

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 物理科

第三名

040118

豆振靠邊站—顆粒垂直振盪後分佈關係

學校名稱：國立臺中女子高級中學

作者： 高二 張乃文 高二 許伊婷	指導老師： 林新財
-------------------------	--------------

關鍵詞：垂直振盪、同步運動、碰撞

摘要

在一個只能容納一層顆粒的圓形水平容器內裝入兩種不同的顆粒並均勻混合，鉛直振盪一固定時間，觀察兩種顆粒的分離程度。實驗分成兩組，第一組探討不同的頻率和振幅與分離程度之間的關係；第二組則選擇不同質量比、體積比、密度比和恢復係數比的顆粒來探討其與分離程度之間的關係。由分析顆粒的運動軌跡，發現兩種顆粒的分離與否是與顆粒之間的運動是否同步有關。

壹、研究動機

在學習高二物理「碰撞」單元的時候，老師播放了有名的「巴西堅果實驗」影片給我們看：在一個容器裡裝入許多的小顆粒並在底層放一大顆粒，使之鉛直振盪會發現大顆粒不斷的運動向上。類似的實驗包括在鉛直單層容器內放入兩種不同但數目相同的顆粒使之振盪。我們想要了解是否以水平單層容器振盪也會有分離現象，其現象又為何？於是我們展開了這個專題的研究與探討。

貳、研究目的

- 一、觀察水平單層容器內的兩種顆粒在鉛直振盪時何種狀況下會自動分離
- 二、整理並歸納出兩種球之質量比、體積比、恢復係數比和振動之頻率和振幅與分離程度之關係
- 三、探討顆粒間的不同運動與分離現象的關係

參、研究設備及器材

一、實驗顆粒

如圖(一)

如表(一)



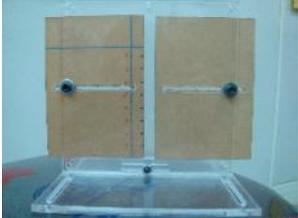
圖(一)

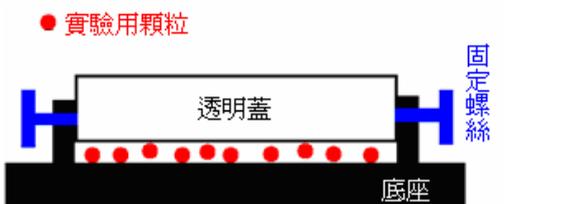
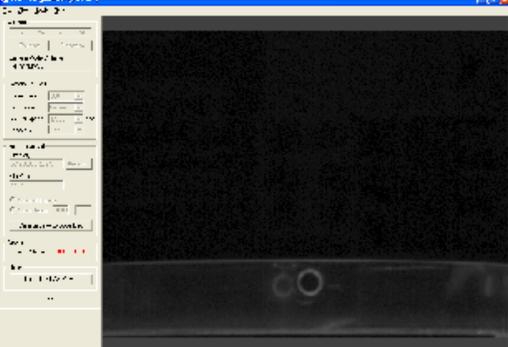
表(一)

顆粒	質量(g)	直徑(cm)	體積(cm ³)	密度(g/cm ³)	恢復係數
1 號	0.126	0.44	0.045	2.8	0.316
2 號	0.371	0.44	0.045	8.24	-----
3 號	0.469	0.44	0.045	10.42	0.098
4 號	0.167	0.44	0.045	3.71	0.330
5 號	0.285	0.59	0.107	2.66	0.212
6 號	0.112	0.59	0.107	1.05	0.450
7 號	0.382	0.59	0.107	3.57	0.255
8 號	0.882	0.59	0.107	8.24	0.168
9 號	0.712	0.79	0.258	2.76	-----
10 號	0.575	0.79	0.258	2.23	0.276
11 號	0.128	0.57	0.097	1.32	0.392

二、實驗裝置器材(如表(二))

表(二)

<p>(一) 垂直振盪(S.H.M)座</p>  <p>圖(二)</p>	<p>(二) 電源放大器</p>  <p>圖(三)</p>
<p>(三) 信號產生器</p>  <p>圖(四)</p>	<p>(四) 示波器</p>  <p>圖(五)</p>
<p>(五) 電量放大器</p>  <p>圖(六)</p>	<p>(六) 恢復係數測量容器(自行組裝)</p>  <p>圖(七)</p>
<p>(七) 振動容器</p>	

 <p>圖(八)</p>	 <p>圖(九)</p>
<p>(八) 高速攝影機</p>	<p>(九) 同步運動觀察容器(自行組裝)</p>
 <p>圖(十)</p>	 <p>圖(十一)</p>
<p>(十) 記錄高速攝影軟體 FIMS 3.0</p>	<p>(十一) 記錄同步運動軌跡 TEMA2.6</p>
 <p>圖(十二)</p>	 <p>圖(十三)</p>

肆、研究過程或方法

一、實驗原理：

當兩種顆粒的運動彼此不同步，發生碰撞後會產生排斥力而導致分離。

二、實驗方法

(一)觀察體積相同、質量不同、恢復係數比值差異大的兩種顆粒在不同頻率及振幅下的分離現象：取 1 號顆粒與 3 號顆粒，改變頻率及振幅，鉛直振盪，觀察各組實驗中兩種顆粒的分離現象

- 1.控制 1 號顆粒與 3 號顆粒的數量皆 200 顆，置於振動容器中，混合均勻
- 2.控制容器高度為顆粒 1.5 倍直徑
- 3.將容器固定於鉛直振動器上
- 4.以訊號產生器、電源放大器、電量放大器、示波器改變鉛直振動器的頻率與

振幅

5.鉛直振盪，觀察各組中兩種顆粒的分離狀況，每分鐘記錄一次，共記錄五次

(二)觀察質量相同、體積不同、恢復係數比值差異小的兩種顆粒在不同頻率及振幅下的分離現象：取 1 號顆粒與 11 號顆粒，改變頻率及振幅，鉛直振盪，觀察各組實驗中兩種顆粒的分離現象

- 1.控制 1 號顆粒與 11 號顆粒的數量皆 150 顆，置於振動容器中，混合均勻
- 2.控制容器高度約為 1 號顆粒 1.8 倍直徑(約為 11 號顆粒 1.3 倍直徑)
- 3.將容器固定於鉛直振動器上
- 4.以訊號產生器、電源放大器、電量放大器、示波器改變鉛直振動器的頻率與振幅

5.鉛直震盪，觀察各組中兩種顆粒的分離現象，每分鐘記錄一次，共記錄五次

(三)探討不同質量、體積、恢復係數比對分離現象的影響：以特定頻率與振幅，將兩種顆粒做鉛直振盪，觀察各組實驗中兩種顆粒的分離現象

- 1.控制各組實驗中，兩種顆粒數量相同，置於振動容器中，混合均勻
- 2.若兩種顆粒體積相同，控制容器高度為顆粒 1.5 倍直徑；若兩種顆粒體積不同，控制容器高度使兩種顆粒皆有充足的振動高度，且不發生重疊情形
- 3.將振動容器固定於鉛直振動器上
- 4.以訊號產生器、電源放大器、電量放大器、示波器固定振幅並分別在頻率 40、50、60Hz 下實驗
- 5.鉛直震盪，觀察各組中兩種顆粒的分離狀況，每分鐘記錄一次，共記錄五次

(四)探討兩種顆粒在振動時的同步運動情形是否與造成分離有關

- 1.取兩種顆粒置入同步運動觀察容器內使其振動
- 2.以高速攝影機記錄
- 3.取其鉛直振動軌跡，將結果製成圖表並討論是否有同步現象

(五)數據處理

- 1.恢復係數：在恢復係數測量容器內使實驗顆粒自由落下，取其反彈高度與初高度的比值，求出恢復係數。
- 2.分離係數(以下皆以「S」表示)：取每一顆粒，以其直徑 1.5 倍距離為範圍，計算有幾顆同種顆粒與異種顆粒(以圓心為準)，凡遇同種顆粒加一、異種顆粒減一，可得每顆顆粒有一數值，數值越接近零則越接近均勻分佈。將同種顆粒

