

# 中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 物理科

最佳團隊合作獎

040116

舞動螺旋

學校名稱：國立羅東高級中學

作者：  高二 蔡執中  高二 張語璇  高二 林鴻儒  高二 陳智浩	指導老師：  林中彥  林榮彬
---	-----------------------------

關鍵詞：轉動、繩波、向心力

## 摘要

在繩子的一端持續供給一擾動，此擾動會以波動的形式傳至繩子另一端（自由端），經自由端反射後，反射波會和入射波重疊干涉而形成駐波。本實驗將繩子鉛直懸掛在轉盤下方，轉盤帶動繩子繞軸旋轉。實驗中觀察到繩子會形成駐波，並出現上下的來回振盪，這是一個複雜的運動。我們嘗試以學過的物理概念來解釋、分析所觀察到的繩波行為。

## 壹、 研究動機

奧運比賽中的舞蹈項目，舞者舞動彩帶，彩帶在空中形成美麗的螺旋狀，當舞者的手擺動愈快，彩帶形成的螺旋數就愈多。我們對轉速與螺旋數的關係、螺距是否為定值、它與彈簧是否有類似的性質（彈簧不過是個捲曲的金屬）、是否有駐波的性質等問題感到好奇。於是我們設計了這個實驗，來探討繩子的波動。

## 貳、 研究目的

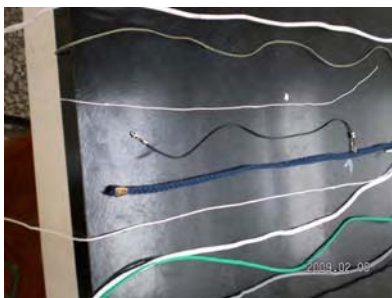
利用馬達帶動圓盤旋轉，圓盤下面接上一細繩。探討在不同轉速及繩長下，繩子的波形變化。

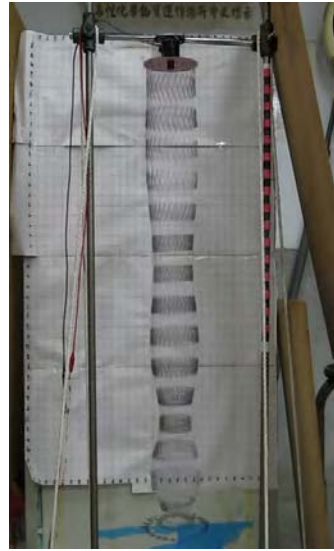
## 參、 研究設備及器材

### 一、實驗器材

馬達、棉線(140cm、130cm、120cm、110cm、100 cm、80 cm、60cm 各一條)、試管塞、電源供應器、電阻、光碟片(帶動繩子旋轉)、鐵架、粗繩二條(固定鐵架使其穩定)、木板、擋風板三片(以確保實驗過程中繩子不受風的影響)、相機、電腦

### 二、實驗系統示意圖





### 三、器材組裝

- (一) 把一塊木板（表面是平面）架在兩根同樣高度的鐵柱上，且確保其水平。
- (二) 將電源供應器與馬達連成通路，並把馬達（底座是平的）黏在木板底面。
- (三) 在一片光碟片上打洞，大小約是一條繩子可穿過的。
- (四) 將實驗用的繩子穿過洞，以膠帶黏牢。
- (五) 拿一個試管塞，上下圓心測量好，穿一個洞，並塞住光碟片的中心。
- (六) 將試管塞固定在馬達之轉軸上，開始做實驗。

註：實驗過程中，我們發現了一些問題，例如：鐵柱會晃動。因此我們將繩子繞過鐵柱並固定在鐵柱之基座，以改善其晃動的現象。還有，馬達的轉速有時會不穩定。為此，我們多蓋了一張光碟片使其轉動慣量增加，讓轉速更穩定。

## 肆、 研究過程及方法

### 一、實驗步驟

- (一) 將電阻、電源供應器、馬達、轉盤等儀器架設完畢。
- (二) 剪一段繩，並在繩上二處以奇異筆畫出約 3cm 的黑色區域，以便觀察。
- (三) 將繩子固定在轉盤下方某處。（非轉盤的正中心）
- (四) 啓動馬達，帶動細繩繞軸旋轉，並用數位相機以錄影方式記錄繩子的運動過程。
- (五) 利用電腦程式從影片中擷取數百張的照片(每 1/30 秒一張)，並加以疊合。
- (六) 分析波形。

(七) 固定轉速，改變繩長，重覆步驟(二)～(六)。

(八) 固定繩長，改變轉速(電壓)，重覆步驟(二)～(六)。

## 二、理論分析

本實驗的裝置，是將繩子垂直懸掛於一轉盤上某點(此點不在轉盤的中心，而是離中心一段距離)。當啓動馬達，轉盤開始轉動，此時繩子會呈螺旋狀，而非直線繞軸旋轉，因為需要繩子張力來作為向心力用。

### (一) 繩子旋轉的力學分析

在繩上取一小段，其質量為  $dm$ ，鄰近繩段作用於其上的張力為  $T$ ，張力與鉛垂線的夾角  $\theta$ ，質量  $dm$  之小繩段作圓周運動的半徑為  $R$ 。

今取質量  $dm$  小繩段以下的繩子(質量  $m$ )為受力體，如右圖虛線方框所示，由靜力平衡可得

$$T \cos \theta = mg \dots (1)$$

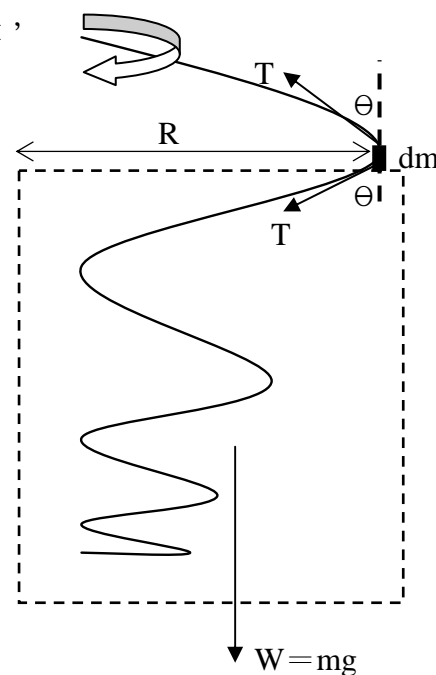
接著取質量  $dm$  小繩段為受力體，此小繩段作圓周運動所需的向心力由張力提供。可得

$$2T \sin \theta = (dm)R\omega^2 \dots (2)$$

由(1)(2)兩式可得： $R = \frac{2mg \tan \theta}{(dm)\omega^2} \dots (*)$

由(\*)式知，當轉速固定，愈靠近上端的繩段，

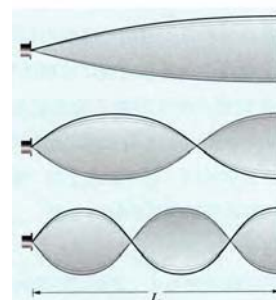
其底下的繩子質量  $m$  愈大，故作圓周運動的半徑  $R$  也愈大，即旋轉的最大半徑會往下遞減。



## (二) 波動觀點分析

當頻率、波長、振幅皆相等的兩週期波，反向行進，會合後可產生一連串之節點，節點間之波形只作週期性漲落，不再行進，稱為駐波。

若將繩的一端固定，手持另一端並使其上下不斷地振動，所產生的波動沿繩傳播到固定端後反射回來，與入射波重疊干涉而形成駐波。當然，若繩的另一端為自由端，當入射波沿繩傳播到自由端後反射回來，與入射波仍會干涉而形成駐波。如右圖所示。



