

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 物理科

第二名

040104

向左飄，向右飄

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者： 高二 陳柏芊 高二 呂宗政 高二 邱仁祥 高二 黃瑋	指導老師： 莊文治 胡育豪
--	-----------------------------

關鍵詞：白努利方程式、阻尼簡諧

摘要：

物體在靜止流體中的運動看似雜亂無章，但其中應該存在著某些規律，於是我們選擇中心有孔的鐵片(以下簡稱鐵片)為研究的主體，改變鐵片的內徑，在水中以不同初始角度釋放(以下簡稱初始角度)，觀察分析出不同情況下鐵片在水中的運動情形，發現鐵片與水平面之夾角為一反阻尼角簡諧振盪運動，且鐵片在 z 軸的運動、距 z 軸之距、整段下降時間、在水平面上的來回運動……等都存在著許多關係。最後再利用自製風洞實驗驗證關於流線的推論。

壹、研究動機：

一日，本組一名同學，到許願池投擲硬幣入水時，發現硬幣在水中會左右擺動，且每個硬幣的運動模式似乎有所不同，經過討論後覺得很有趣，於是我們決定設計實驗並利用高中所學到的流體的概念探討鐵片在水中的運動形態。

貳、研究目的：

- 一、觀察、分析相同鐵片、不同初始角度時，在水中的運動：
 - (一)運動模式分類。
 - (二)z 軸的運動行為。
 - (三) x-y 平面的運動模式。
 - (四)鐵片與水平面之夾角 θ 在運動過程中的變化。
 - (五)下降相同距離所需的時間。
- 二、觀察鐵片周圍的流線分佈情形。
- 三、觀察、分析不同內徑鐵片、不同初始角度時，在 z 軸的運動。

參、研究設備及器材：

一、水箱	二、中心有孔洞之鐵片	三、SONY 攝影機
四、電磁鐵(製作器具：漆包線、鐵棒、膠帶、熱熔膠)		
五、鐵架	六、探照燈	七、鹽酸+氨水
八、壓克力管	九、珍珠板	十、吸管

肆、研究過程和方法：

一、實驗一：

(一) 器材製作：

1. 電磁鐵：取 7 根鐵棒，用膠帶將其捆成六角柱形並以漆包線纏繞 8 層，於其一端黏貼小木塊以減少磁力對鐵片下落之影響。
2. 方格紙：繪製以每 1.5cm 為一格的方格紙兩張黏貼於水箱壁作為 x - z 平面與 y - z 平面之座標。(如 p.3 圖(1))

(二) 儀器架設：

1. 將電磁鐵製作完成後黏於小木片上，再用鐵夾將木片固定於鐵架上，把電磁鐵裝置固定在水箱上方，並將其吸附端沒入水中。
2. 用電線連接電磁鐵與電源供應器，控制電源供應器之電流大小以調整電磁鐵之磁力。(如 p.3 圖(2))
3. 將鐵片吸附在電磁鐵上，旋轉鐵夾改變鐵片之初始角度(與水平面之夾角)，關閉電源供應器之開關使電磁鐵磁力消失以控制鐵片之釋放。
4. 於距離水箱 3.74 公尺處架設兩台每秒 120 張的攝影機分別紀錄鐵片在水中於 xz 平面、 yz 平面之路徑。(如 p.3 圖(3))

(三) 實驗分析：

1. 觀察相同鐵片、不同初始角度的運動模式分類：
 - (1) 以通過投放點之鉛直線為 z 軸(投放點為原點，向下為+)，平行水面之平面為 x - y 平面。
 - (2) 以鐵片與水平面之夾角 θ_0 為初始角度。(如 p.3 圖(4))
 - (3) 影片播放軟體 KMPLAYER 播放已錄製完成的影片，再利用路徑分析軟體 KAVIDEO 記錄其軌跡並加以分類。
2. 分析相同鐵片、不同初始角度，鐵片在 z 軸的運動行為：
 - (1) 經軟體 KMPLAYER 播放已錄製完成的影片，對照水箱壁上的方格紙，紀錄鐵片的座標位置。
 - (2) 由 EXCEL 繪出所需的關係圖並加以分析探討：
 - A. z - t 圖：以每 $3/120$ s 為一數據點紀錄鐵片下降過程中 z 軸位置與時間的關係。
 - B. v_z - t 圖：
$$\overline{v_z} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$
 - C. a_z - t 圖：
$$\overline{a_z} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$
3. 分析相同鐵片、不同初始角度，鐵片在水平面(x - y 平面)的運動模式：
 - (1) 經軟體 KMPLAYER 播放已錄製完成的影片，對照水箱壁上的方格紙，紀錄鐵片在第一次轉折點的 x 、 y 座標位置。
 - (2) 由轉折點座標計算第一次轉折點到 z 軸的距離 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. 分析相同鐵片、不同初始角度，鐵片與水平之夾角 θ 在運動過程中的變化：

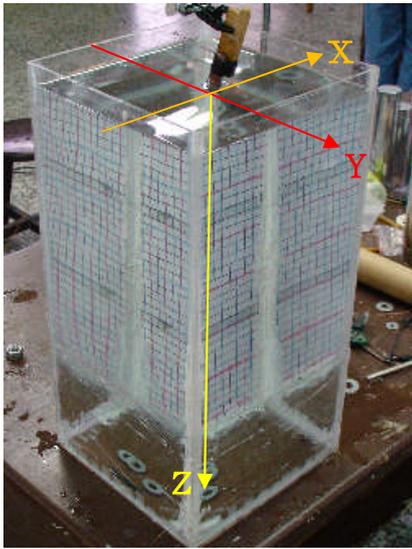
(1) 以每 $3/120$ s 為一數據點記錄鐵片整段下降過程中與時間的關係：

A. θ 由 $\sin \theta = \frac{3.2d}{3.87}$ (3.87cm 為鐵片外徑, d 為影片中量得之距離, 3.2 為實際距離與影片中量得之距離之比例)得知。

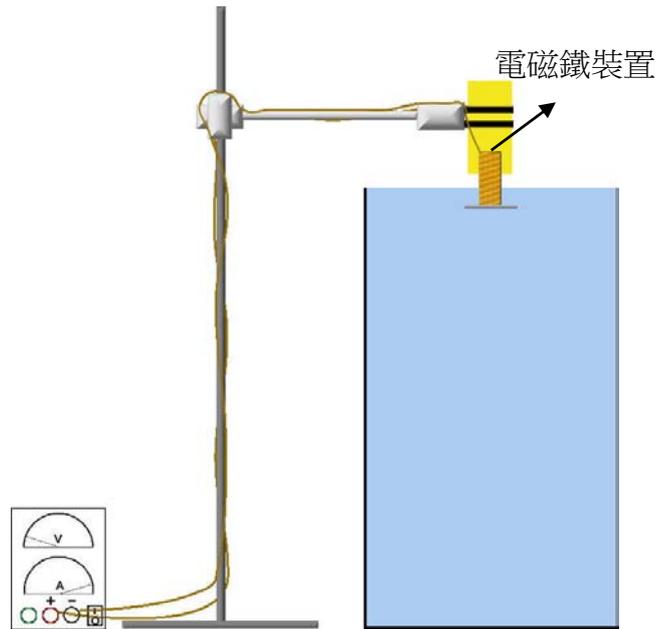
B. $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

(2) 觀測以不同初始角度釋放之鐵片在轉折處的角度, 並加以分析。

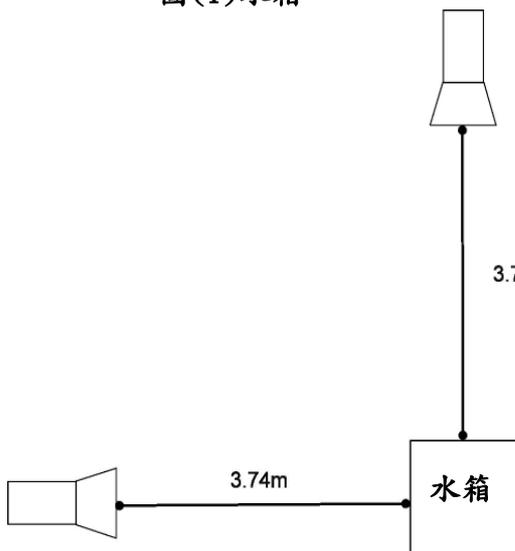
5. 觀測相同鐵片、不同初始角度, 鐵片下降相同距離(51cm)所需的時間：
將錄製完成的影片轉成 AVI 檔後, 用影片分析軟體 MOVIE GEAR 記錄鐵片下降 51cm 之總影格數, 再乘上單張時間間距(1/120 s)即為其下落總時間。



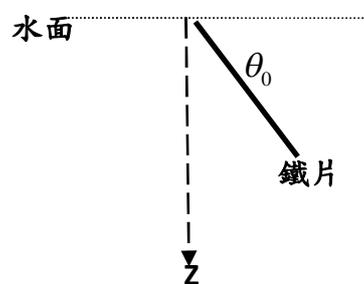
圖(1)水箱



圖(2)實驗儀器裝置



圖(3)攝影機配置



圖(4) θ_0 示意圖



圖(5)實驗用鐵片

質量：17.57g
內徑：1.83cm
外徑：3.87cm
厚度：0.25cm

二、實驗二：

(一) 器材製作：(如圖(7))

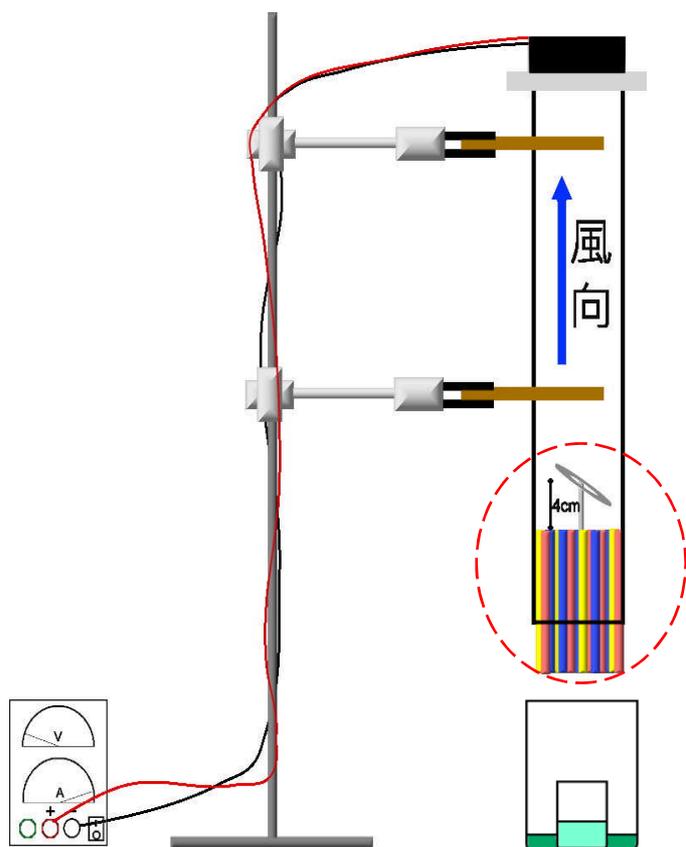
1. 分流設施：用膠帶將吸管捆成一直徑約 8cm 的圓柱。
2. 模型片：將珍珠板裁剪成與鐵片尺寸相同的模型片。
3. 自製支架：用細的白鐵絲製成一 L 型支架(“|”部分與“—”由自製可調整關節連接)。

(二) 儀器架設：(如圖(6))

1. 將風扇以自製 PP 瓦楞紙卡榫固定於圓柱形透明壓克力管的上端開口處。
2. 於下端管口上方 15cm 處以自製支架架設模型片。
3. 將分流設施安裝於模型片下方 4cm 處。
4. 將上述裝置完成並固定後，於裝置下端放置一裝有小燒杯的大燒杯(內分別有濃度 12M 的鹽酸和氨水)製造白色煙霧。
5. 利用風扇抽風使煙霧通過分流設施流入管中，觀察煙霧流經模型片情形。

(三) 實驗分析：

將影片錄製完成後，以軟體 KMPLAYER 觀察煙霧流經模型片之情形，把流線較明顯的圖片截取出來，使用 PhotoImpact 11 處理圖片並畫上空氣流動的方向。



圖(6)實驗儀器裝置

壓克力管尺寸：

內徑：19.35cm，長度：98.00cm



圖(7)裝置特寫

三、實驗三：

(一) 器材製作：

將 4 號鐵片中心孔洞外磨以增加內徑(每號鐵片內徑差 4mm)。

鐵片編號	1	2	3	4
外徑 $2R$ (cm)	3.79	3.79	3.79	3.79
內徑 $2r$ (cm)	2.88	2.48	2.08	1.68
質量(g)	8.98	12.39	15.00	17.42
厚度(cm)	0.24	0.24	0.24	0.24

表 (1)

(二) 儀器架設：如實驗一

(三) 實驗分析：

1. 將影片錄製完成後，以影片分析軟體 MOVIE GEAR 剪接影片，再以路徑分析軟體 KAVIDEO 得鐵片之 z 軸位置。

2. 由 EXCEL 繪出所需的關係圖並加以分析探討：

(1) $z-t$ 圖：以每 $1/120$ s 為一數據點紀錄鐵片下降過程中 z 軸位置與時間的關係。

(2) v_z-t 圖：
$$\overline{v_z} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$



