

# 中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 物理科

第三名

040105

利用雷射光的偏折測量擴散係數

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：  高二 劉惟中  高二 陳奕豪  高二 陳瑋智  高二 陳柏瑞	指導老師：  李文堂
---	------------------

關鍵詞：折射率梯度、擴散、擴散係數

# 利用雷射光的偏折測量擴散係數

## 摘要：

溶液和水置於同一容器中，當溶液中的溶質向上擴散時，溶液的濃度會隨著高度改變形成濃度梯度以及折射率梯度  $\frac{dn}{dy}$ 。

寬度  $a$  的透明方形盒，下方盛放溶液，上方置水，雷射光照射和鉛直成  $45^\circ$  的玻璃棒，再照射方形盒時，會在屏上形成鐘形曲線，向下偏  $Z$  的距離， $r$  為容器至屏的距離， $\frac{dn}{dy} = \frac{Z}{ar}$ 。

測量溶液和水的原始交界面處的下偏距離，可以測得擴散係數，以擴散係數不隨濃度改變的硫代硫酸鈉作實驗，得到的結果和文獻資料所載的很吻合。以濃度 55% 甘油進行實驗，其  $\frac{dn}{dy} - y$  圖，所做出圖形呈現不對稱，圖形的極大值往甘油方偏，因為甘油的擴散係數隨濃度改變，不適合用本方法測擴散係數。但濃度 10% 以下的甘油的  $\frac{dn}{dy} - y$  圖，已較對稱，用本方法測量的擴散係數和文獻資料較吻合。

## 一、研究動機：

測量水的折射率實驗時，同學在水中放入一些食鹽，未加攪拌，發現雷射光向下偏折的現象，引起我們進一步研究的興趣。

## 二、研究目的：

1. 利用雷射光照射溶液，研究溶液的折射率梯度。
2. 利用 CD 做光柵，測量液體的折射率。
3. 利用雷射光照射兩液交界處，測量溶質的擴散係數。

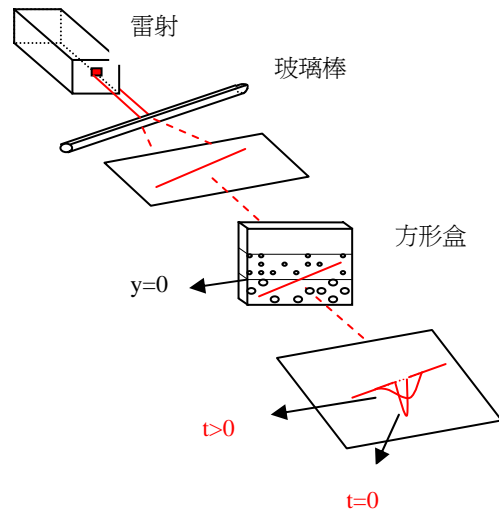
## 三、研究背景：

1. 第 42 屆全國科展高中物理科得獎作品：『利用雷射光的偏折研究溶液的折射率梯度』（註 1），雷射光照射和鉛直成  $45^\circ$  的玻璃棒後，照射下層盛硫代硫酸鈉水溶液，上層盛水的方形盒，在屏上出現鐘形曲線，由曲線的分佈作折射率梯度  $(\frac{dn}{dy})$  對高度(y)的關係圖。在討論處提到要利用  $\frac{dn}{dy} - y$  圖測量擴散係數，但未完成。追蹤到研究所將畢業的作者，為何沒有量出擴散係數？據答覆：因數學式太複雜，所以放棄。
2. G. Gaffney 等二人(註二)在 2001 年 7 月號的美國物理期刊發表 “ Using refractive index gradients to measure diffusivity between liquids ” 利用雷射光照射硫代硫酸鈉水溶液，作出  $\frac{dn}{dy} - y$  圖，再由文獻資料上查得硫代硫酸鈉的擴散係數(D)，代入高斯曲線公式〔見本文第(8)式〕畫出高斯曲線，和實驗結果的  $\frac{dn}{dy} - y$  圖比較。G. Gaffney 等人也沒有真的測量擴散係數。
3. 我們發現(8)式中，在兩液交界面處， $\because y = 0$ ，使得數學式變的比較簡單，可利用來直接測量 D 值不隨濃度變化的物質的擴散係數，我們測量到的結果和文獻資料以及  $\frac{dn}{dy} - y$  圖都相當吻合。

