

# 中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 物理科

040115

水中的阻尼振盪

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高一 黃雍	呂世璋
高一 陳緯宏	蘇詠晴
高一 黃泓傑	
高二 梁鈞博	

關鍵詞：阻尼振盪、週期

# 水中阻尼振盪

## 摘 要

本實驗主要以高畫素攝影機拍攝，透過影音剪輯軟體的定格功能，不只提高時間測量的精密度至 30 分之 1 秒，更可清楚記錄觀察浮體於水中上下來回振盪的位置變化情形，並探討哪些因素會影響其振盪週期、最大位移。進而找出浮體在水中運動時，所受阻尼力大小隨著其在水中的深度、接觸面積增加而變大；以及驗證阻尼振盪中最大位移遞減率與阻尼力的關係式。

### 壹、研究動機：

漁夫靜靜的等待魚群上鉤，看著魚鏢上下規律地振盪著，魚鏢為何會持續的跳動，跳動的高度又似乎有所不一，當中的頻率似乎又更微妙了！而當魚鏢每一次振盪時當中又有甚麼關係，跳動與時間點是否有何關聯，值得我們深入地探討。

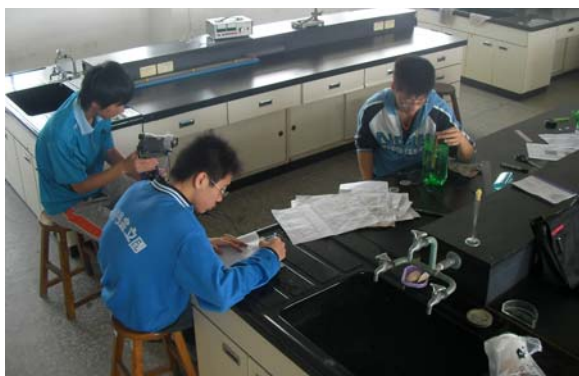
### 貳、研究目的：

- 一、了解浮體在水中受擾動時其運動狀況。
- 二、浮體質量與浮體振盪所需時間的關係。
- 三、浮體釋放高度與浮體振盪所需時間的關係。
- 四、浮體管徑大小與浮體振盪所需時間的關係。
- 五、浮體不同質量與最大位移的關係。
- 六、浮體釋放高度與最大位移的關係。

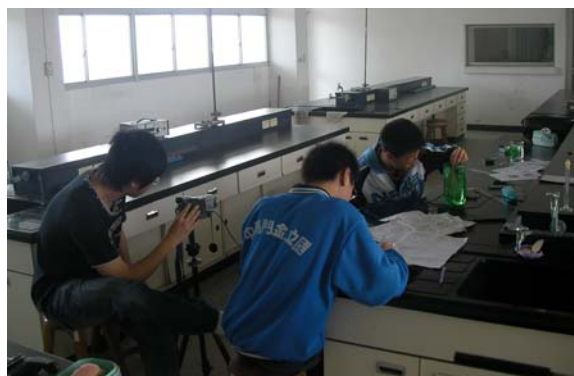
### 參、研究設備器材：

- 一、器材：2000c.c.寶特瓶、浮體〈此實驗選用吸管加小鐵球〉、碼錶、直尺、excel 軟體、攝影機拍攝、繪聲繪影（影像編輯軟體）

浮體資料			
名稱	管徑 (cm)	質量 (g)	長度 (cm)
1 號管	1.10	3.090	17.70
2 號管	0.40	2.640	17.70
3 號管)	0.35	2.200	17.70
每顆小鋼珠		0.440	



【圖一】實驗實景一



【圖二】實驗實景二

二、裝置與方法：利用高畫素攝影機，拍攝浮體運動狀態，經由影像剪輯軟體的定格功能觀察紀錄，每隔 1/30 秒觀察浮體的振動情形。

## 肆、研究過程及方法：

### 一、名詞解釋：本實驗常用名詞註解

(一) 平衡點：吸管浮於水面靜止時，吸管上與水面等高處 ( $y = 0$ ) 的點。

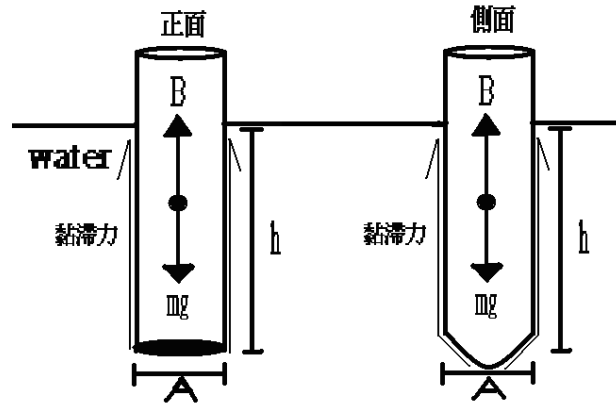
(二) 垂直位移 ( $y$ )：平衡點與水面的位移。

(三) 最大位移：當吸管振動瞬時速率為 0 的時候的垂直位移。即平衡點在每次振動的最低點與最高點的位移值，可細分為釋放高度、第一次振動最低點的位移(簡稱一下最低點)、第一次振動最高點的位移(簡稱一上最高點)....。