圖(8)由左至右為編號 1~4 號

伍、研究結果：

一、實驗一：

(一) 相同鐵片、不同初始角度的運動模式分類。

1. 第 1 類：以通過投放點之鉛直線為軸(z 軸)左右擺盪。

有出現此模式之初始角度 0° 、 7.5° 、 30° 、 45° 。(如圖(10-1))

2. 第 2 類：以通過投放點之鉛直線為軸左右擺盪，且在轉折處出現垂直下落現象(虛線)。

有出現此模式之初始角度 0° 、 7.5° 、 15° 、 30° 、 45° 。(如圖(10-2))

3. 第 3 類：以偏離 z 軸之鉛直線為軸(粗線)左右擺盪。
有出現此模式之初始角度 45°。(如圖(10-3))
4. 第 4 類：以偏離 z 軸之鉛直線為軸(粗線)左右擺盪，轉折處有出現垂直下落現象(虛線)。
有出現此模式之初始角度 60°、75°、82.5°。(如圖(10-4))
5. 綜合以上 4 類分類結果可知初始角度 0°~45° 投放之鐵片均會以 z 軸為中心軸左右擺盪，而初始角度 60° 以上投放之鐵片均會以偏離 z 軸之鉛直線為軸左右擺盪。

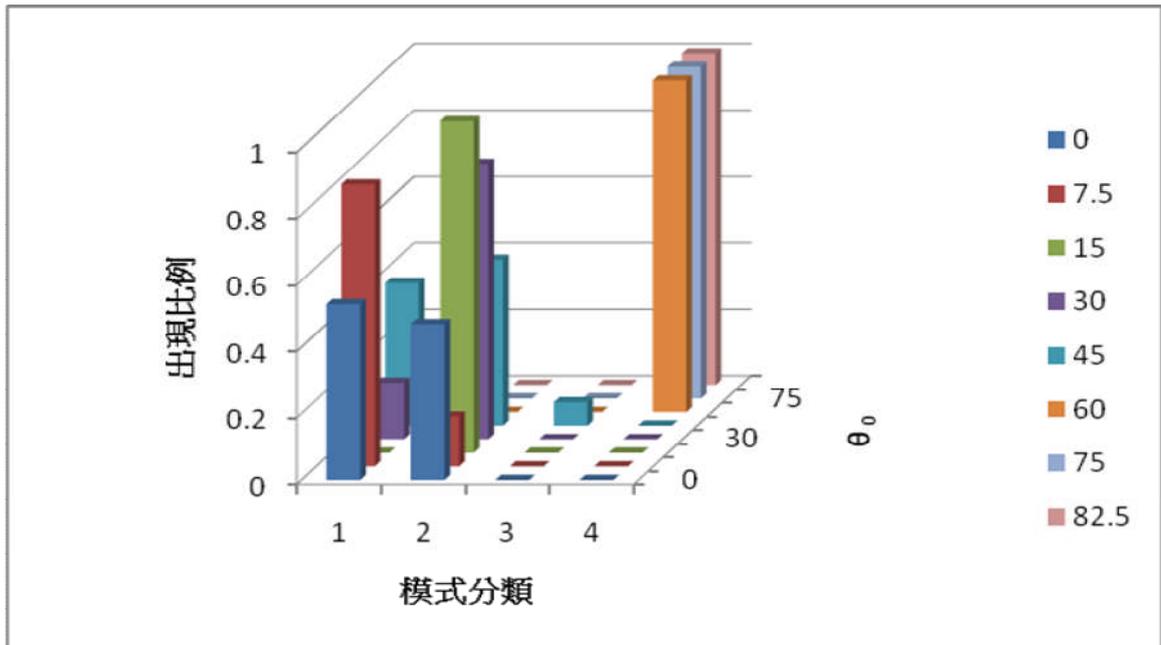


圖 (9) 不同初始角度之運動模式分類比例圖

θ_0	0°	7.5°	15°	30°	45°	60°	75°	82.5°
類別	1	1	2	2	2	4	4	4

表 (2) 不同初始角度之最可能運動模式

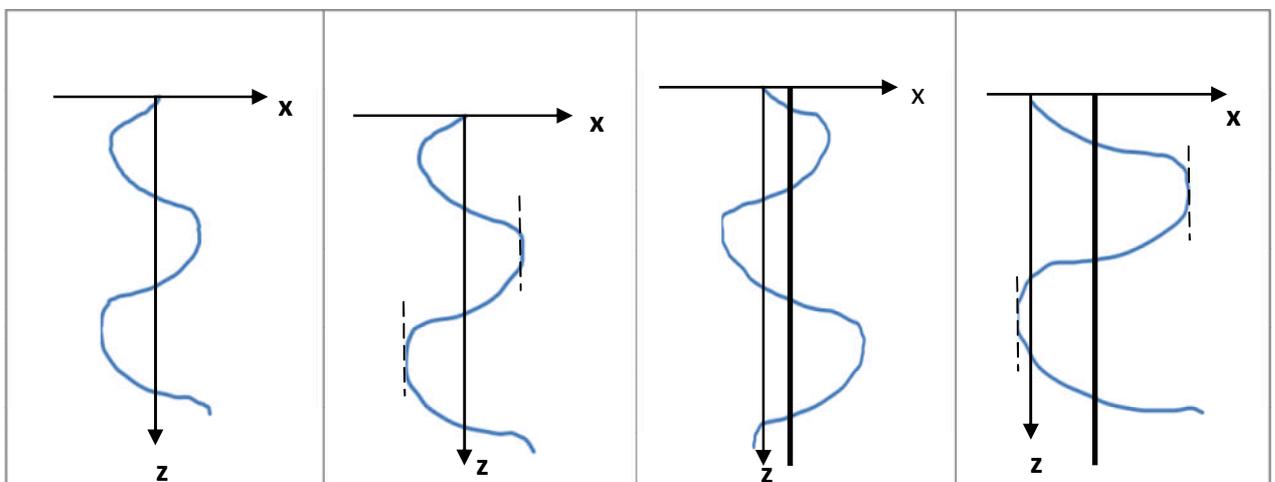


圖 (10-1)

圖 (10-2)

圖 (10-3)

圖 (10-4)

圖(10-1~3)為初始角 45°，圖(10-4)為初始角 75°

(二) 分析相同鐵片、不同初始角度，鐵片在 z 軸的運動行為：

1. z-t 圖：(如圖(11))

將鐵片在各種初始角度的 z-t 圖進行比較，可依 z-t 圖之平均斜率、呈直線或階梯狀分成下列三類：

- (1) $\theta_0=0^\circ$ 、 7.5° 時，z-t 圖近似一直線。(如圖(11-1))
- (2) $\theta_0=15^\circ$ 、 30° 、 45° 時，z-t 圖近似同一條階梯狀曲線。(如圖(11-2))
- (3) $\theta_0=60^\circ$ 、 75° 、 82.5° 時，z-t 圖為階梯狀曲線， θ_0 越大平均斜率越大。(如圖(11-3))

- (4) 初始角度 $0^\circ\sim 45^\circ$ 之 z-t 圖的斜率相近，初始角度 $60^\circ\sim 82.5^\circ$ 的 z-t 圖中，初始角度越大，則平均斜率越大，因此我們推斷初始角度大於等於 45° 後 z-t 圖的平均斜率隨初始角度增大而增大。(如表(3))

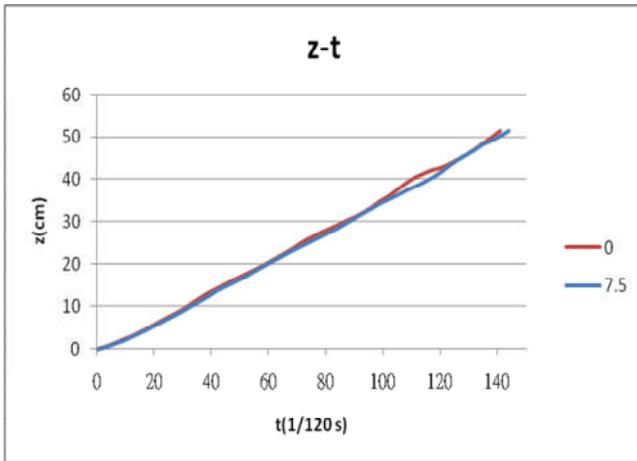


圖 (11-1) $\theta_0=0^\circ$ 、 7.5° z-t 比較圖

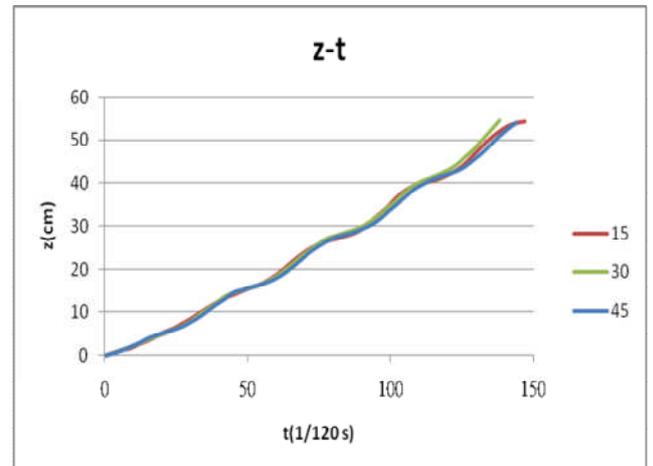


圖 (11-2) $\theta_0=15^\circ$ 、 30° 、 45° z-t 比較圖

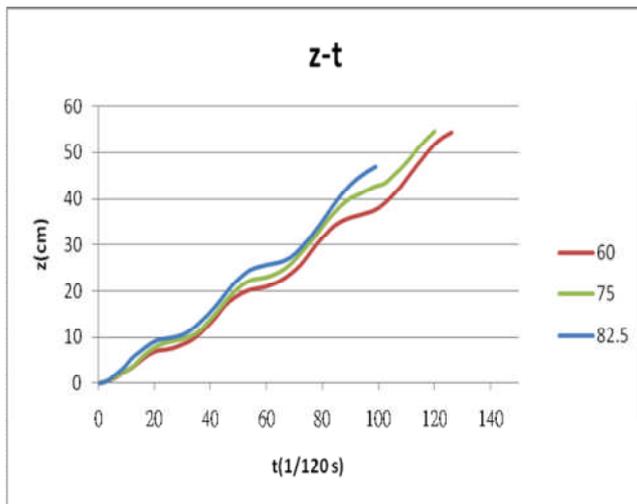


圖 (11-3) $\theta_0=60^\circ$ 、 75° 、 82.5° z-t 比較圖

【附註】

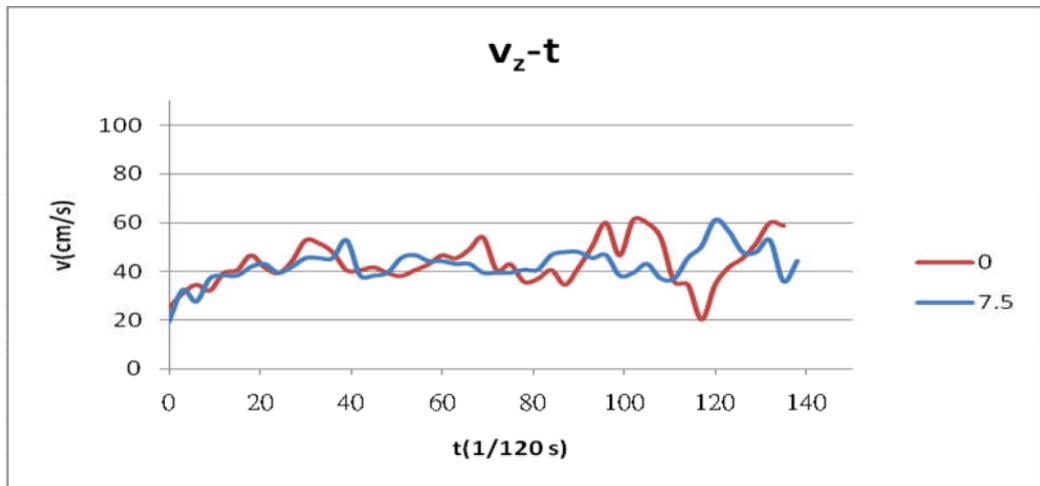
- (1) 實驗初始角度 82.5° ：鐵片以初始角度 90° 投放後，在第一次轉折就會撞到水箱壁，無法進行觀察，因此我們改以 82.5° 進行實驗。
- (2) 實驗初始角度 7.5° ：初始角度 0° 時，鐵片的 z-t 圖幾乎呈一條直線，而初始角度 15° 的 z-t 圖為一條階梯狀的曲線，因此我們決定增加初始角度 7.5° 的實驗以觀察鐵片在初始角度 $0^\circ\sim 15^\circ$ 之變化情形。