當轉速固定，節環和節環間的距離，由上而下是呈現遞減的。因節點間距

$$= \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{。而愈上方的繩段承受愈大的繩重，張力 } T \text{ 也就愈大。由上}$$

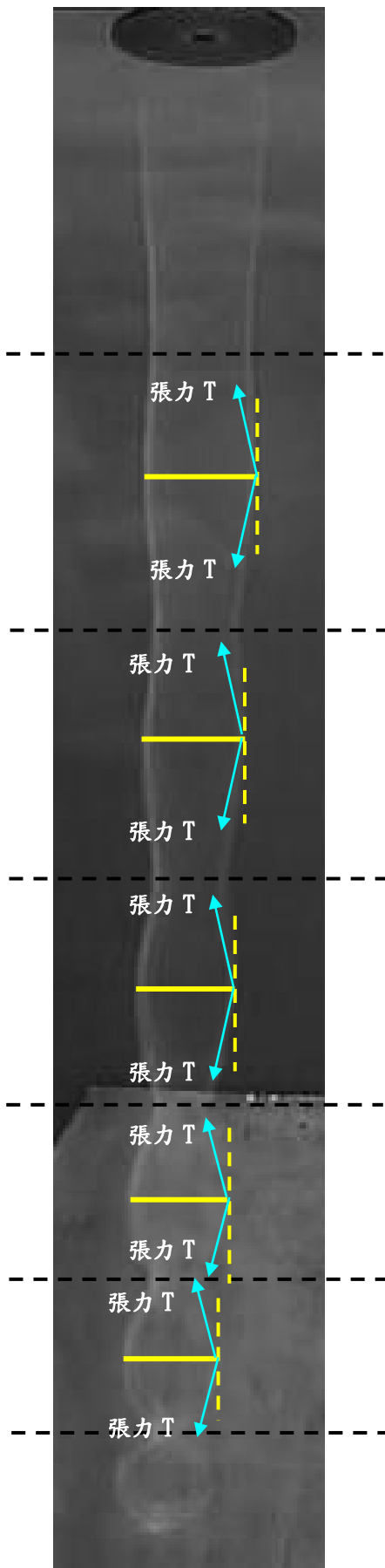
式可知，節環間距會由上而下遞減了。

## 伍、 研究數據

一、疊合後的波形：此圖作過灰階、亮暗對比處理。



以繩長 120cm 為例，將影片中數百張的照片(每 1/30 秒一張)疊合，所成的繩波圖形。圖中可清楚看見，節點部分為一環狀，稱之為「節環」。

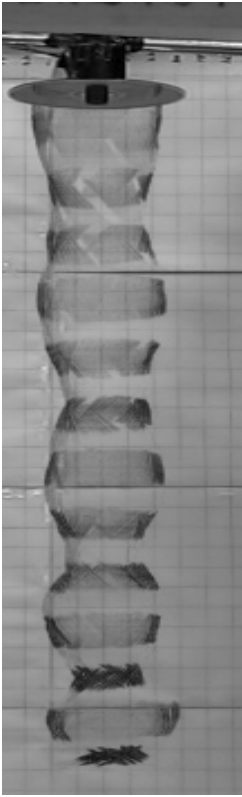


以繩長 120cm 為例，取波腹上一點，量出張力和鉛直方向的夾角約  $12^\circ$ 。此值對每個波腹而言是相同的。大致來說，各個駐波的形狀是相同的，只是大小程度的不同。

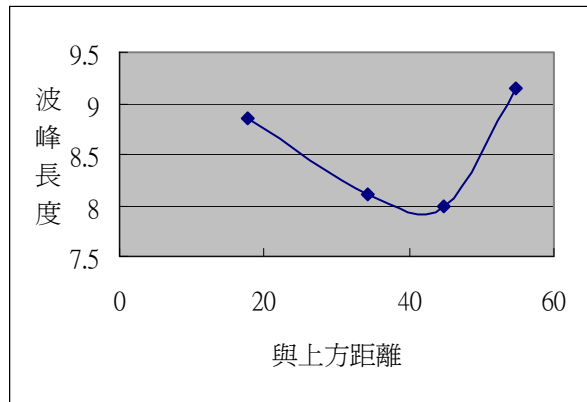
## 二、低轉速 (<9 r.p.s)