(四) 阻尼力：浮體振動時，與水接觸時所受到的摩擦力、黏滯力。

## 二、原理探討：

(一) 浮體於水中運動時所受到的力：本實驗主要探討的有重力 (W)、浮力 (B)、黏滯力 (f)。



【圖三】浮體的力的關係圖

(二) 依浮體的振動過程，可將該運動狀態分成五階段 (如下表)：

【表一】浮體在水中的振動過程詳述

平衡點位置 (y)	力的變化	力的比較	運動狀態
y 最大時(最高點)， 平衡點在水面上 $y > 0$	浮力 (B) 逐漸變強	$W > B$	向下移動，速率 由 0 開始遞增
平衡點恰與水面等 高 $y = 0$	只受到阻尼力，浮力 (B) 持續變強	$W = B$	向下移動，速率 遞增到最大值， 而開始減少
y 最小時(最低點) $y < 0$	浮力達最大值，開始 遞減	$W < B$	瞬間靜止後，開 始向上移動，速 率由 0 開始遞增
平衡點再次恰與水 面等高 $y = 0$	只受到阻尼力，浮力 (B) 持續減小	$W < B$	向上移動，速率 遞增到最大值， 而開始減少
y 最大時(最高點)， $y > 0$			開始下一次的振動

### (三) 公式推導

若一個浮體體積  $V$ ，高  $h$ ，液體密度  $\rho$ ，現在施力下壓一個小小的  $y$  的距離，則在液體中體積將會多出  $Vy/h$

$$\Delta B = \rho (Vy/h)g$$

根據此運動的方式及情形可以找到三項特點：

1. 因為合力的方向與位移相反。
2. 且  $B = \rho Vyg/h = (\rho Vg/h)y$ 。
3. 運動週期  $T = 2\pi \sqrt{M/k}$ 。

綜合以上三點，我們得知浮體上下移動時為簡諧運動，並由  $F = -ky$  可得  $k = \rho Vg/h$ 。

以上的式子是假設在沒有能量損失導致阻尼的情況而發生的振動，所代表的是**自由振動**，一旦開始振動，運動即永遠不停止。是物理情況中最理想的一種。

然而在實際的物理現象中，因為摩擦力或黏滯力等因素而阻止浮體的運動而使浮體的運動終止。所以我們加入阻尼力這一項來分析這樣的運動是必須的，我們一般假設阻尼力為速度的線性函數（這裡將只考慮一維阻尼的振動）。如一質量為  $m$  的浮體受到浮力  $-ky$  和阻力（包含摩擦力及黏滯力等） $-bv$  的聯合作用下，描述的運動的方程式為

$$Ky + bv + ma = 0 \quad \text{-----(公式一)}$$

其中方程式的  $b$  值可能受到物體的材質、表面積、截面積等因素所影響由

$Kx + bv + ma = 0$  推導我們得到位移與時間的函數

$$y(t) = Ae^{-\beta t} * \cos(\omega_d t - \delta) \quad \text{-----(公式二)}$$

其中， $A$  為釋放高度， $\beta \equiv b/2m$  為**阻尼參數**， $\omega_d$  為阻尼振子的**角頻率**。

進一步探討其振動頻率

$$F = \frac{W}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad \text{, 所以 } T = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} \quad \text{-----(公式三)}$$

發現嚴格來說，當有阻尼時，不可能界定出一個頻率，因為這時運動不是週期性的，

意即振子永遠不會以同樣的速度經過相同的一點兩次。觀察  $Ae^{-\beta t}$  這個式子，此處  $\beta > 0$ ，因此可得知浮體的最大位移隨時間而減少。

