

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 物理科

佳作

最佳(鄉土)教材獎

040101

高階彩虹

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者： 高二 彭少儀 高二 曾采文	指導老師： 簡穎智 林智遠
-------------------------	---------------------

關鍵詞：虹

摘要

課堂上介紹到彩虹形成的原理是透過水珠的色散、折射與反射，而我們平時可以看到的虹和霓分別是反射一次與兩次所造成，本研究便欲探討更高階的彩虹。

我們開發出電腦模擬程式，由「光線追蹤法」繪出一到十階的彩虹，研究光在水珠內反射次數、光的入射角與總偏向角之關係，發現反射次數越多，入射角要越大才會產生總偏向角的最小極限。此外我們也計算出每一條光線在各階彩虹中的能量，以及各階射出光當中每單位角度的光線數目與每單位角度的能量，結果發現能量最大、光線數目最多及總偏向角最小這三者的方向相同。並由以上數據的分析，成功設計出能呈現第三道彩虹的實驗。

推廣研究：電腦模擬圖形中高階彩虹內部反射線所形成的包絡線。

壹、 研究動機

雨過天青，背對著陽光，我們偶爾能看到天空中出現一道道美麗的彩虹，而運氣好的話還能夠看見在虹的外圈又出現了一道色彩呈裡外相反的霓。從課堂中我們學到彩虹的出現是運用色散、反射與折射的原理，但是為何卻從來沒看過第三、第四甚至第五道彩虹呢？

貳、 研究目的

- 一、探討彩虹只有兩道的原因
- 二、探討反射次數、入射角與總偏向角的關係
- 三、實驗室內平面模擬水珠內之光線
- 四、電腦平面模擬水珠內之光線
- 五、探討折射、反射與能量的關係
- 六、在實驗室內做出第三道彩虹

參、 研究設備及器材

水罐(半徑 6.5 cm)	氦氖雷射光	方格紙	吸管	滴定架	數位相機
---------------	-------	-----	----	-----	------

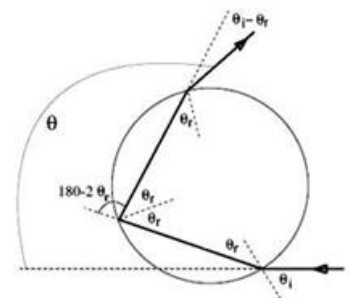
肆、 研究內容

- 一、探討彩虹只有兩道的原因

彩虹是由光折射進入水滴，在其內部經過反射，最後再折射離開水滴，同時因不同波長的色光折射角不同，在折射時便會產生色散現象。

以下我們均假設平行光自水珠半面的再一半射入，因其另一半會產生相同的對稱效果。

在這個過程中，一道光線以偏折($\theta_i - \theta_r$)的角度產生第一次



折射 (θ_i, θ_r 分別是入射角和折射角)，然後以偏折 ($\pi - 2\theta_r$) 的角度在內部反射，最後再偏折一次 ($\theta_i - \theta_r$) 角離開水滴，就是第一道彩虹的形成。

此時，總偏向角為 θ ：

$$\begin{aligned}\theta &= (\theta_i - \theta_r) + (\pi - 2\theta_r) + (\theta_i - \theta_r) \\ &= \pi + 2\theta_i - 4\theta_r\end{aligned}$$

(k 反射次數、 θ 總偏向角、 θ_i 入射角、 θ_r 折射角)

部分未在第一次反射後便射出水滴的光會繼續進行第二、三、四……次的反射，因此可將上式進一步表示為：

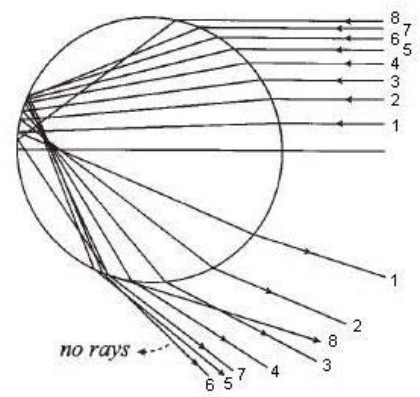
$$\begin{aligned}\theta &= (\theta_i - \theta_r) + k(\pi - 2\theta_r) + (\theta_i - \theta_r) \\ &= k\pi + 2\theta_i - 2(k+1)\theta_r\end{aligned}$$

將 θ_i, θ_r 的關係利用 Snell's law 表示：

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_r$$

(n 折射率)

從右圖中可知以不同角度進入水滴的光線，經過一次反射離開水滴的角度會分布在一個範圍內，如圖中光線 6 便是光線偏向角度的極限，並且為光線最密集的區域。



我們將上式微分，找出此極限發生處：

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = 2 - 2(k+1) \frac{d\theta_r}{d\theta_i}$$