θ_0	0°	7.5°	15°	30°	45°	60°	75°	82.5°
z-t 圖平均斜率	0.3540	0.3460	0.3538	0.3551	0.3462	0.3967	0.4256	0.4441
平均速率(cm/s)	42.48	41.52	42.46	42.61	41.54	47.60	51.07	52.92

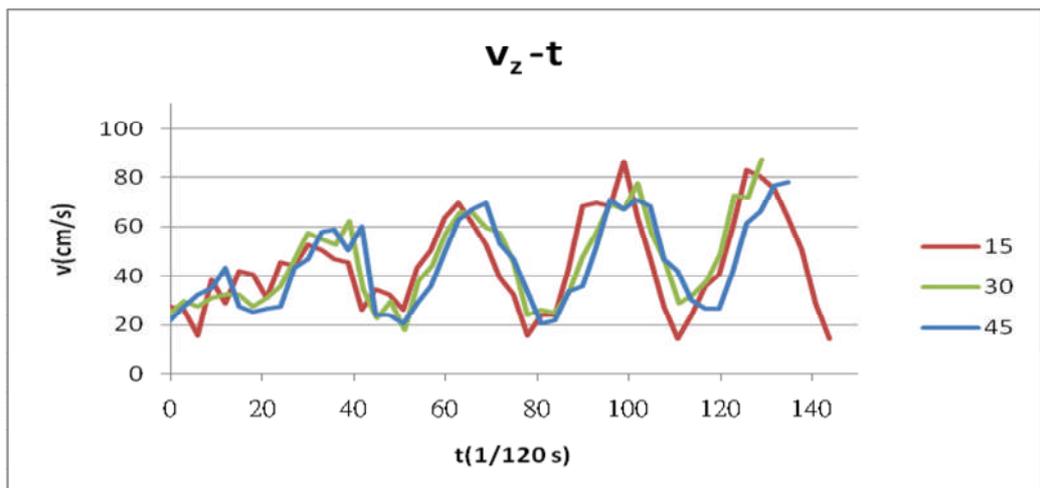
表 (3)

2. v_z-t 圖：（如圖(12)）

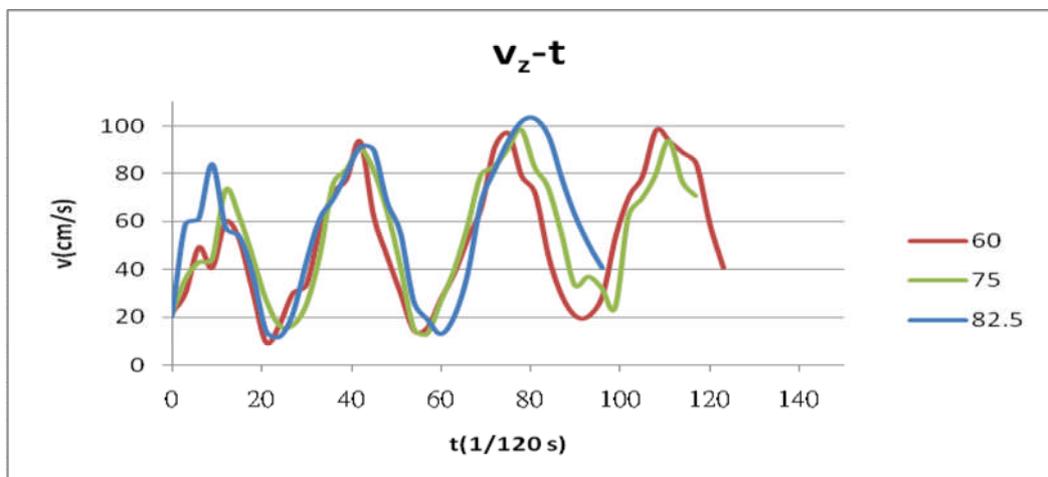
- (1) 各種初始角度的 v_z-t 圖皆為振盪曲線，且初始角度越大，週期性越明顯。
- (2) 初始角度 0° 、 7.5° 所製成的 v_z-t 圖比其他角度凌亂；初始角度 15° 、 30° 、 45° 的 v_z-t 圖模式相近；初始角度 60° 、 75° 、 82.5° 所製成 v_z-t 圖模式相近。



圖(12-1) $\theta_0 = 0^\circ$ 、 7.5° 的 v_z-t 比較圖



圖(12-2) $\theta_0 = 15^\circ$ 、 30° 、 45° 的 v_z-t 比較圖



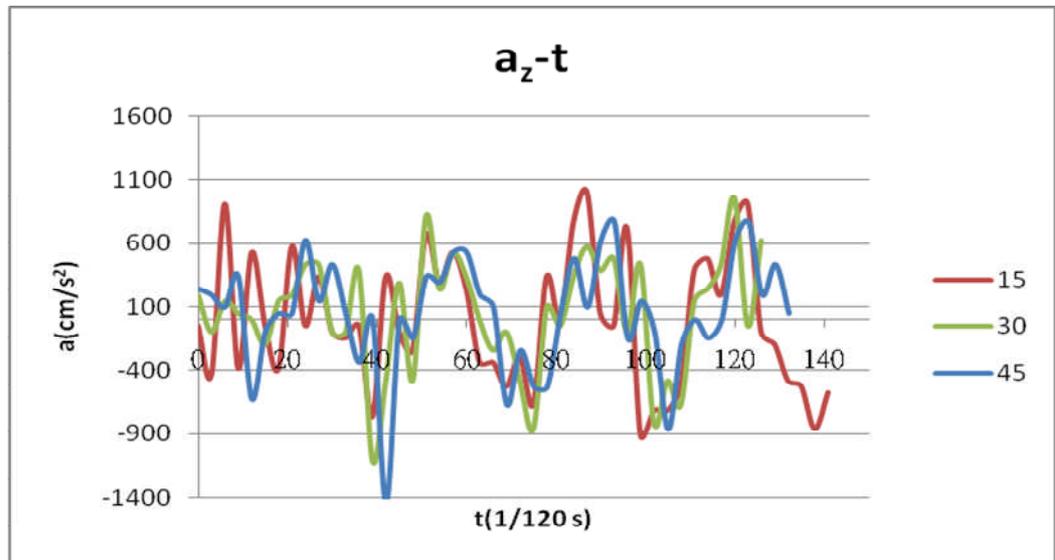
圖(12-3) $\theta_0 = 60^\circ$ 、 75° 、 82.5° 的 v_z-t 比較圖

3. a_z - t 圖：(如圖(13))

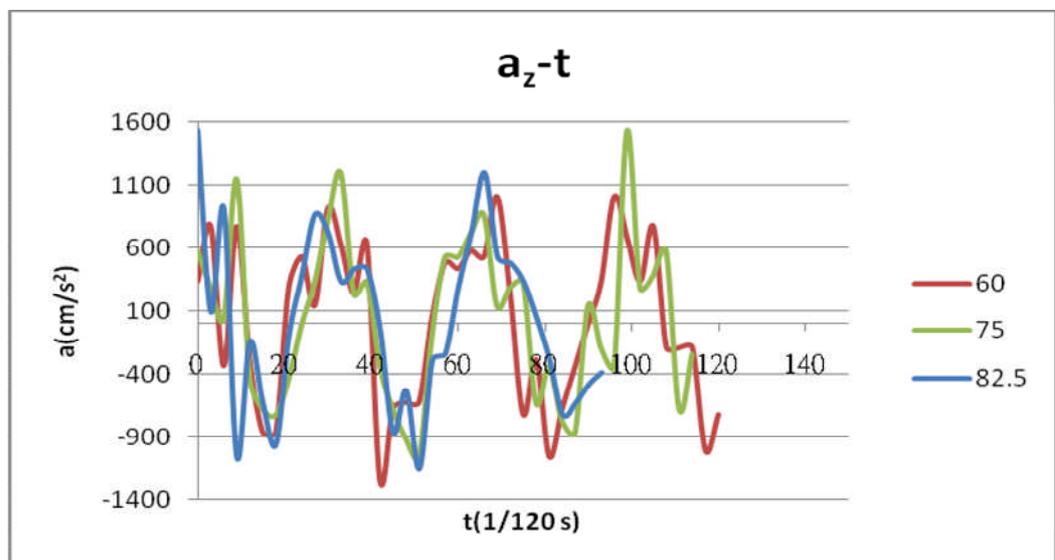
(1) 初始角度 15° 、 30° 、 45° 之 a_z - t 的週期皆為 0.150 s ，且實驗用的鐵片相同，由 $F_z=ma_z$ ，推斷鐵片在水中之受力變化之週期相近。

(2) 初始角度 60° 、 75° 、 82.5° 之 a_z - t 之週期皆為 0.138 s ，且實驗用的鐵片相同，由 $F_z=ma_z$ ，推斷鐵片在水中之受力變化之週期相近。

【附註】因初始角度 0° 、 7.5° 之 a_z - t 圖過於凌亂且無明顯週期，在此不予以討論。



圖(13-1) $\theta_0=15^\circ$ 、 30° 、 45° 的 a_z - t 比較圖



圖(13-2) $\theta_0=60^\circ$ 、 75° 、 82.5° 的 a_z - t 比較圖

(三) 觀測相同鐵片、不同初始角度，鐵片在水平面(x-y 平面)的運動模式。

1. 所有鐵片均會在 x-y 平面上作左右來回的振盪運動。
2. 鐵片的來回振盪的震幅有隨初始角度增加而增加的趨勢(如圖(14))。

第一次轉折點到 z 軸的距離 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cm)。

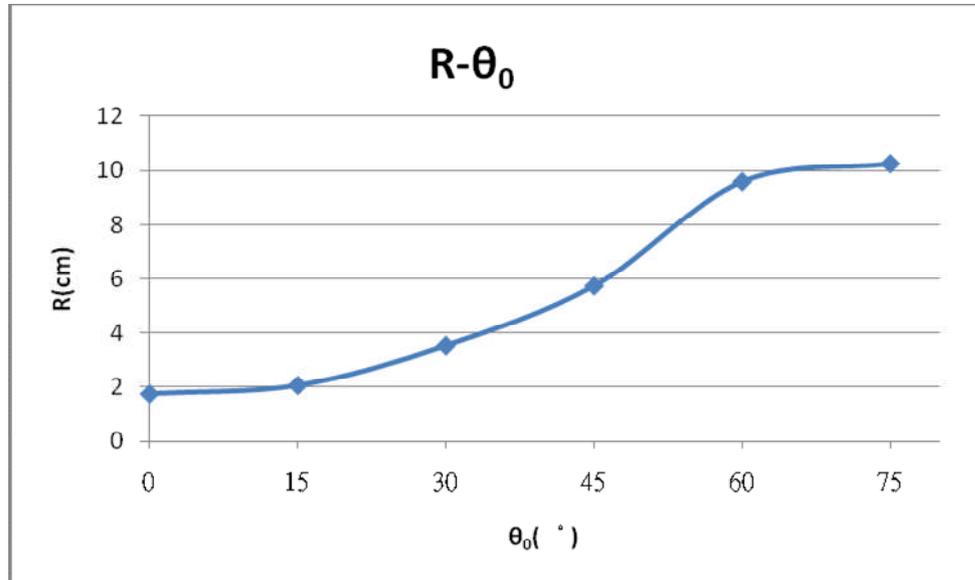


圖 (14)

(四) 觀測相同鐵片、不同初始角度，鐵片與水平之夾角 θ 在運動過程中的變化。

1. 每個 θ -t、 ω -t 圖皆為振盪曲線。(如圖(15~16))
2. 如圖(15-1、2)中可以發現鐵片開始運動後的角度擺盪大致可分 $15^\circ \sim 45^\circ$ 及 $60^\circ \sim 82.5^\circ$ 兩類。小初始角度 θ -t 圖之振幅較小但成長速度較大初始角度快。
3. 每個 θ -t 圖中振幅均逐漸放大，表示轉折點處鐵片與水平之夾角越來越大。(如圖(17) 、表(4))

