2\angle c\cdot\cos^2\angle a-R^2[\sin\angle a\cdot\cos^2\angle c+\sin\angle c\cdot\cos\angle a\cdot\cos\angle c]\cdot[\sin\angle a-\sqrt{3}\cos\angle a]$$

$$=R^2\cos^2\angle c+R^2(\sin^2\angle a\cdot\cos^2\angle c+2\sin\angle a\cdot\cos\angle c\cdot\sin\angle c\cdot\cos\angle a+\sin^2\angle c\cdot\cos^2\angle a)-R^2(\sin^2\angle a\cdot\cos^2\angle c+\sqrt{3}\sin\angle a\cdot\cos^2\angle c\cdot\cos\angle a-\sin\angle c\cdot\cos\angle a\cdot\cos\angle c\cdot\sin\angle a+\sqrt{3}\sin\angle c\cdot\cos^2\angle a\cdot\cos\angle c)$$

$$=R^2\cos^2\angle c+R^2\sin^2\angle c\cdot\cos^2\angle a+R^2\sin\angle a\cdot\cos\angle c\cdot\sin\angle c\cdot\cos\angle a+R^2\sqrt{3}\sin\angle a\cdot\cos^2\angle c\cdot\cos\angle a+R^2\sqrt{3}\sin\angle c\cdot\cos^2\angle a\cdot\cos\angle c$$。

$$\overline{DE}^2=R^2\cos^2\angle a+R^2\cos^2\angle c-2R\cos\angle a\cdot R\cos\angle c\cdot\cos(\angle a+\angle c+60^\circ)$$

$$=R^2\cos^2\angle c+R^2\cos^2\angle a-2R^2\cos\angle a\cdot\cos\angle c\cdot\cos(\angle a+\angle c+60^\circ)$$

$$= R^2\cos^2\angle c + R^2\cos^2\angle a - 2\,R^2\cos\angle a\cdot\cos\angle c\cdot[\frac{1}{2}\cos(\angle a+\angle c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\angle a+\angle c)]$$

$$= R^2\cos^2\angle \mathrm{c} + R^2\cos^2\angle a - 2R^2\cos\angle a\cdot\cos\angle c\cdot[\frac{1}{2}\cos\angle a\cdot\cos\angle c - \frac{1}{2}\sin\angle a\cdot\sin\angle c - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle a\cdot\cos\angle c - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle a\cdot\sin\angle c]$$

$$= R^2\cos^2\angle c + R^2\cos^2\angle a - R^2\cos^2\angle a\cdot\cos^2\angle c + R^2\cos\angle c\cdot\cos\angle a\cdot\sin\angle a\cdot\sin\angle c\ + R^2\sqrt{3}\sin\angle a\cdot\cos^2\angle c\cdot\cos\angle a + R^2\sqrt{3}\sin\angle c\cdot\cos^2\angle a\cdot\cos\angle c$$

$$= R^2\cos^2\angle \mathrm{c} + R^2\sin^2\angle c\cdot\cos^2\angle a + R^2\sin\angle a\cdot\cos\angle c\cdot\sin\angle c\cdot\cos\angle a + R^2\sqrt{3}\sin\angle a\cdot\cos^2\angle c\cdot\cos\angle a + R^2\sqrt{3}\sin\angle c\cdot\cos^2\angle a\cdot\cos\angle c 。$$

所以 $\overline{DE}=\overline{EF}$ 。

一樣的方法類推，可得 $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FD}$ 。所以，ΔDEF 爲正三角形。

我們以代數方法證明此定理，但過程十分繁瑣，並且無法從證明過程中看出其中幾何的關聯性，所以嘗試是否能以平面幾何的方法證明此定理。

（三）以幾何方法證明

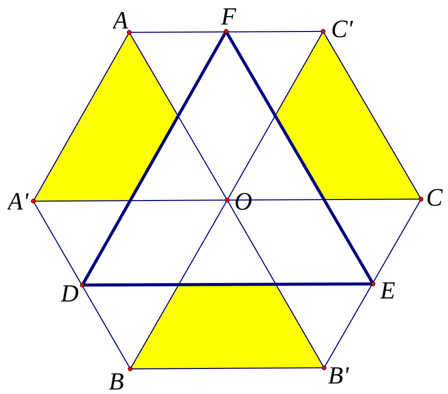
第一步：證明當 $\angle AOC'=\angle BOA'=\angle COB'=60^\circ$ ，ΔDEF 爲正三角形。如圖（四）。

證明：因爲 D 是 $\overline{A'B}$ 的中點，E 是 $\overline{B'C}$ 的中點，F 是 $\overline{C'A}$ 的中點，所以，

$\overline{A'D}=\overline{DB}=\overline{B'E}=\overline{EC}=\overline{C'F}=\overline{FA}$ ，則

$\overline{DF}\,//\,\overline{BC'}$ ，$\overline{EF}\,//\,\overline{AB'}$ ，$\angle AFD=\angle C'FE=60^\circ$ ，得 $\angle EFD=60^\circ$ 。

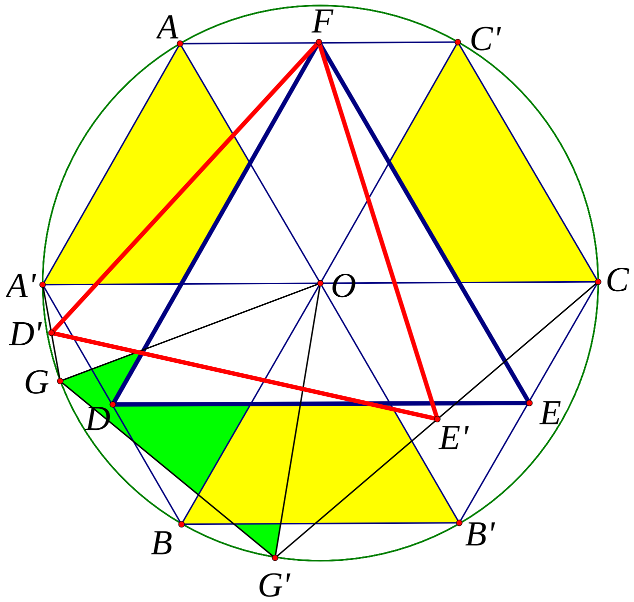
同理可證 $\angle FDE=\angle DEF=60^\circ$ 。則 ΔDEF 爲正三角形。



圖（四）

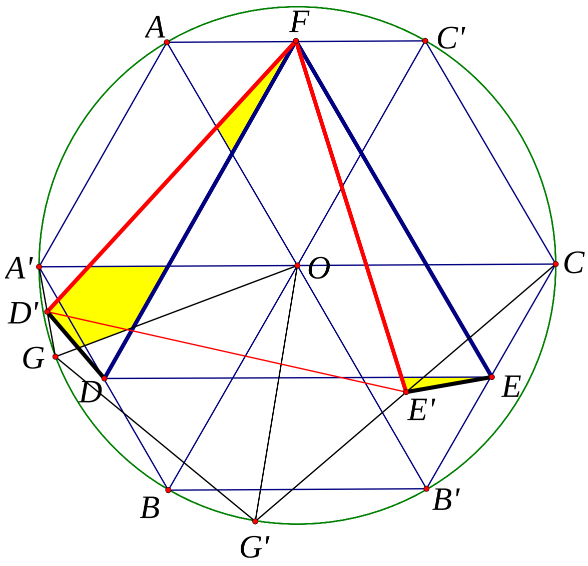
第二步：證明將其中一個正 $\Delta\, OBB'$ 旋轉一個角度後得到正 $\Delta\, OGG'$（如圖（五））。將 $\overline{A'G}$，

$\overline{G'C}$ 的中點 D'， E' 和 F 連線，則 $\Delta\, D'E'F$ 爲正三角形。



圖（五）

爲了證明 $\Delta\, D'E'F$ 和 $\Delta\, DEF$ 一樣爲正三角形，我們要先證出圖（六）中的 $\Delta\, FDD'$ 和 FEE' 全等。若 $\Delta\, FDD'$ 和 $\Delta\, FEE'$ 全等，則 $\Delta\, D'E'F$ 將與 $\Delta\, DEF$ 相似，則 $\Delta\, D'E'F$ 也爲正三角形。



圖（六）

第三步：證明 $\Delta\, FDD'$ 和 $\Delta\, FEE'$ 全等。

證明：如圖（七），因為$\angle GOB=\angle G'OB'$，$\overline{OG}=\overline{OB}=\overline{OG'}=\overline{OB'}$，所以$\Delta OGB$全等於

$\Delta OG'B'$，則$\overline{GB}=\overline{G'B'}$。

又點D，D'，E和E'分別為$\overline{A'B}$，$\overline{A'G}$，$\overline{CB'}$和$\overline{CG'}$的中點，則