為找出 $d\theta_r/d\theta_i$ ，我們將 Snell's law 微分：

$$\frac{d(\sin\theta_i)}{d\theta_i} = \frac{d(n \sin\theta_r)}{d\theta_i} \Rightarrow \cos\theta_i = n \cos\theta_r \left(\frac{d\theta_r}{d\theta_i} \right)$$

將 $\cos\theta_r$ 以 $\cos\theta_i$ 表示：

$$\cos\theta_r = \sqrt{1 - \sin^2\theta_r} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2\theta_i} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cos^2\theta_i}$$

綜合這些結果：

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = 2 - 2(k+1) \frac{d\theta_r}{d\theta_i} = 0 (\theta = \theta_{\max} \vee \theta_{\min})$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta_r}{d\theta_i} = \frac{1}{k+1} \dots\dots(1)$$

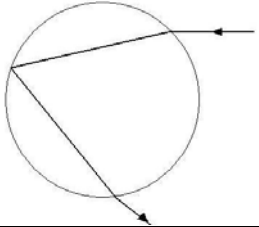
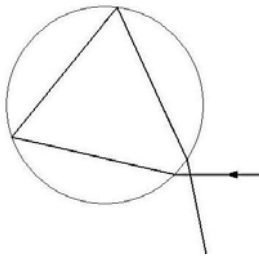
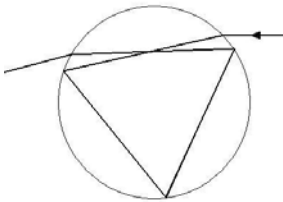
$$\Rightarrow \frac{d\theta_r}{d\theta_i} = \frac{\cos\theta_i}{n \cos\theta_r} = \frac{\cos\theta_i}{n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\cos^2\theta_i}{n^2}}} \dots\dots(2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\cos^2\theta_i}{n^2} = \left(\frac{k+1}{n} \right)^2 \cos^2\theta_i \Rightarrow \cos^2\theta_i \left[\left(\frac{k+1}{n} \right)^2 - \frac{1}{n^2} \right] = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta_i = \frac{n^2 - 1}{k^2 + 2k} \Rightarrow \cos\theta_i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}}$$

得出結果：當 $\theta_i = \cos^{-1} \left[\sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}} \right]$ ，總偏向角有最大值或最小值。

利用以上式子，將反射次數與角度的關係整理成表格：

反射次數	顏色	入射角(θ_i)	總偏向角(θ)	彩虹視角
	紅 紫	59.53° 58.83°	137.63° 139.35°	42.37° 40.65° 背向陽光
	紅 紫	71.91° 71.52°	230.37° 233.48°	50.37° 53.48° 背向陽光
	紅 紫	76.89° 76.62°	317.53° 321.89°	42.47° 38.11° 面向陽光

由此可知，第三道彩虹會出現在必須面向陽光才能看見的角度，因此無法被我們看見。

二、探討反射次數、入射角與總偏向角的關係

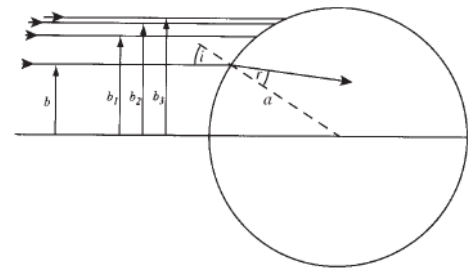
我們看到， k 與 $\cos \theta_i$ 成負相關，當 k 增大，能產生最大偏向的 θ_i 會逐漸逼近 90° 。

因為陽光之入射接近平行，我們將變數改為 b 將（入射光與圓心之垂直距離）， a 為半徑， $\frac{b}{a}$ 即為 $\sin \theta_i$ 。為確

認所求出之總偏向角為最大值或最小值，我們將 $\frac{b}{a}$ 代入進行二次微分，得下列式子：

$$\frac{d^2\theta}{d\theta_i^2} = \frac{2(n^2 - 1)(k + 1) \sin \theta_i}{n^3 \cos^3 \theta_i}$$

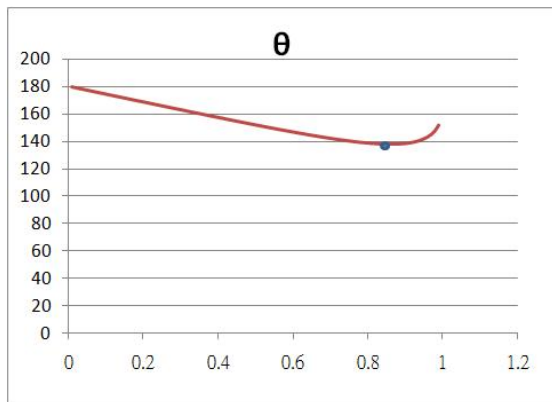
由於所有 n 均大於 1，且入射角及折射角均為銳角，因此所有 k 帶入之結果均為正值，顯示所有的虹符合最小總偏向角。



$$\theta_i = \sin^{-1} \frac{b}{a}$$

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{k(k+2) - (n^2 - 1)}{k(k+2)}} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sqrt{\frac{k(k+2) - (n^2 - 1)}{k(k+2)}}$$