### (一) 繩長 80cm

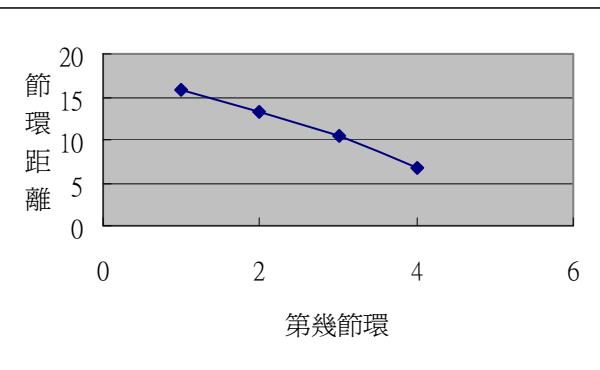
#### 1. 轉速 5.39 r.p.s



與上方距離(cm)	波峰(cm)
17.67	8.86
34.16	8.11
44.85	8
54.81	9.14



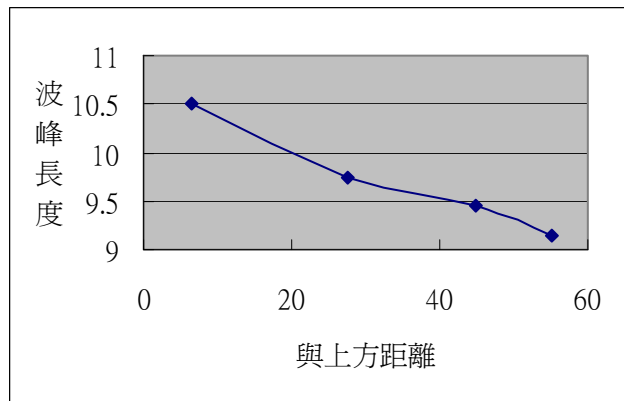
1	15.75
2	13.35
3	10.5
4	6.75



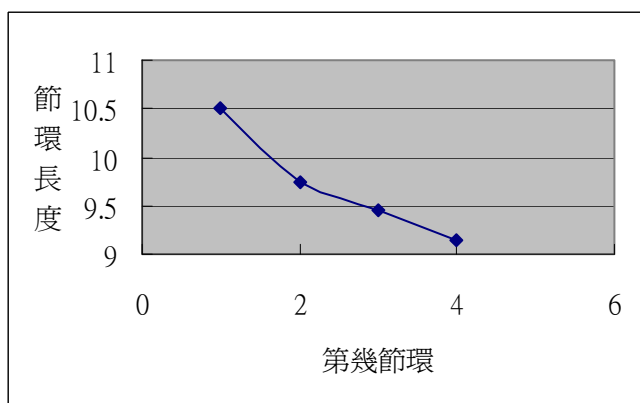
#### 2. 轉速 5.63 r.p.s



與上方距離	波峰
6.56	10.5
27.55	9.75
44.77	9.45
55.27	9.15

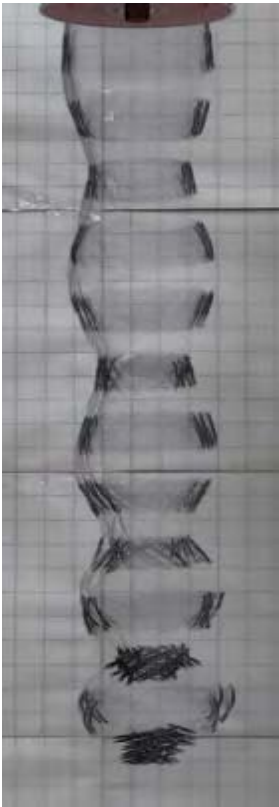


1	10.5
2	9.75
3	9.45
4	9.15

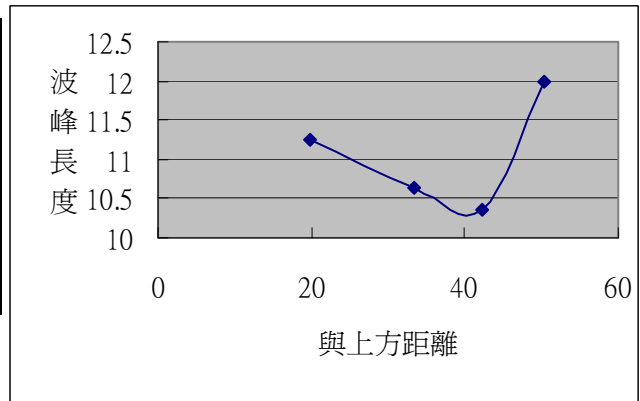




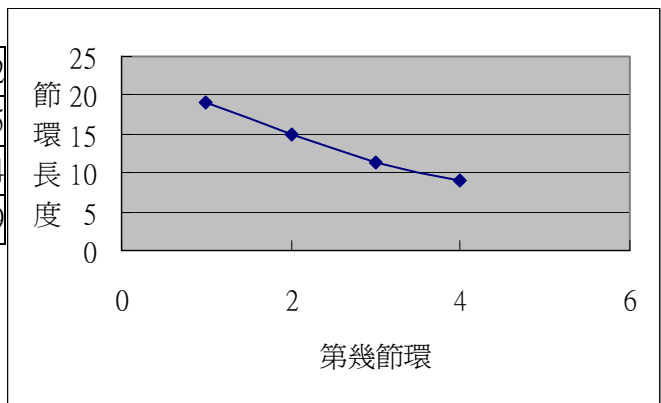
3.轉速 5.83 r.p.s



與上方距離	波峰
19.72	11.25
33.28	10.65
42.35	10.35
50.34	12

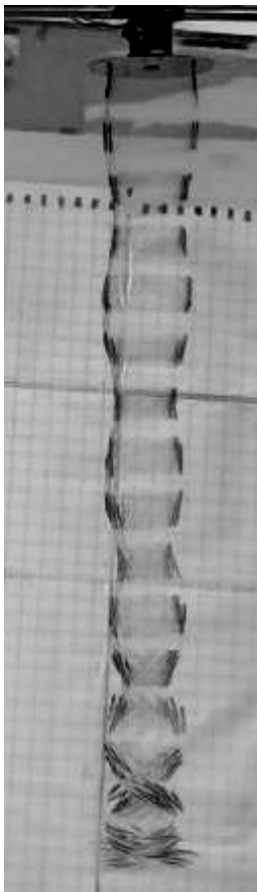


1	19.2
2	15
3	11.4
4	9

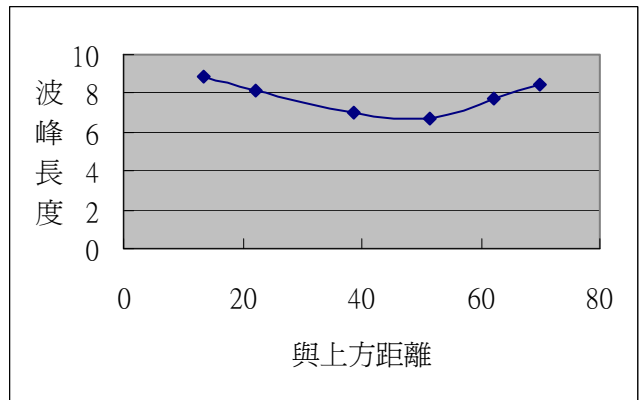


(二) 繩長 100cm

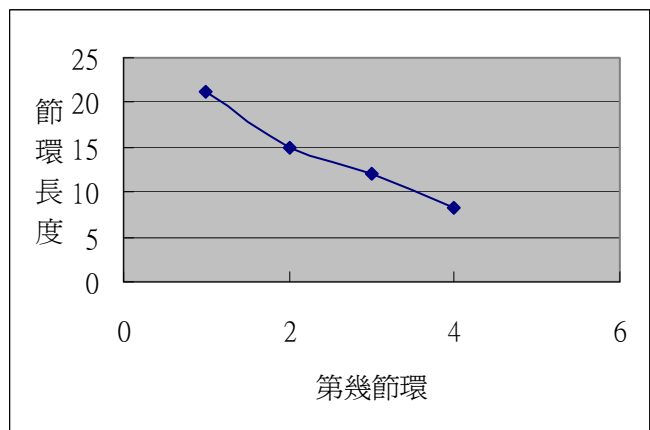
1.轉速 5.4 r.p.s



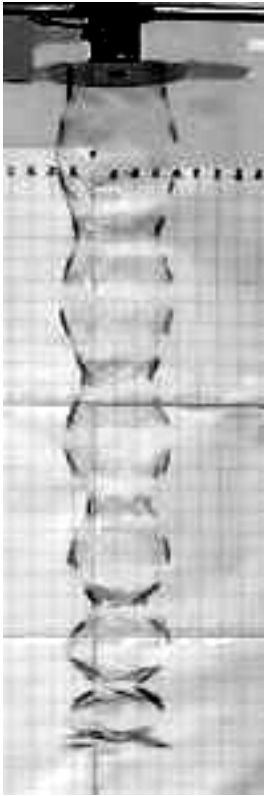
與上方距離	波峰
13.4	8.89
22.16	8.12
38.8	7.05
51.5	6.71
62.1	7.76