的數值平均即是此種顆粒的分離係數，最後將同時振動的兩種顆粒的分離係數取絕對值相加，即得此次振動的分離係數。

3.同步程度(以下皆以「 C_A 」表示 A 顆粒與 A 顆粒間的同步程度)：用程式計算，若兩種顆粒之鉛直軌跡越相近(即越同步)則其值越大。最大值為一，最小值為負一。

伍、研究結果

一、實驗一 觀察體積相同、質量不同、恢復係數比值差異大的兩種顆粒(1 號和 3 號顆粒各 200 顆)在不同頻率及振幅下的分離現象

(一)實驗觀察結果與分離係數如表(三)， f 為頻率， A 為振幅，見圖(一二一)(一二二)

註 頻率與振幅範圍選擇：

1. 頻率小於 60Hz 無法產生均勻振動，大於 80Hz 振動太劇烈
2. 較小振幅易受實驗裝置傾斜所影響而造成誤差，使較重的 3 號顆粒受重力影響而與 1 號顆粒分離，因此調大振幅使重力的影響減小

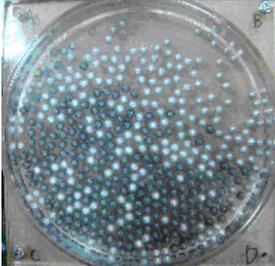
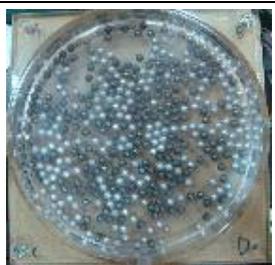
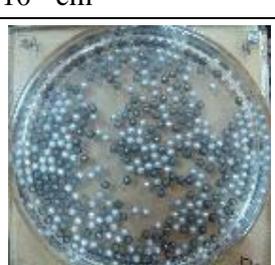
表(三)

f(Hz) \ A(cm)	60	65	70	75	80
2×10^{-2}			未均勻振動	略分離	
3×10^{-2}			略分離 $S=1.15$	明顯分離	
4×10^{-2}	略分離	明顯分離	明顯分離 $S=1.48$	明顯分離	明顯分離
5×10^{-2}	略分離 $S=1.1$	稍微分離 $S=1.31$	明顯分離 $S=1.95$	明顯分離 $S=1.75$	略分離 $S=0.75$
6×10^{-2}			略分離 $S=0.85$	略分離	
7×10^{-2}			未分離 $S=0.24$	振動太劇烈	

(二)實驗現象與分離係數如表(四)

表(四)

$f=70\text{Hz}$		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數

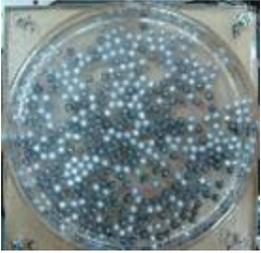
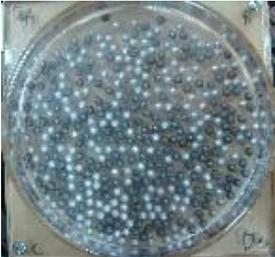
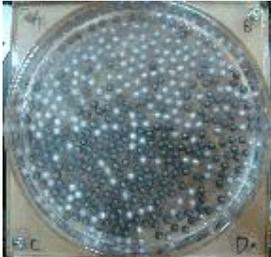
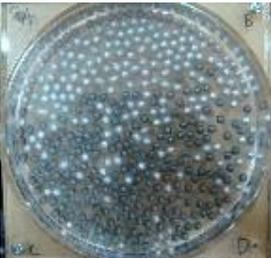
$A=3 \times 10^{-2} \text{ cm}$		
 <p data-bbox="420 433 537 466">圖(十四)</p>	 <p data-bbox="856 433 973 466">圖(十五)</p>	S=1.15
$A=4 \times 10^{-2} \text{ cm}$		
 <p data-bbox="420 791 537 823">圖(十六)</p>	 <p data-bbox="856 791 973 823">圖(十七)</p>	S=1.48
$A=5 \times 10^{-2} \text{ cm}$		
 <p data-bbox="420 1148 537 1181">圖(十八)</p>	 <p data-bbox="856 1148 973 1181">圖(十九)</p>	S=1.95
$A=6 \times 10^{-2} \text{ cm}$		
 <p data-bbox="420 1506 537 1539">圖(二十)</p>	 <p data-bbox="856 1506 973 1539">圖(二十一)</p>	S=0.85
$A=7 \times 10^{-2} \text{ cm}$		
		S=0.24

圖(二十二)	圖(二十三)	
--------	--------	--

(三)觀察發現，若固定 $f=70\text{Hz}$ 及 75Hz 時，分離現象會隨振幅的增加而漸趨明顯，但到一定程度後($A=5*10^{-2}\text{ cm}$)，分離便漸不明顯，而 f 比 70Hz 小和比 75Hz 大則分離均不明顯，因此此現象不顯著

(四) 實驗現象與分離係數如表(五)

表(五)

$A=5*10^{-2}\text{ cm}$		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
$f=60\text{Hz}$		
 圖(二十四)	 圖(二十五)	$S=1.15$
$f=65\text{Hz}$		
 圖(二十六)	 圖(二十七)	$S=1.31$
$f=70\text{Hz}$		
 圖(二十八)	 圖(二十九)	$S=1.95$
$f=75\text{Hz}$		
 圖(三十)	 圖(三十一)	$S=1.75$

圖(三十)	圖(三十一)	
f=80Hz		
		S=0.75
圖(三十二)	圖(三十三)	

(五)若以固定振幅來看，於 $A=4 \times 10^{-2}$ cm 及 5×10^{-2} cm 時分離程度有隨頻率增加先漸大而後漸小的情況，大於 5×10^{-2} cm 小於 4×10^{-2} cm 則因分離均不明顯而無此現象

(六)當 $f=70\text{Hz}$; $A=5 \times 10^{-2}$ cm 時有最明顯分離

二、實驗二 觀察質量相同、體積不同、恢復係數比值差異小的兩種顆粒(1 號與 11 號顆粒各 150 顆)在不同頻率及振幅下的分離現象

(一)研究結果製表簡要如表(六)(f 為頻率(Hz); A 為振幅(cm))：

表(六)

A(cm) \ f(Hz)	60	70	80
2×10^{-2}		X(無法均勻振動)	
3×10^{-2}		未分離	
4×10^{-2}		未分離	
5×10^{-2}	未分離	未分離	11 號有群聚現象
6×10^{-2}		未分離	
7×10^{-2}		略有分離	

(二)分離情況如圖(三十四)至圖(三十九)所示：

f=70Hz; A= 3×10^{-2} cm



圖(三十四)

f=70Hz; A= 4×10^{-2} cm



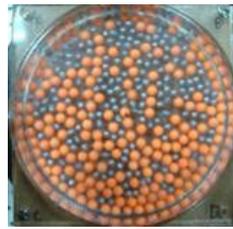
圖(三十五)

f=70Hz; A= 5×10^{-2} cm

f=70Hz; A= 7×10^{-2} cm



圖(三十六)
f=60Hz; A=5*10⁻² cm



圖(三十七)
f=80Hz; A=5*10⁻² cm



圖(三十八)



圖(三十九)