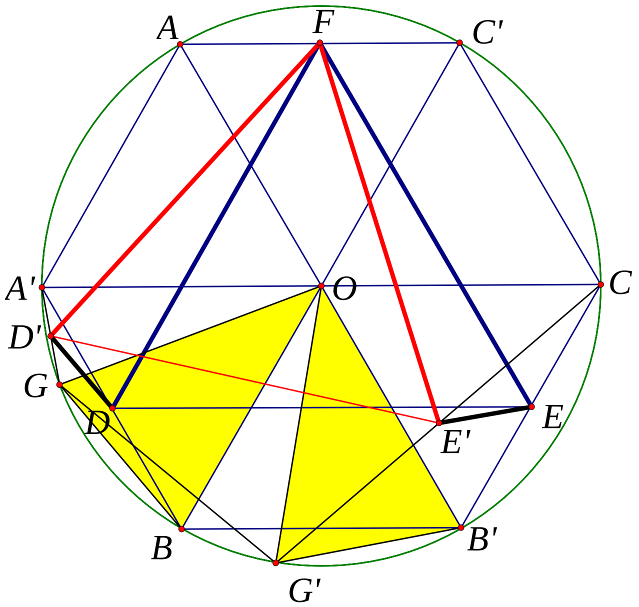
$\overline{D'D}=\frac{1}{2}\overline{GB}=\frac{1}{2}\overline{G'B'}=\overline{E'E}$。

又$\overline{D'D}//\overline{GB}$，$\overline{DF}//\overline{BC'}$，所以$\angle D'DF=\angle GBO$。

同理，$\overline{E'E}//\overline{G'B'}$，$\overline{EF}//\overline{B'A}$，所以$\angle E'EF=\angle G'B'O$。

得$\Delta FDD'$和$\Delta FEE'$全等。

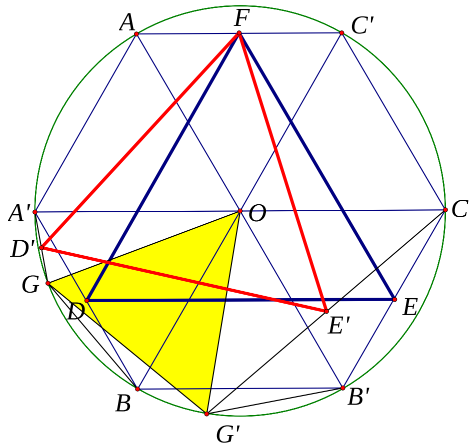
因此$\angle D'FD=\angle E'FE$，$\angle D'FE'=60^\circ$，$\overline{D'F}=\overline{E'F}$，則$\Delta D'E'F$也是正三角形



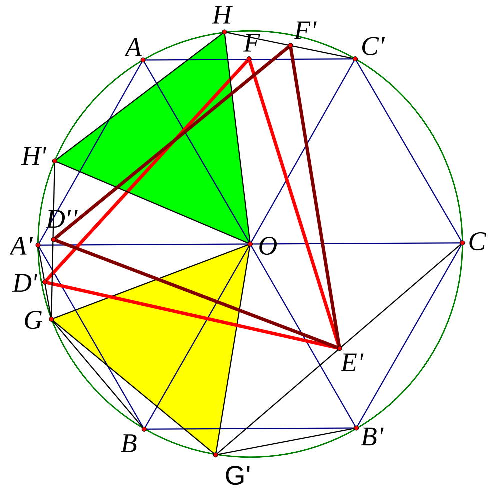
圖（七）

第四步：現在旋轉兩個正三角形，同樣將對應點連線取中點，證明三個中點所形成的三角形仍為正三角形。也就是先將其中一個正三角形OBB'旋轉一個角度後得到正$\Delta OGG'$，如圖（八）。將$\overline{A'G}$，$\overline{G'C}$的中點D'，E'和F連線，已知$\Delta D'E'F$為正三角形。

再將正$\Delta OAA'$旋轉一個角度後得到正$\Delta OHH'$，如圖（九）。將$\overline{H'G}$，$\overline{HC'}$的中點D''，F'和E'連線，則$\Delta D''E'F'$為正三角形。



圖（八）



圖（九）

證明：如同前面的證法，只要證明$\Delta FF'E'$與$\Delta D'D''E'$全等，便能證明旋轉過後的$\Delta D''E'F'$也為正三角形。

如圖（十），因為ΔAHO全等於$\Delta A'H'O$，所以$\overline{AH}=\overline{A'H'}$。

又$\overline{FF'}$及$\overline{DD'}$皆為中點連線，所以$\overline{AH}=2\overline{FF'}$，$\overline{A'H'}=2\overline{D'D''}$，得$\overline{FF'}=\overline{DD'}$。

又已知$\Delta D'E'F$為正三角形，所以$\overline{FE'}=\overline{D'E'}$。

再來，過F點作$\overline{AO}$的平行線$\overline{FK}$，且過D'點作$\overline{A'O}$的平行線$\overline{D'K}$，

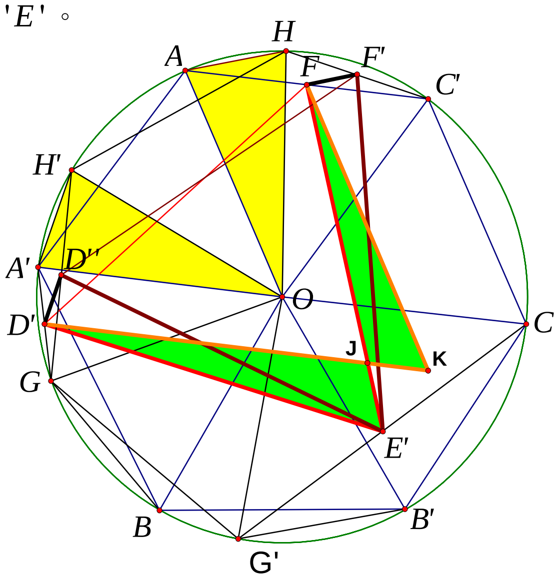
所以$\angle FKD'=60^\circ$（與$\angle AOA'$同位角相等）。
在ΔFJK與$\Delta D'JE'$中，$\angle FKD'=\angle FE'D'=60^\circ$，又$\angle FJK=\angle D'JE'$，
所以ΔFJK與$\Delta D'JE'$相似。得$\angle JFK=\angle JD'E'$。

又$\overline{FF'}$平行$\overline{AH}$，$\overline{AO}$平行$\overline{FK}$，所以，$\angle KFF'=\angle HAO$。

同理，$\angle D''D'J=\angle H'A'O$，$\angle HAO=\angle H'A'O$，所以$\angle KFF'=\angle D''D'J$。
又$\angle JFK=\angle JD'E'$，得$\angle F'FE'=\angle D''D'E'$。
在$\Delta FF'E'$與$\Delta D'D''E'$中，

$\overline{FF'}=\overline{DD'}$，$\overline{FE'}=\overline{D'E'}$，

$\angle F'FE'=\angle D''D'E'$。
所以$\Delta FF'E'$與$\Delta D'D''E'$全等。
因此$\Delta D''E'F'$與$\Delta D'E'F$相似，
皆為正三角形。



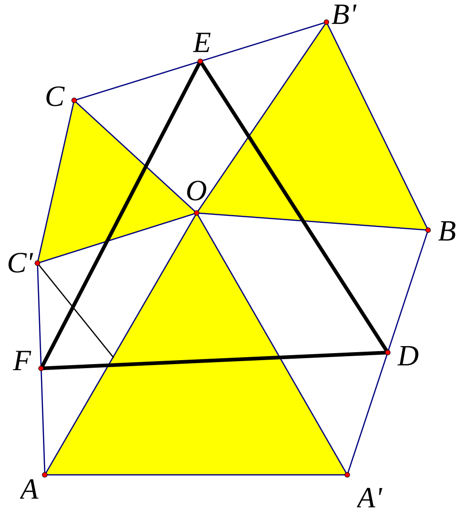
圖（十）

二、相似正三角形之 APT 的證明

我們已證出「全等正三角形之 APT」，這次我們想證明當三個正三角形爲相似時也有一樣的關係。

（一）相似正三角形之 APT：

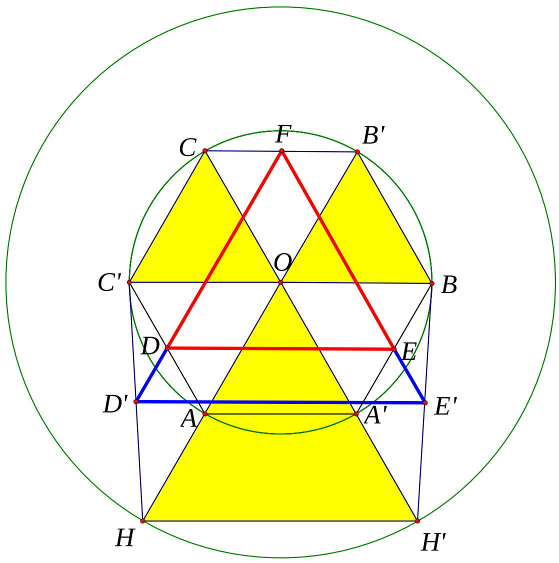
已知三個正$\Delta OAA'$，OBB'和OCC'（邊長可以相異），相交於一點 O，如圖（十一）。連接$\overline{A'B}$、$\overline{B'C}$和$\overline{C'A}$，取三邊的中點 D，E 和 F，連成一個三角形。則不論正$\Delta OAA'$，OBB'和OCC'的相對位置爲何，ΔDEF 爲正三角形。



圖（十一）

證明：

第一步：已知三個正$\Delta OAA'$，OBB'和OCC'（邊長相等），相交於一點 O，而每個正三角形間隔 60°。將其中正$\Delta OAA'$的兩邊等比例延長，形成正$\Delta OHH'$。如圖（十二）。