以下皆以折射率為 1.331 的紅光為例，將入射光假設為平行等距入射，可得到以下結果：

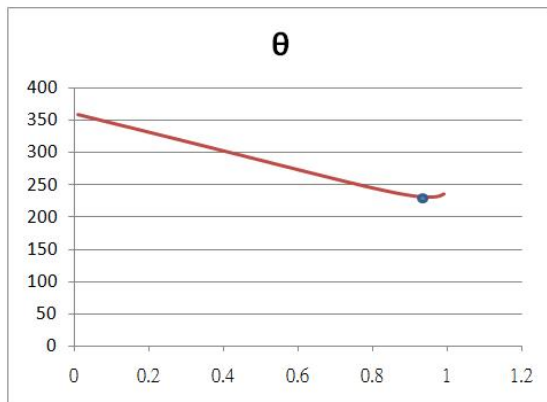


k=1

b/a=0.86

總偏向角=137.63°

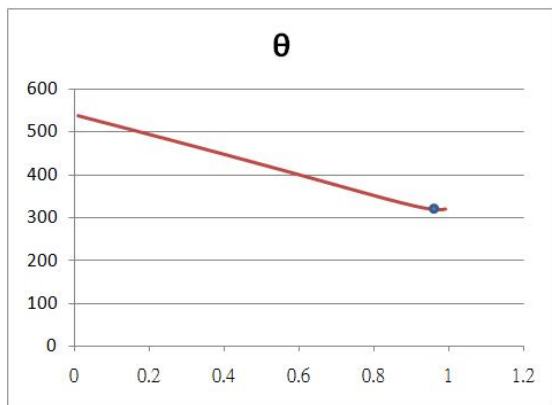
為極限發生處



k=2

b/a=0.95

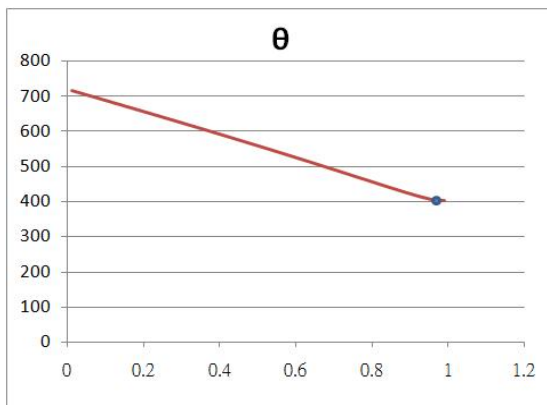
總偏向角=230.37°



k=3

b/a=0.97

總偏向角=317.59°



k=4

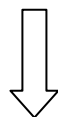
b/a=0.985

總偏向角=402.77°

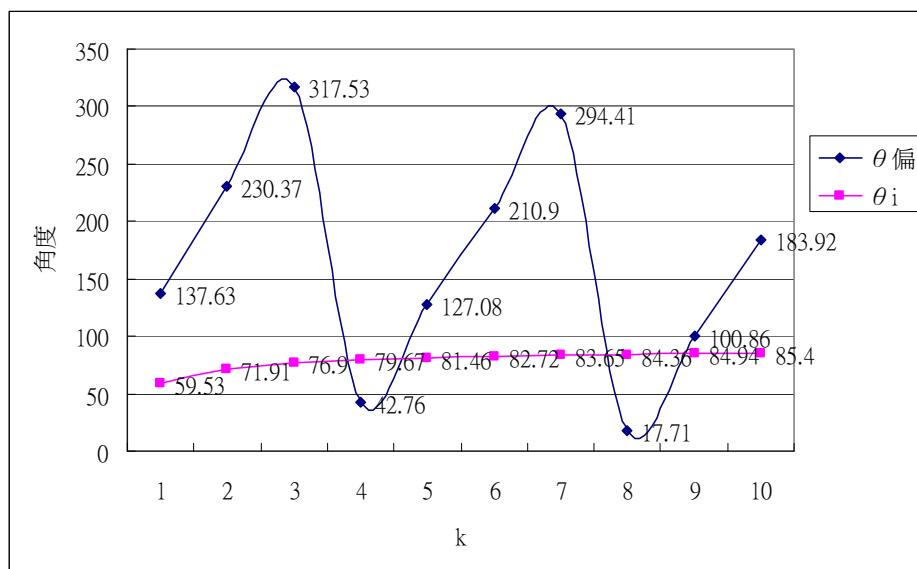
從以上我們發現，極限發生處會越來越接近 **b/a = 1**。

我們將其統整成下表，**k=1~3** 前面列過便不列出：

反射次數	顏色	入射角(θ_i)	總偏向角(θ)
4	紅 紫	79.67°	42.76°
		79.46°	48.34°
5	紅 紫	81.46°	127.08°
		81.28°	133.86°
6	紅 紫	82.72°	210.90°
		82.57°	218.86°
7	紅 紫	83.36°	294.41°
		83.51°	303.55°
8	紅 紫	84.36°	17.71°
		84.25°	28.02°
9	紅 紫	84.94°	100.86°