(三) 11 號顆粒和 1 號顆粒在任何頻率及振幅下均未有明顯分離的現象，但 11 號顆粒會在最外層形成一圈。

三、實驗三 探討不同質量、體積、恢復係數比值對分離現象的影響

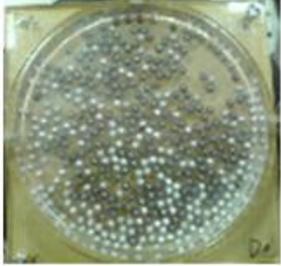
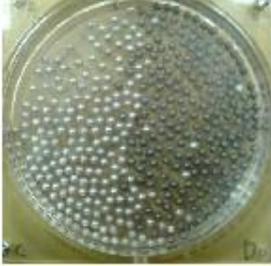
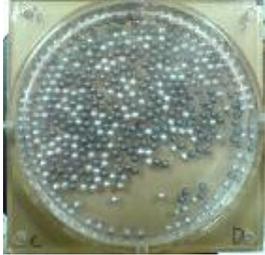
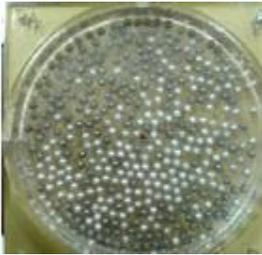
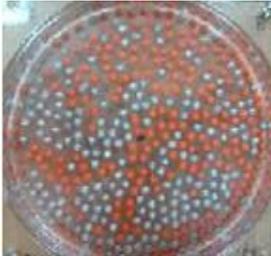
表(七)

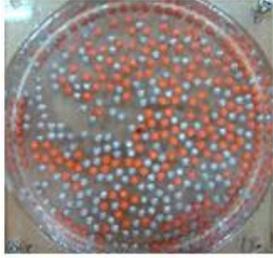
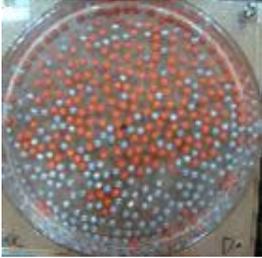
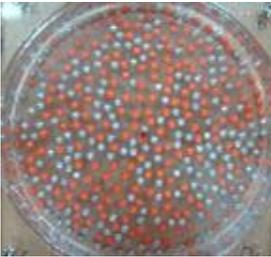
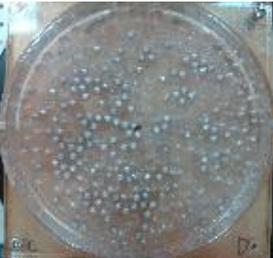
組別	質量比值	體積比值	恢復係數比值
A	3.722(3 號/1 號)	1.000	3.224(1 號/3 號)
B	1.325(4 號/1 號)	1.000	1.044(4 號/1 號)
C	2.262(5 號/1 號)	1.341(5 號/1 號)	1.491(1 號/5 號)
D	1.125(1 號/6 號)	1.341(6 號/1 號)	1.424(6 號/1 號)
E	3.032(7 號/1 號)	1.341(7 號/1 號)	1.239(1 號/7 號)
F	7.000(8 號/1 號)	1.341(8 號/1 號)	1.881(1 號/8 號)
G	4.563(10 號/1 號)	1.795(10 號/1 號)	1.145(1 號/10 號)
H	1.016(11 號/1 號)	1.295(11 號/1 號)	1.241(11 號/1 號)
I	1.646(3 號/5 號)	2.378(5 號/3 號)	2.163(5 號/3 號)
J	1.228(3 號/7 號)	2.378(7 號/3 號)	2.602(7 號/3 號)

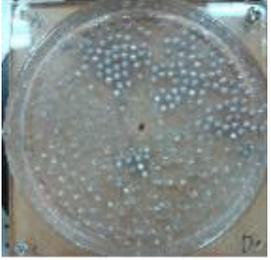
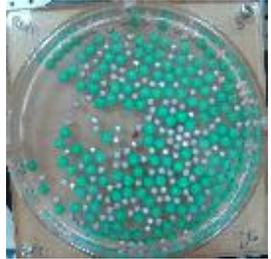
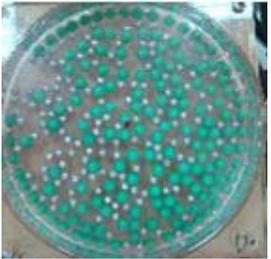
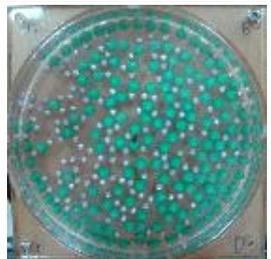
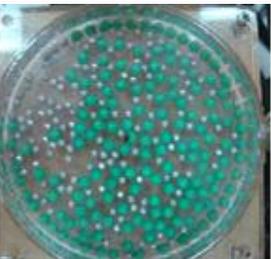
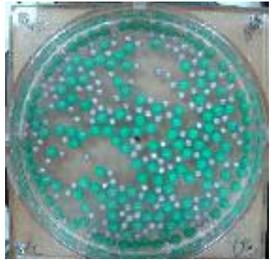
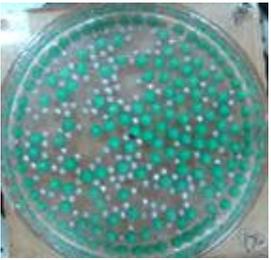
(一) 分離狀況如表(八)所示

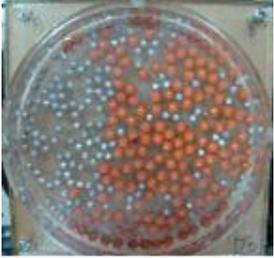
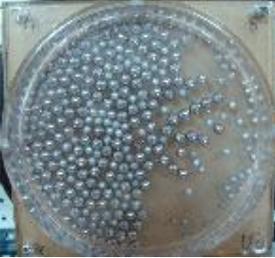
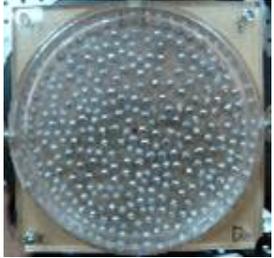
表(八)

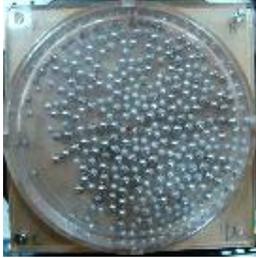
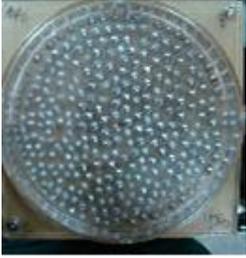
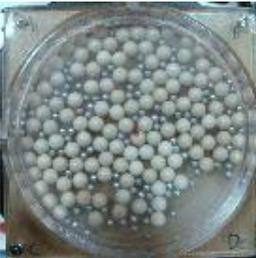
A 組	1 號及 3 號顆粒	
f= 40Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數

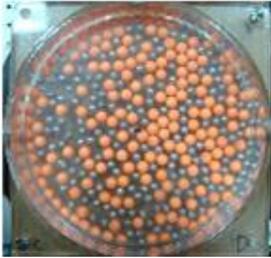
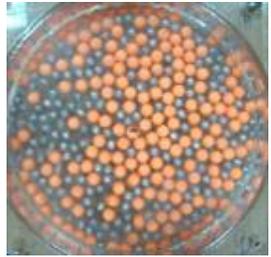
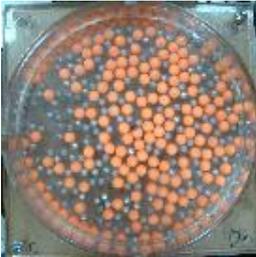
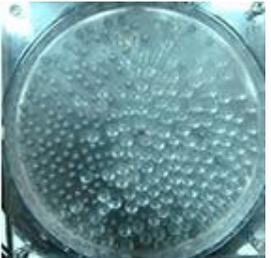
		S=3.93
圖(四十)	圖(四十一)	
f= 50Hz		
		S=2.57
圖(四十二)	圖(四十三)	
f= 60Hz		
		S=1.19
圖(四十四)	圖(四十五)	
B 組	1 號及 4 號顆粒	
f= 40Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=1.29
圖(四十六)	圖(四十七)	
f= 50 Hz		