### 三、實驗步驟：

#### 實驗一、質量與三次完整振動所需時間

(一) 取 1 號管 (粗管)，置入 13 顆鐵球後總質量為 5.720g，放入水中待其靜止後，記錄其平衡位置。

(二) 將吸管提高 3.00cm 後釋放，記錄其振動 3 次所需時間。

(三) 重複步驟 (二) 四次後，計算五次實驗所得之時間平均值。

(四) 改變置入鐵球之數為 14、15、...18 顆。重複步驟 (一) ~ (三)。

(五) 將觀察結果整理後製成表格，並繪製浮體總質量對三次完整振動所需時間關係圖。

#### 實驗二、釋放高度與三次完整振動所需時間：

(一) 取 1 號管 (粗管)，置入 13 顆鐵球，放入水中待其靜止後，記錄其平衡位置。

(二) 將吸管提高 2.00cm 後釋放，記錄其振動 3 次所需時間。

(三) 重複步驟 (二) 四次，計算五次實驗所得之時間平均值。

(四) 改變步驟 (二)，吸管是放高度為 2.50、3.00、...4.00。

(五) 重複步驟 (一) ~ (三)。

(六) 將觀察結果整理後製成表格，並繪製浮體釋放高度對三次完整振動所需時間關係圖。

#### 實驗三、吸管口徑和完整振動三次所需時間：

(一) 取 1 號管 (粗管)、2 號管 (中管)、3 號管 (細管)，分別置入鐵球，使其浮體的總質量相同 (1 號管、2 號管、3 號管總質量=9.240g)。

(二) 將浮體放入水中待其靜止後提高 4.00 公分釋放，紀錄其振動 3 次所需時間。

(三) 重複步驟 (二) 四次，計算五次實驗所得之時間平均值。

(四) 取 2、3 號管重複 (二)、(三) 步驟。

(五) 比較不同口徑之浮體的振動三次所需時間。

#### 實驗四、質量與最大位移遞減率的關係

- (一) 同實驗一之步驟(一)，紀錄其振動垂直位移。
- (二) 重複步驟(一)四次。
- (三) 繪製振動軌跡圖。
- (四) 改變置入鐵球之數 13、15、18 顆。重複步驟(一)～(三)。
- (五) 將吸管釋放高度依序為 2.50、3.00、3.50、4.00 公分，重複(一)(二)步驟。
- (六) 繪製最大位移絕對值與時間關係圖。

#### 實驗五、釋放高度與最大位移遞減率的關係

- (一) 同實驗一之步驟(一)，紀錄其振動垂直位移。
- (二) 重複步驟(一)四次。
- (三) 將吸管釋放高度依序為 2.50、3.00、3.50、4.00 公分，重複(一)(二)步驟。
- (四) 繪製最大位移絕對值與時間關係圖。

### 伍、研究結果

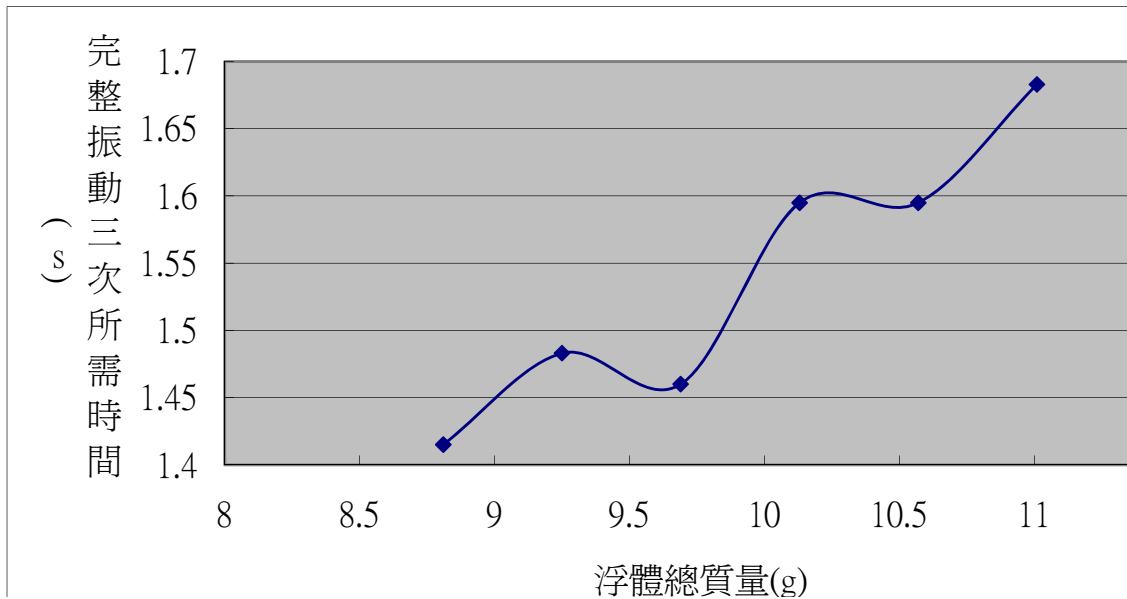
#### 實驗一：質量與三次完整振動所需時間

- (一) 取「1 號管(粗管)，置入 13 顆鐵球」(浮體總質量=5.720g)，釋放高度為 3.00 cm，改變不同浮體質量(鐵球顆數)，記錄三次振動所需時間。
- (二) 所得數據加以整理，製成以下表格和圖形：

【表二】質量與三次完整振動所需時間

鐵球顆數	浮體 總質量 (g)	完整振動三次所需時間 (平均值) (s)
13	8.810	1.415
14	9.250	1.483
15	9.690	1.460
16	10.130	1.595