#### 四、原理：

1. CD 的條紋間距  $\frac{1}{625}$  mm，將 CD 用刀片刮掉長 1cm 寬 0.5cm 的鋁箔，擦拭掉染料後，成為  $d = \frac{1}{625}$  mm 的光柵。
2. 圖二所示，在半圓形盒上貼上 CD 光柵，雷射光經 CD 繞射後經空的半圓形盒在屏上出現中央主極大 ( $m=0$ ) 及第一主極大 ( $m=\pm 1$ )、第二主極大 ( $m=\pm 2$ )，  

$$d \sin \theta = m \lambda \dots (1)$$
 $\theta$ ：繞射角， $\lambda$ ：雷射光在空氣中的波長。



圖一：雷射光經玻璃棒折射成一條和鉛垂線夾角  $45^\circ$  的斜直線，經過待測液後，因為溶液的折射率隨高度改變，所以在屏上呈現鐘形曲線。

3. 半圓形盒盛入待測液，重做上述實驗， $d \sin \theta' = m \lambda' \dots (2)$ ，

$$\frac{(1)}{(2)}: \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = n \dots (3) \quad \text{測量 } \theta \text{ 及 } \theta' \text{ 即可得折射率 } n。$$

4. 方形盒寬度  $a$ ，盛有液體，溶質的濃度由下向上漸減時，折射率亦漸減。距底部  $y$  及  $y+dy$  處，折射率分別為  $n+dn$  及  $n$ 。圖三所示

$$\alpha_1 = \frac{ct/n+dn}{y} = \frac{ct/n}{y+dy} \Rightarrow \frac{dn}{dy} = \frac{n}{y} \dots (4)$$

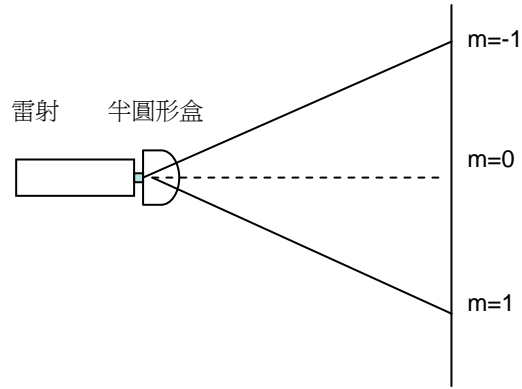
$c$ ：真空中的光速， $t$ ：雷射光經方形盒的時間。

5. 由司乃耳定律及  $\alpha_1, \alpha_2$  均  $\leq 5^\circ$  ,

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \Rightarrow n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$$

且  $\tan \alpha_1 = \frac{a}{y} = \alpha_1$  ,  $\tan \alpha_2 = \alpha_2 = \frac{Z}{r}$  代