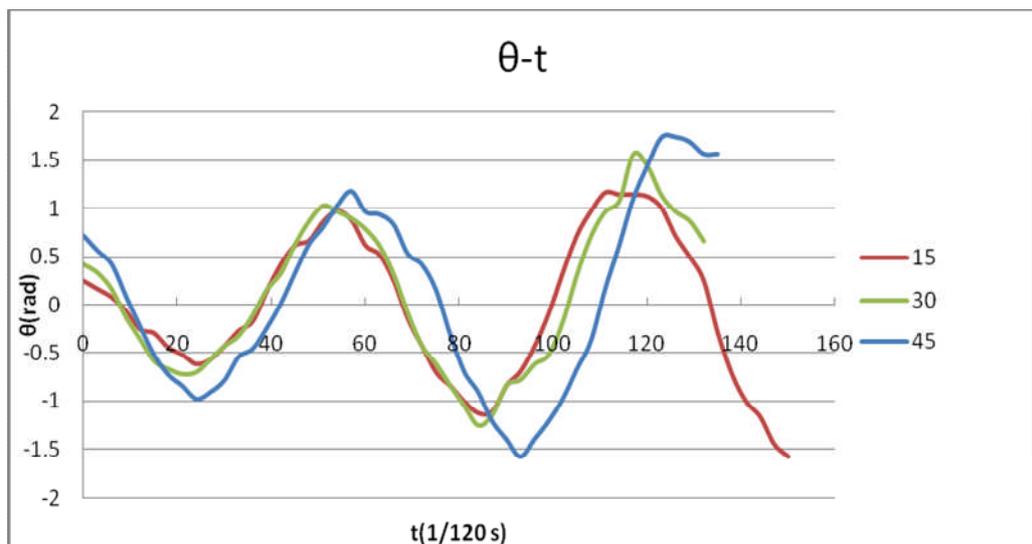


圖 (15-1) 15° 、 30° 、 45° θ -t 比較圖

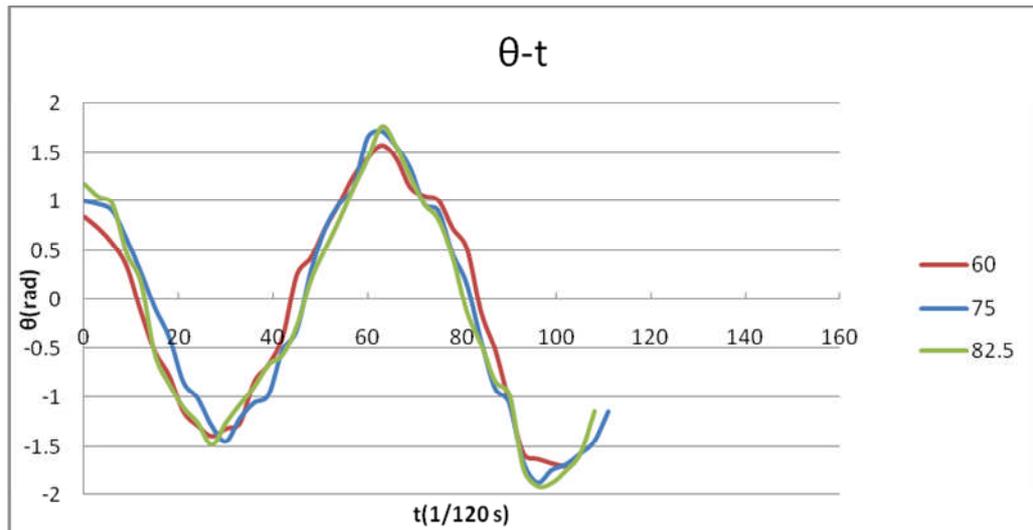


圖 (15-2) 60°、75°、82.5° $\theta-t$ 比較圖

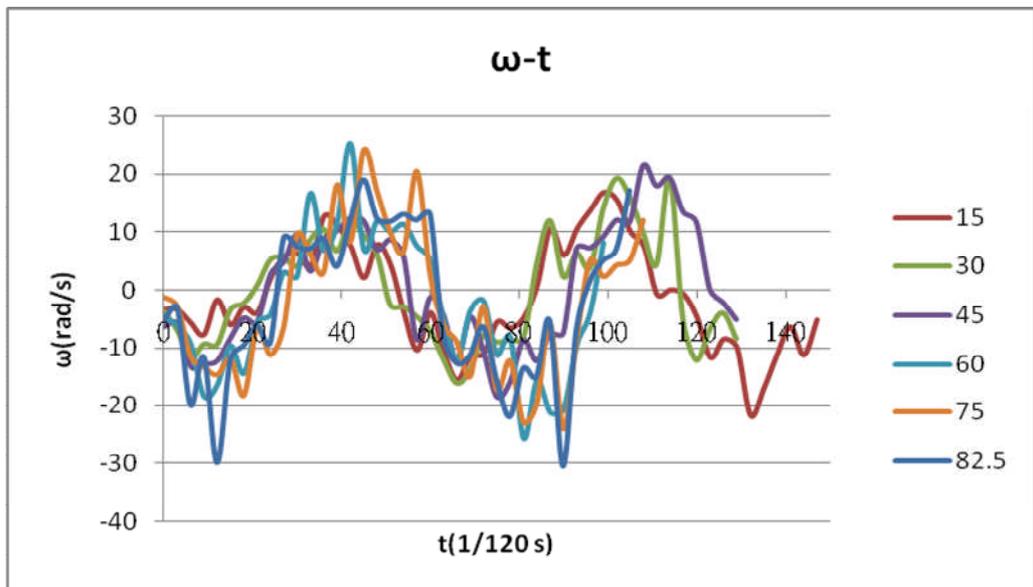


圖 (16) $\omega-t$ 比較圖

φ (rad) \ θ_0	15°	30°	45°	60°	75°	82.5°
轉折點 1	0.6169	0.7224	0.9728	1.3887	1.4129	1.5351
轉折點 2	0.9728	1.0343	1.1827	1.5708	1.7201	1.7705
轉折點 3	1.1217	1.1255	1.5708	1.7024	1.8643	1.9077
轉折點 4	1.1614	1.5708	1.7618	撞水箱壁	撞水箱壁	撞水箱壁

表 (4) 鐵片在轉折處角度之變化

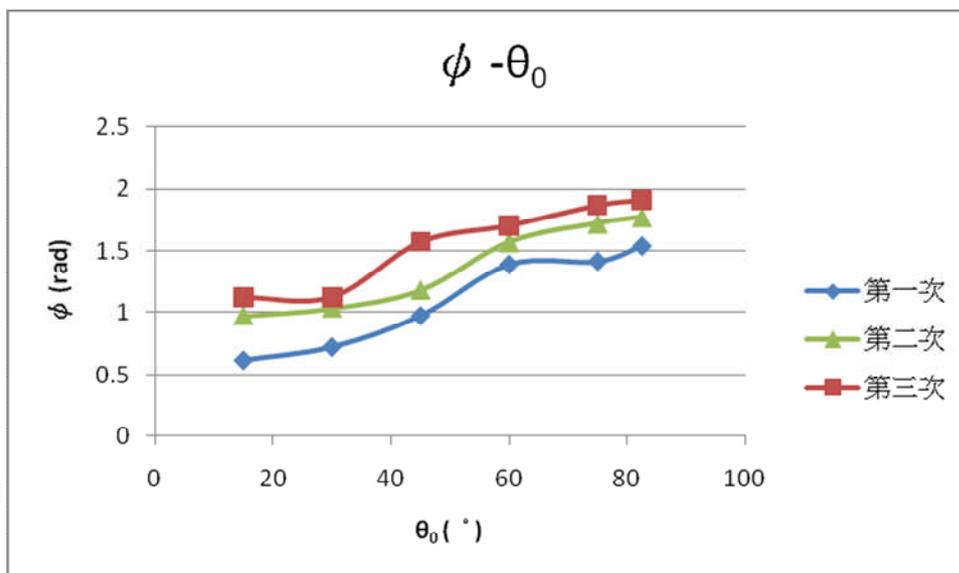


圖 (17) 依表 (4) 作圖， ϕ 表鐵片於轉折處之角度

(五) 觀測相同鐵片、不同初始角度，鐵片下降相同距離(51cm)所需的時間(t)。鐵片下降時間有隨初始角度增加而減少的趨勢。

初始角度 θ_0	0°	7.5°	15°	30°	45°	60°	75°	82.5°
下降時間 t(s)	1.217	1.208	1.162	1.117	1.113	0.943	0.938	0.933

表 (5)

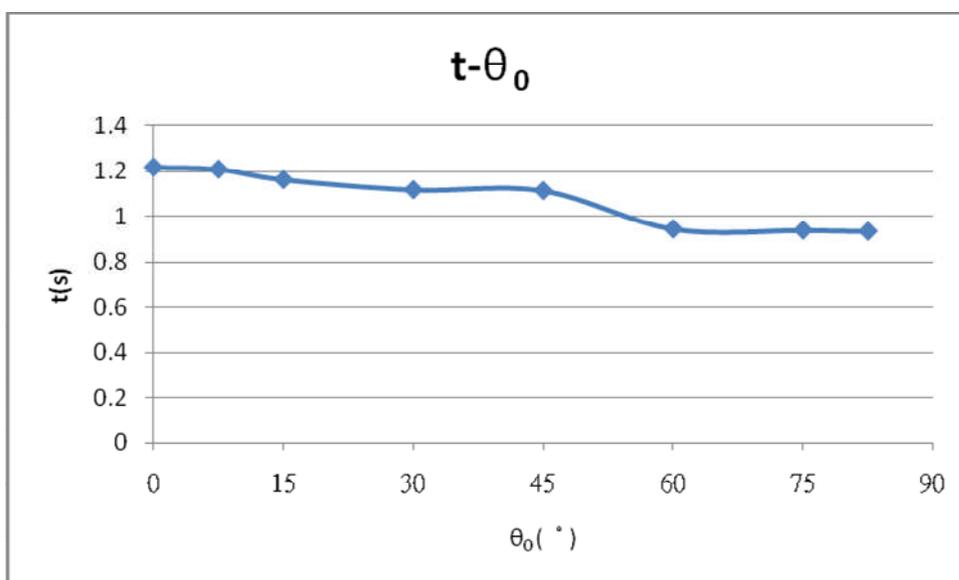


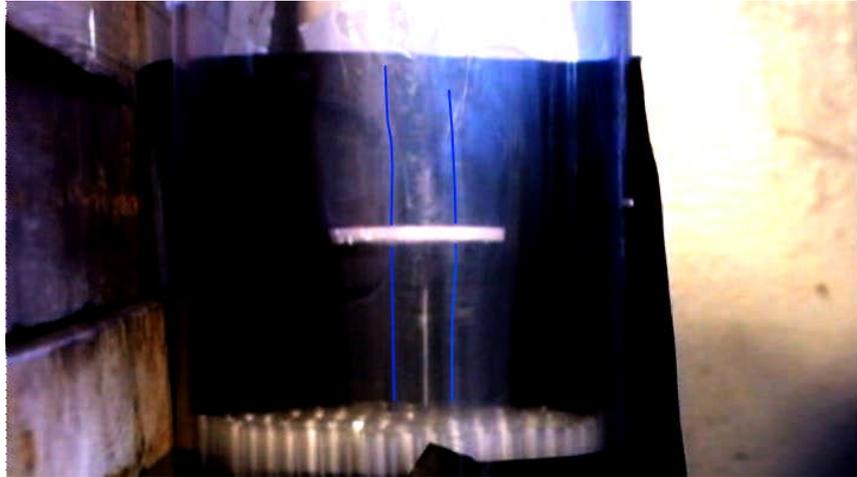
圖 (18)

二、實驗二：模擬觀察鐵片周圍的流線分佈情形。

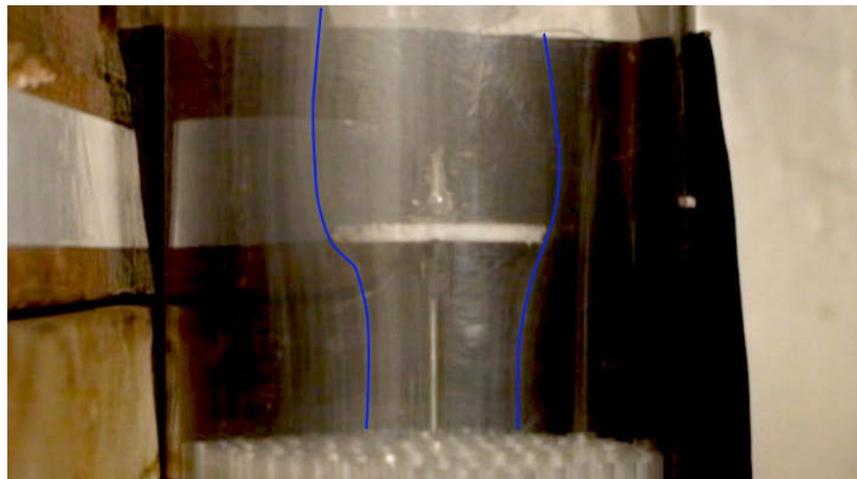
此實驗模擬鐵片下落時，水流流經鐵片周圍之情形：

(一) $\theta = 0^\circ$ (圖(19)為流經模型片中心孔洞流線圖，圖(20)為模型片外圍流線圖。)

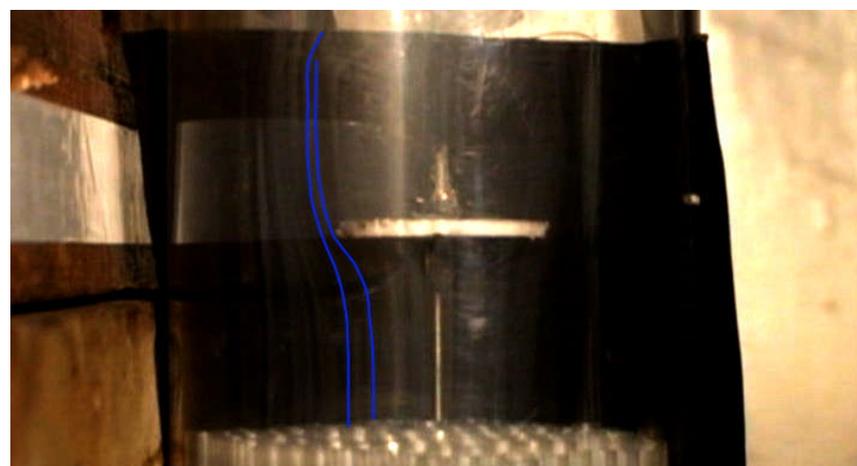
1. 在傾角為 0° 的模型片流線中，上方左右兩側都會出現明顯的渦流，而此渦流主要是由從中心孔洞穿過的流線和模型片外圍的流線互相作用所形成。
2. 模型片外圍左右兩邊的流線其實沒有那麼對稱，流線形狀是不斷地改變，這可以解釋鐵片以初始角度 0° 釋放後會隨機朝任一方傾斜。(如圖(20-2))。