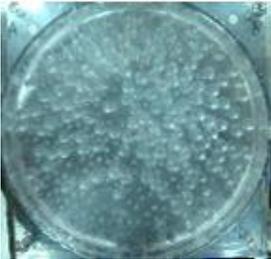
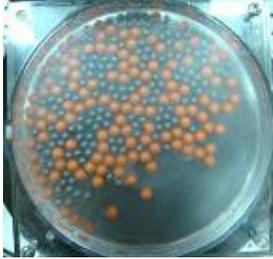
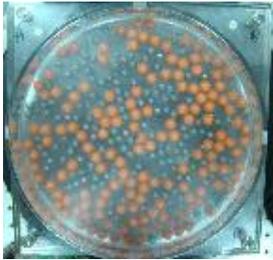
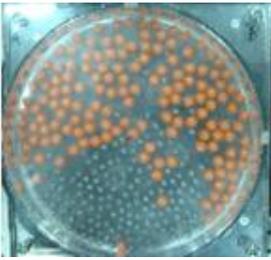
		S=0.80
圖(四十八)	圖(四十九)	
f= 60 Hz		
		S=0.63
圖(五十)	圖(五十一)	
C 組	1 號及 5 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=1.18
圖(五十二)	圖(五十三)	
f= 50 Hz		
		S=2.25
圖(五十四)	圖(五十五)	
f= 60 Hz		

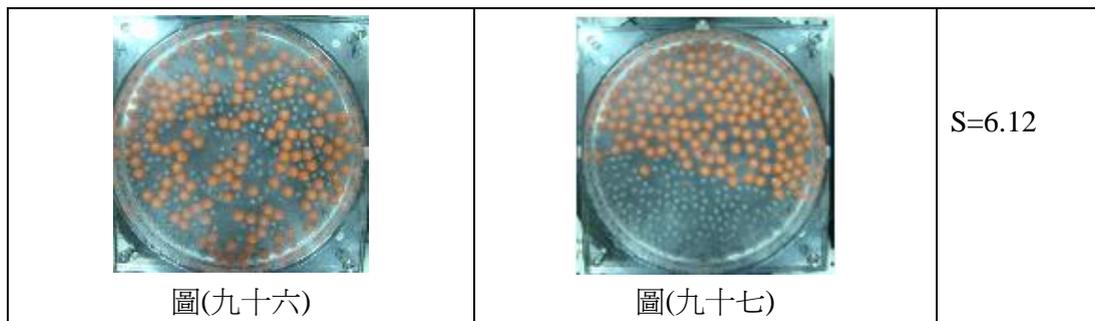
		S=4.46
圖(五十六)	圖(五十七)	
D 組	1 號及 6 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=0.40
圖(五十八)	圖(五十九)	
f= 50 Hz		
		S=0.64
圖(六十)	圖(六十一)	
f= 60 Hz		
		S=0.66
圖(六十二)	圖(六十三)	
E 組	1 號及 7 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數

		S=3.21
圖(六十四)	圖(六十五)	
f= 50 Hz		
		S=3.79
圖(六十六)	圖(六十七)	
f= 60 Hz		
		S=4.57
圖(六十八)	圖(六十九)	
F 組	1 號及 8 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=2.75
圖(七十)	圖(七十一)	
f= 50 Hz		

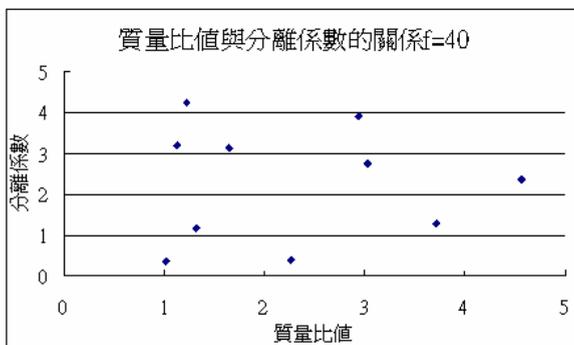
		S=3.38
圖(七十二)	圖(七十三)	
G 組	1 號及 10 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=2.75
圖(七十四)	圖(七十五)	
f= 50 Hz		
		S=3.15
圖(七十六)	圖(七十七)	
f= 60 Hz		
		S=1.88
圖(七十八)	圖(七十九)	
H 組	1 號及 11 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數

		S=0.36
圖(八十)	圖(八十一)	
f= 50 Hz		
		S=0.72
圖(八十二)	圖(八十三)	
f= 60 Hz		
		S=2.29
圖(八十四)	圖(八十五)	
I 組	3 號及 5 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=3.15
圖(八十六)	圖(八十七)	
f= 50 Hz		

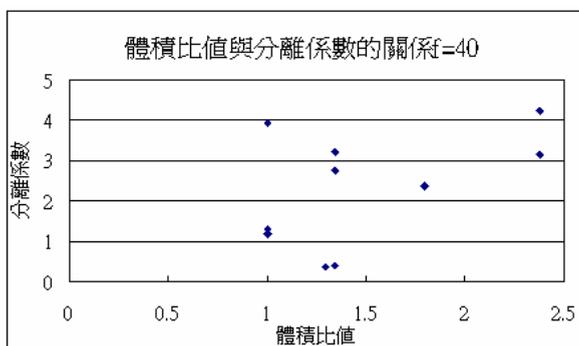
		S=3.45
圖(八十八)	圖(八十九)	
f= 60 Hz		
		S=2.84
圖(九十)	圖(九十一)	
J 組	3 號及 7 號顆粒	
f= 40 Hz		
初始狀況	五分鐘後狀況	分離係數
		S=4.25
圖(九十二)	圖(九十三)	
f= 50 Hz		
		S=5.95
圖(九十四)	圖(九十五)	
f= 60 Hz		



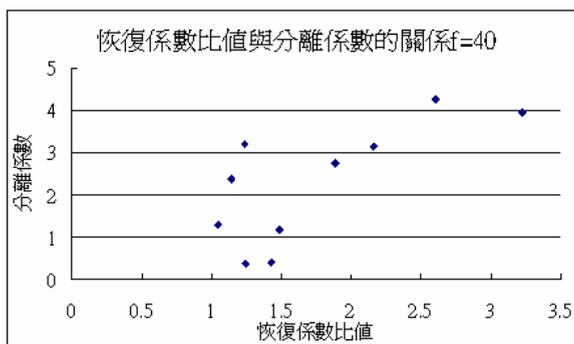
(二) $f = 40 \text{ Hz}$



圖(九十八)

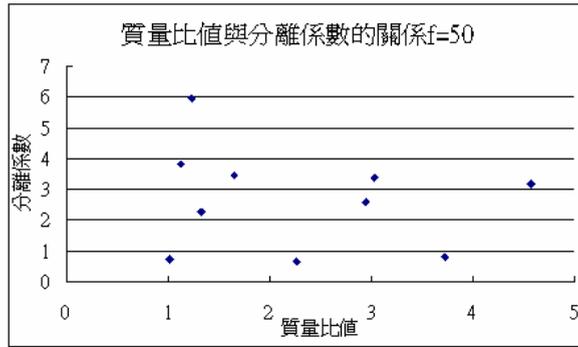


圖(九十九)