入(4)可得  $\frac{dn}{dy} = \frac{Z}{ar} \dots (5)$



圖二：半圓形盒盛待測液，利用雷射光以及光柵測量折射率。

6. (1) Fick 第一定律得  $J = -D \frac{\partial C}{\partial y}$  ,

J：單位時間通過某截面的粒子數，

D：擴散係數，C：濃度。

(2) Fick 第二定律  $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$

(3) 方形容器下層盛待測液，上層裝水，令交界面處  $y=0$  ,  $y < 0$  處

$C = C_0 =$  溶液的原始濃度； $y > 0$

處  $C=0$  只有水沒有溶質。

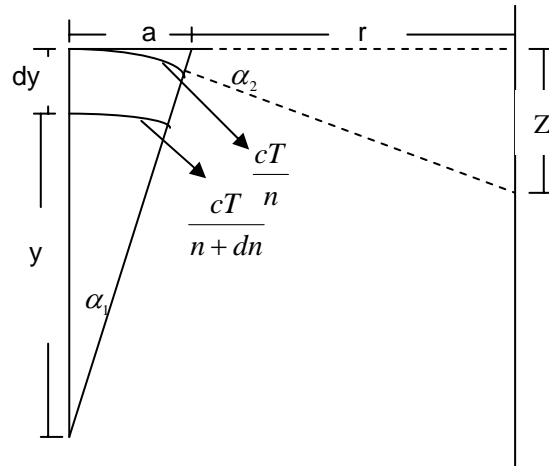
(4) 時間  $t$  後，由 Fick 定律得

$$C = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \dots (6)$$

當溶質的擴散係數不隨濃度改變

時，將(6) 式微分可得

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{C_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \dots (7)$$



圖三：雷射光在溶液中的偏折。

(5) 當折射率和濃度成線性關係時，由  $\frac{dn}{dy} = \frac{dn}{dC} \cdot \frac{dC}{dy}$  可得  $\frac{dn}{dy} = \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \dots (8)$

$n_1$  為原始溶液的折射率， $n_2$  為水的折射率，此式為高斯函數，其軌跡稱為高斯曲線，又名鐘形曲線。

7. 在(8)式中， $y=0$  時  $\frac{dn}{dy} = \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}} \dots (9)$  , (5)和(9)結合： $\frac{Z}{ar} = \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}} \dots (10)$  ,

量  $Z, a, r, n_1, n_2, t$  可得擴散係數  $D$ 。由(10)式  $\frac{1}{Z^2} = \frac{4\pi D}{[(n_1 - n_2)ar]^2} t \dots (11)$  實驗時只要

量  $Z$  及  $t$ ，作  $\frac{1}{Z^2} - t$  圖，斜率 =  $\frac{4\pi D}{[(n_1 - n_2)ar]^2} \dots (12)$  即可求出  $D$ 。

## 五、實驗步驟：

1. 測量水的折射率：如圖二所示，雷射光照射半圓形盒，由  $m=0$  及  $m=\pm 1$  量出  $\theta$ ，盒中放入水後，量得  $\theta'$ ，由(3)  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = n$  量得水的折射率。
2. 測量溶液的折射率：和步驟 1 相同方法。
3. 方形盒下層放入 3 公分高的硫代硫酸鈉水溶液。用橡皮管將注射筒連接一針頭，針頭緊貼著盒壁，緩注入水，需注意兩液的接觸面不要發生擾動，至水的高度亦為 3 公分。雷射光照射和鉛直成  $45^\circ$  的玻璃棒，再照射方形盒，在屏上貼一張白紙，屏上會出現鐘形曲線，每隔一段時間，用筆畫下曲線的軌跡。
4. 改換尿素、甘油(不同濃度)、氯化銨、蔗糖、葡萄糖等水溶液，重複上述實驗。
5. 測量方形盒寬度  $a$ ，盒到屏的距離  $r$ 。測量鐘形曲線相對應於  $y$  的下偏距離  $Z$ 。
6. 電腦作  $\frac{1}{Z^2} - t$  圖，求斜率以求  $D$  值。

## 六、實驗結果：

1. 硫代硫酸鈉的水溶液的折射率隨濃度的變化如表一及圖四所示，呈線性關係，所以(7)式

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{C_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{\frac{-y^2}{4Dt}}$$

可以變成(8)式。

$$\frac{dn}{dy} = \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{\frac{-y^2}{4Dt}}$$

2. 濃度 28% 的硫代硫酸鈉

的  $\frac{1}{Z^2} - t$  圖如圖五所示，其斜率為  $1.899 \times 10^{-7}$ ，又  $n_1 = 1.433$ ， $n_2 = 1.334$ ，