圖(19)模擬 2 號鐵片



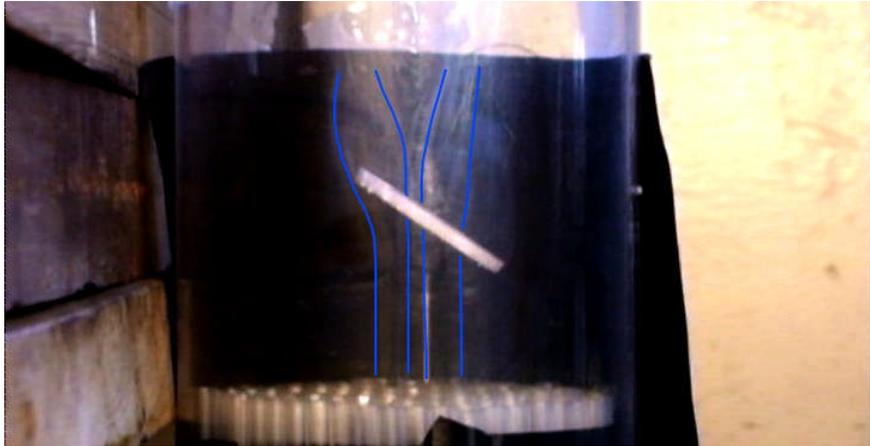
圖(20-1)模擬 4 號鐵片



圖(20-2)模擬 4 號鐵片

(二) $\theta = 45^\circ$

1. 有傾角的模型片上面右方也可觀察到渦流，但不如左方渦流那麼明顯。
2. 在有傾角的模型片流線圖中，孔徑越小的模型片，其上面左方觀察到的渦流越明顯。



圖(21)模擬 2 號鐵片

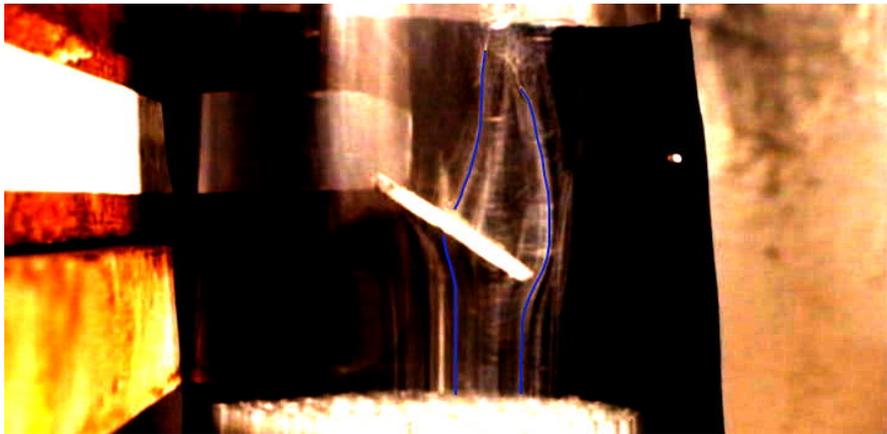


圖 (22-1) 模擬 4 號鐵片

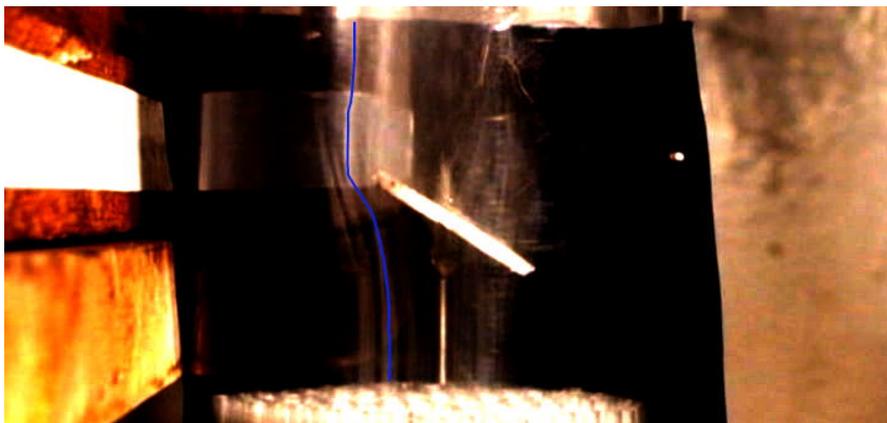


圖 (22-2) 模擬 4 號鐵片

(三) 沒有孔洞的模型片：在沒有孔洞的模型片流線中，我們觀察到模型片上方產生的渦流規模比中心有孔洞的渦流大。

三、實驗三：(以下簡稱 1 號鐵片為 1 號、2 號鐵片為 2 號……以此類推。)

(一) z-t 圖 (如圖(23))：

1. 相同初始角度，1~4 號的 z-t 圖平均斜率相近。
2. 相同初始角度，1 號、2 號接近為同一條直線。
3. 相同初始角度，鐵片內徑越小階梯狀越明顯。

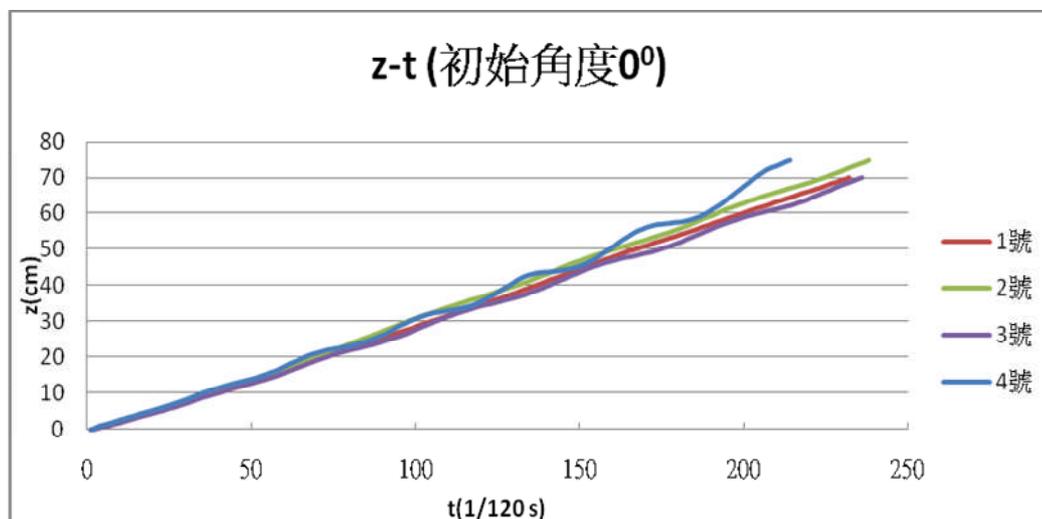


圖 (23-1)

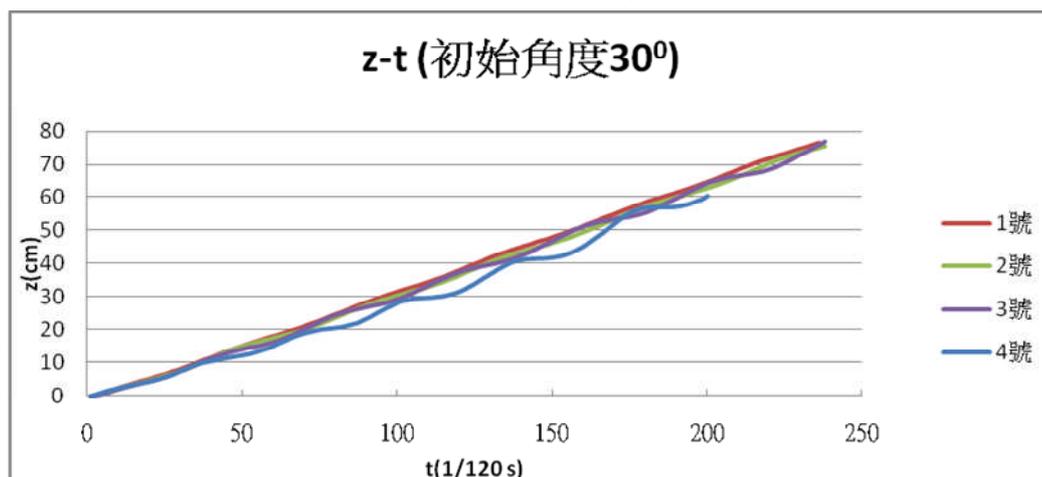


圖 (23-2)

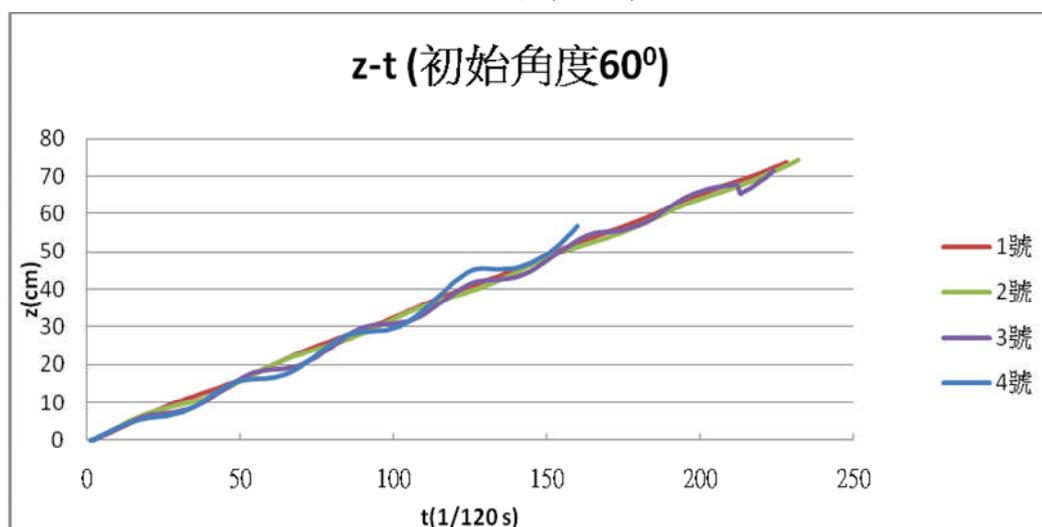


圖 (23-3)

(二) v_z - t 圖：

1. 相同初始角度、不同編號鐵片之比較：

- (1) 內徑越大，曲線之週期性越不明顯。
- (2) 內徑越大， v_z - t 圖平均週期越大。
- (3) 1~3 號振幅變化不大，4 號之振幅隨下落時間逐漸明顯放大。
- (4) 初始角度 0° 、 30° ，約第 33 格數據點(約 0.275s)前 1~4 號波動情形相似。

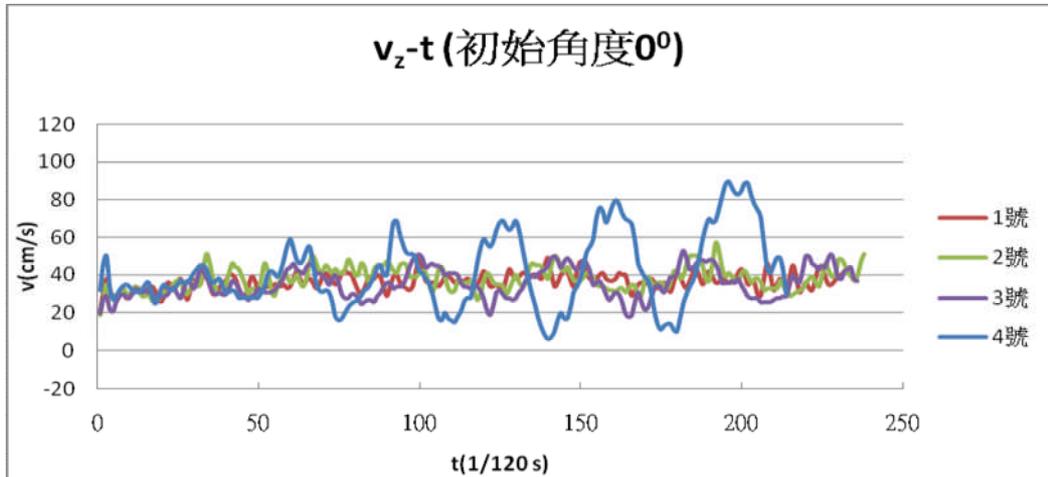


圖 (24-1)