圖（十二）

取$\overline{HC'}$的中點爲D'，$\overline{H'B}$的中點爲E'。

因爲$\overline{D'D''}//\overline{OH}$，所以$F$，$D$，$D'$三點共線。同理$F$，$E$，$E'$三點共線。

又$\overline{DD'}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{A'H'}=\overline{EE'}$，得$\overline{FD'}=\overline{FE'}$，所以$\Delta FD'E'$爲正三角形。

第二步：旋轉$\Delta OHH'$成$\Delta OII'$，如圖（十三）。

已知$\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OH'}=\overline{OI'}$，$\angle HOI=\angle H'OI'$，所以$\Delta HOI$全等於$H'OI'$，

得$\overline{HI}=\overline{H'I'}$；$\angle OHI=\angle OH'I'$。

因爲$\overline{D'D''}$是中點連線，所以$\overline{HI}=2\overline{D'D''}$。

同理，因爲$\overline{EE'}$是中點連線，所以$\overline{H'I'}=2\overline{EE'}$。

因爲$\overline{H'I'}=2\overline{EE'}$；$\overline{HI}=2\overline{D'D''}$；$\overline{HI}=\overline{H'I'}$，所以$\overline{D'D''}=\overline{EE'}$。

因爲$\overline{FD'}//\overline{OH}$；$\overline{HI}//\overline{D'D''}$，所以$\angle FD'D''=\angle OHI$。同理，$\angle OH'I'=\angle FEE'$。

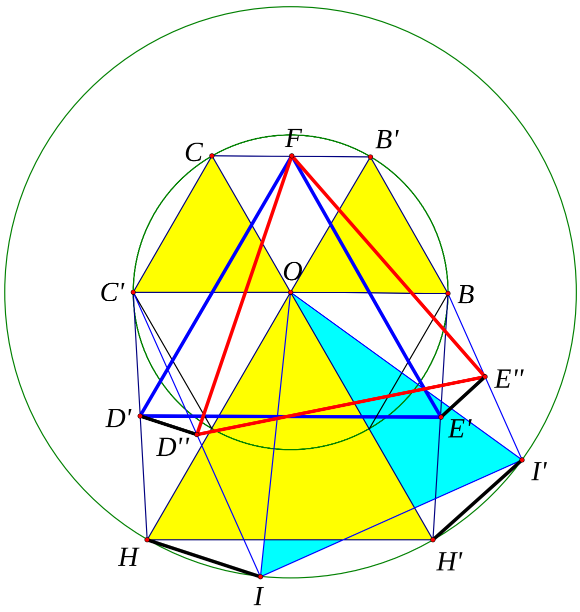
又因爲$\angle OHI=\angle OH'I'$，所以$\angle FD'D''=\angle FEE'$。

在$\Delta D'D''F$與$\Delta EE'F$中，因爲$\overline{D'F}=\overline{FE'}$，$\overline{D'D''}=\overline{EE'}$，又$\angle FD'D''=\angle FEE'$

所以$\Delta FD'D''$全等於$\Delta FEE'$。

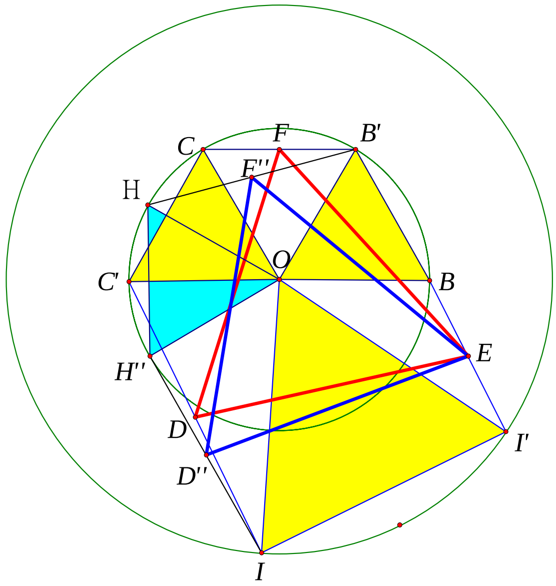
因此，$\angle D'FD''=\angle E'FE$，$\angle D'FE'=60^\circ$，$\overline{D'F}=\overline{E'F}$，

則$\Delta D''E'F$也是正三角形。



圖（十三）

第三步：現在旋轉第二個正三角形，同樣將對應點連線取中點，要證明三個中點所形成的三角形仍爲正三角形。也就是先將其中一個正$\Delta OCC''$旋轉一個角度後得到正$\Delta OHH''$，如圖（十四）。



圖（十四）

證明：同前面的證法，只要證明$\Delta FF''E$與$\Delta DD''E$全等，便能證明旋轉後的$\Delta D''EF''$也爲正三角形。

因爲ΔCHO全等於$\Delta C''H''O$，所以$\overline{CH}=\overline{C''H'}$。

又$\overline{FF''}$及$\overline{DD''}$皆爲中點連線，$\overline{CH}=2\overline{FF''}$，$\overline{C''H'}=2\overline{DD''}$，故$\overline{FF''}=\overline{DD''}$。

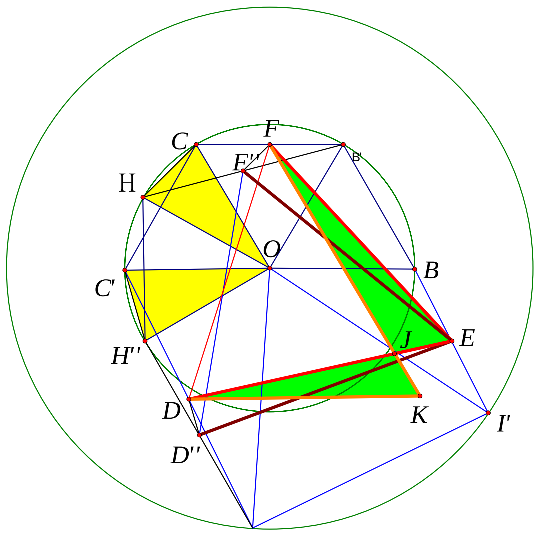
又因爲ΔDEF爲正三角形，所以$\overline{FE}=\overline{DE}$。

過F點作$\overline{CO}$平行線$\overline{FK}$，並過D點作$\overline{C''O}$平行$\overline{DK}$，如圖（十五）。

兩平行線交於K點，則
$\angle FKD'60$度（$\angle AOA'$的同位角）。
在ΔFJE與ΔDJK中，
$\angle FED=\angle JKD=60$度，$\angle FJE=\angle DJK$，
所以ΔFJK與$\Delta D'JE'$相似，
則$\angle JDK=\angle JFE$。

又因爲$\overline{FF''}$平行$\overline{CH}$，$\overline{FK}$平行$\overline{CO}$，

所以$\angle KFF''=\angle HCO$，
同理，得$\angle D''D'K=\angle H''C''O$。



圖（十五）

又因$\angle HCO=\angle H"C"O$，所以$\angle KFF"=\angle D"D'K$ 。

又$\angle JFE=\angle JDK$；$\angle KFF"+\angle JFE=\angle EFF"$，$\angle D"D'K+\angle JDK=\angle JDD"$，所以$\angle F'FE'=\angle D"D'E'$。

在$\Delta FF"E$與$\Delta DD"E$中，$\overline{FF'}=\overline{DD'}$，$\overline{FE'}=\overline{D'E'}$，$\angle F'FE'=\angle D"D'E'$，

，所以$\Delta FF'E'$與$\Delta DD"E'$。

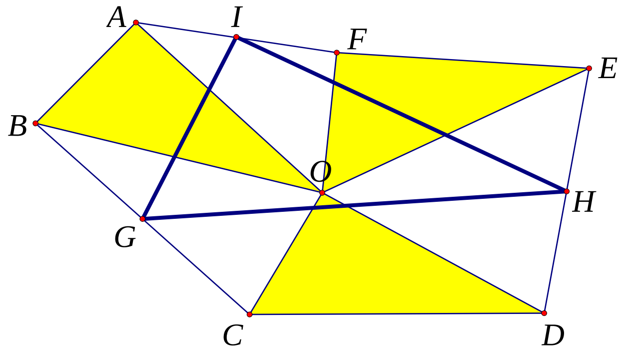
因此$\Delta D"EF"$與ΔDEF相似，皆爲正三角形。

第四步：重複第一步的作法，我們可以放大或縮小兩個相等正三角形中的一個，則連線段中點三角形亦爲正三角形。#

三、相似三角形之 APT 的證明：

做三個相似的ΔOAB，OCD和OEF，三個三角形之三個相異的角交於一點O，將三個三角形的對應點B、C，D、E和F、A連線並取其中點G、H和I，

證明：ΔGHI相似ΔOAB。



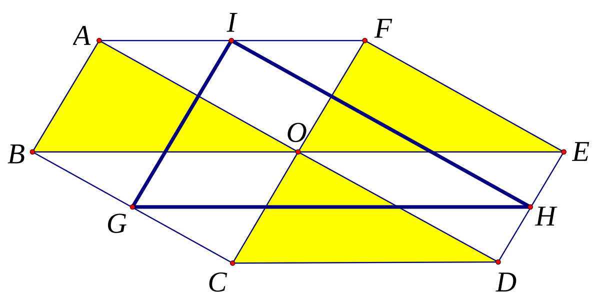
圖（十六）

證明：

第一步：先做三個全等的三角形交一點，如圖（十七）。

當$\overline{AB}//\overline{OC}//\overline{OF}$，則$\overline{GI}//\overline{AB}$。同理可得，$\overline{GH}//\overline{OB}$，$\overline{HI}//\overline{OA}$。