表一：硫代硫酸鈉水溶液的折射率隨濃度的變化(25°C)

	濃度	$\sin \theta$	$\sin \theta'$	N
1	15(%)	0.3955	0.2917	1.356
2	20(%)	0.3955	0.2870	1.378
3	25(%)	0.3955	0.2825	1.400
4	30(%)	0.3955	0.2781	1.422
5	35(%)	0.3955	0.2760	1.433

$a=1\text{cm}$ ，  $r=225\text{cm}$ ，

$$\text{由(11)式斜率} = \frac{4\pi D}{[(n_1 - n_2)ar]^2}$$

可求得  $D=7.5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

3. 圖六的圓點為擴散 160 分鐘後的 28% 水溶液

之  $\frac{dn}{dy} - y$  圖為實驗結

果，藍色的線為利用(8)

$$\frac{dn}{dy} = \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}$$

$D=7.5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$  作

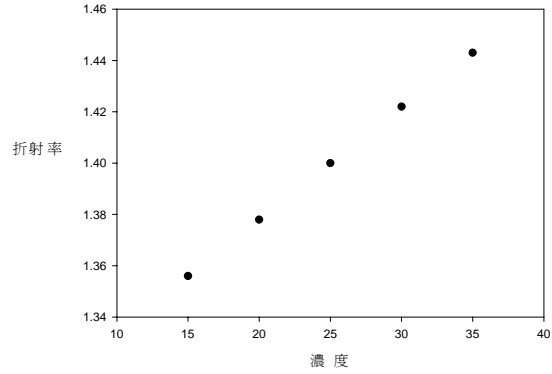
出的理論曲線。由圖可看出測量值和理論值十分吻合：由對稱的鐘形曲線，可知硫代硫酸鈉的擴散係數不隨濃度改變。

4. 圖七為 55% 的甘油水溶液

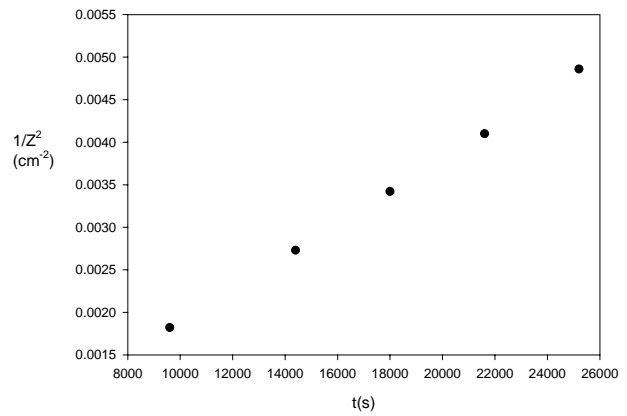
$\frac{dn}{dy} - y$  圖，由圖可看出曲線

向甘油方偏折，因為  $25^\circ\text{C}$  下濃度 55% 的甘油黏滯係數高達 6.58CP 為水的 7.4 倍，高黏滯力使得甘油不易擴散，所以擴散係數小。因甘油的黏滯係數隨濃度的增大而增大，所以，甘油這一端因擴散使濃度漸