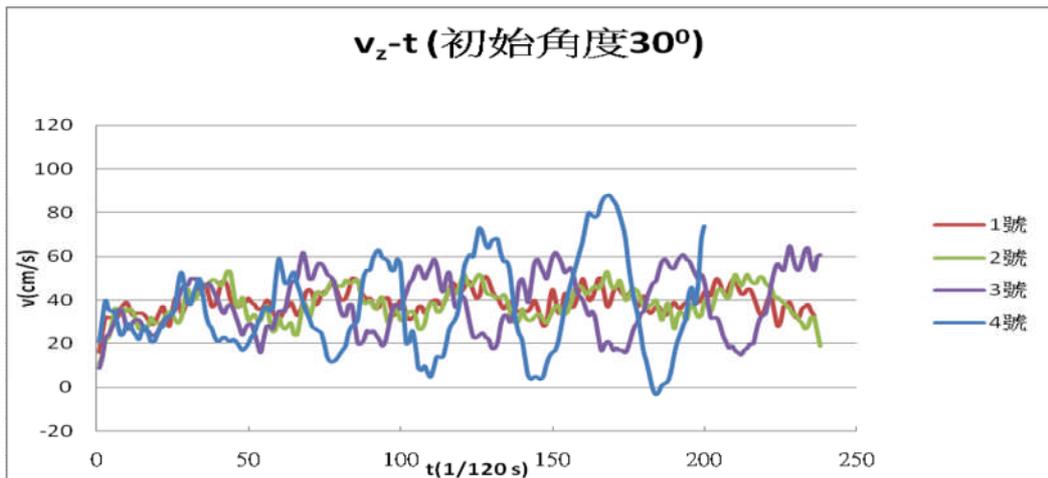


圖 (24-2)

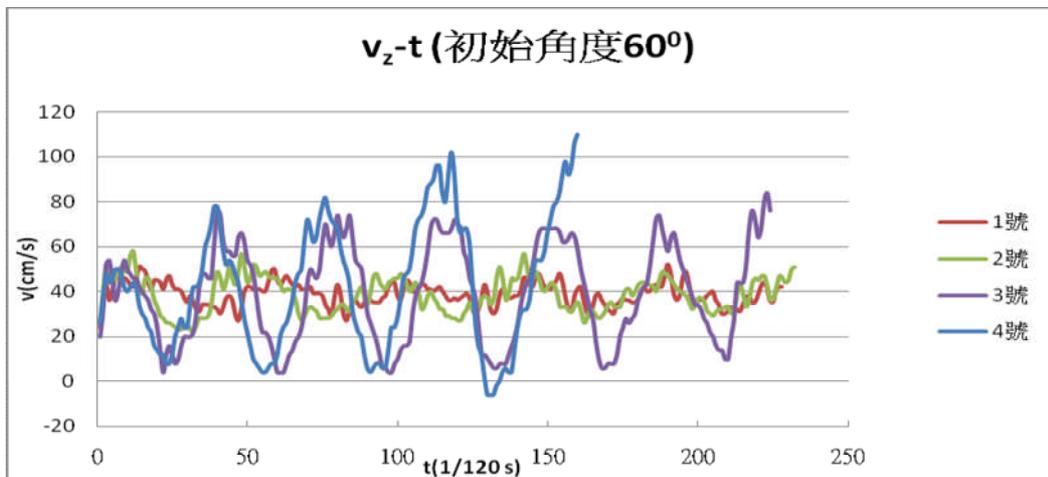


圖 (24-3)

2. 相同編號鐵片、不同初始角度之比較:

- (1) 1、2 號在初始角度 0° 、 30° 、 60° 時， v_z-t 圖曲線相近，無明顯差異性。
- (2) 3 號在初始角度 0° 、 30° 、 60° 時，皆有明顯差異性。振幅隨初始角度增大而增大，但週期隨初始角度增大而減小。
- (3) 鐵片內徑越大， v_z-t 圖曲線受初始角度之影響越小。

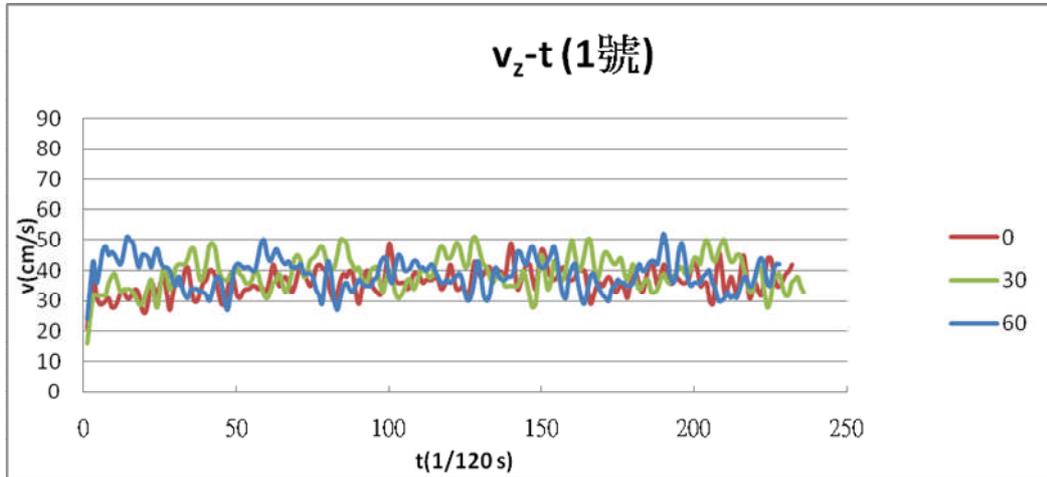


圖 (25-1)

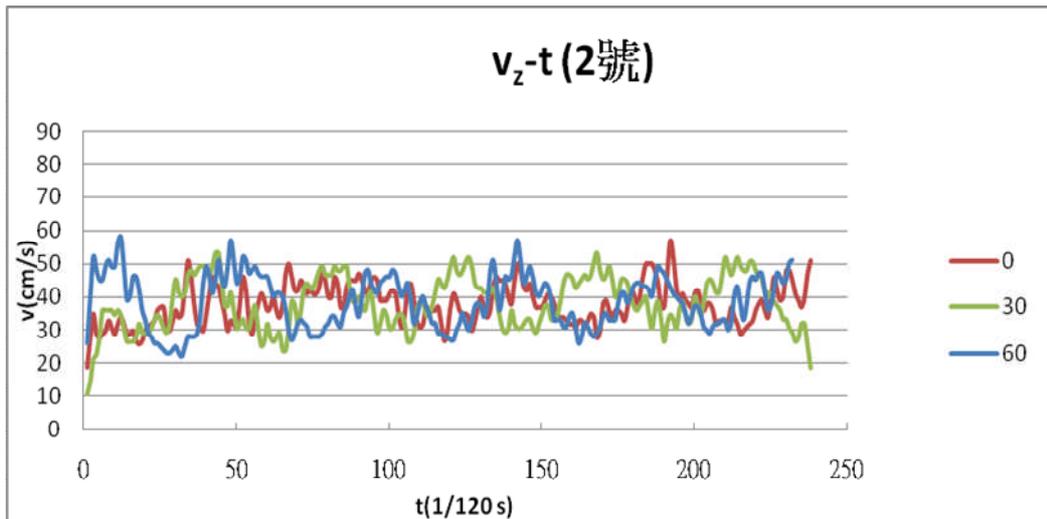


圖 (25-2)

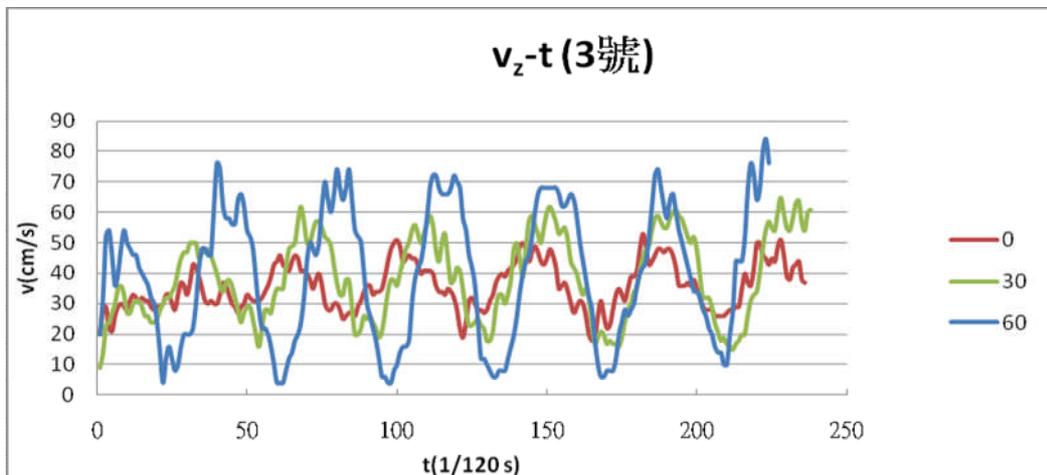


圖 (25-3)

陸、討論：

一、分析相同鐵片、不同初始角度，鐵片在 x-y 平面的運動模式：

由白努利定律推論其在 x-y 平面之運動情形如下：

(一) 圖(26)中：鐵片與水平面之夾角為 0° ，當水流經鐵片周圍時，水流在單位時間內流經相同之路徑長，故在鐵片兩側(A、B)之局部速率相同，根據白努利定律，鐵片周圍之壓力相等，因此鐵片在水平方向之合力應為 0。但因真實流體可能產生無法預測之擾流，所以鐵片在水平方向仍可能受力，只是影響不大，所以鐵片以初始角度 0° 投放後，在水中的第一次轉折點到 z 軸的距離相對其他初始角度較小。

(二) 圖(27)中：分別對點 AB、CD 處之流線分別運用白努利方程式，則可得：

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_{AB} = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \quad \text{----(1)}$$

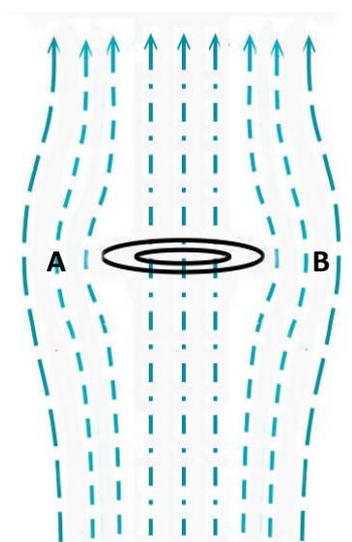
$$p_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 + \rho g h_{CD} = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 \quad \text{----(2)}$$

$$\text{由式(1)} \quad \Delta P_{BA} = P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) + \rho g h_{AB}$$

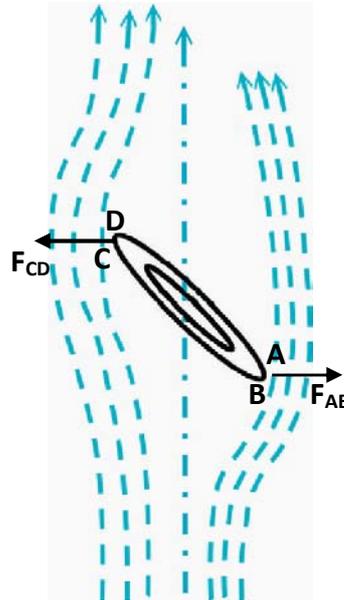
$$\text{由式(2)} \quad \Delta P_{DC} = P_D - P_C = \frac{1}{2}\rho(v_C^2 - v_D^2) - \rho g h_{CD}$$

$$\begin{aligned} \Delta P_x = \Delta P_{BA} - P_{DC} &= \frac{1}{2}\rho[(v_A^2 - v_B^2) - (v_C^2 - v_D^2)] + \rho g h_{AB} + \rho g h_{CD} \\ &= \frac{1}{2}\rho[(v_A^2 - v_B^2) - (v_C^2 - v_D^2)] + \rho g(h_{AB} + h_{CD}) \end{aligned}$$

又 $v_A > v_B$ ， $v_C > v_D$ ， $v_A - v_B > v_C - v_D$ (因 AB 處之水流受鐵片之阻擋) 可知鐵片受一水平合力向右運動，又 θ -t 圖之曲線為振盪曲線，所以此水平合力亦隨時間變化，造成鐵片在 x-y 平面上作左右來回的擺盪，而且初始角度越大，鐵片所受水平合力越大，則鐵片偏離 z 軸之距越大，符合 R- θ 圖。



圖(26)



圖(27)

圖(26)、圖(27)之流線可由實驗二驗證，藍虛線為水流(箭頭為水流方向)，黑色部分為中間有孔之鐵片。

二、分析相同鐵片、不同初始角度，鐵片與水平之夾角在運動過程中的變化：

(一) 鐵片角度擺盪原理推論：

如圖(27)中，當水流經鐵片時，就同一流線而言 B 點速小於 A 點速，C 點速小於 D 點速，根據白努利原理可知 B 點之壓力大於 A 點之壓力，C 點之壓力大於 A 點之壓力，這些壓力差形成的力，便產生一恢復力矩使鐵片轉回水平面。