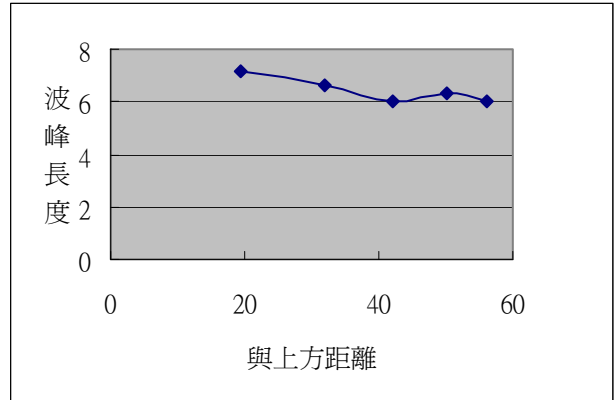
1	21.3
2	15
3	12.15
4	8.25



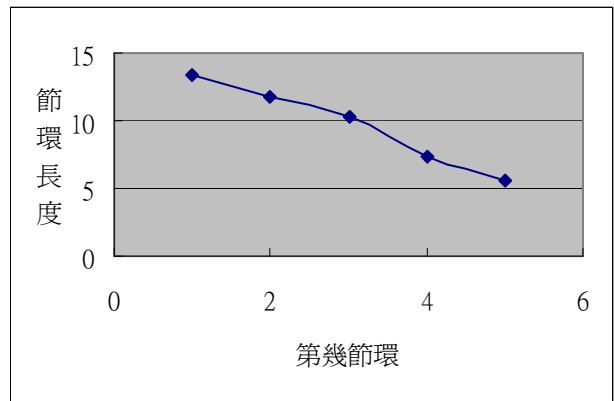
2.轉速 7 r.p.s



與上方距離	波峰
19.3	7.2
32	6.6
42	6
50.2	6.3
56.2	6



1	13.35
2	11.7
3	10.35
4	7.35
5	5.55

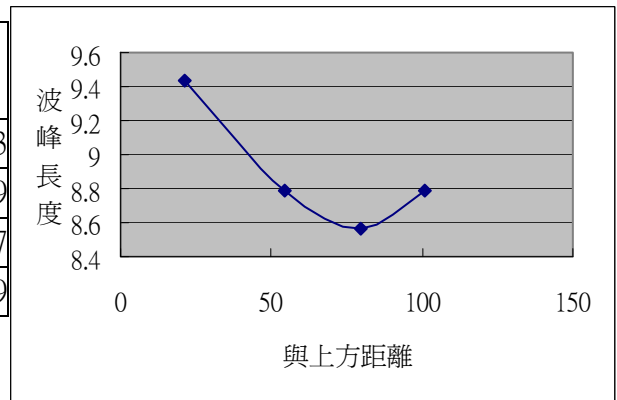


(三) 繩長 120cm

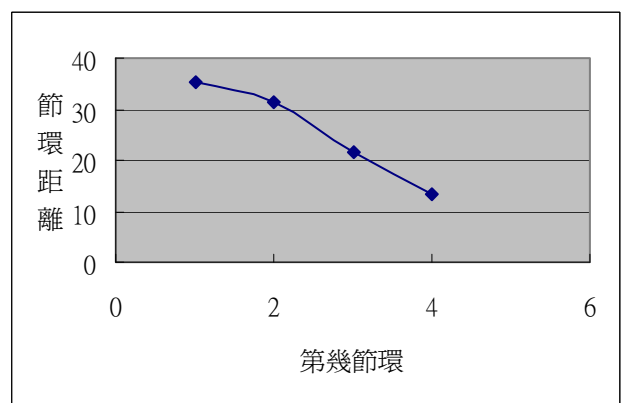
1.轉速 3.75 r.p.s



與上方距離	波峰
21.12	9.43
54.24	8.79
79.68	8.57
100.8	8.79



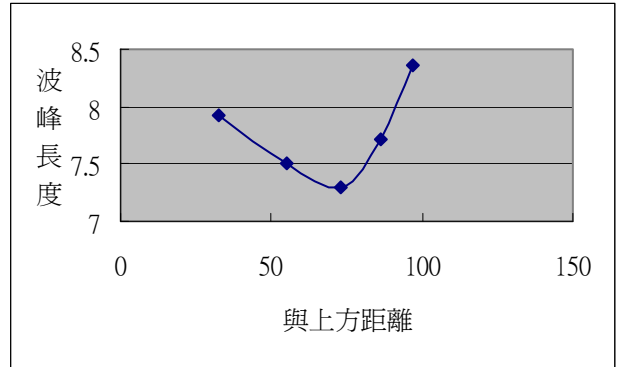
1	35.15
2	31.5
3	21.67
4	13.5



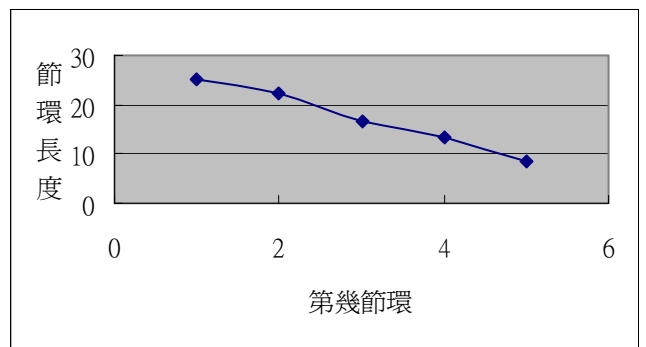
2.轉速 4.83 r.p.s



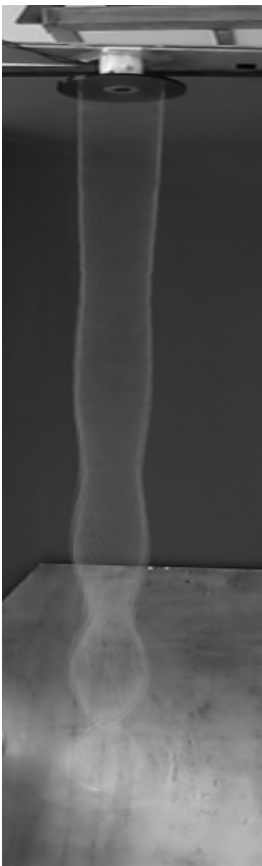
與上方距離	波峰
32.8	7.93
55	7.5
72.8	7.29
86.2	7.72
96.6	8.36



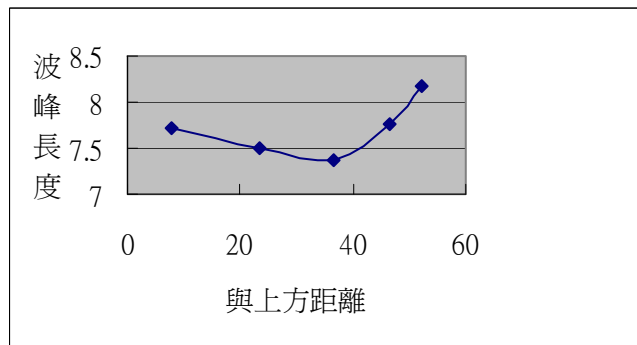
1	25.29
2	22.29
3	16.5
4	13.29
5	8.36



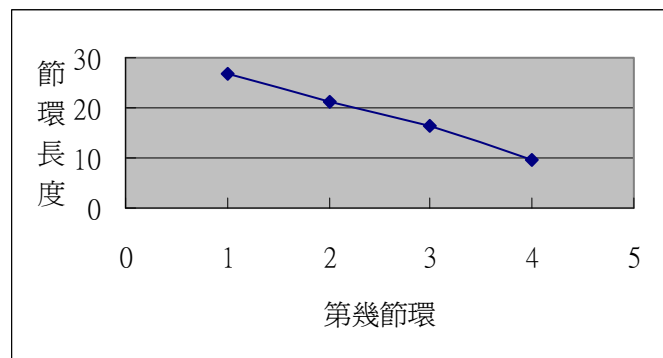
3.轉速 4.97 r.p.s



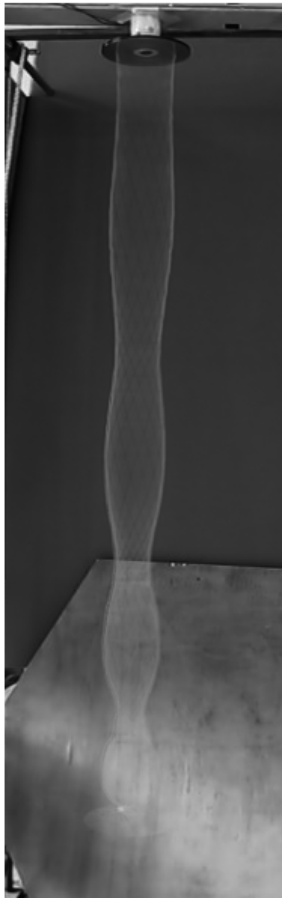
與上方距離	波峰
7.8	7.71
23.3	7.5
36.4	7.36
46.6	7.77
52.3	8.18