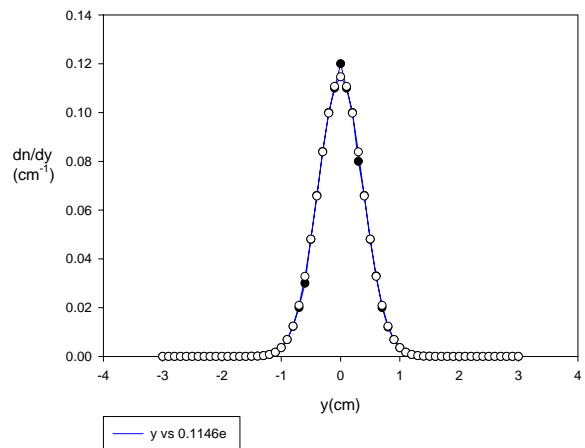
小，擴散係數漸增  $\frac{dn}{dy} - y$



圖四：硫代硫酸鈉水溶液的折射率隨濃度(%)的變化。



圖五：雷射光照射 28% 硫代硫酸鈉水溶液的偏折對時間關係。

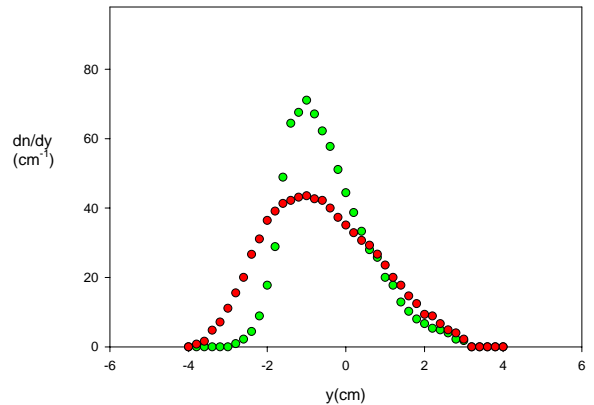


圖六：硫代硫酸鈉(28%)的  $dn/dy$  對  $y$  關係圖，藍色的線為理論值，圓點為實驗結果。

圖向甘油這方偏。

5. 圖八為 10% 的甘油的水溶液的

$\frac{dn}{dy} - y$  圖，25°C 10% 的甘油水溶液，其黏滯係數已降至 1.16CP 為水的 1.3 倍。由文獻資料知擴散係數  $D=1.06 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  代入(8)畫出的高斯曲線雖和實驗值不重疊，但已不似圖(7) 所示 55% 甘油相差很多。



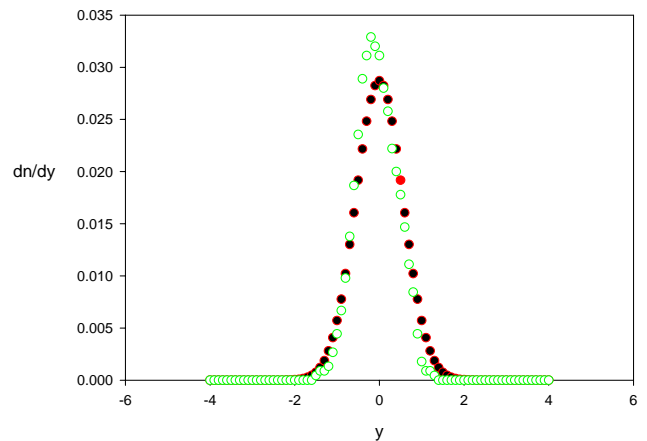
圖七：55%的甘油水溶液的折射率梯度對高度關係圖，綠色點：擴散 8100 秒，紅色點：擴散 23160 秒；圖形不對稱，偏向甘油那一方線。

6. 我們還做了氯化銨水溶液，結果

是  $\frac{dn}{dy} - y$  圖向水那一方偏，顯示：氯銨的擴散係數隨水溶液濃度的增大而增大。

6. 尿素對水的溶解度很大，其擴散係數亦隨著水溶液濃度的增大而減少，但 10% 以下，幾乎為定值  $=1.38 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

8. 蔗糖的擴散係數亦隨著水溶液的濃度增大而減少，但 10% 以下，幾乎為定值  $=5.23 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。



圖八：10%的甘油水溶液的折射率梯度對高度關係圖，綠色點：實驗值，紅色點：理論值；實驗值的圖形雖不對稱，但偏向甘油那一方的量已減緩。

## 七、討論：

1. 本實驗測量液體的折射率為四位有效數字。

2. 溶質的折射率為  $n_s$ ，溶劑的折射率為  $n_f$ ，濃度 C 的溶液的折射率為 n。

$$n^2 = n_f^2 + C(n_s^2 - n_f^2) \dots (13), \quad \frac{dn}{dC} = \frac{n_s^2 - n_f^2}{2\sqrt{n_f^2 + C(n_s^2 - n_f^2)}} \dots (14)$$