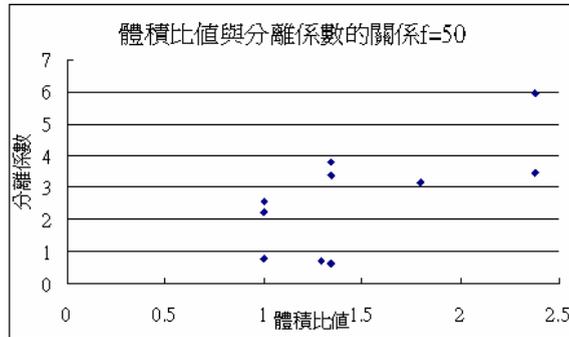


圖(一〇〇)

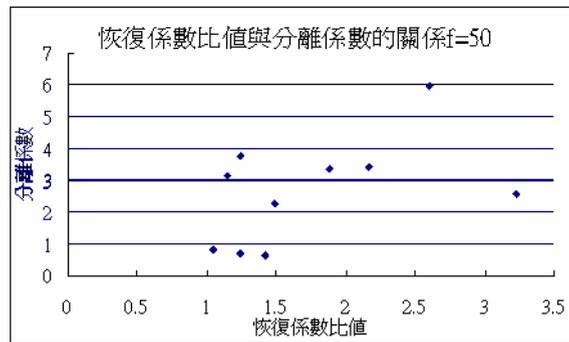
(三) $f = 50 \text{ Hz}$



圖(一〇一)

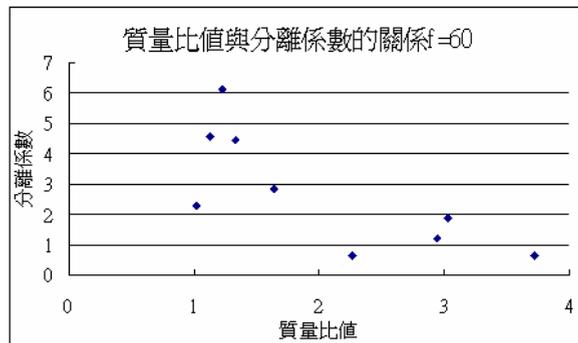


圖(一〇二)

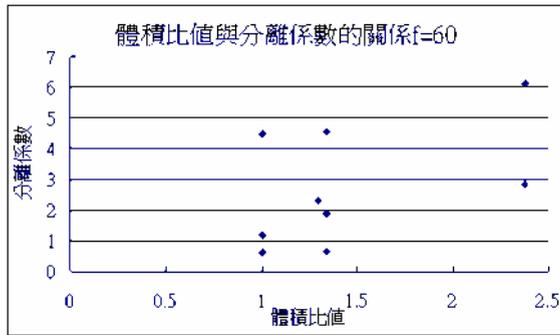


圖(一〇三)

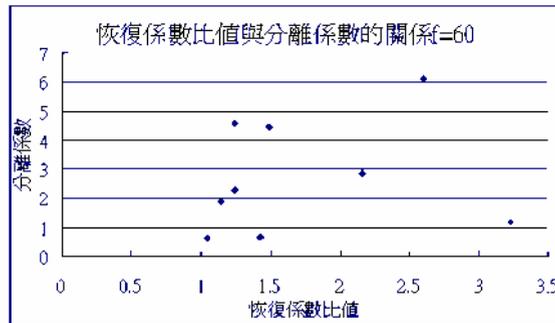
(四) $f = 60 \text{ Hz}$



圖(一〇四)



圖(一〇五)



圖(一〇六)

(五)結果顯示，在 $f = 40, 50, 60\text{Hz}$ 下，質量比值與分離係數的關係圖沒有明顯趨勢，如圖(九十八)(一〇一)(一〇四)

(六)結果顯示，在 $f = 40, 50, 60\text{Hz}$ 下，體積比值與分離係數的關係圖沒有明顯趨勢，如圖(九十九)(一〇二)(一〇五)

(七)結果顯示，在 $f = 40, 50, 60\text{Hz}$ 下，恢復係數比值越大，分離係數大致也會跟著增加，如圖(一〇〇)(一〇三)(一〇六)

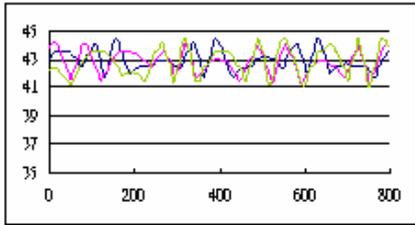
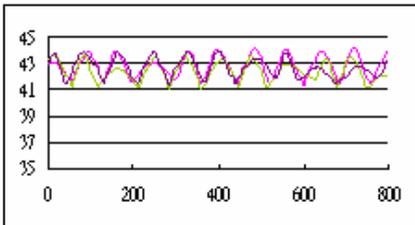
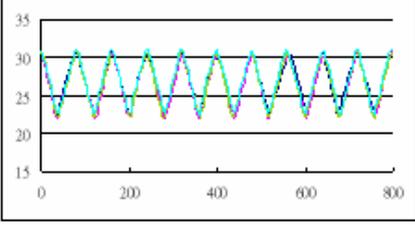
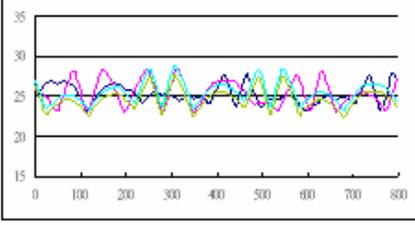
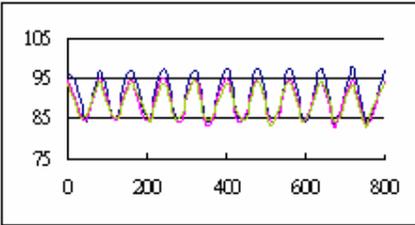
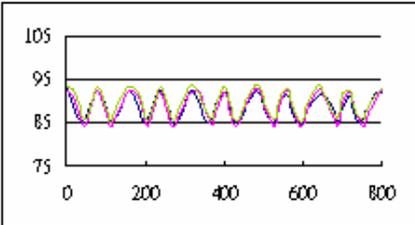
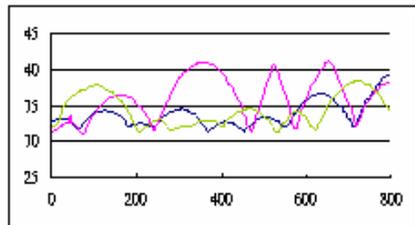
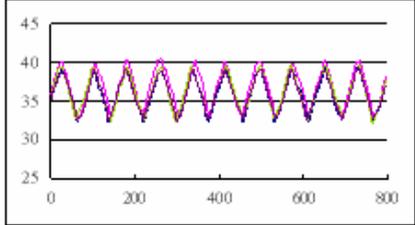
四、實驗四：探討兩種顆粒在振動時的運動情形

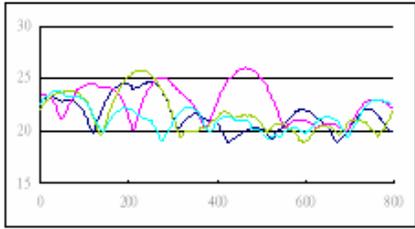
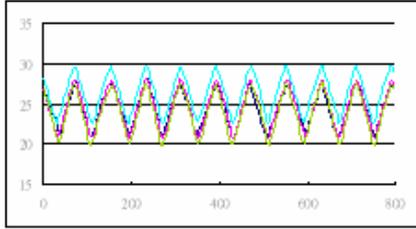
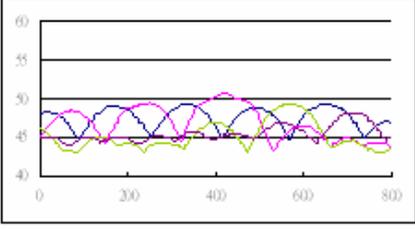
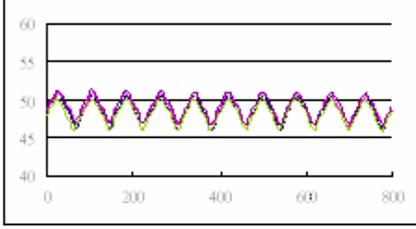
(一)軌跡對時間作圖與同步程度如表(九)