		84.83°	112.35°
10	紅 紫	85.40°	183.92°
		85.31°	196.57°

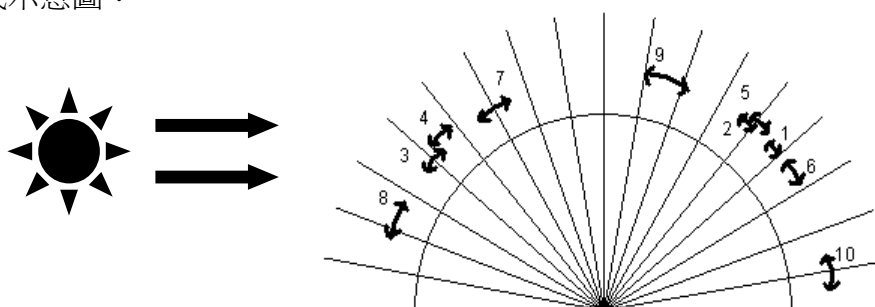


因紅光與紫光之函數圖形差不多，在此便以紅光為例



θ_i 的分布從 59.5° ($\frac{b}{a} = 0.86$) 到 85.4° ($\frac{b}{a} = 0.997$)，總偏向角則成規律分布在各象限。

將其繪成示意圖：



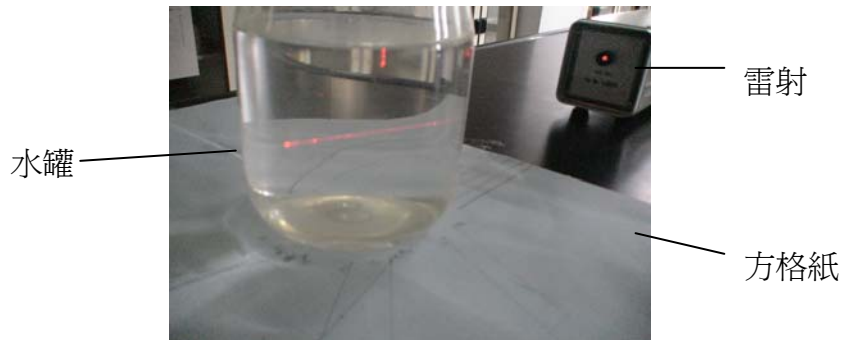
三、實驗室內平面模擬水珠內之光線

知道光線的偏向角後，由於無法在生活中看見光在水珠中行進的路徑，我們轉而以實驗來證明所想為真。因水珠的每一截面皆為一正圓，我們在此便以雷射光入射圓柱型水罐，將其平面作為水珠之截面進行實測。

實驗器材：

水罐（半徑 6.5 cm）	氦氖雷射光	方格紙
---------------	-------	-----

實驗裝置：

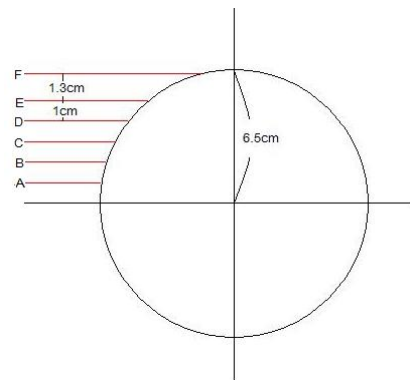


前置準備：

- (一) 將方格紙固定在桌上，以方格紙之一點作為座標原點，畫出 x 軸與 y 軸，將圓柱形水罐裝入八分滿的水，灑入少量粉筆灰方便觀察。
- (二) 將水罐之圓心對準原點。

實驗步驟：

設定五個入射點 A~F 與圓心之垂直距離分別為 1~5 cm、6.3 cm（因 $k=3$ 總偏向角為 76.7° ，約在此位置），使氦氖雷射光通過此五個點平行 x 軸入射。