所以ΔGHI相似ΔOAB。



圖（十七）

第二步：由$\overline{OA}$、$\overline{OB}$向外延伸成$\overline{OL}$、$\overline{OM}$，

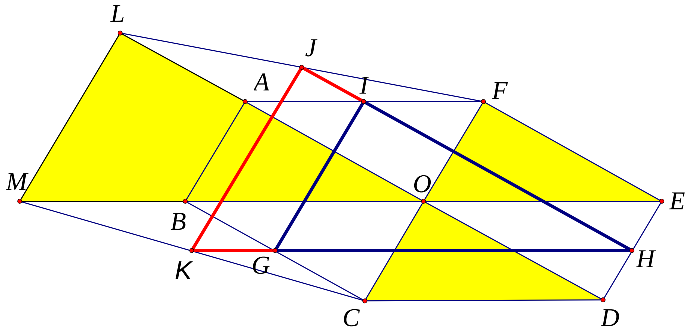
$\angle OLM=\angle OAB=\angle a$，$\angle OML=\angle OBA=\angle b$，$\overline{AB}//\overline{LM}$。

連 ΔOLM，ΔOFE，ΔOCD 對應點，並取三邊中點連成ΔΔHJK，

由於 J、K 爲$\overline{LF}$、$\overline{MC}$之中點，由中點連線性質知$\overline{LM}//\overline{CF}//\overline{JK}$，

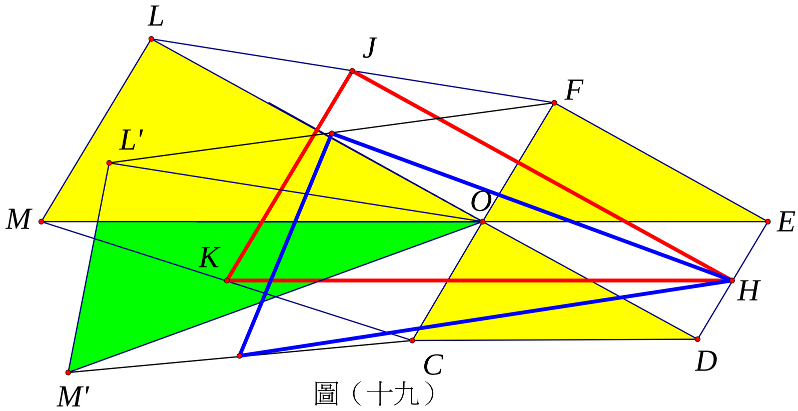
所以∠HJK=$\angle a$，∠JKH=$\angle b$ (同位角相等)，

所以 ΔHJK 相似 ΔOLM。



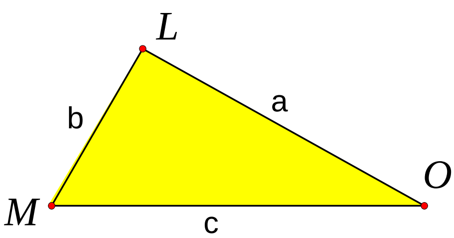
圖（十八）

第三步：旋轉 ΔLMO 成爲 $\Delta L'M'O$，要證明當三個相似三角形交於一點，轉動一個三角形之後，頂點連線之中點三角形依舊爲相似三角形。如圖（十九）。



圖（十九）

證明：(1) 設 ΔLMO 與其它的相似三角形的邊長比皆爲 $a:b:c$，如圖（二十）。

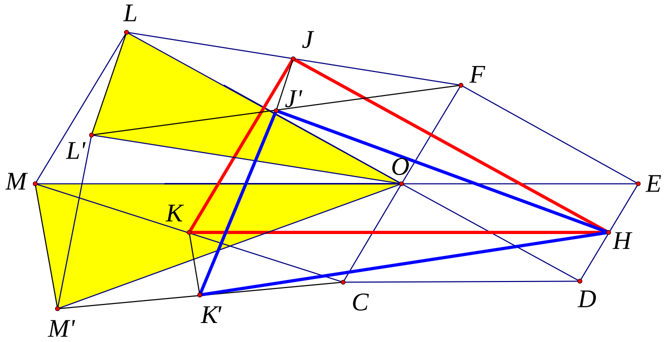


圖（二十）

（2）在$\Delta OLL'$與$\Delta OMM'$中，

因爲$\angle LOL'=\angle MOM'$，$\overline{LO}:\overline{MO}=\overline{L'O}:\overline{M'O}=a:c$。

所以$\Delta OLL'$與$\Delta OMM'$相似，因此$\overline{LL'}:\overline{MM'}=a:c$。



圖(二十一)

因爲$\overline{JJ'}$與$\overline{KK'}$皆爲中點連線，所以$\overline{LL'}=2\overline{JJ'}$；$\overline{MM'}=2\overline{KK'}$，

得$\overline{JJ'}:\overline{KK'}=a:c$。

又因爲$\overline{JH}//\overline{LO}$，$\overline{JJ'}//\overline{LL'}$，所以$\angle HJJ'=\angle OLL'$。

同理可得：$\angle HKK'=\angle OMM'$。又因爲$\Delta OLL'$與$\Delta OMM'$相似，
所以，$\angle HJJ'=\angle OLL'=\angle HKK'=\angle OMM'$。
在$\Delta HJJ'$與$\Delta HKK'$中，

因爲$\overline{JH}:\overline{KH}=a:c$，$\overline{JJ'}:\overline{KK'}=a:c$，$\angle HJJ'=\angle HKK'$，

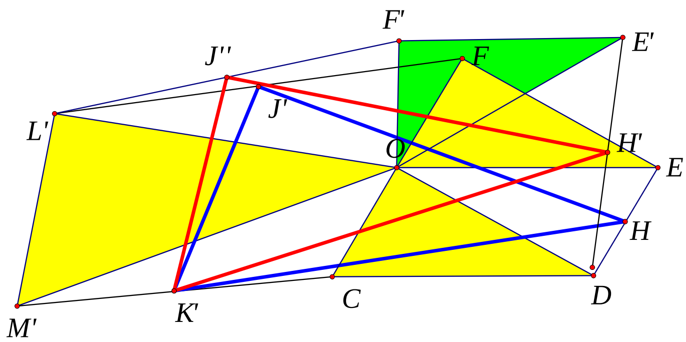
所以$\Delta HJJ'$與$\Delta HKK'$相似，則$\overline{JH}:\overline{J'H}=\overline{KH}:\overline{KK'}$，

$\angle JHJ'=\angle KHK'$。

在ΔJKH與$\Delta J'K'H$中，因爲$\overline{JH}:\overline{J'H}=\overline{KH}:\overline{KK'}$，

$\angle JHK=\angle J'HK'$，所以ΔJKH與$\Delta J'K'H$相似，得證。

第四步：現在旋轉第二個相似ΔOEF成爲$\Delta OE'F'$如圖(二十二)，欲證明旋轉兩個相似三角形後中央$\Delta K'J''H'$也爲相似三角形。



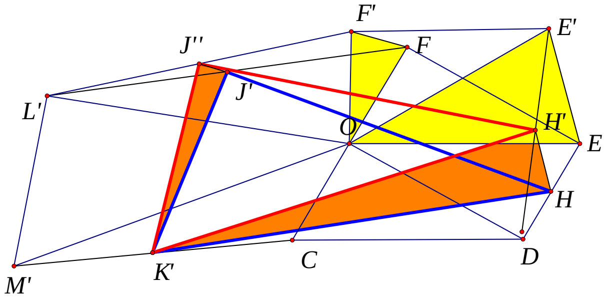
圖(二十二)

證明：如圖(二十三)，在 $\Delta OFF'$ 與 $\Delta OEE'$ 中，因為 $\angle FOF' = \angle EOE'$，

$\overline{FO}$ ： $\overline{EO} = \overline{F'O}$ ： $\overline{E'O} = b : c$，所以 $\Delta OFF'$ 與 $\Delta OEE'$ 相似。

因此 $\overline{FF'}$ ： $\overline{EE'} = b : c$。因為 $\overline{J'J''}$ 與 $\overline{HH'}$ 皆為中點連線，所以 $\overline{FF'} = 2\overline{J'J''}$

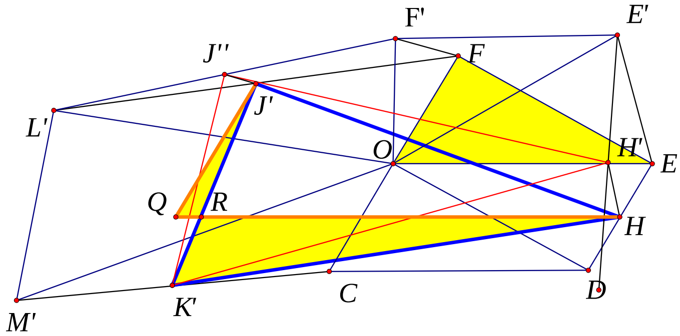
； $\overline{EE'} = 2\overline{HH'}$，得 $\overline{J'J''}$ ： $\overline{HH'} = b : c$。



圖(二十三)

接著，過點 J' 作 $\overline{FO}$ 的平行線 $\overline{J'Q}$，過 H 作 $\overline{OE}$ 的平行線 $\overline{QH}$，兩者交於 Q 點，如圖(二十四)。因為 $\overline{FO} // \overline{J'Q}$， $\overline{OE} // \overline{QH}$，所以