(縱軸為鉛直位移，每一單位為 0.04cm ；橫軸為時間，每一單位為 $1/4000$ 秒)

表(九)

	A 組 1 號顆粒	A 組 3 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對時間作圖			$S=2.57$
			同步程度差值
			$ C_1-C_3 = 0.54$

	圖(一〇七)	圖(一〇八)	
同步程度	$C_1=0.97$	$C_3=0.43$	
	B 組 1 號顆粒	B 組 4 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=0.80$
			同步程度差 值
			$ C_1-C_4 $ $=0.28$
	圖(一〇九)	圖(一一〇)	
同步程度	$C_1=0.44$	$C_4=0.72$	
	C 組 1 號顆粒	C 組 5 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=2.25$
			同步程度差 值
			$ C_1-C_5 $ $=0.50$
	圖(一一一)	圖(一一二)	
同步程度	$C_1=0.99$	$C_5=0.49$	
	D 組 1 號顆粒	D 組 6 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=0.64$
			同步程度差 值
			$ C_1-C_6 $ $=0.01$
	圖(一一三)	圖(一一四)	
同步程度	$C_1=0.97$	$C_6=0.98$	
	E 組 1 號顆粒	E 組 7 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=3.79$
			同步程度差 值
			$ C_1-C_7 $ $=0.58$

	圖(一一五)	圖(一一六)	
同步程度	$C_1=0.40$	$C_7=0.98$	
	I 組 3 號顆粒	I 組 5 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=3.45$
			同步程度差 值
	$ C_3-C_5 $ $=0.52$		
	圖(一一七)	圖(一一八)	
同步程度	$C_3=0.46$	$C_5=0.98$	
	J 組 3 號顆粒	J 組 7 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=5.95$
			同步程度差 值
	$ C_3-C_7 $ $=0.85$		
	圖(一一九)	圖(一二〇)	
同步程度	$C_3=0.14$	$C_7=0.99$	

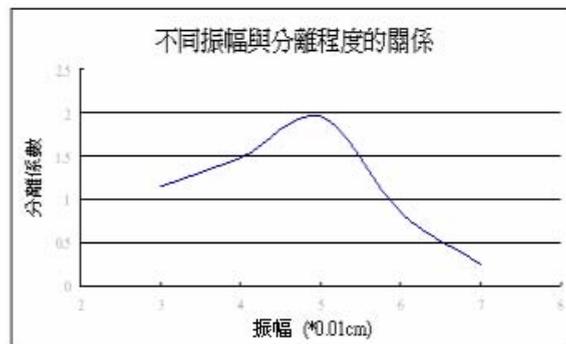
(二)由表(九)可歸納出：

- 1.兩種顆粒的同步程度數值相差越小，鉛直振動後分離係數越小
- 2.兩種顆粒的同步程度數值相差越大，鉛直振動後分離係數越大

陸、討論

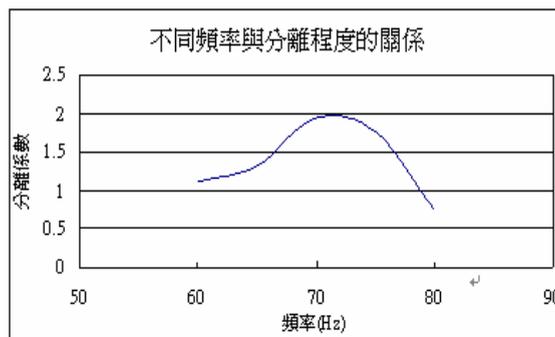
一、實驗一 觀察體積相同、質量不同、恢復係數比值差異大的兩種顆粒在不同頻率及振幅下的分離現象

(一)不同振幅與分離程度的關係如圖(一二一)所示



圖(一二一)

(二) 不同頻率與分離程度的關係如圖(一二二)所示



圖(一二二)

(三)由觀察結果可知，在特定頻率($70\text{Hz} < f < 75\text{Hz}$)或振幅($4 \times 10^{-2}\text{cm} < A < 5 \times 10^{-2}\text{cm}$)下分離狀況會特別明顯，因此我們認為在體積相同、質量不同、恢復係數比值差異大的情況下，頻率和振幅都是影響分離現象的關鍵因素之一。

二、實驗二 觀察質量相同、體積不同、恢復係數比值差異小的兩種顆粒在不同頻率及振幅下的分離現象

(一)由觀察結果發現，此兩種顆粒不論在何種頻率與振幅下都沒有明顯分離現象，因此我們認為在質量相同、體積不同、恢復係數比值差異小的情況下，頻率和振幅並非影響分離現象的關鍵因素。

(二)由(一)可得知尚有其他因素影響分離情況，而此因素比頻率和振幅更容易影響分離。實驗一、二相較之下無法得出是質量、體積或恢復係數扮演此一角色，故進行實驗三來探討。

三、實驗三 探討不同質量、體積、恢復係數比對分離現象的影響

(一)利用動量及能量守恆求出恢復係數，並將恢復係數代入可得以下方程式

$$\text{恢復係數} = \frac{v - v_p}{u - u_p} \quad \text{---①}$$

$$v = u - \frac{M}{M+m} (1 + e)(u_p - u) \quad \text{---②}$$

[e 表恢復係數， M 表容器質量(相對於顆粒為 ∞)， m 表顆粒質量， u 表顆粒碰撞容器前速度， u_p 表容器碰撞顆粒前速度， v 表顆粒碰撞容器後速度， v_p 表容器碰撞顆粒後速度]

由此方程式可知恢復係數與速度成負相關性，而速度的大小決定經過一定時間後的行進位移(假設尚未碰到容器頂部)，速度相差越大代表位移差越大，斜向碰撞就越明顯，此時會分離。

(二)觀察結果顯示，在 $f = 40, 50, 60\text{Hz}$ 下，質量比值與分離係數並沒有明顯關係，與方程式②的結果大致相符。

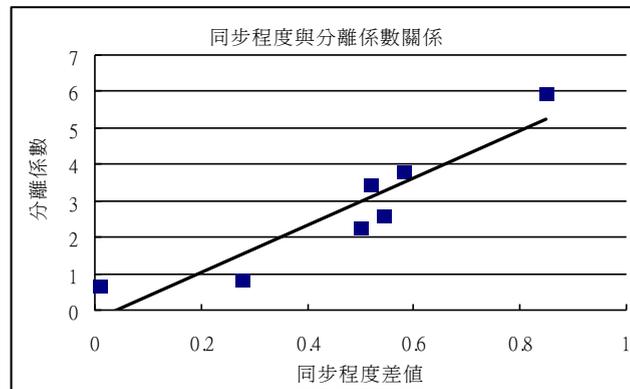
(三)觀察結果顯示，在 $f = 40, 50, 60\text{Hz}$ 下，體積比值與分離係數的關係圖雖然沒有明顯趨勢，但大致呈現相同情況。在體積比值與分離係數的關係圖中可以看出，在同樣的比值下，會同時有明顯分離和不分離的現象，推測可能有其他較顯著的因素影響。

(四)觀察結果顯示，在 $f = 40, 50, 60\text{Hz}$ 下，恢復係數比值越大，分離係數大致也會跟著增加，與方程式②的結果相符，因此我們認為恢復係數是影響分離的因素之一。

(五)推測分離並非單一因素影響，應同時受質量、體積與恢復係數控制，導致無法在單一因素圖表中獲得明顯結果。

四、實驗四 探討兩種顆粒在振動時的運動情形

(一)同步程度與分離係數關係如圖(一二三)



相關係數 = 0.924

圖(一二三)