(二) 運動模擬：

1. 方程式模擬：

從研究結果中可發現， $\theta-t$ 圖為一振盪曲線，且其振幅逐漸增加。因此可用 \sin 或 \cos 函數描述其曲線及 e^{bt} 表示其振幅隨時間增加之情形，即：

$$\theta(t) = \theta_0 e^{bt/2I} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{-----}(1)$$

這便是鐵片角運動方程式之解。可利用此解反推鐵片之角運動方程式：

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} - b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0 \quad \text{-----}(2)$$

其方程式類似角阻尼簡諧運動。鐵片在下降過程中恆受一恢復力矩 $\tau = -\kappa \theta$ 與一相反阻尼作用方式之力矩：

$$\tau_b = b \frac{d\theta}{dt} \quad \text{-----}(3)$$

【附註】T 為觀察影片測得之 $\theta-t$ 圖的振盪週期，代入式(1)得 b (常數)、 κ (角扭轉常數)。R：鐵片外半徑、r：鐵片內半徑、d：鐵片厚度、M：鐵片質量。

$$I = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2) + \frac{1}{12}Md^2 \approx 2.022 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}} \quad \rightarrow \quad \kappa = (\omega^2 + \frac{b^2}{4I^2})I$$

2. 方程式中各參數：(如表(6)、圖(28))

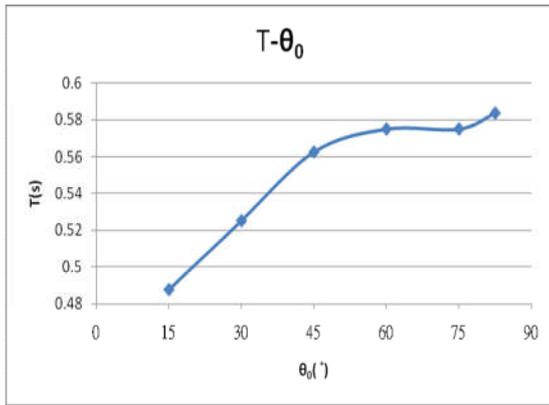
- (1) 初始角度越大， b 值越小：表示小角度在水中受相反阻尼作用力較明顯。
- (2) 初始角度越大， κ 值越小：表示鐵片以小初始角度釋放後偏轉相同角度時較以大初始角度釋放所需之力矩較大。
- (3) 初始角度越大， T 值越大。

3. 驗證：(如圖(29))

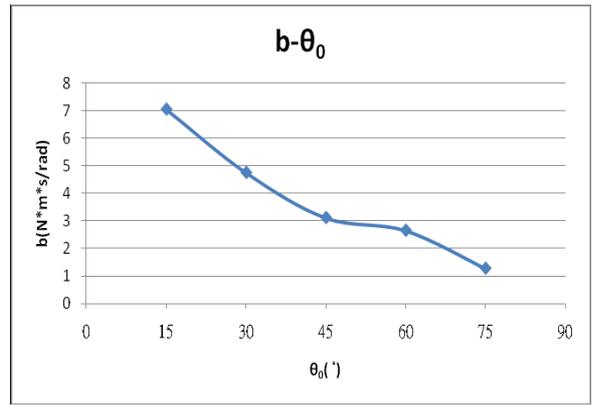
將式(1)之方程式作圖(藍線)並與實驗數據(紅點)做比較。實驗數據與方程式曲線相當吻合，因此我們認為其 $\theta-t$ 圖振幅確實可用 e^{bt} 表示。

項目 \ θ_0	15°	30°	45°	60°	75°	82.5°
$\theta-t$ 週期 T(s)	0.487	0.525	0.563	0.575	0.575	0.583
$b(10^{-6} \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} / \text{rad})$	7.05	4.75	3.11	2.65	1.27	1.15
$\kappa(10^{-4} \text{N} \cdot \text{m} / \text{rad})$	3.42	2.92	2.53	2.42	2.41	2.35

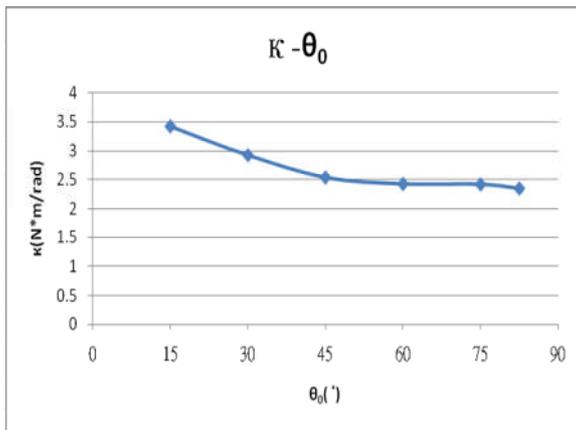
表 (6)



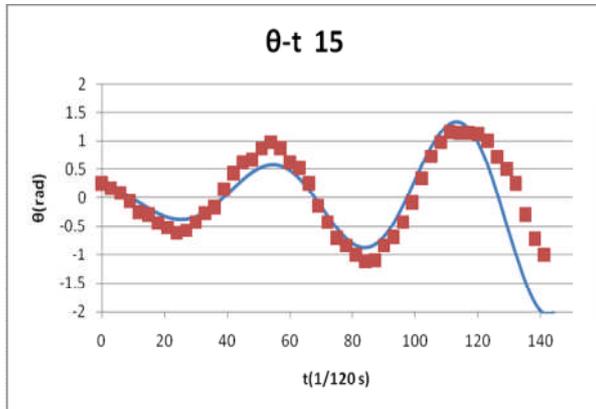
圖(28-1)



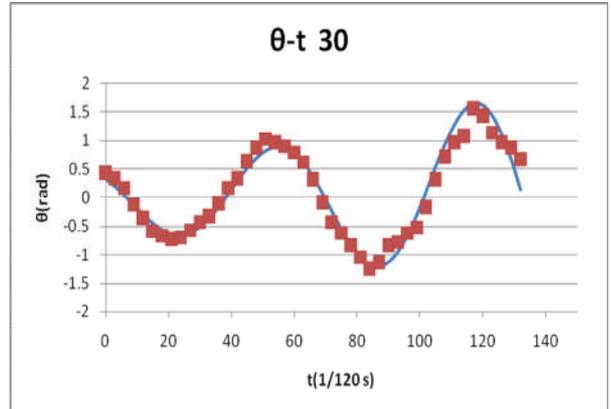
圖(28-2)



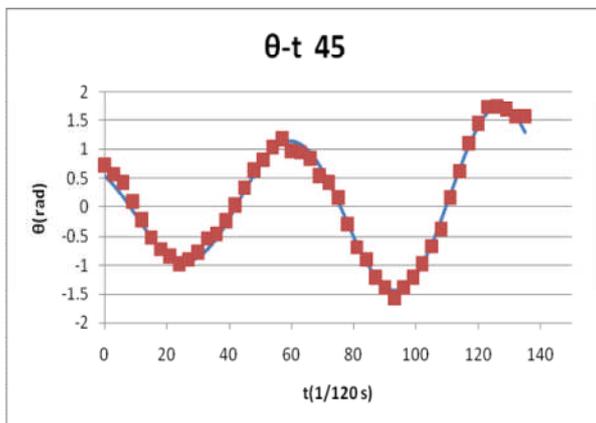
圖(28-3)



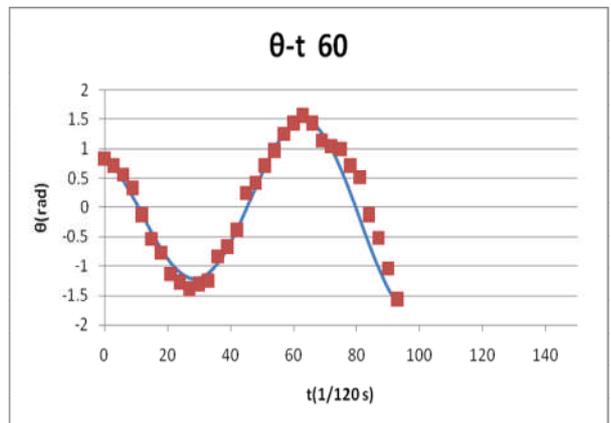
圖(29-1)



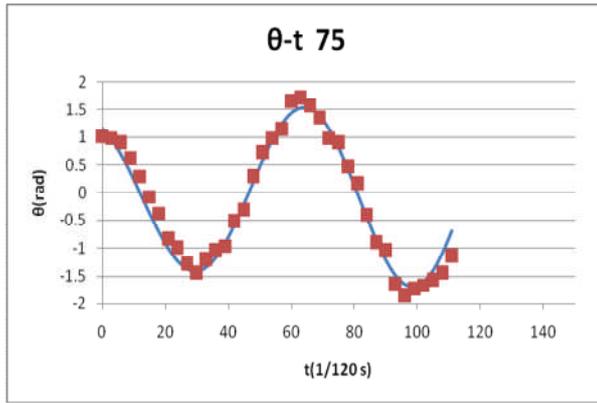
圖(29-2)



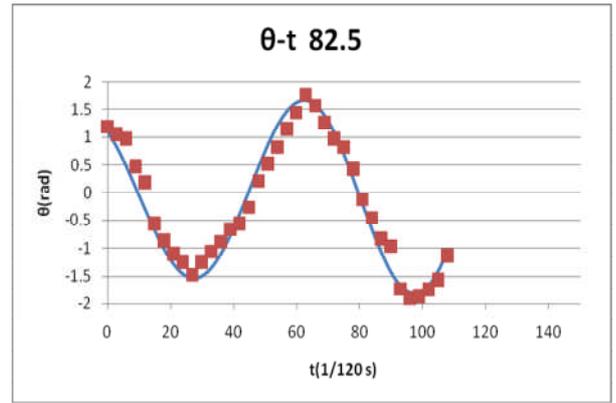
圖(29-3)



圖(29-4)



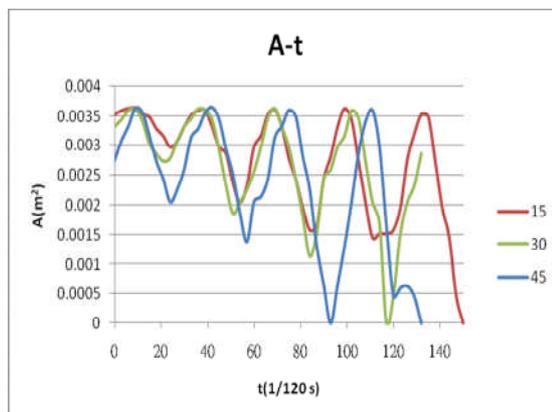
圖(29-5)



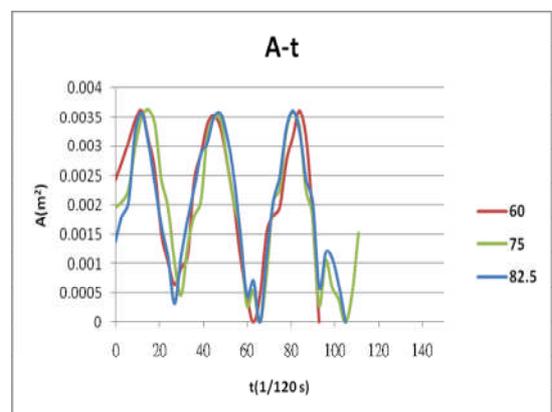
圖(29-6)

三、分析鐵片在 z 軸的運動行為：

- (一) 鐵片下降過程中，在 z 軸會受重力、浮力及後曳力三種力共同作用。其中對同一鐵片而言，重力及浮力維持定值(重力大於浮力)，而後曳力與鐵片在 x-y 平面之投影截面積、z 軸速率平方成正比。
- (二) 當一小鐵球在水中釋放後，因重力與浮力之作用(此二力為定值)向下加速，後曳力隨速率增加而增加，最後小鐵球所受重力、浮力及後曳力三力平衡而達到終端速率。但從本實驗結果中，發現鐵片 v_z-t 圖之曲線具有週期性之振盪行為，且速率振幅會隨時間而增大。我們認為此乃鐵片角度之振盪行為所造成：鐵片下降時，角度振盪具有週期性，故在水平面上的投影截面積亦呈週期性變化。而後曳力與投影截面積成正比，因此後曳力隨時間作週期性變化，使得鐵片在 z 軸之運動模式具有週期性，並不會達到終端速率。又鐵片之角度振幅會逐漸增大，則投影截面積在同一週期內之最小值會隨下降時間而減小(如圖(30))，故鐵片 v_z-t 圖曲線之振幅會隨時間而增加，符合實驗結果。
- (三) 鐵片初始角度越大，下降相同距離所需時間越短，我們推測同樣是鐵片的角度振盪所造成。由實驗發現鐵片在轉折點處與水平面之夾角將隨初始角度增加而增大。因此鐵片在水平面的投影截面積之週期性變化幅度會隨初始角度增加而增大。就平均投影截面積而言，大初始角度的鐵片水平平均投影截面積比小初始角度的鐵片水平平均投影截面積小，故大初始角度的鐵片受到水之平均後曳力較小，其下降時間便相對較小。