$\angle J'QR = \angle FOE = \angle J'K'H$。又因為 $\angle J'RQ = \angle HRK'$， $\angle J'QR = \angle J'K'H$，所以 $\Delta J'QR$ 與 $\Delta HK'R$ 相似，得 $\angle QRJ' = \angle K'HR$。



圖(二十四)

因為 $\overline{J'J''} // \overline{F'F}$，$\overline{FO} // \overline{J'Q}$，所以 $\angle QJ'J'' = \angle OFF'$，同理可得 $\angle H'HK' = \angle OEE'$。

又因為 $\Delta OFF'$ 與 $\Delta OEE'$ 相似，所以 $\angle QJ'J'' = \angle OFF' = \angle OEE' = \angle H'HK'$。
因為 $\angle QJ'J'' = \angle H'HK'$， $\angle QRJ' = \angle K'HR$，因此 $\angle K'J'J'' = \angle K'HH'$，在 $\Delta KJ'J''$ 與 $\Delta K'HH'$ 中，因為 $\overline{J'J''}$ ： $\overline{HH'}$ ＝ $\overline{K'J'}$ ： $\overline{K'H} = b : c$， $\angle K'J'J'' = \angle K'HH'$。

所以 $\Delta KJ'J''$ 與 $\Delta K'HH'$ 相似，得 $\overline{K'J''}$ ： $\overline{K'J'} = \overline{K'H'}$ ： $\overline{K'H}$； $\angle J''K'J' = \angle H'K'H$。

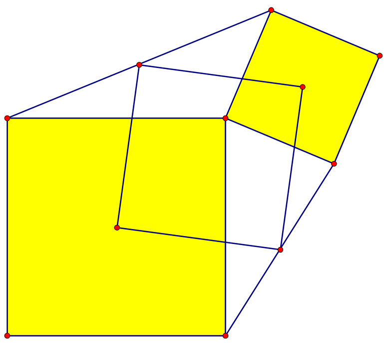
在 $\Delta K'J''H'$ 與 $\Delta K'J'H$ 中，因為 $\overline{K'J''}$ ： $\overline{K'J'} = \overline{K'H'}$ ： $\overline{K'H}$， $\angle J''K'H' = \angle J''K'H$

所以 $\Delta K'J''H'$ 與 $\Delta K'J'H$ 相似。得證。

五、關於正方形之類似性質的證明

葛登能（Martin Gardner）的該篇文章中亦提到到其它相關的性質，但同樣並未給予證明。我們嘗試加以證明並推廣。

性質 1：若兩個正方形相交於一頂點，連接相對應的四對頂點，則所得四線段的中點所成的四邊形也是正方形。如圖（二十五）。



圖（二十五）

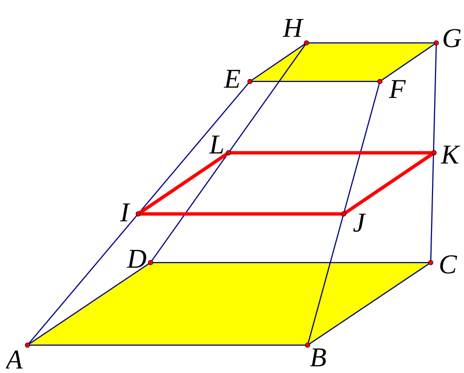
證明的想法：正方形的性質與 APT 有許多相似處，卻也有不同，所以我們想從空間角度來思考，是否能在其中發現證明的方法？

雖然問題是平面的，但我們想像將它拆解爲兩個部份，並放置於不同的平行平面上，形成一個四角柱形。因爲上下兩平面皆爲正方形且上下連接線皆爲直線，所以將連接線的中點相連也爲一正方形（爲一等比例縮放的正方形）。如圖（二十六）。

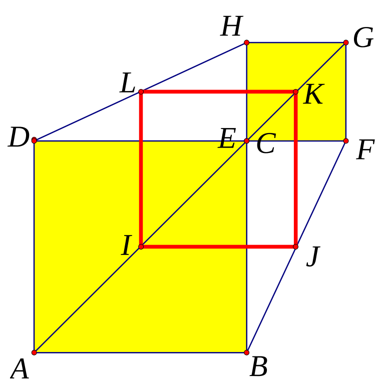
從正上方俯視這兩個正方形，將正方形 $EFGH$ 平行移動，使 E 和 C 兩點重合（實際上是 E 在 C 兩的正上方），則此時 I 爲正方形 $ABCD$ 的中心，K 爲正方形 $EFGH$ 的中心，J 和 L 分別爲 $\overline{BF}$ 和 $\overline{DH}$ 的中點，則 $IJKL$ 爲一正方形。如圖（二十七）。

想像在空間中，將正方形 $EFGH$ 旋轉一個角度（保持兩平面平行），則空間中的 $IJKL$ 仍爲一正方形。如圖（二十八）。

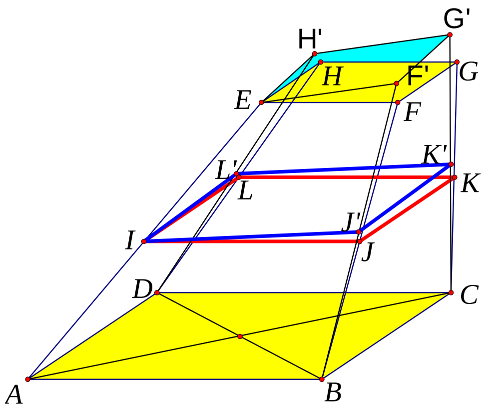
再從正上方俯視這兩個正方形，將正方形 $EFGH$ 平行移動，使 E 和 C 兩點重合，則此時 I 仍爲正方形 $ABCD$ 的中心，K 爲正方形 $EFGH$ 的中心，J 和 L 分別爲 $\overline{BF}$ 和 $\overline{DH}$ 的中點，則 $IJKL$ 爲一正方形。如圖（二十九）。

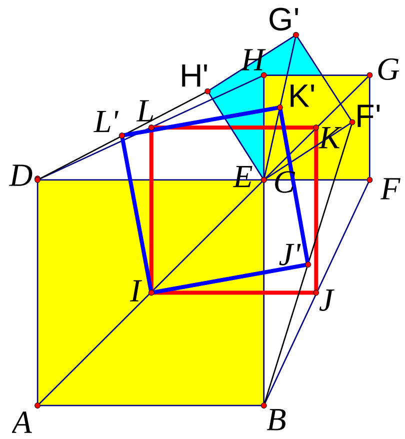


圖（二十六）



圖（二十七）





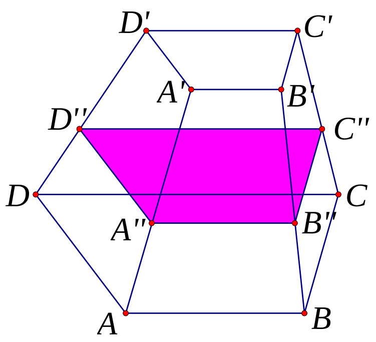
圖（二十八）　　　　　　　　　　　　　　圖（二十九）

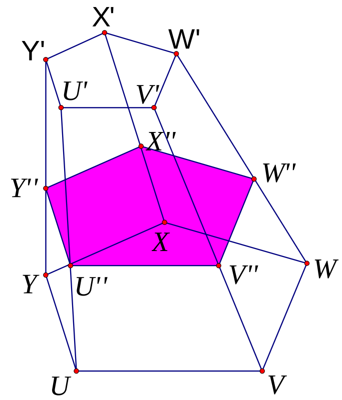
我們覺得以上這個性質跟 APT 的性質十分相近，形狀都跟旋轉無關，只跟大小有關聯，所以我們猜想是否從空間來思考也能證明此定理？

六、從空間觀點來思考 APT 的討論：

（一）我們觀察到下面結果：

引理：已知空間中有兩個相異的平行平面，如果將兩個相似的平面圖形分別在放這兩個平面上，分別在各相對應頂點的連線上，在等比例處取點（例如在下列各圖中有標記的點），則其所構成的圖形必相似於原來的平面圖形（如在下列各圖中著色的部分）。





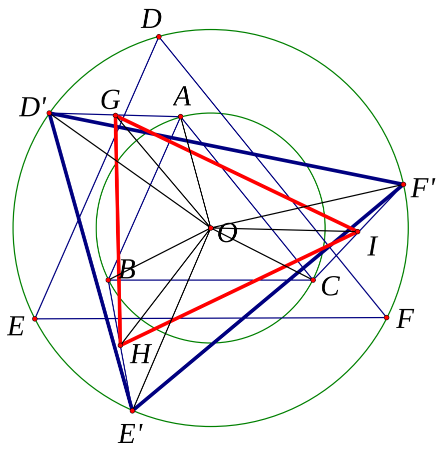
證明：如果是從平面的正上方來看，我們可以將兩個相似圖形想成是放在同一平面上，則此時兩個圖形的位置關係可以經過**旋轉**和**平移**兩個步驟來達成。所以，我們只要證明在這兩個變換過程中，我們在各相對應頂點的連線上，於等比例處取點所成的圖形與原圖形相似即可。

我們先證明相似三角形的情形，而其它圖形的證明則與此相似。

（1）不失一般性，假設兩相似ΔABC和ΔDEF的外心O重合，而且對應邊互相平行。如圖（三十）。

將ΔDEF旋轉一個角度得$\Delta D'E'F'$，分別取線段$\overline{AD'}$，$\overline{BE'}$和$\overline{CF'}$