17	10.570	1.595
18	11.010	1.683



【圖四】質量與三次完整振動所需時間關係圖

(三) 現象描述：由上述的圖表中可以發現三次振動所需時間隨浮體總質量增加而增加趨向，亦即浮體質量越大，三次所需振動時間越長。

(四) 討論：依實驗結果，推論

1、當浮體置入水中越多，推想浮體受到的阻尼力越大，使原本下衝的浮體無法依原來速度運動，而以較小速度運動，因而完成三次完整振動時間變長。

2、質量較大的浮體因受重力影響，沒入在水中的長度較多，推論其所受阻尼力越大，造成每次振動所需時間較長。



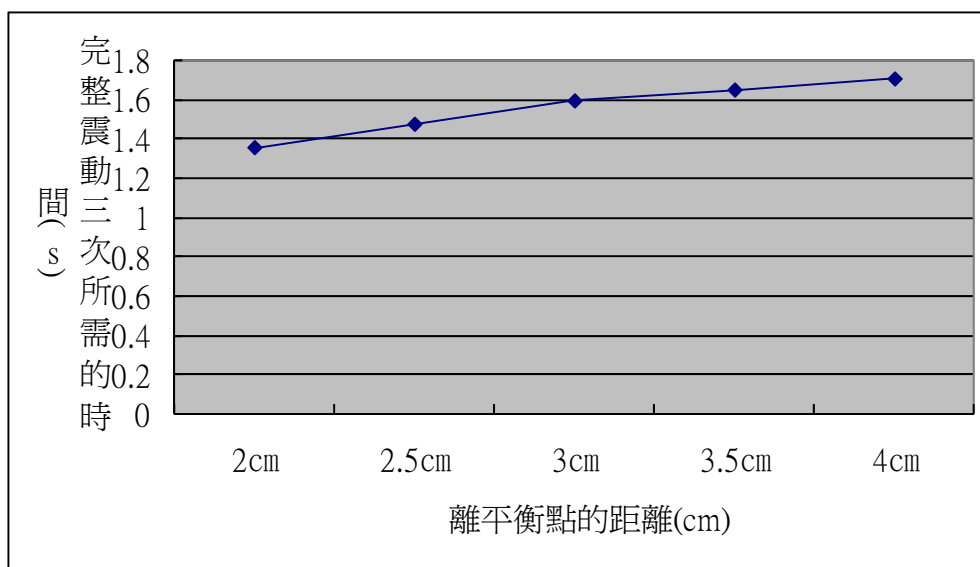
## 實驗二、釋放高度與三次完整振動所需時間：

(一) 固定 1 號管質量 ( $m=6.600\text{g}$ )，於不同釋放高度釋放使其振動，記錄其三次完整振動時間。

(二) 根據實驗二的步驟實驗後，根據所得數據加以整理，製成以下表格和圖形：

【表三】最大位移與 3 次振動所需時間的關係

平衡點提升高度 (cm)	完整振動三次所需時間 (平均值) (s)
2.00	1.355
2.50	1.475
3.00	1.595
3.50	1.651
4.00	1.708