- (一) 我們先以 A 點為入射點使雷射光射入，將入射點垂直投射在方格紙上，記錄此點為 A_1 。
- (二) 以一硬紙板垂直立於第一個出射點外側，使出射光能投射至紙板上，再將此點垂直投射在方格紙上，與第一個反射點連線，即為第一次射出線。
- (三) 重複以上步驟尋找每一個射出點與射出線，直至觀察不到為止。
- (四) 以相同方式於 B、C、D、E、F 進行實測。



實驗紀錄：

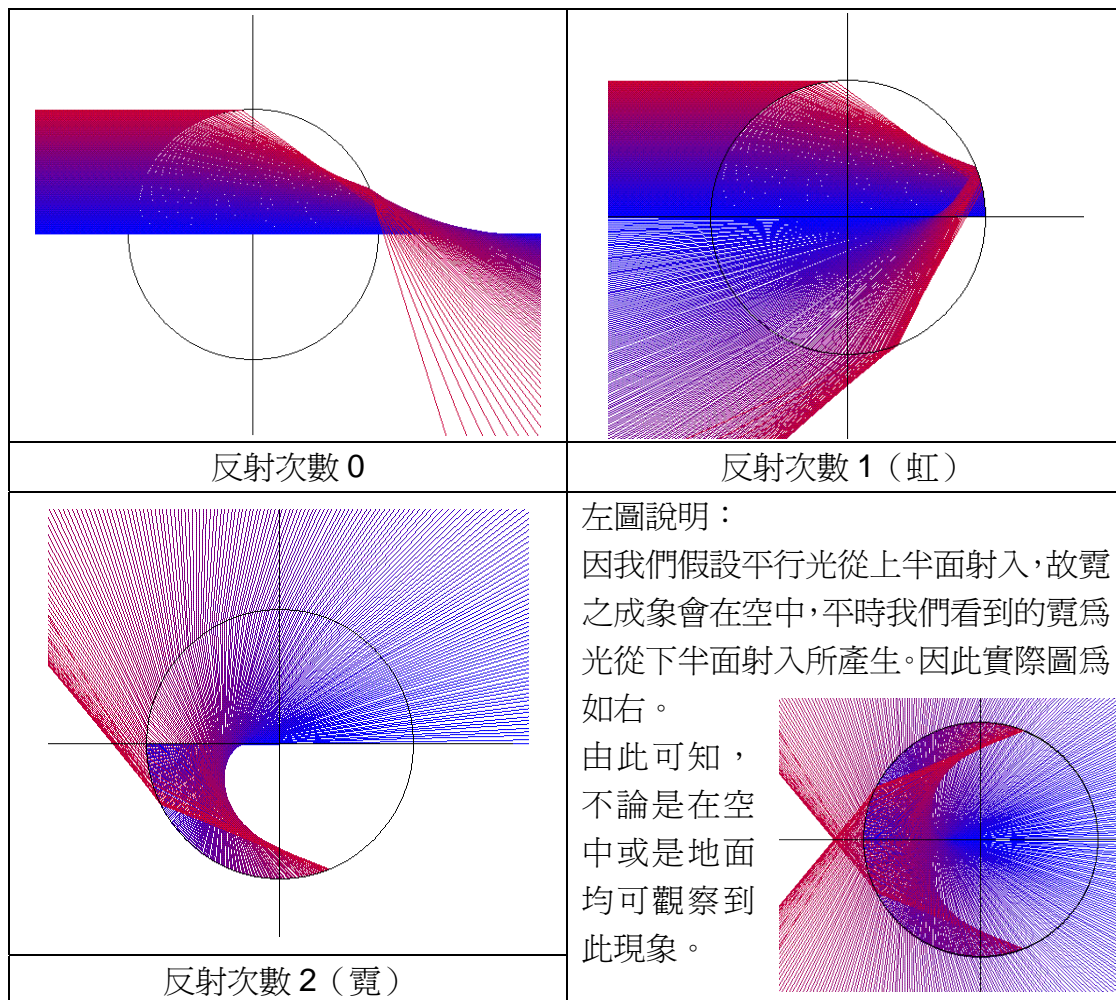
(括號內為與實驗值相差 1° 以上之理論值)