(二)由圖(一二三)可知，兩種顆粒同步程度數值相差越小，振動後分離係數越小；兩種顆粒的同步程度數值相差越大，振動後分離係數則越大

(三)在同步程度差值很大時，有一種顆粒較為同步而另一種較不同步，故異種顆粒之間較易造成斜向碰撞，而較為同步的同種顆粒間造成之斜向碰撞則較少。較為同步的顆粒隨機聚集後即因同步振動而不易分散，故逐漸聚集。

(四)在同步差值很小時，有兩種可能狀況：

- 1.兩種顆粒之同步程度均小。此時同種顆粒與異種顆粒之間皆易產生斜向碰撞，同種與異種顆粒排斥機率均大，故同種顆粒不易聚集。
- 2.兩種顆粒之同步程度均大。此時同種顆粒與異種顆粒之間皆不易產生斜向碰撞，同種與異種顆粒排斥機率均小，因此會趨向均勻分散。

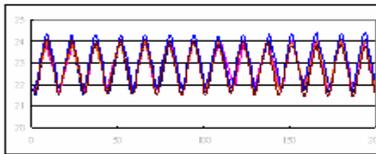
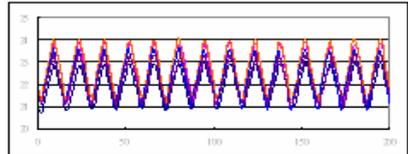
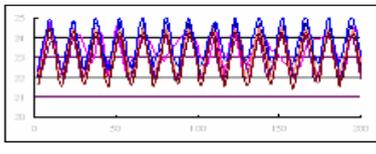
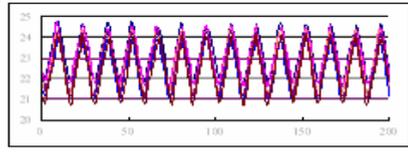
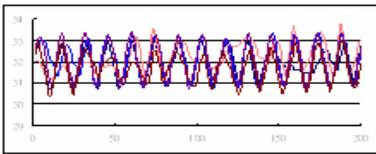
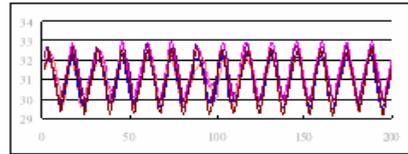
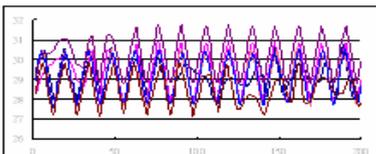
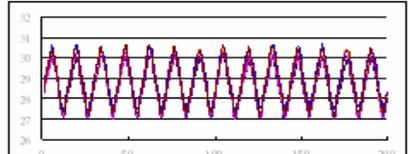
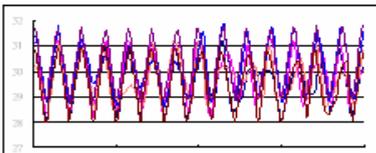
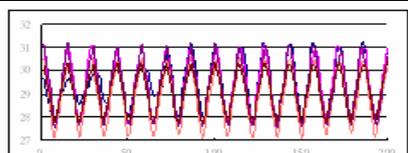
五、實驗一與實驗四綜合討論

(一)以實驗一之不同頻率與振幅觀察實驗四所述之同步現象

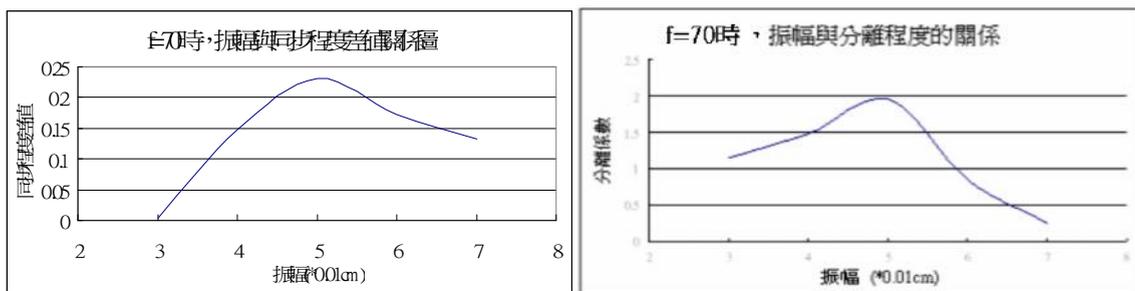
1. $f=70\text{Hz}$ 時，軌跡對時間作圖與同步程度如表(十)：

(縱軸為鉛直位移，每一單位為 0.08cm ；橫軸為時間，每一單位為 $1/1000$ 秒)

表(十)

A=3*10 ⁻² cm 鉛直軌跡對 時間作圖	1 號顆粒		3 號顆粒		分離係數
	圖(一二四)	圖(一二五)	S=1.15 同步程度差 值 C ₁ -C ₃ =0.004		
同步程度	C ₁ =0.974	C ₃ =0.978			
A=4*10 ⁻² cm 鉛直軌跡對 時間作圖	1 號顆粒		3 號顆粒		分離係數
	圖(一二六)	圖(一二七)	S=1.48 同步程度差 值 C ₁ -C ₃ =0.147		
同步程度	C ₁ =0.834	C ₃ =0.981			
A=5*10 ⁻² cm 鉛直軌跡對 時間作圖	1 號顆粒		3 號顆粒		分離係數
	圖(一二八)	圖(一二九)	S=1.95 同步程度差 值 C ₁ -C ₃ =0.231		
同步程度	C ₁ =0.723	C ₃ =0.954			
A=6*10 ⁻² cm 鉛直軌跡對 時間作圖	1 號顆粒		3 號顆粒		分離係數
	圖(一三〇)	圖(一三一)	S=0.85 同步程度差 值 C ₁ -C ₃ =0.172		
同步程度	C ₁ =0.821	C ₃ =0.993			
A=7*10 ⁻² cm 鉛直軌跡對 時間作圖	1 號顆粒		3 號顆粒		分離係數
	圖(一三二)	圖(一三三)	S=0.24 同步程度差 值 C ₁ -C ₃ =0.132		
同步程度	C ₁ =0.831	C ₃ =0.963			

2.由下圖(一三四)可以發現，同步程度差值與分離係數趨勢一致。

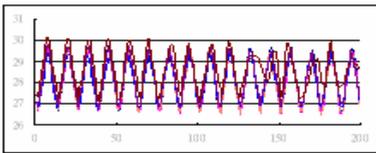
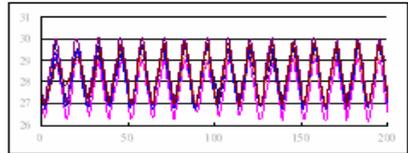


圖(一三四)

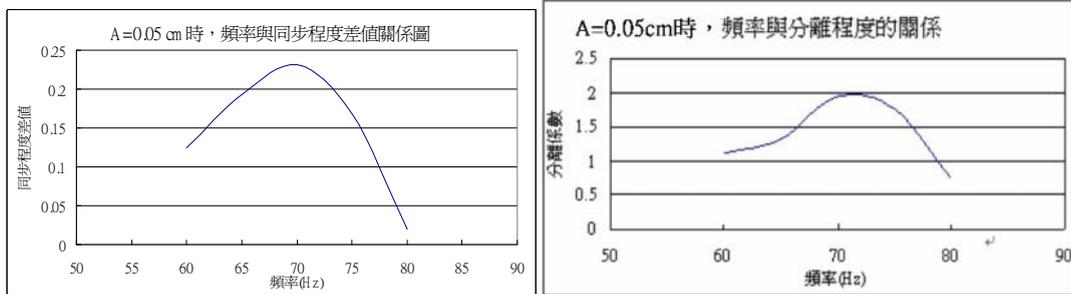
3. $A=5 \times 10^{-2}$ cm 時，軌跡對時間作圖與同步程度如表(十一)：