【圖五】最大位移與三次完整振動所需時間關係圖

(三) 現象描述：由實驗二的研究結果及所製圖表可以發現，離平衡點的高度愈高，其振動週期便會愈長

(四) 討論：

1、起始釋放浮體的位置越高，浮體在水下的體積就減少，所受浮力變小，在浮體質量不變的情況下，其向下的合力變大，因此進入水後所能到的深度也就越深，當其進

入水中越深時，移動時所受黏滯力干擾即越多，完成三次完整振動時間也將會拉長。

2、以上推論與實驗一結果一致，因而研究者大膽假設：「浮體在水中越深，公式三中 阻尼係數 $b$  將越大」。

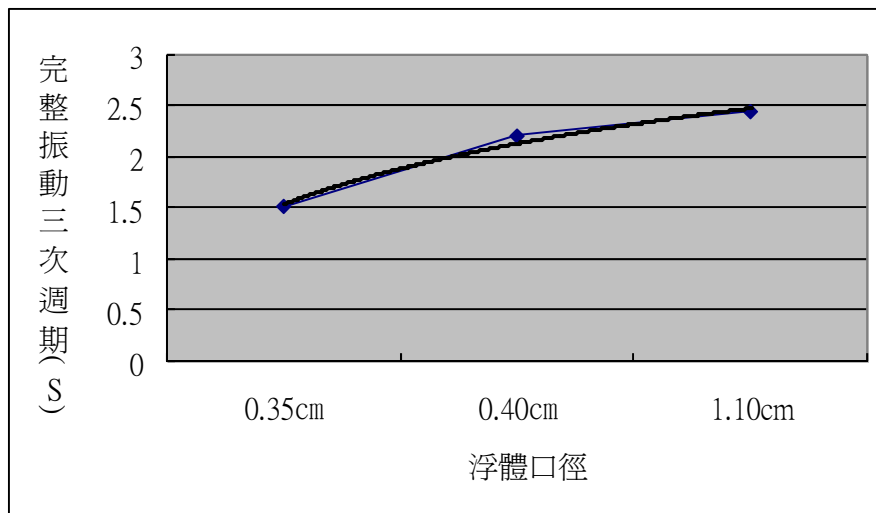
### 實驗三：吸管口徑和三次完整振動所需時間

(一) 選擇以不同口徑的浮體，固定浮體質量與釋放高度 (4.00 cm) 放下，拍攝記錄振動狀態，探討出不同口徑的浮體與三次完整振動所需時間之關係。

(二) 根據實驗三的步驟實驗後，根據所得數據加以整理，製成以下表格和圖形：

【表四】浮體口徑與三次週期

浮體口徑 (cm)	完整振動三次週期 (s)
0.35	1.52
0.40	2.21
1.10	2.45



【圖六】吸管口徑和三次完整振動所需時間關係圖

(三) 現象描述：由實驗三的研究結果及所製圖表可以發現，浮體的口徑越大其完成三次振動所需時間便會愈長。

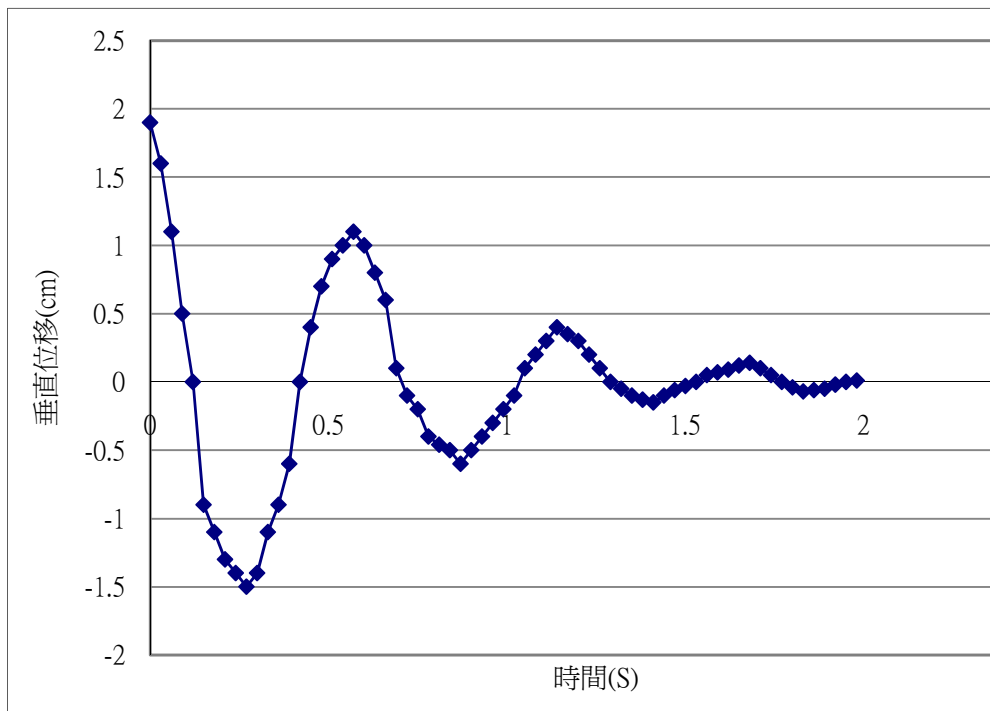
(四) 討論：

1、根據所得的結果加以研究，我們認為浮體口徑與三次完整振動的關係可能受到以下兩點因素的影響：

(1) 浮體口徑不一，截面積不同，於水中運動時所受之阻力越不同，造成振動所需時間不一。

(2) 因口徑的不一，造成浮體外圍的水的接觸面積也不同，而外圍接觸表面積越大時，所受黏滯力越強，造成振動時間的拉長。

2、為進一步深入了解振動情形，我們繪製 1 號管（置入十顆鐵球），釋放高度為 3.00cm 的垂直位移（ $y$ ）對時間（ $t$ ）的關係圖，如下圖：



【圖七】垂直位移與時間之關係圖

(1) 由上圖的位移與時間的關係可為一餘弦函數，即如原理探討中公式二中 $\cos(\omega_1 t - \delta)$ 的關係項。