的中點G，H和I，得ΔGHI。



圖（三十）

考慮$\Delta OAD'$和$\Delta OBE'$，其中$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\overline{OD'}=\overline{OE'}$，$\angle AOD'=\angle BOE'$，

所以，$\Delta OAD'$和$\Delta OBE'$全等。同理，$\Delta OCF'$亦全等。

則ΔOAG，ΔOBH和ΔOCI全等。

可推得$\angle AOB=\angle GOH$，$\angle BOC=\angle HOI$和$\angle COA=\angle IOG$。

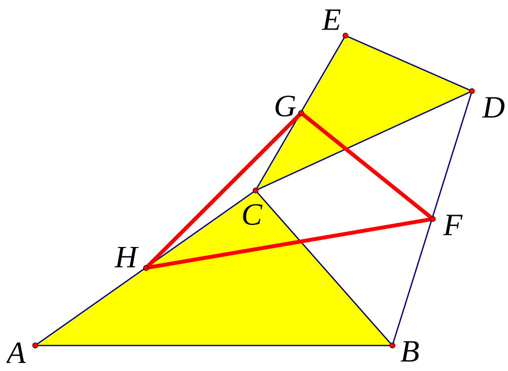
則由正弦定理可得，$\dfrac{\overline{GH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{HI}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{IG}}{\overline{CA}}$，

所以ΔGHI和ΔABC，ΔDEF相似。

（2）當$\Delta D'E'F'$平移時，ΔGHI亦跟著平移，形狀並不會改變，所以相似性不會受到影響。

利用上述引理，我們也從空間圖形的觀點，得出其他相類似的性質：

（二）性質 2：假設兩個相似ΔABC和ΔCDE相交於頂點C，連接對應點B與D，取$\overline{BD}$之中點，並分別取另外兩邊$\overline{AC}$和$\overline{CE}$之中點H和G。則ΔHFG與ΔABC相似。如圖（三十一）。



圖（三十一）

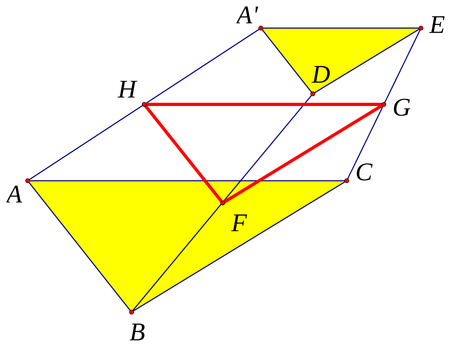
證明：想法與性質 1 的證明相似。

我們想像將兩個相似ΔABC和$\Delta A'DE$，放置於不同的平行平面上，形成一個三角柱形。因爲上下兩平面爲相似三角形且上下連接線皆爲直線，所以將連接線的中點相連也爲一相似ΔFGH。如圖（三十二）。

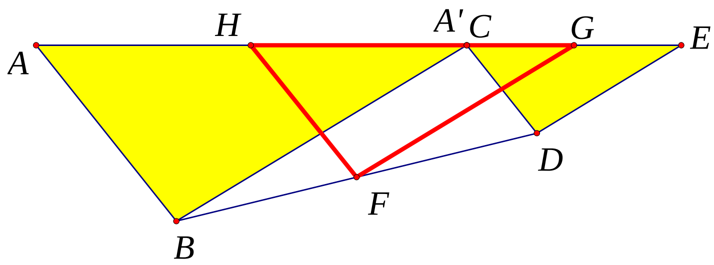
再從正上方俯視這兩個三角形，將$\Delta A'DE$平行移動，使A'和C兩點重合（實

際上是 A' 在 C 兩的正上方)，則此時 G 和 H 分別為 $\overline{AC}$ 和 $\overline{CE}$ 之中點，F 為 $\overline{BD}$ 的中點，則 ΔFGH 相似於 ΔABC。如圖（三十三）。

若將 $\Delta A'DE$ 旋轉一個角度，則結果亦相同。



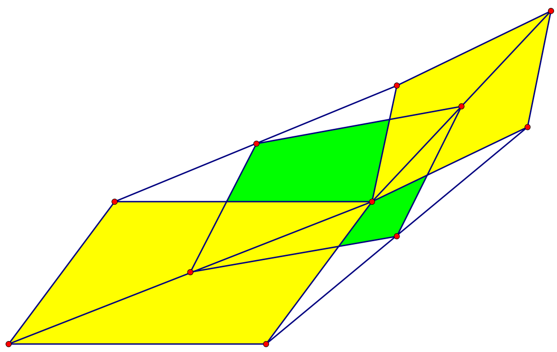
圖（三十二）



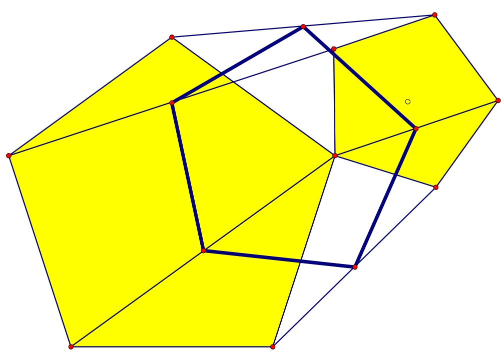
圖（三十三）

由上述的想法，我們可以推得：

（三）性質 3：若兩相似平行四邊形交於一頂點，連接兩相似平行四邊形的相對應頂點，則所得四線段的中點所成的四邊形也是相似平行四邊形。如圖（三十四）。兩相似五邊形的情形亦同。如圖（三十五）。



圖（三十四）



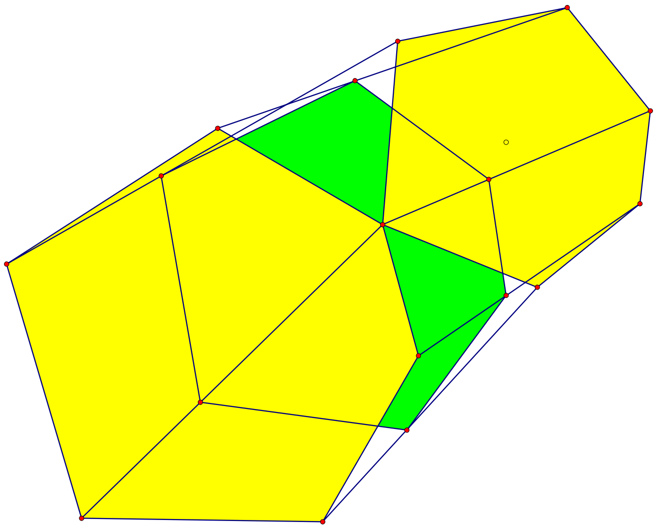
圖（三十五）

更進一步，我們可以得到一般的結果：

定理：已知兩相似（凸）n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 和 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ ，其中頂點 A_1 和 B_1 重合，

若 $C_i\in\overline{A_iB_i}$ ，其中 $i=1$，2，3，⋯，n，且 $\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}}=\frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{C_3B_3}}=\cdots=\frac{\overline{A_nC_n}}{\overline{C_nB_n}}$ ，

則 n 邊形 $C_1C_2C_3\cdots C_n$ 和 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ ， $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 相似。如圖（三十六）。



圖（三十六）

（四）APT 之空間觀點的證明：

經過上述的討論，使用空間觀點的思考，讓我們看到一個全新的解題方向，似乎能將 APT 的另一個面貌呈現出來，也許可以利用將三個三角形化簡成兩個三角形的情形來討論。

現在我們要用空間的觀點來重新證明 APT：

首先做三個全等正 ΔABC，ΔCDE 和 ΔCGH，相交於同一點 C。

將兩正 ΔABC，CDE 中相距最遠的兩點 B、D 連線，以其爲邊做一正 ΔBDF。

如圖（三十七）。

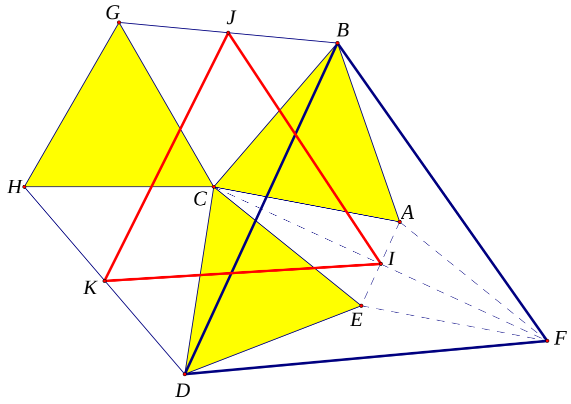
將正 ΔBDF 的頂點 F 分別與頂點 A、E 連線，可得一平行四邊形 $CEFA$。