(縱軸為鉛直位移，每一單位為 0.08cm；橫軸為時間，每一單位為 1/1000 秒)
表(十一)

f=60Hz	1 號顆粒	3 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對時間作圖	 圖(一三五)	 圖(一三六)	S=1.1 同步程度差值 $ C_1-C_3 = 0.124$
同步程度	$C_1=0.532$	$C_3=0.656$	
f=65Hz	1 號顆粒	3 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對時間作圖	 圖(一三七)	 圖(一三八)	S=1.31 同步程度差值 $ C_1-C_3 = 0.193$
同步程度	$C_1=0.529$	$C_3=0.722$	
f=70Hz	1 號顆粒	3 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對時間作圖	 圖(一三九)	 圖(一四〇)	S=1.95 同步程度差值 $ C_1-C_3 = 0.231$
同步程度	$C_1=0.723$	$C_3=0.954$	
f=75Hz	1 號顆粒	3 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對時間作圖	 圖(一四一)	 圖(一四二)	S=1.75 同步程度差值 $ C_1-C_3 = 0.169$

同步程度	$C_1=0.812$	$C_3=0.981$	
$f=80\text{Hz}$	1 號顆粒	3 號顆粒	分離係數
鉛直軌跡對 時間作圖			$S=0.75$
	圖(一四三)	圖(一四四)	同步程度差 值
			$ C_1-C_3 $ $=0.02$
同步程度	$C_1=0.955$	$C_3=0.975$	

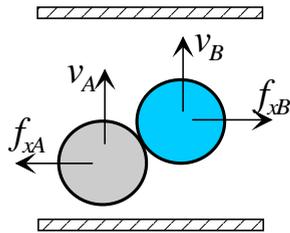
4. 由下圖(一四五)可以發現，同步程度差值與分離係數趨勢一致。



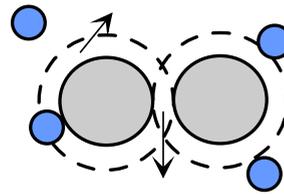
圖(一四五)

六、由實驗結果討論參考資料(一)與參考資料(二)的原理

(一)參考資料(一)中提及當兩種顆粒大小質量相同，當它們的恢復係數不同就會產生顆粒分離，這種分離是因兩種顆粒的運動彼此不同步，發生碰撞而產生排斥力所導致，見圖(一四六)



圖(一四六)



圖(一四七)

(二)參考資料(二)中提及兩種顆粒的分離是由於顆粒體積不同所產生的空乏力所造成。如圖(一四七)所示，由於小顆粒的質心不能進入大顆粒所排擠的區域，當兩個大顆粒靠在一起，這些區域就會減小而使小顆粒亂度增加。根據熱力學第二定律，系統會趨向亂度最大的狀態，因此大顆粒就會傾向靠在一起。

(三)實驗結果與參考資料(一)的推論較符合，而與資料(二)不符。由實驗三所得之體積比值與分離係數並無正相關趨勢推得體積與分離狀況沒有明顯關係，而且就實驗三 A 組顆粒(1 號和 3 號顆粒)而言，其體積相同，但卻有十分明顯的分離。故斜向碰撞扮演分離較為重要的角色。

七、根據參考資料(一)得出相同及相異處：

(一)參考資料(一)中依據不同振幅和頻率作圖可看出是否分離有明顯區塊。實驗一亦是如此。

(二)參考資料(一)中探討不同材質的顆粒與顆粒間的摩擦，而忽略其餘一切能量損耗。但我們的實驗則探討不同顆粒與容器間的摩擦。

(三)參考資料(一)中提及當兩種顆粒各自同步運動，而有相同振動週期但彼此間有不同振幅，會造成斜向碰撞而分離。我們的實驗發現當一種顆粒較為同步而另一種較不同步時，異種會有斜向碰撞而造成分離。

柒、結論

一、兩種顆粒振動，在特定頻率與振幅下會有最明顯分離現象，故頻率與振幅皆為影響分離的因素之一。

二、分離係數和質量、體積並沒有明顯的關係，分離狀況應受到許多因素的綜合影響，其中恢復係數愈大分離情況則愈明顯。

三、兩種顆粒振動時的同步狀況影響顆粒的分離情形。當兩種顆粒的同步程度相差越小，即兩種顆粒同步程度皆大或皆小時，鉛直振動後分離係數越小；當兩種顆粒的同步程度相差越大時，鉛直振動後分離係數越大。

四、未來展望

(一)找出是否能在某一頻率與振幅下，兩種顆粒會有同種間同步，而異種間因週期不同而不同步的情況(例：A 顆粒振動週期為 B 顆粒的兩倍)，並觀察其分離情形

(二)觀察三種顆粒垂直振盪後，是否與我們推論的兩種顆粒振盪情形相符

(三)應用於產業上可分離不同顆粒(如分辨小麥的優劣)

捌、參考資料及其他

一、參考資料

(一)P. Melby, A. Prevost, D.A. Egolf, and J.S. Urbach, Phys. Rev. E 76, 051307(2007).
Depletion force in a bidisperse granular layer.

(二)T.Y. Wang and T.M. Hong, Phys. Rev. E 78, 061301(2008). *Segregation induced by phase synchronization* in a bidisperse granular layer.

二、附錄

(一)分離係數的定義

若 α 類的顆粒有 N_α 顆，定義 α 顆粒的不均勻度為

$$S_{\alpha} = \frac{1}{N_{\alpha}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \sum_{\beta=A,B} \sum_{j=1}^{N_{\beta}} \theta \left(\left| \bar{r}_{\alpha i} - \bar{r}_{\beta j} \right| \right) \quad , \alpha = A, B$$

$$\text{其中 } \theta \left(\left| \bar{r}_{\alpha i} - \bar{r}_{\beta j} \right| \right) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } \alpha = \beta \text{ and } \left| \bar{r}_{\alpha i} - \bar{r}_{\beta j} \right| \leq 1.5d_{\alpha} \\ -1 & , \text{ if } \alpha \neq \beta \text{ and } \left| \bar{r}_{\alpha i} - \bar{r}_{\beta j} \right| \leq 1.5d_{\alpha} \\ 0 & \text{ else} \end{cases}$$

若 $S_{\alpha} = 0$ 表示分布最均勻， $|S_{\alpha}|$ 的值越大表示越不均勻。

而分離係數則定義為兩類顆粒不均勻度的總和 $S = |S_A| + |S_B|$

(二) 同步程度的定義

若 α 類的顆粒有 N_{α} 顆，定義 α 顆粒的第 i 顆在時間 t ，其 y 方向的位置與平均位置的差為 $z_{\alpha i}(t)$

$$z_{\alpha i}(t) = y_{\alpha i}(t) - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} y_{\alpha i}(t) dt \quad i = 1..N_{\alpha} \quad \alpha = A, B$$

則 α 顆粒之間的同步程度 $C_{\alpha\alpha}$ 定義為 $z_{\alpha i}(t)$ 的相關函數的平均值。

$$C_{\alpha\alpha} = \frac{1}{N_{\alpha}} \sum_i^{N_{\alpha}} \frac{\sum_j^{N_{\alpha}} \int z_{\alpha i}(t) z_{\alpha j}(t) dt}{\sum_j^{N_{\alpha}} \int z_{\alpha j}(t)^2 dt} \quad , \alpha = A, B$$

【評語】 040118

- 1、 以垂直振動，但限制顆粒所能振動空間範圍，能簡化實驗的複雜度，利於透析實驗數據。
- 2、 能量測多數顆粒跳高度，並能分析其週期及比較顆粒間之週期，分析過程完整，探討參數合宜，簡化數據解析整理參數，實驗具完善性。