(2) 而每次的最大位移隨時間而遞減，依公式二關係式，我們推論其最大位移應為 $y(t) = Ae^{-\beta t}$ 。

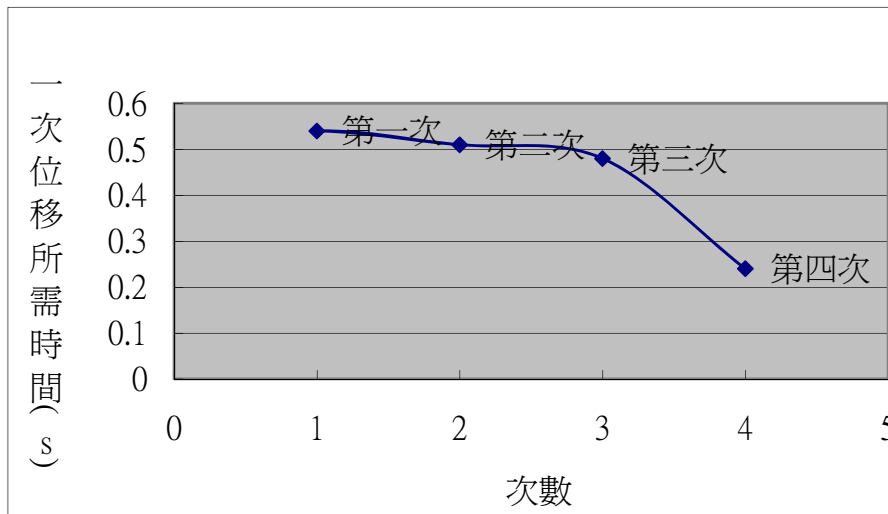
(3) 比較上圖曲線各點的切線斜率（表浮體的移動速率），可清楚得知，當平衡點經過水面時，有最大的移動速率；而在最高點與最低點時速率為 0。

(4) 紀錄各次振動所需時間如下：

【表五】各單一完整振動所需時間

項目	第一次	第二次	第三次	第四次 (未完全)
一次振動 所需時間 (s)	0.54	0.51	0.48	0.24

- 由上表可發現隨振動次數的增加，單次振動所需時間略減。
- 第一次振動吸管在水中相對於第二、三次振動來說較深，受水中阻尼力越大，亦因阻尼力恆作負功，使得能量漸漸損耗，最大位移漸減。
- 亦如實驗一、二所得，最大位移越大時，所受阻尼力越大，振動所需時間也越大。換句話說「阻尼力越大振動所需時間越大，反之，阻尼力越小振動所需時間越小」，因而我們推論「隨著振動位移的遞減，阻尼力也在減小，而致使單次振動所需時間略減」。



【圖八】各單次振動所需時間關係圖

綜合原理探討及實驗一、二、三實驗結果可得：

- 浮體在水中受到水的作用力有浮力與阻尼力，其中浮力僅與水中深度（位移）有關，而阻尼力與水接觸的表面積（水中深度、口徑大小）呈現正相關。
- 當阻尼力越大，相同的振動次數所需時間越大。

#### 實驗四、質量與最大位移遞減率

(一) 置入不同數目之鐵球以改變浮體質量，觀測其振動垂直位移。

(二) 取 1 號管（粗管）（長度  $L=17.70\text{cm}$ ，口徑  $d=1.10\text{cm}$ ，質量  $m=3.090\text{g}$ ），置入數顆鐵球（每顆  $m=0.440\text{g}$ ）後，浮體質量與吸管在水面下深度如下表。

【表六】浮體總質量與沉在水面底下高度

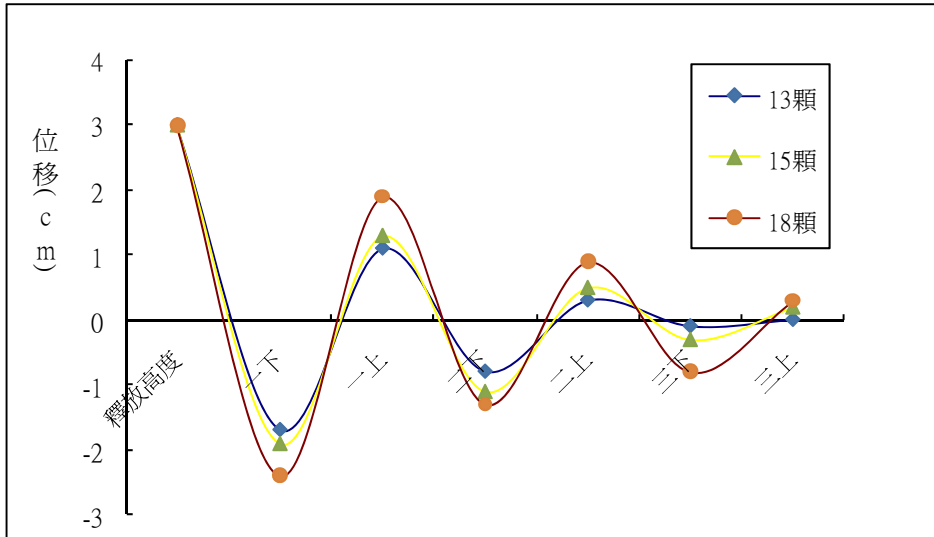
置入鐵球顆數	浮體總質量 (g)	沉在水面底下深度 (cm)
13	8.810	8.1
15	9.690	8.9
18	11.010	10.1