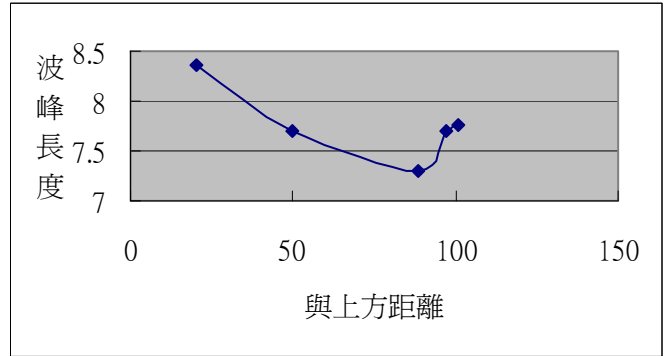
1	26.99
2	21.27
3	16.56
4	9.61



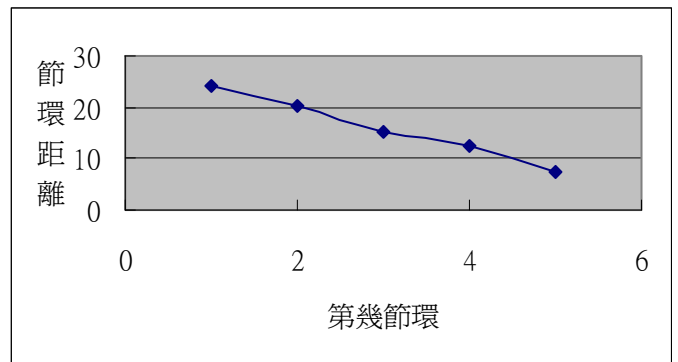
4.轉速 5.92 r.p.s



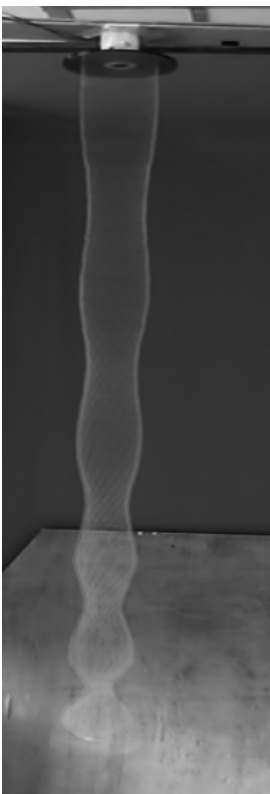
與上方距離	波峰
20.3	8.37
49.8	7.7
88.6	7.29
96.9	7.71
100.6	7.77



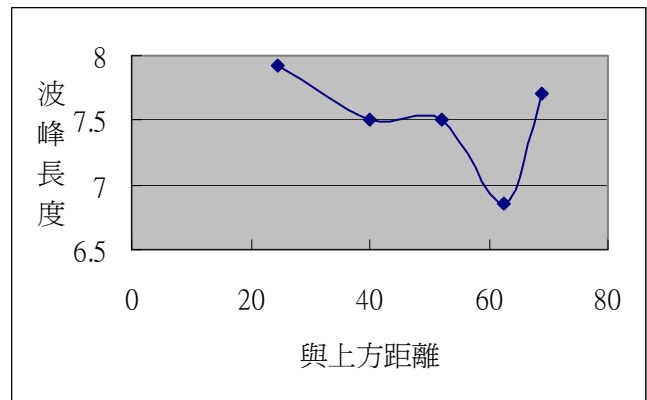
1	24.22
2	20.14
3	15.22
4	12.64
5	7.5



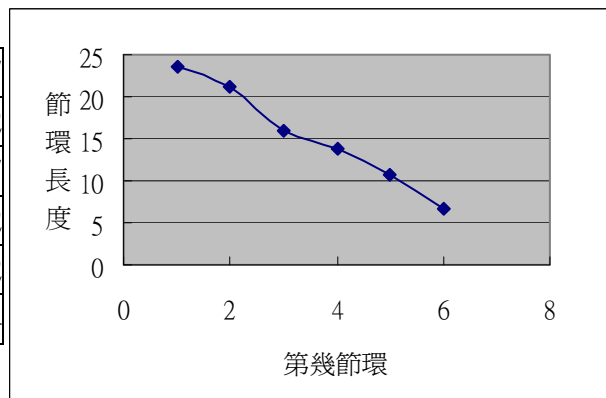
5.轉速 6.75 r.p.s



與上方距離	波峰
24.4	7.93
40	7.5
52	7.5
62.4	6.86
68.8	7.71



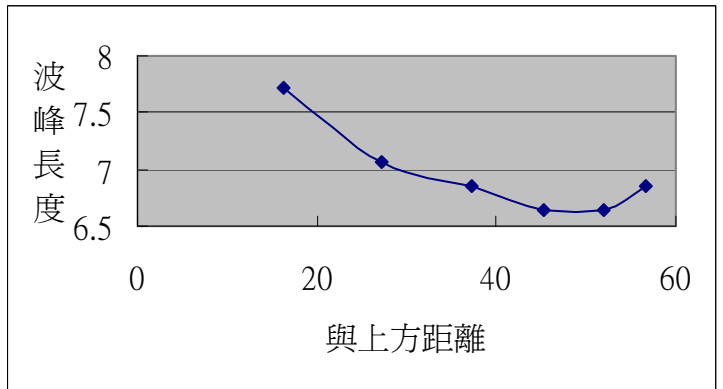
1	23.57
2	21.22
3	16.07
4	13.72
5	10.72
6	6.64



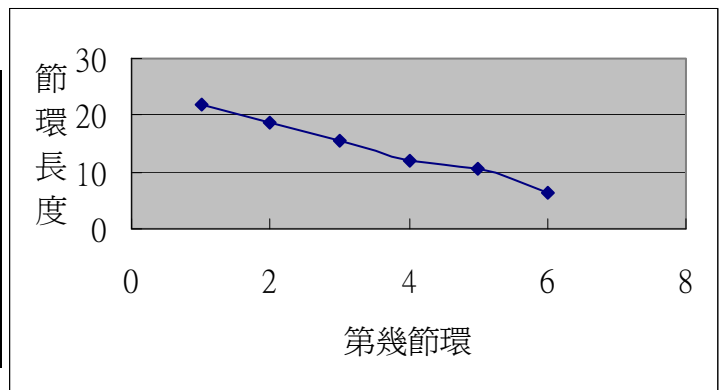
6.轉速 6.89 r.p.s



與上方距離	波峰
16.3	7.71
27.3	7.07
37.3	6.86
45.3	6.64
52	6.64
56.7	6.86



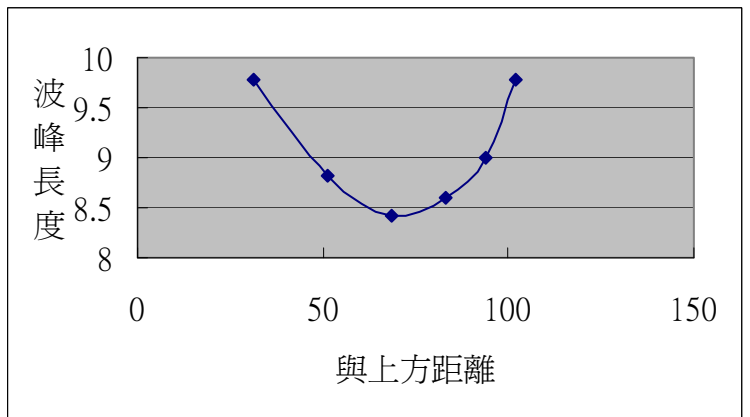
1	21.86
2	18.64
3	15.64
4	12
5	10.72
6	6.21