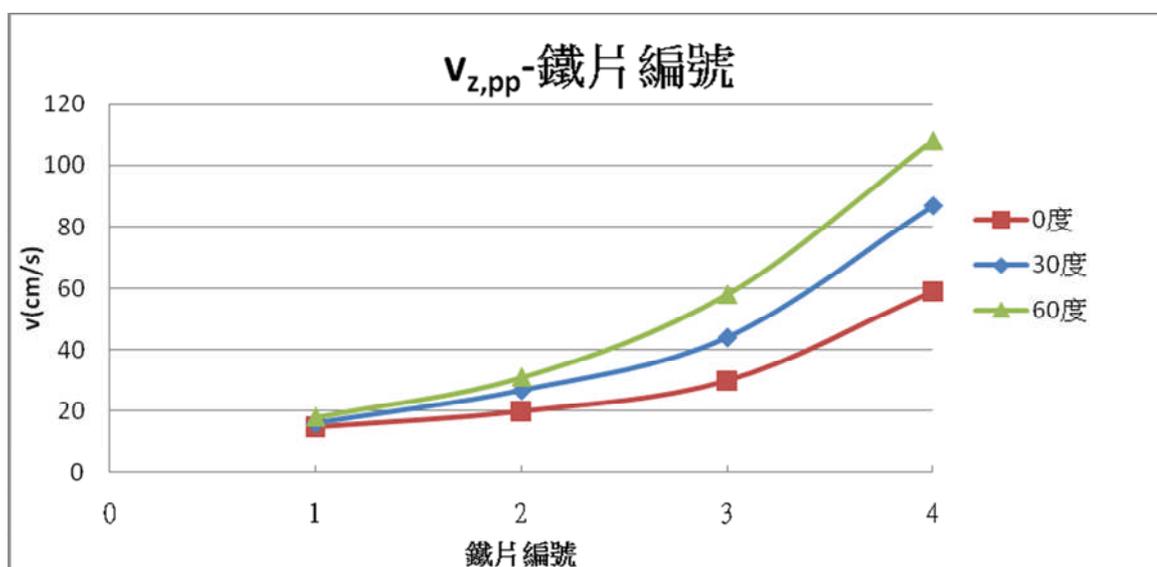
圖(30-1)



圖(30-2)

四、分析不同內徑鐵片、不同初始角度時，在 z 軸的運動行為：

- (一) 鐵片內徑越大， v_z-t 圖曲線受初始角度之影響越小。(如圖(25))
- (二) $v_{z,pp}$ -鐵片編號圖： $(v_{z,pp} : v_z-t$ 圖中相鄰波峰及波谷的速度差值，即為 z 軸速度振幅的 2 倍。如圖(31))
 1. 初始角度越大， $v_{z,pp}$ 隨鐵片內徑變小而成長的情形越明顯。表示鐵片在以較大的初始角度釋放後，受鐵片中心孔洞之影響較明顯。
 2. 鐵片內徑越小，在不同初始角度釋放時， $v_{z,pp}$ 值變化越大。
- (三) 雖然內徑越大鐵片慣性(質量及轉動慣量)相對減小，但當鐵片在水中下落時，水流可分為流經鐵片中心孔洞之水流及流經鐵片周圍之水流，由實驗二發現當中心孔洞越大時，水流經鐵片後所產生的渦流明顯減小，我們推測中心水流是穩定鐵片運動的主因。當內徑較大鐵片在以較大之初始角度釋放時，一開始可能會具有較大之速度振幅，但中心水流流量較大，減少渦流產生，能穩定鐵片運動。因此內徑較大鐵片在下降過程中較為穩定。

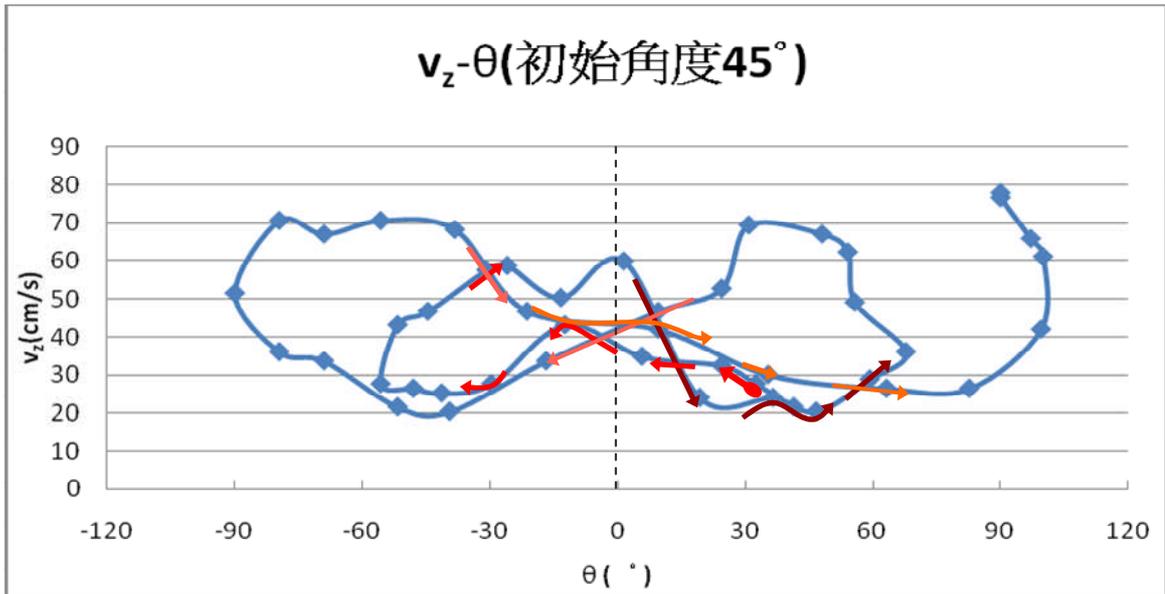


圖(31)

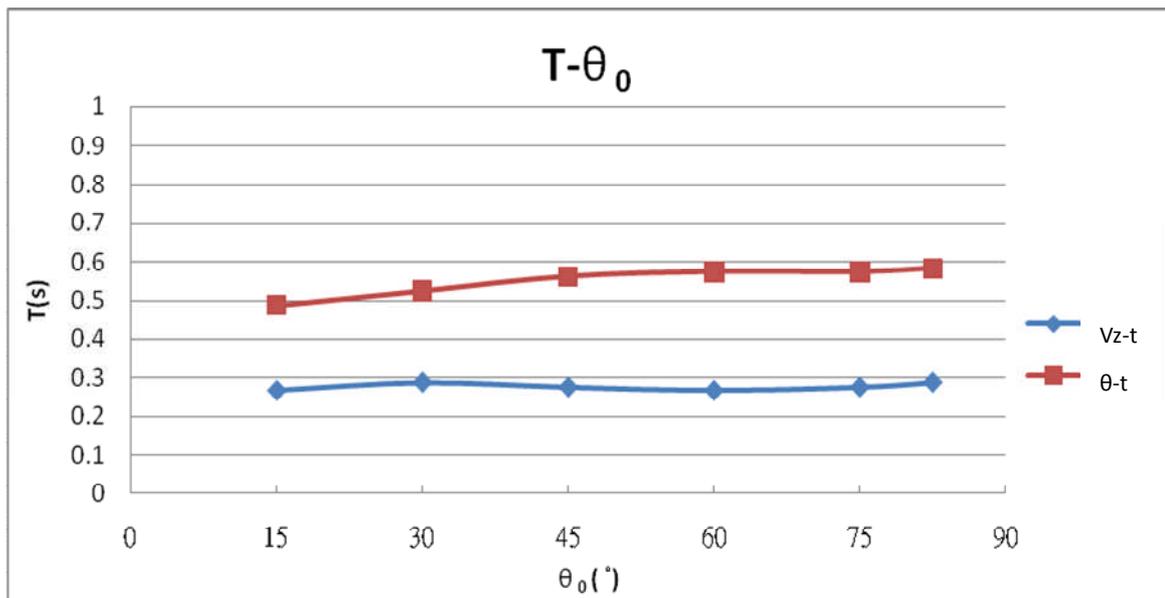
五、鐵片運動模式之統整：

我們認為鐵片在 z 軸運動的週期性與其角度振盪具有相關性，因此作 $v_z-\theta$ 圖。發現 $v_z-\theta$ 圖為一具有循環週期性的蝴蝶狀曲線(以下簡稱蝴蝶圖。如圖(32))。由蝴蝶圖可看出：

- (一) 曲線內包圍之面積會隨循環次數增加而增加，表示在鐵片下降過程中，在角度擺盪之振幅及 z 軸速度振盪之振幅皆逐漸放大。
- (二) 角度振盪週期(T_θ)約為 z 軸速度振盪週期(T_{v_z})的兩倍(亦如圖(33))



圖(32)



圖(33)

柒、結論：

一、鐵片運動模式分類：

以初始角度 $0^\circ \sim 45^\circ$ 投放之鐵片均會以 z 軸為中心軸作左右擺盪，而以初始角度 60° 以上投放之鐵片均會以偏離 z 軸之鉛直線為軸左右擺盪。

二、鐵片在 z 軸的運動行為：

- (一) 相同鐵片以初始角度 $0^\circ \sim 7.5^\circ$ 、 $15^\circ \sim 45^\circ$ 釋放後在 z 軸下降的 $z-t$ 圖分別呈現相似的直線與階梯狀兩大類。
- (二) 相同鐵片以初始角度 $0^\circ \sim 45^\circ$ 釋放後在 z 軸的平均速率相似；以初始角度 $60^\circ \sim 82.5^\circ$ 釋放後，初始角度越大， z 軸的平均速率越大，但其階梯狀曲線之變化週期非常相近。
- (三) 各種初始角度鐵片的 v_z-t 圖皆為振盪曲線，且初始角度越大，週期性越明顯。
- (四) 相同鐵片以初始角度 $15^\circ \sim 45^\circ$ 釋放後，在 z 軸的受力變化之週期相似；以初始角度 $60^\circ \sim 82.5^\circ$ 釋放後，在 z 軸的受力變化之週期相似。
- (五) 相同初始角度，鐵片內徑越大， $z-t$ 圖曲線階梯狀越不明顯。
- (六) 相同初始角度，鐵片內徑越大， v_z-t 圖曲線之週期性越不明顯。
- (七) 不同初始角度，鐵片內徑越大，運動行為相差越小。
- (八) 相同初始角度，鐵片內徑越大，鐵片在 z 軸之運動越穩定。

三、鐵片角度之運動模式：

- (一) 下降過程中，鐵片與水平面之夾角 θ 類似一反阻尼角簡諧振盪運動，運動方程式如下：

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} - b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0$$

- (二) 各種初始角度，鐵片的 $\theta-t$ 、 $\omega-t$ 圖皆為振盪曲線。
- (三) 轉折點處鐵片與水平面之夾角隨下落時間越來越大。 $\theta-t$ 圖中，振幅與時間之關係可由 e^{kt} 函數表示。
- (四) 初始角度越大，鐵片在轉折處的角度成長幅度越小。
- (五) 初始角度越大，鐵片在水中受相反阻尼作用力越不明顯。
- (六) 初始角度越大，鐵片偏轉相同角度時所需之力矩越小。

四、鐵片在水平面的來回運動行為：

- (一) 鐵片在水中釋放後，皆會作左右來回擺盪的運動。
- (二) 初始角度越大，鐵片第一次轉折點到 z 軸的距離越大。

五、其它：

- (一) 鐵片角度振盪為影響 z 軸速度振盪的主因。
- (二) 鐵片中心的孔洞能減少渦流的產生，有穩定鐵片運動的效果。
- (三) 鐵片以初始角度 α 釋放後，在轉折點處可能類似鐵片重新以初始角度 β 釋放開始運動 ($\beta > \alpha$)。

捌、未來延伸：

- 一、用長、寬、高更大的水箱延長鐵片在水中的時間，觀察其在水中時間增長是否有更多的規律性。
- 二、自製鐵片，則可更準確控制鐵片的質量、厚度，將有助實驗準確性，且可探討鐵片的質量、厚度對其運動模式之影響。
- 三、觀察鐵片在 x 與 y 軸的運動模式($x,y-t$ 、 $v-t$ 、 $a-t$ 圖)。
- 四、將鐵片放置於不同種類流體，類比與在水中之各物理量有何異同。
- 五、將不同密度的液體置於水箱中使液體分層，觀察鐵片經過不同介質物理量之變化。
- 六、觀察保麗龍板在空氣中飄盪情形與鐵片在液體中之運動模式有何異同。
- 七、觀察下落圓盤與流體之密度比對其運動模式有何影響。
- 八、觀察不同幾何形狀之物體在流體中的下落模式有何異同。

玖、參考資料：

- 一、南一書局高中物理編撰委員會。普通高級中學 物理 下冊。南一書局企業股份有限公司。第十一章。2009 年。
- 二、David Halliday。FUNDAMENTALS OF PHYSICS, 7TH EDITION。全華圖書股份有限公司。第十、十四、十五章。2007 年。
- 三、Vennard/Street。基本流體力學下冊。科技圖書股份有限公司。第 13 章。1987 年。
- 四、有聲電子有限公司。KAVIDEO 操作手冊。

【評語】 040104

主題與教材相關，解決和進行探究的方法適切，能應用合適
儀器設備和教學來蒐集與分析數據。