所以 $\overline{CF}$ 與 $\overline{AE}$ 互相平分，得到 $\overline{AE}$ 之中點 I。

同時以正 ΔBDF 和正 ΔGHC 在空間上構成一三角柱，則由前述空間觀點的討論，分別取三角柱稜邊的各中點所構成的三角形爲正三角形。

我們再次證明了 APT。

圖（三十八）爲由空間觀點所呈現之圖形。



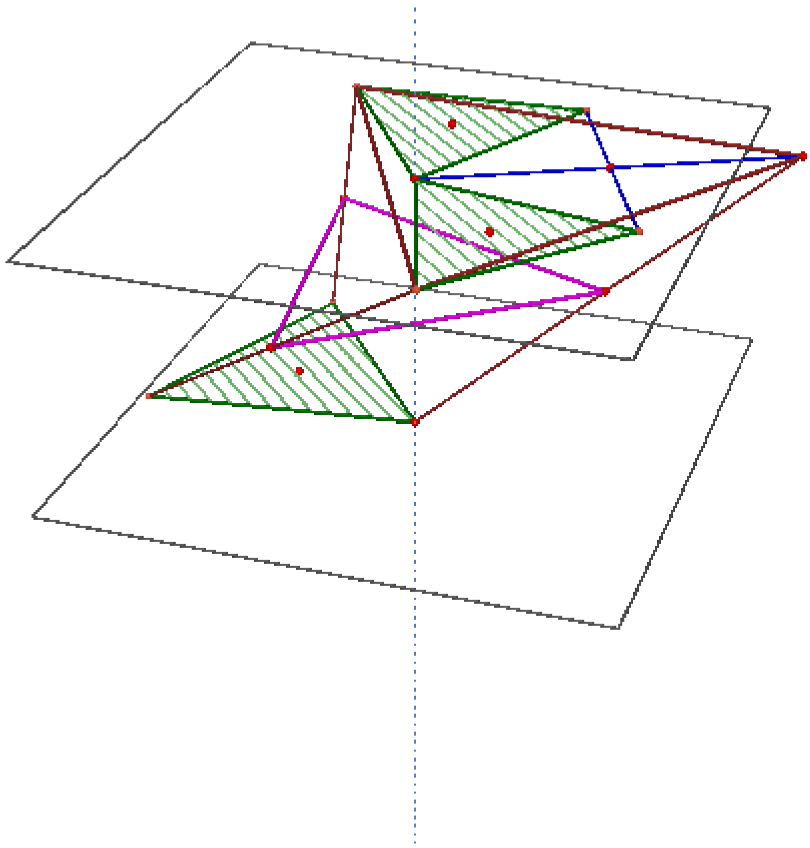
圖（三十七）

證明圖（三十七）中的四邊形 *ACEF* 爲平行四邊形：

因爲 ΔBDF，ΔABC 和 ΔCDE 皆爲正三角形，由正 ΔABC 和 ΔCDE 可得 $\overline{CD}=\overline{DE}$ ，

$\angle BDC=\angle EDF$，由 ΔBDF 可得 $\overline{BD}=\overline{DF}$，所以 ΔBCD 全等於 ΔDEF，得到 $\overline{BC}=\overline{EF}$。

同理，ΔBAF 全等於 ΔBCD，得到 $\overline{CE}=\overline{BF}$ 。則 *BCEF* 爲平行四邊形。



圖（三十八）

（五）相似三角形 APT 之空間觀點的證明：

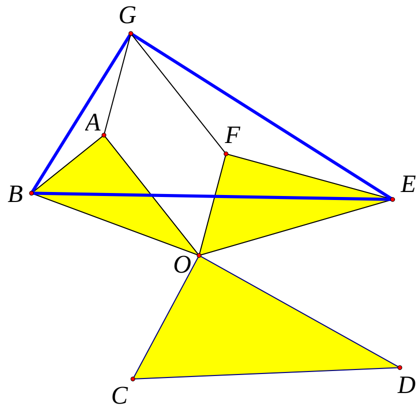
前面利用空間觀點的想法，讓我們能輕鬆解釋為何連線段中點所構成的三角形還是相似。我們想繼續以空間觀點來證明其它性質。

如圖（三十九），為三個相似ΔOAB，OCD 和 OEF，它們交於一頂點 O。

連接 B，E 兩點，向外做一較大的三角形 BEG，並且相似其它三個三角形。

而且其擺放方位必須與另外三個相似三角形一樣。

連接線段$\overline{GA}$與$\overline{GF}$，我們要證明四邊形 $AOFG$ 是平行四邊形。



圖（三十九）

證明：

因為 ΔGBE，ΔABO 和 ΔFOE 相似，對應邊長成比例，且對應角相同，

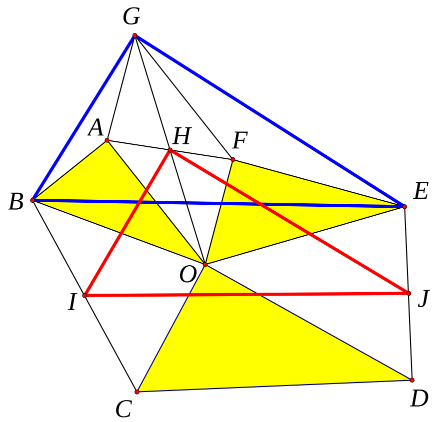
所以ΔGAB，ΔEOB 和ΔGFE 相似。故對應角相等。

$$
\begin{aligned}
\text{又 } \angle GFO &= 360^\circ - \angle GFE - \angle OFE \\
&= 360^\circ - \angle EOB - \angle OFE \\
&= 360^\circ - \angle BOA - \angle AOF - \angle FOE - \angle OFE \\
&= 180^\circ - \angle AOF \text{ 。}
\end{aligned}
$$

所以，$\angle GFO + \angle AOF = 180^\circ$，則$\overline{GA} // \overline{FO}$。同理，$\overline{GF} // \overline{AO}$。

所以，四邊形 $AOFG$ 是平行四邊形。則對角線互相平分。

從空間觀點來看，ΔGBE 與 ΔOCD 相似，所以將對應角連接，取其中點相連，則得一個相似ΔHIJ。如圖（四十）。



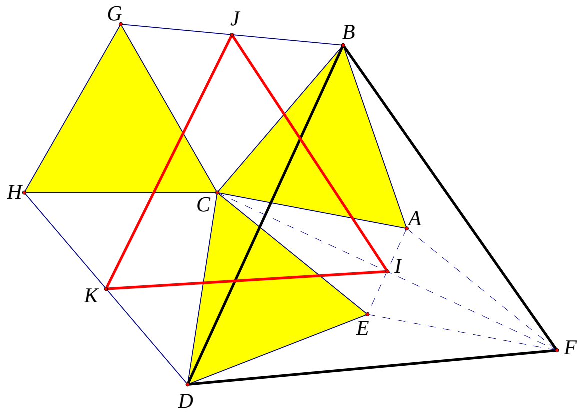
圖（四十）

我們證明了

性質 5：三個相似三角形，三個相異的對應頂點相交於一點。若把它們的對應頂點連線並取中點，則得到的三角形亦相似於原三角形。

七、探討 APT 之極值問題

我們將 APT 中相關的條件改變成空間觀點的面貌之後，會變成如圖（四十一）的樣子，而ΔIJK的邊長爲正ΔFBD與正ΔCGH的邊長的平均，因爲正ΔCGH無法改變大小，所以正ΔIJK的面積就與正ΔFBD的面積息息相關！

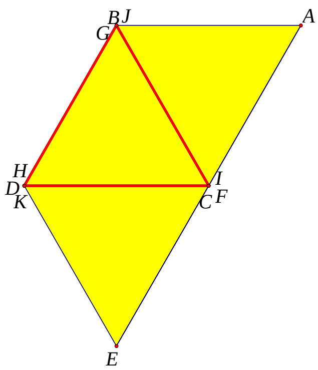


圖（四十一）

從圖（四十一）中，我們觀察到正ΔBDF的面積與ΔABC與ΔCDE的旋轉角度有關聯，即正ΔBDF的面積大小決定於$\angle BCD$的大小。

當$\angle BCD$爲 180 度時，則$\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}$，此時正$\Delta BDF$的面積爲最大。

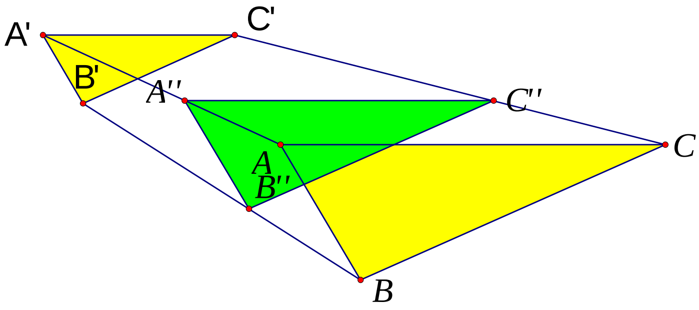
當$\angle BCD=\angle GCH=60$度，此時的連線中點所形成的三角形剛好與ΔGCH重疊，則正ΔBDF的面積爲最小。如圖（四十二）。