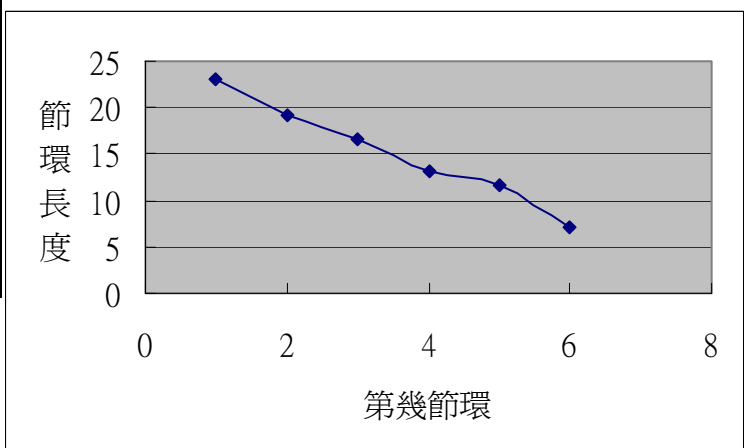
7.轉速 7.67 r.p.s



與上方距離	波峰
31.27	9.79
51.09	8.81
68.36	8.42
83.26	8.61
93.81	9
102.17	9.79



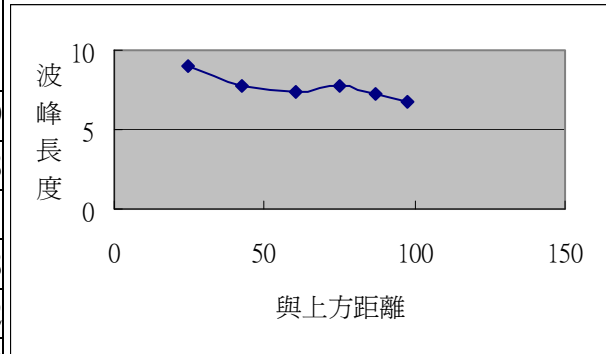
1	23.09
2	19.18
3	16.64
4	13.11
5	11.72
6	7.05



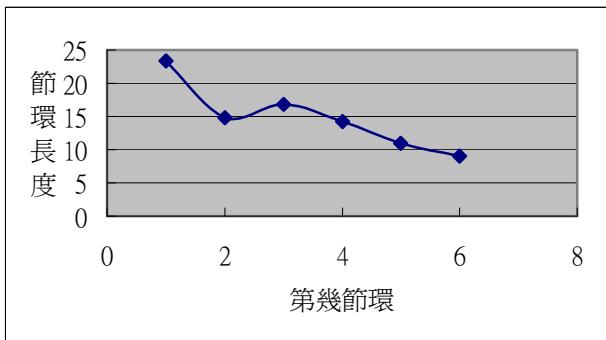
8.轉速 7.93 r.p.s



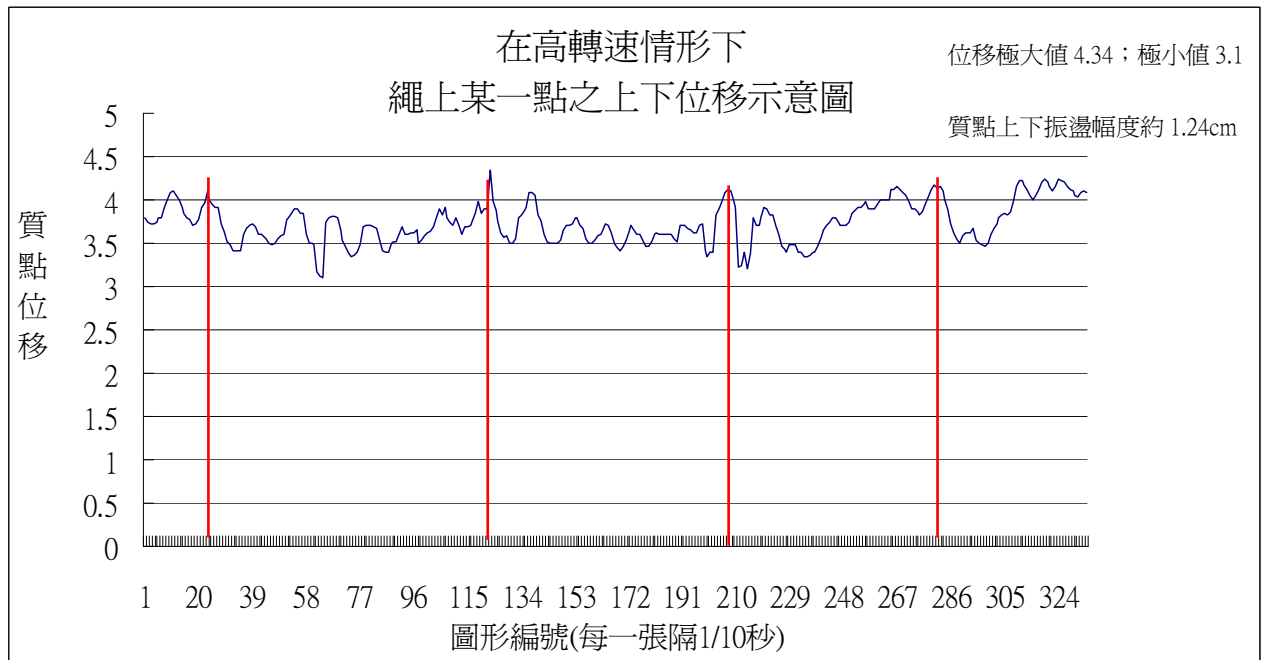
與上方距離	波峰
24.56	9
42.75	7.8
60.19	7.41
75	7.8
87.19	7.2
97.31	6.8