但由實驗的結果知圖四顯示，濃度小於 28% 的硫代硫酸鈉水溶液，其折射率和濃度的關係為線性。所以(7)式可以因  $\frac{dn}{dy} = \frac{dn}{dC} \cdot \frac{dC}{dy}$  改成(8)式。

3. 硫代硫酸鈉的擴散係數不隨水溶液的濃度改變；由圖五可看出  $\frac{1}{Z^2}$  對時間 t 的關係為線性，所以可利用本實測量擴散係數。而且由圖六可看出將測得的擴散係數代入(8)式得到  $\frac{dn}{dy} - y$  的理論高斯曲線，和實際實驗的  $\frac{dn}{dy} - y$  圖十分吻合。
4. 純甘油的黏滯係數在 25°C 下高達 956CP（約為水的 1000 倍），在 55% 的濃度下，黏滯係數為 6.582CP。黏滯係數大，不易擴散，所以實驗的  $\frac{dn}{dy} - y$  圖如圖七所示，沒有對稱，向甘油方偏，顯見濃度大的甘油，擴散係數小。
5. 濃度 10% 的甘油，黏滯係數已降至 1.16CP，利用本實驗測得的擴散係數和文獻資料所列的 D 值已相差較少。圖八實驗得到的  $\frac{dn}{dy} - y$  圖和理論的高斯曲線，已較接近，所以濃度 10% 以下的甘油水溶液，用本實驗方法也可以測量 D 值。
6. 尿素水溶液在濃度 10% 以下亦適本方法測 D 值。
7. 擴散係數的變化基於兩大因素，即熱動力因素（thermodynamic factor）及流體動力因素（hydrodynamic factor）通常二者為對立狀態，前者乃由於溶液不是理想狀態，使 D 值隨著濃度增大而增大。後者因為黏滯性使 D 值隨濃度的增大而減少。我們試著將溫度納入操縱變因以探討熱動力因素對實驗結果的影響。將冬天和夏天所作實驗結果比較，數據差異甚小，應是因為位處副熱帶的實驗室內冬夏溫差太小。

(一)、硫代硫酸鈉水溶液的兩大因素對消而使 D 值不隨濃度改變。

(二)、氯化銨的黏滯係數很小，使 D 值隨濃度的增大而增大。

(三)、愈純的甘油的黏滯係數愈大，使 D 值隨濃度的增大而減少。

(四)、文獻資料可測得  $LiNO_3$ ,  $CaCl_2$  的 D 值隨水溶液的濃度先增大後減少。LiCl

則先減少後增大。

## 八、結論：

1. 本實驗利用很簡單的器材以及光的折射、繞射現象可以測量液體的折射率及折射率梯度。
2. 測量擴散係數需要用到相當複雜的工程數學，本實驗針對擴散係數不隨濃度改變的物質，將數學式簡單化，可以測量出擴散係數，所得的結果和  $\frac{dn}{dy} - y$  圖十分吻合。

## 九、參考資料：

1. 中華民國第 42 屆科展得獎專輯高中物理科「利用雷射光的偏折研究溶液的折射率梯度」[www.ntsec.edu.tw](http://www.ntsec.edu.tw)
2. G. Gaffney and Check-Kin Chau “Using refractive index gradients to measure diffusivity between liquids” ,Am , J . phys , **69**,821-825(2001)
3. F. Francini , P. K, Buah Bassuah and F. T. Arrechi “Scanning beam technique to measure small diffusion coefficient” , Optics Communication , **105**,285-288(1994)

## **【評語】 040105**

- 1、 本作品以雷射偏折量量測擴散係數具新穎技術思維。
- 2、 能透過理論推導利用於量測數值得鼓勵，研究過程完整。
- 3、 應可進一步思維，利用所發展技術實質量測其他技術無法量測的系統或裝置。