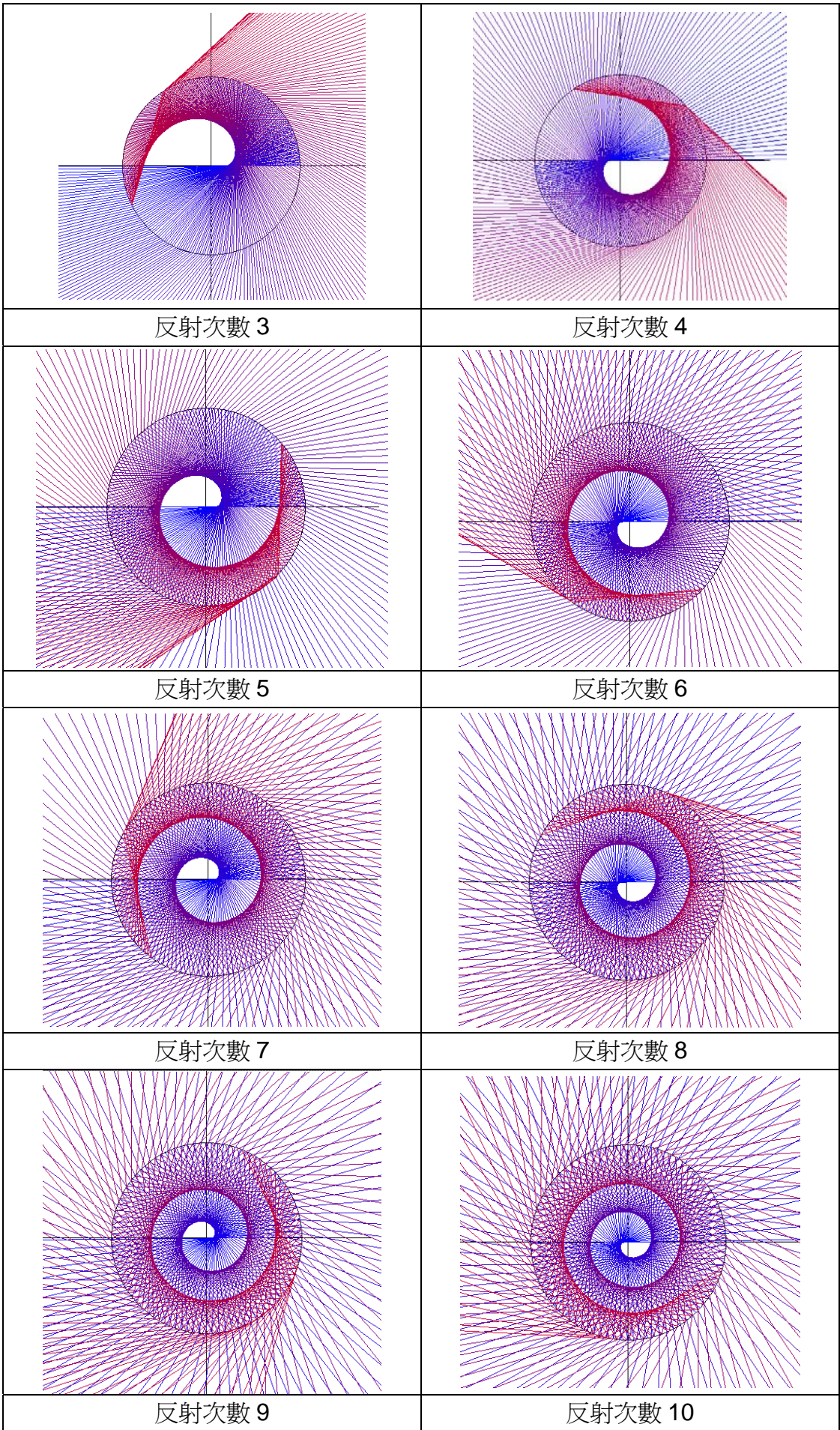
總偏向角 $\sin \theta$	k	0	1	2	3
0.154		6.5°	169.9° (171.3)	335.5° (338.4)	
0.308		9.0°	162.0°	316.7° (315.3)	
0.462		14.5°	154.0°	292.2°	
0.615		21.6°	146.6° (145.9)	273.0° (270.1)	
0.769		30.5°	139.0°	250.2°	354.6° (357.5)
0.969		70.0°	147.0° (144.7)	233.7° (231.2)	314.9° (317.6)

- (一) 經過實驗發現，所得之數據與理論值十分相近，誤差不超過 3°，故藉由我們繪出之路徑圖可得知光在水珠內之行進路徑。
- (二) $\sin \theta$ 越接近 1，穿透剩餘能量越多，其中 E 和 F 兩道能測量至第三次反射。

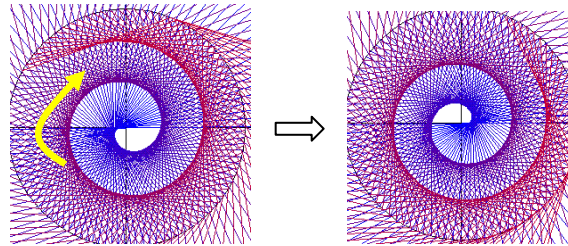
四、電腦平面模擬水珠內之光線

有鑒於實驗無法模擬出反射次數 4 以上之光線，我們用 Visual Basic 設計程式畫出光在水珠內反射次數由 0 至 10 的路徑以及射出之圖，茲如下：





- (一) 如同總偏向角之表所計算出的，以右下為第一象限，反射次數= k ，極限出現在 $(k+1)/4$ 取餘數的象限。
- (二) 自 $k>3$ 後光線便不均勻分散在四個象限中，但仍能辨別出極值發生處。
- (三) 光在經過數次反射後其反射路徑會於水滴內形成包絡線，並逐漸收斂至中心，且反射次數越高，包絡線會越密集。
- (四) 自 $k\geq 2$ ，每次反射所形成之空白區域（無反射光經過之區域），在下次反射時會以中心為原點旋轉 180 度，如圖：