1	23.4
2	14.8
3	16.8
4	14.2
5	11
6	9



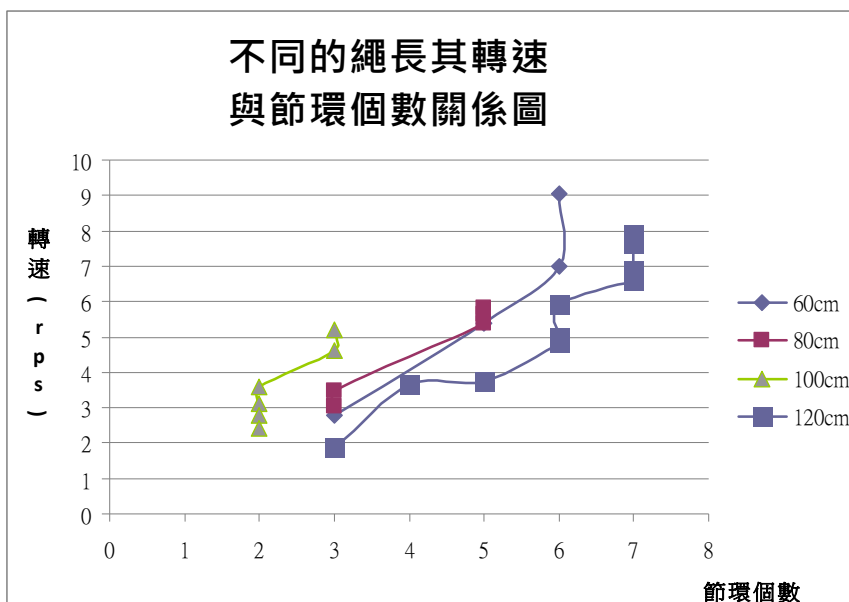
三、高轉速：以繩長 120cm、轉速 9.5 r.p.s 為例，觀察繩上某一處隨時間作上下振盪的情形



由上圖可以確定，繩繞軸轉動時，繩上各點除了作水平面圓周運動外，會合併出現上下振盪的情形。在轉速大於 9 r.p.s 時，尤其明顯。根據上圖，質點在鉛直面上的運動並非單純的簡諧振盪，大約在圖形編號 20、124、210、280，各出現一次位移的最大值；平均週期約 8.67 秒。質點大部分時間作小幅度的上下振盪。

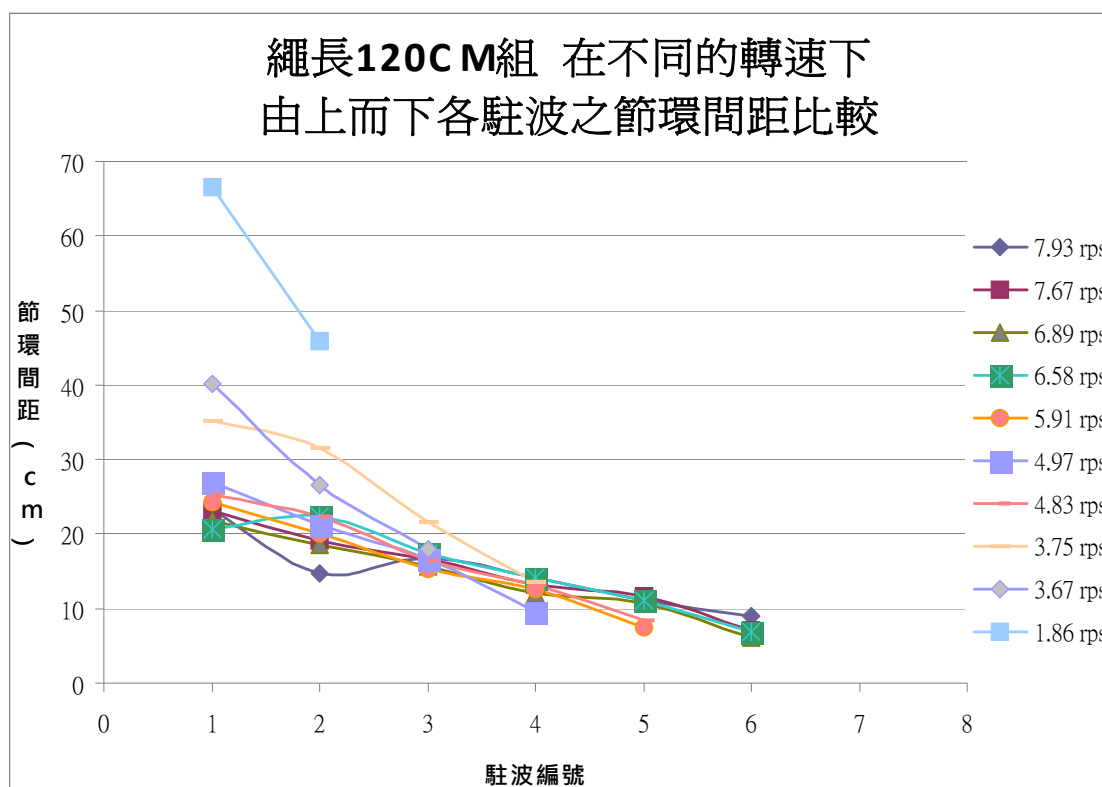
#### 四、綜合比較

(一) 比較在不同的繩長下，轉速與形成節環個數的關係



在各種繩長下，隨著轉速的增加，節環個數跟著增加。

(二) 以繩長 120cm 為例，在不同的轉速下，比較由上而下各駐波之節環間距



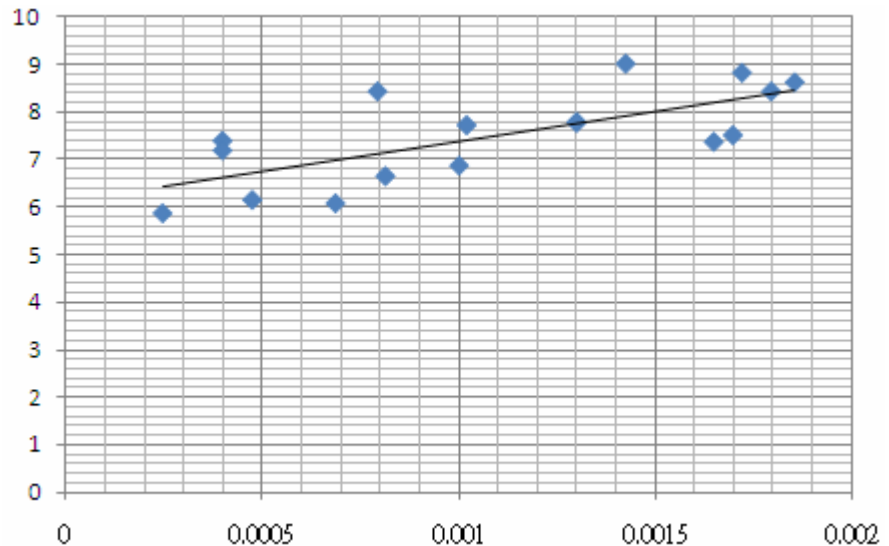
由上而下各節環之間距，除靠近繩子末端外，大致呈線性遞減



## 陸、 討論

轉速(r.p.s)	Tan $\theta$	底下質量(g)	$\frac{2mg \tan \theta}{(dm)\omega^2}$
5.92	0.49	0.79	0.011094
7.67	0.14	0.30	0.00072
7.67	0.23	0.20	0.000794
6.75	0.65	0.86	0.012357
5.83	0.16	0.25	0.001203
7.93	0.53	0.91	0.00773

$\frac{2mg \tan \theta}{(dm)\omega^2}$	半徑(cm)
0.011094	8.37
0.012357	7.93
0.00072	8.81
0.001203	11.25
0.012721	7.71
0.00773	9.00



一、由圖知前三點幾乎為直線  $R = \frac{2mg \tan \theta}{(dm)\omega^2}$  相符

二、波長比較(以環節間距之半)

當繩長、轉速固定，節環和節環間的距離，由上而下是呈現遞減的。因節點間距

$$= \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{。而愈上方的繩段承受愈大的繩重，張力 } T \text{ 也就愈大。由上式可}$$