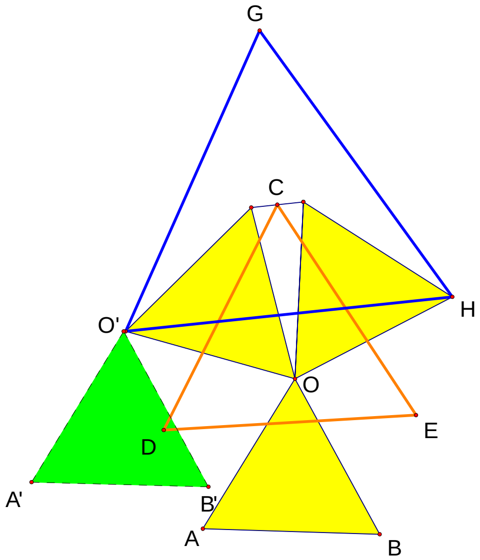
圖（四十二）

以上結果我們證明如下：

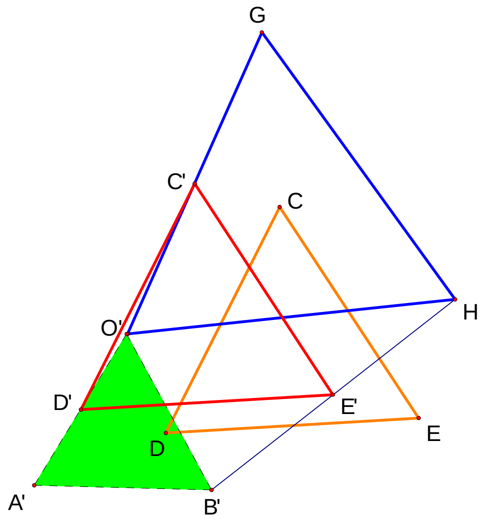
（1）只要兩相似三角形的對應邊都相互平行，如圖（四十三），則無論兩相似三角形如何平移，其相對應頂點的等比例連線的相似三角形面積都會相等，如同一個上下底面相互平行的柱體，無論上下底面如何平移，其中點的切面面積永遠會相等。所以在證明過程中可以將三角形平移至較好計算的位置而進行演算。



圖（四十三）



圖（四十四）



圖（四十五）

（2）如圖（四十四），令$\angle O'OA$與$\angle HOB$分別爲$\angle a$與$\angle b$，正ΔOAB的邊長爲r，我們想用$\angle a$，$\angle b$與r，來表出正ΔCDE的邊長。

將正ΔOAB平移成爲$\Delta O'A'B'$，已知中點連線面積將不會改變，

所以原本要計算的面積從ΔCDE變成了圖（四十五）的$\Delta C'D'E'$。

我們要利用餘弦定理來計算$C'D'$的邊長，所以需要：

正$\Delta GO'H$的邊長，正ΔOAB的邊長和$\angle C'O'D'$。其中正ΔOAB的邊長設爲r，剩下兩個條件爲以下我們想要求出的。

〈第一步〉正$\Delta GO'H$的邊長：

$\Delta OO'H$中，$\overline{O'H}^2 = r^2+r^2-2r^2\cos(300^\circ-a-b) = 2r^2-2r^2\cos(a+b+60^\circ)$

〈第二步〉求出$\overline{C'D'}$的長：

因爲$\Delta OO'H$爲一等腰三角形，所以，$\angle OO'H = \angle OHO' = \dfrac{a+b}{2}-60^\circ$

延長$\overline{O'B'}$，交$\overline{OA}$於J，因爲$\overline{OA}//\overline{O'A'}$，所以$\angle O'JO = \angle JO'A' = 60^\circ$。

在$\Delta O'JO$中，因爲內角和 180 度，所以，$\angle OO'J = 180^\circ - a - 60^\circ = 120^\circ - a$。

$\angle GO'A = 360 - (\angle GO'H + \angle A'O'B + \angle OO'H + \angle OO'J)$

$$= 60 + 60 + \frac{a+b}{2} - 60 + 120 - a = 180 + \frac{b-a}{2}$$。

由餘弦定理，

$$\overline{C'D'}^2 = (\frac{\overline{GO'}}{2})^2 + (\frac{r}{2})^2 - 2(\frac{\overline{GO'}}{2})(\frac{r}{2})\cos(180 + \frac{b-a}{2})$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos(a+b+60^\circ) + (\frac{r}{2})^2 + (\sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(a+b+60^\circ)})(\frac{r}{2})\cos(\frac{b-a}{2})$$

所以 APT 中，各頂點連線中點之正三角形的邊長 R 爲：

$$R^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos(a+b+60^\circ) + (\frac{r}{2})^2 + (\sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(a+b+60^\circ)})(\frac{r}{2})\cos(\frac{b-a}{2})$$ 。

由上式可得

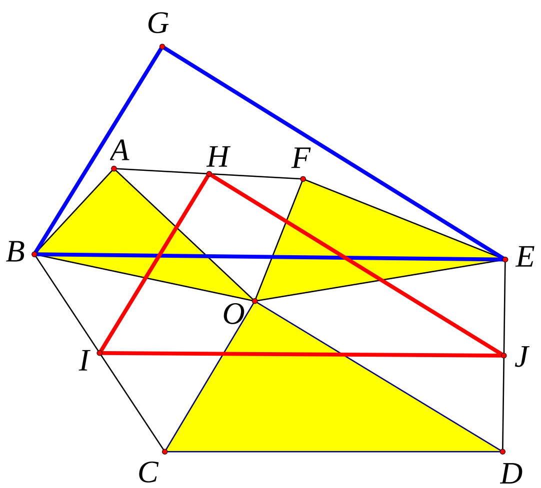
當$\angle a = \angle b = 60^\circ$時，$R = \frac{3}{2}r$，正$\Delta CDE$的面積有最大值$\frac{9\sqrt{3}}{16}r^2$。

當$\angle a = \angle b = 0^\circ$時，$R = r$，正$\Delta CDE$的面積有最小值$\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$。

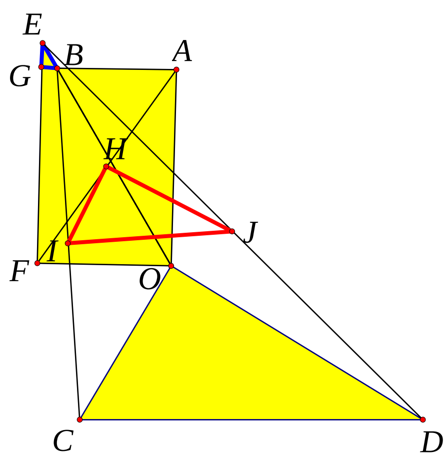
當三個相似三角形的情形也是類似。

當$\angle BOC$爲 180 度時，ΔHIJ的面積有最大值。如圖（四十五）。

當$\angle BOC$爲 0 度時，ΔHIJ的面積有最小值。如圖（四十六）。



圖（四十五）



圖（四十六）

伍、研究結果

在這篇報告中，我們探討了：

一、利用三角函數的方法，證明了全等正三角形之 APT。

二、利用平面幾何的方法，證明了全等正三角形之 APT，相似正三角形，全等三角形和相似三角形之 APT。

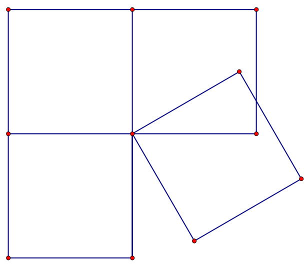
三、從空間觀點來證明關於正方形之類似性質。

四、從空間觀點來證明 APT。

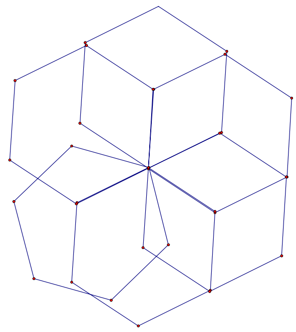
五、探討 APT 之極值問題。

陸、討論

（一）、在平面上欲以同一多邊形構成交於一點且其餘各頂點不接觸的圖形，且可探討其相關於 APT 的情況，則只有三角形符合規則。



圖（四十六）



圖（四十七）

因爲可平分一個周角的形狀只有正三角形、正方形以及正六邊形，但是其中的正方形及正六邊形無法滿足條件。

正方形在組成的條件下需四個正方形才可在頂點連線中取得四個新頂點，但使用了四個正方形則無法旋轉。如圖（四十六）。

正六邊形需六個正六邊形才可以取得六個新頂點，但六個正六邊形的角度和超過 360° ，故亦不討論。如圖（四十七）。

（二）我們發現其實「正三角形之 APT」只是其中的一個特例而已。該葛登能的文章中尚有一些更一般性的性質，目前我們還未能加以證明。

（三）工作的最後階段，我們在「三角形－從全等到相似」這本書中，看到「愛可爾斯定理」：

若 $\Delta A_1B_1C_1$ 和 $\Delta A_2B_2C_2$ 都是正三角形（兩三角形頂點繞向相同），則 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{B_1B_2}$ 和 $\overline{C_1C_2}$ 的中點 A，B 和 C 也構成正三角形。

我們的部分結果可以看成是這個定理的推廣，並且 APT 似乎也跟這個定理有關連，在我們的證明過程中，其實也有用到這個定理。

柒、參考資料

1、「打開魔術箱」　葛登能（Martin Gardner）著　遠流出版社

2、「THE ASYMMETRIC PROPELLER」 L. BANKOFF　P. ERDOS　M. KLAMKIN

3、高中數學　第二、三冊課本　余文卿 教授 主編　翰林出版社

4、「三角形－從全等到相似」　沈文選 冷崗松 編著　九章出版社

【評語】040401

1、 本作品探討一系列十分具有視覺含意的幾何命題，此題可以透過綜合幾何、向量、複數、坐標等方法來解決，可用來展示平面幾何多采多姿的解題方法。這個題目並且具有正多邊形、相似三角形及立體幾何等多方面的推廣。

2、 當前動能幾何軟體的功能雖然彼此互相等價，然而本題目若使用 Cabri Geometry 及 Cabri 3D，其作圖步驟會比使用 Geometer's Sketchpad 更為敏捷，建議作者進行比較。

3、 Leon Bankoff 對於此系列問題曾經作過深入研究，建議作者把握網路資源透過 jstor.org 查詢相關論文。