五、探討折射、反射與能量的關係

將入射的光分解為電場垂直入射面與平行入射面兩分量，分別討論：

電場垂直入射面的光反射掉的分率可表示為： $\left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \right]^2$ （引用自大學課程）

因此穿透分率就是： $1 - \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \right]^2$

則穿透的能量為： $E_{k1} = \left[1 - \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \right)^{2k}$

相同的，電場平行入射面的反射分率為： $\left[\frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} \right]^2$

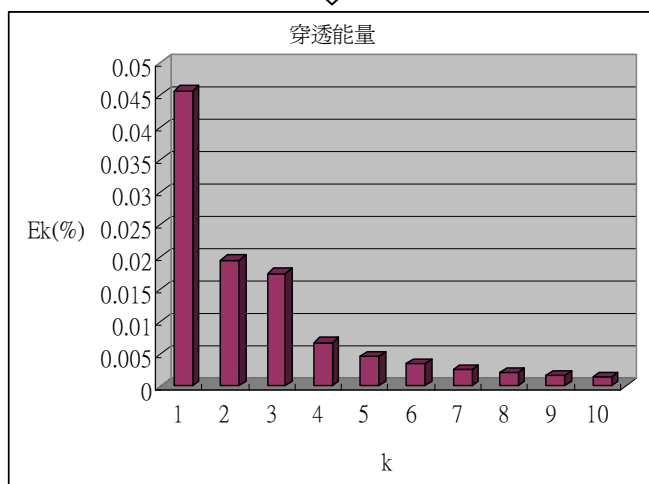
平行光穿透分率： $1 - \left[\frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} \right]^2$

穿透能量： $E_{k2} = \left[1 - \left(\frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} \right)^{2k}$

總穿透能量 $E_k = E_{k1} + E_{k2}$

因此我們可整理出表格如下：

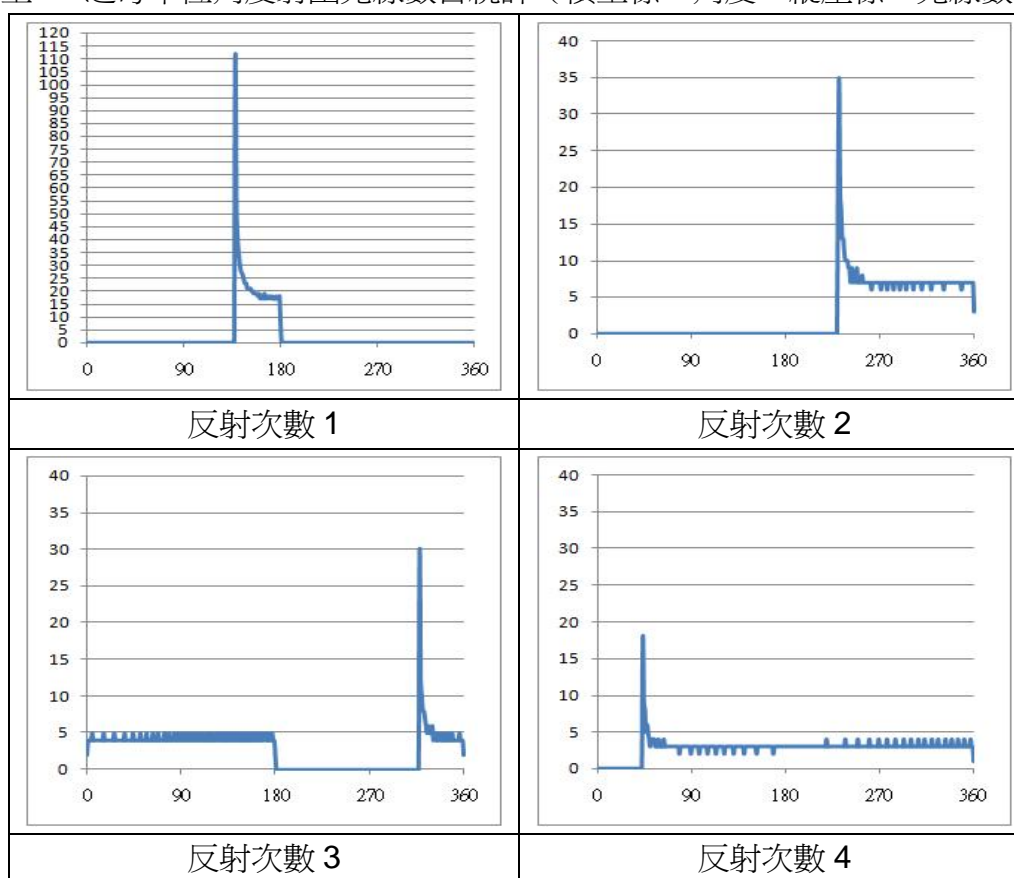
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_k (10^{-4})	914	390	215	136	94	69	53	42	34	28