鐵球放比較多的，質量大水中深度越大。

(三) 根據實驗四的步驟實驗後，根據所得數據加以整理，製成以下表格和圖形：

【表七】浮體質量與最大位移

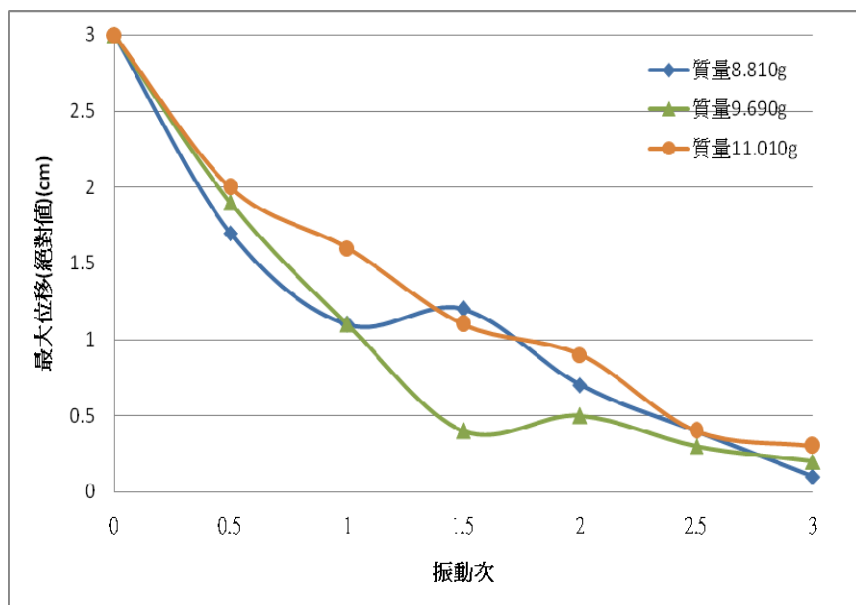
浮體總質量(g)	一下最低點 (cm)	一上最高點 (cm)	二下最低點 (cm)	二上最高點 (cm)	三下(cm)最低點	三上最高點 (cm)
8.810	-1.70	1.10	-0.80	0.30	-0.10	0.00
9.690	-1.90	1.30	-1.10	0.50	-0.30	0.20
11.010	-2.40	1.90	-1.30	0.90	-0.80	0.30



【圖九】質量與最大位移關係圖

【表八】浮體質量與最大位移

浮體質量(g)	時間(T) 最大垂直位移(cm)	0.5	1	1.5	2	2.5	3
		8.810	(-1.7)	1.1	(-1.2)	0.7	(-0.4)
9.690	3	(-1.9)	1.1	(-0.4)	0.5	(-0.3)	0.2
11.010	3	(-2)	1.6	(-1.1)	0.9	(-0.4)	0.3



【圖十】質量與最大位移(絕對值)關係圖

#### (四) 質量與最大位移遞減率的討論：

1. 由上圖比較本次實驗所得的各質量的最大位移遞減曲線，發現浮體質量與遞減率無關。又最大位移之所以遞減，起因於阻尼力，因而遞減率大小應深受阻尼力的影響，此結果與實驗一的結果（質量大，所受的阻尼力大），看似發生很大的矛盾。

2. 上述結果，經參照原理中阻尼參數的定義  $\beta \equiv b/2m$ ，我們推想其原由有下列數點：

(1) 阻尼力的大小，決定與上述之  $b$  值（阻尼係數），該值如實驗一、二、三所得結論：**阻尼力與水接觸的表面積（水中深度、口徑大小）呈現正相關**。然而質量越大的吸管浮體，其振動時吸管在水中的深度較大，使得本實驗阻尼係數  $b$  值，也將受質量變大而變大。

(2) 遞減率的大小，則決定與阻尼參數  $\beta$ ，與阻尼係數(和質量成正相關)成正比、與浮體質量成反比，兩正反比因素均與質量相關，因而遞減率是否將因質量而不同，本次實驗並無找出其規律性。