知，節環間距會由上而下遞減了。

於是我們做了一些定量的計算：以 80cm、5.39 轉與 100cm、5.4 轉

因  $f$  與  $\mu$  皆相同，理論上  $\lambda$  與  $\sqrt{T}$  成正比

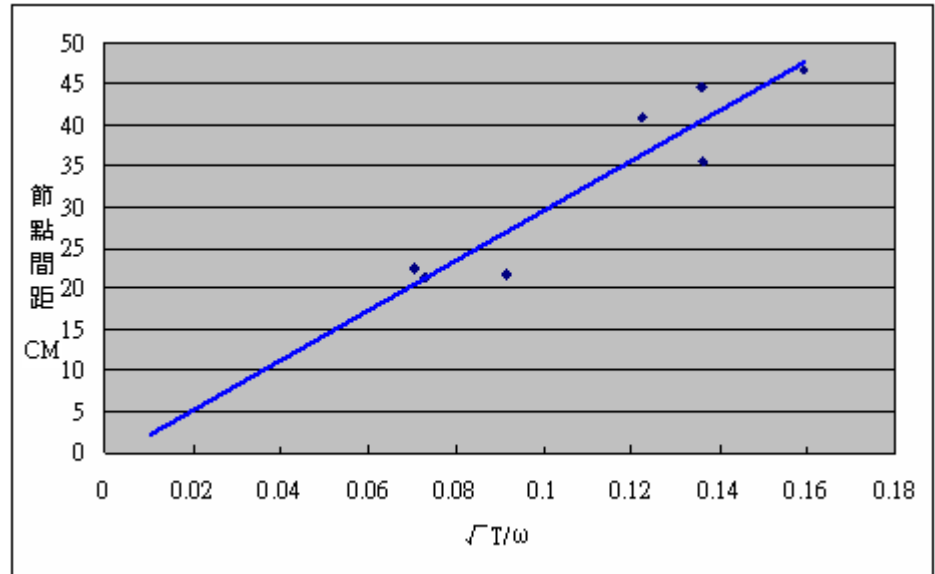
80cm、5.39 轉：第一腹點以下的重量：下端長度比例重量= 0.405 單位

100cm、5.4 轉：第一腹點以下的重量：下端長度比例重量=0.710 單位

即  $\sqrt{\frac{0.710}{0.401}} = 1.33$  而  $\frac{21.3}{15.75} \frac{(100\text{cm之第一節環間距})}{(80\text{cm之第一節環間距})} = 1.35$  非常接近

後面我們做了一些紀錄

$\sqrt{T/w}$	節點間距(cm)
0.16	46.70
0.09	21.67
0.14	35.41
0.07	21.45
0.12	40.94
0.07	22.41
0.14	44.62



三、由圖中知：每一腹點到上面的節環節環>腹點到下面的節環；因為上面的鉛直方向繩張較下面大(承受的質量較重)。

四、繩子最下端呈現較水平攤直狀，原因是繩子最下端的張力小，為維持作圓周運動所需的向心力，繩子必然呈水平狀，張力全貢獻在半徑方向上。

五、當啓動馬達，轉盤開始轉動，繩子除了來回抖動外，尚繞轉盤中心作等速率圓周運動，故形成一種「轉動+駐波」的合體現象。

六、當利用電腦程式從影片中擷取數百張的照片，加以疊合後，我們發現駐波的節點部分，並非是一個點，而呈現環狀，在此稱之為「節環」。至於為何是呈現「節環」，而不是「節點」呢？我們在實驗中觀察到當轉速高至某一程度後，繩子會出現明顯上下振動的情形（事實上，在低轉速的情形，也會發生這種現象，只是較不明顯罷了）。也就是說，繩子駐波的節點，在不同時刻下，並不在同一位置，而會作上下的振盪。當把數百張照片疊合後，在兩個駐波波形中央，自然會呈現環狀，且當同一繩子轉速愈小

節環的半徑就愈小

七、我們原推論當轉速固定，愈靠近上端的繩段，其底下的繩子質量  $m$  愈大，故作圓周運動的半徑  $R$  也愈大。故看起來會覺得繩子上方的駐波振幅較大。但從振幅與位置關係圖卻發現  $R$  非愈來愈小，而是在中段時達最小值，後來又變大。即使刪了最後腹點仍有此現象，原因目前尚未確定。

八、在固定的繩長  $L$  下，隨著轉速的增加，節環個數跟著增加。
$$L = \frac{(2n-1)\lambda}{4} = \frac{2n-1}{4} \frac{v}{f}$$

由上式可知，當  $L$ 、 $v$  固定， $f$  變大， $n$  也跟著增加。當然，節環個數必然隨著繩子加長而變多。

九、實驗中發現，當轉盤在低轉速時，繩上各點幾乎是作水平面圓周運動，但當轉速高至某一程度後，繩子開始呈現不穩定狀態，即質點無法在原有的平面上轉動(不穩定的上下振動情形)，這表示質點此時的受力並非處於平衡狀態。有點像不規則振動但又似有個週期。

我們用縱波的方式解釋：因波傳遞時的疏密變化造成繩張一直在改變，有時變大，有時變小，若在鉛直方向上，合力卻向下。(因為  $T_1 = T_2 + mg$ ，故  $T_1 \cos \theta < T_2 \cos \theta + mg$ ) 因此繩子被往下拉直，但同時  $\theta$  角也變小了，向心力  $F_c = T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta$  也跟著變小。但轉盤的轉速是固定的，意謂著維持圓周運動所需的向心力不可低於某一值。故繩子往下拉直一段距離後，必須要再上升扭曲。如此往復不斷的進行，故會觀察到繩子上下振動的情形。當馬達的轉速愈大，這個現象愈是明顯。

## 柒、 結論

- 一、當繩子在轉動時所形成的圖形有與波非常多相似之處
- 二、馬達帶動細繩旋轉，繩子最下端呈現水平攤直狀。
- 三、當啟動馬達，轉盤開始轉動，繩波是呈現一種「轉動+駐波+似疏密波(類似彈簧)」的合體現象。
- 四、駐波的節點部分，經影像合成後，並非是一個點，而呈現環狀，稱為「節環」。
- 五、在固定的繩長下，隨著轉速的增加，節環個數跟著增加。
- 六、當繩長、轉速固定，除靠近繩子末端外，節環和節環間的距離，由上而下大致呈線性

遞減。

六、當轉速固定，從第一個完整波形的波峰開始計，愈靠近上端的繩段，其駐波振幅較大。

但在繩子末端會有振幅加大的現象。

七、繩子加長，節環個數會變多。

八、繩繞軸轉動時，繩上各點除了作水平面圓周運動外，會合併出現上下振盪的情形。

## 捌、未來展望

一、我們期望在高轉速的情形下，對繩子運動作更長時間的錄影，更精確的分析繩波上下振盪的物理機制。找出它的規律性，和一般常見的彈簧疏密波有無異同。

二、因與我們鉛直張力是用分配算出，希望能找到電腦程式可直接算曲線長度，應可得較佳的結果

## 玖、參考資料

一、高中物理課本（物質科學物理篇下冊） 林明瑞著 南一書局

二、高中物理課本（物質科學物理篇下冊） 褚德三著 龍騰文化

三、University Physics Harris Benson 著 John Wiley & Sons, Inc.

## **【評語】 040116**

這是件四位作者共同完成的作品在訪談中可感覺出四位同學的合作無間，故得到最佳團體合作獎可謂實至名歸，本作品探討擺動繩子的運動狀況與轉動速率間的關係，分別討論繩長與波峰的相關性，是件完整的工作。