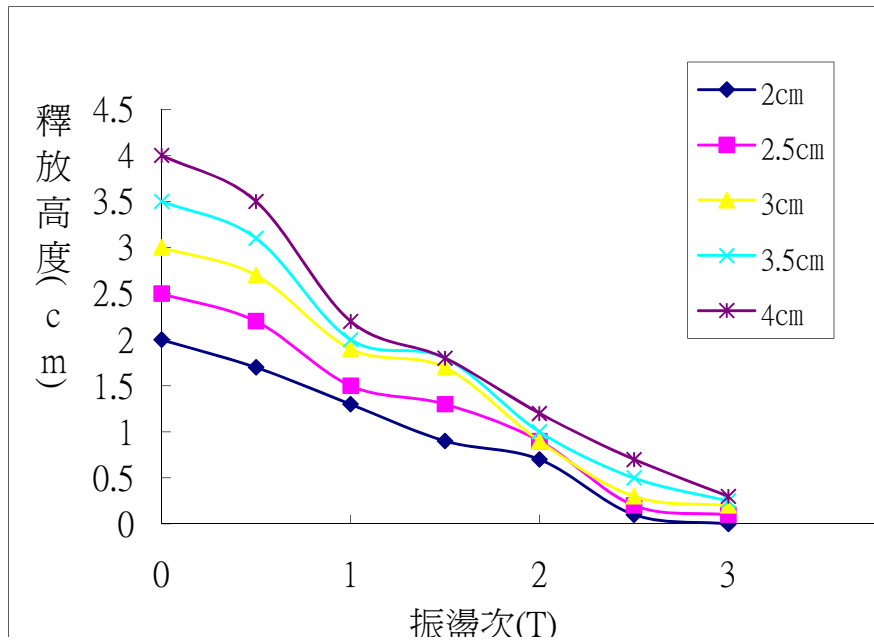
#### 實驗五、釋放高度與最大位移遞減率

(一) 取 1 號管置入鐵球 15 顆後固定質量，改變浮體釋放高度，探討釋放高度與最大位移遞減率的關係。

(二) 依實驗所做各個步驟實驗後，運用所得數據加以整理，製成以下表格和圖形：

【表九】釋放高度與最大位移

釋放高度 (cm)	一下最低點 (cm)	一上最高 點 (cm)	二下最低 點 (cm)	二上最高 點 (cm)	三下最低 點 (cm)	三上最高 點 (cm)
2.00	(-)1.70	1.30	(-)0.90	0.70	(-)0.10	0.00
2.50	(-)2.20	1.50	(-)1.30	0.90	(-)0.20	0.10
3.00	(-)2.70	1.90	(-)1.70	0.90	(-)0.30	0.20
3.50	(-)3.10	2.00	(-)1.80	1.00	(-)0.50	0.25
4.00	(-)3.50	2.20	(-)1.80	1.20	(-)0.70	0.30



【圖十一】釋放高度與最大位移(絕對值)關係圖

(三) 現象描述：由上圖各曲線的傾斜度，我們發現當釋放高度越大時，最大位移遞減率越大。

(四) 討論：

1. 若將浮體拉離水面的高度（釋放高度）愈高，所具起始能量（位能）也越大。下衝進入水中的深度將會越深，而浮體與水的接觸面積隨著浮體向下移動而越大，致使阻尼係數(b)越大，遞減率 $e^{-\beta t}$ 即越大。

2. 本組曾試著藉由 excel 試算表軟體的繪圖趨勢線功能，定量求出阻尼係數 b 與阻尼參數  $\beta$ ，但因實驗中水波擾動等誤差因素及 b 亦為時間函數（隨時在變，不是常數），故現階段先只以定性討論方式找出水中阻尼力的影響因素。

## 陸、結論：

經過五個實驗的探討後及整理後，可以歸納出幾個結論：

一、在實驗一中可以發現質量與三次完整振動所需時間的關係，大致上呈正向關係，當質量越大時，振動所需的時間越長。

二、在實驗二中的探討可以找出釋放高度與三次完整振動所需時間的關係，大致上也呈



正向關係，當釋放高度越大，所需的振動時間越長。

三、實驗三中所探討的吸管口徑與三次完整振動所需時間的關係也呈現正向的關係，當口徑越大，截面積便跟著變大，而黏滯力的係數與截面積成正向關係，因此當沒入水中的截面積增大，黏滯力也會變大，所需振動時間隨其變長。

四、浮體在水中受到水的作用力有浮力與阻尼力，其中浮力僅與水中深度（位移）有關，而阻尼力與水接觸的表面積（水中深度、口徑大小）成正相關。

五、當阻尼力越大，相同的振動次數所需時間越大。

六、在最大位移遞減率的探討中，阻尼參數  $\beta$  與浮體質量無固定規律的相關性。而與浮體與水中的接觸面積有關。

## 柒、參考資料及其他：

褚得三、蔣亨進、蔡尚芳、沈青嵩、徐國誠、楊樹基（2008）。*高中物理(上)*。台北：龍騰文化

冉長壽（1989）。*質點和系統的古典動力學*。台北：徐氏基金會。

劉素瑜、蕭農瑀（2005）。*流得住嗎？利用二次式係數探討流體阻力*。46屆全國科展。

## **【評語】 040115**

能由日常生活現象引發探究主題及相關實驗，唯研究內容與成果均係已知的物理現象，比較缺乏創意。