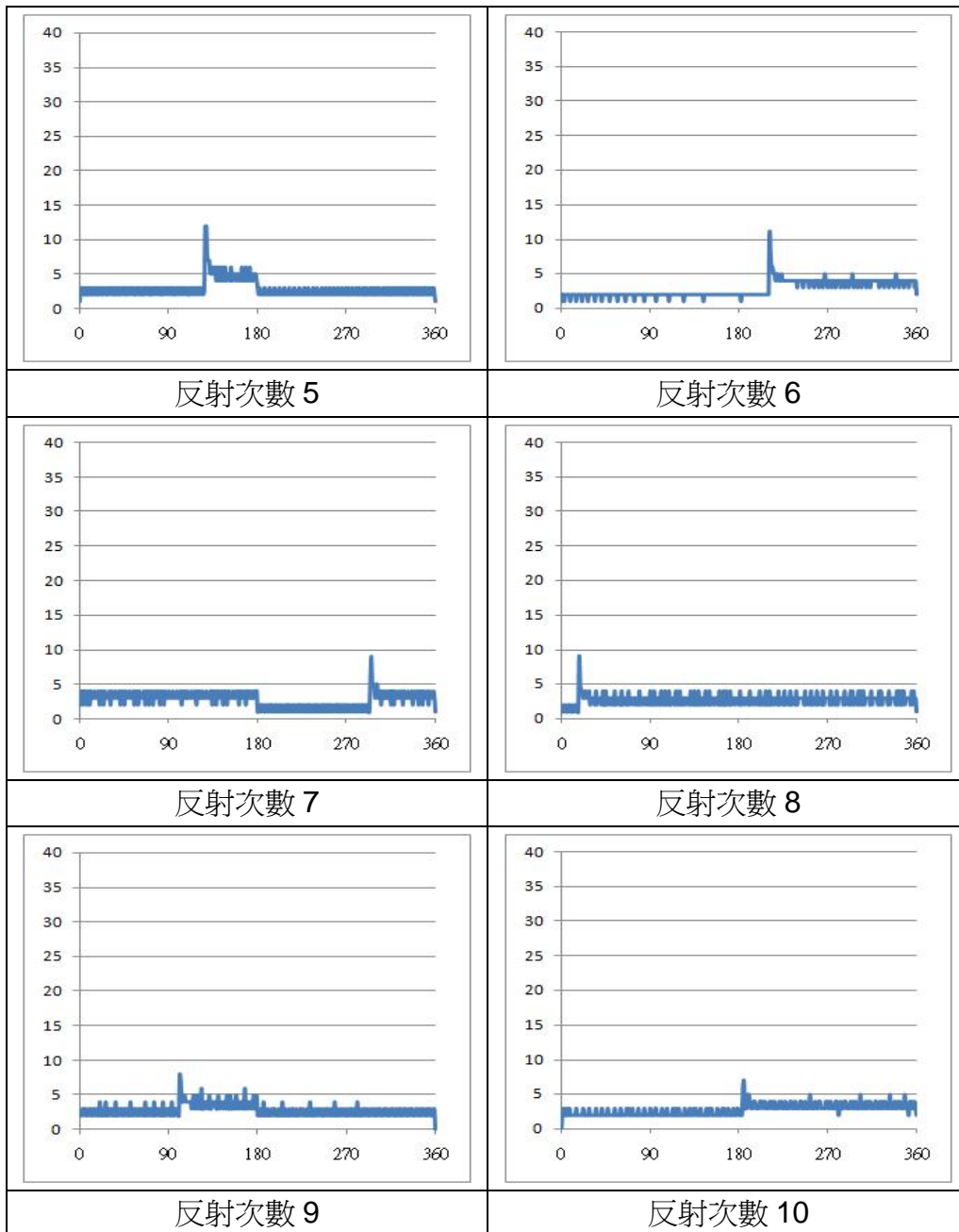


由此可見穿透剩餘的能量與原來入射光能量差異之大。

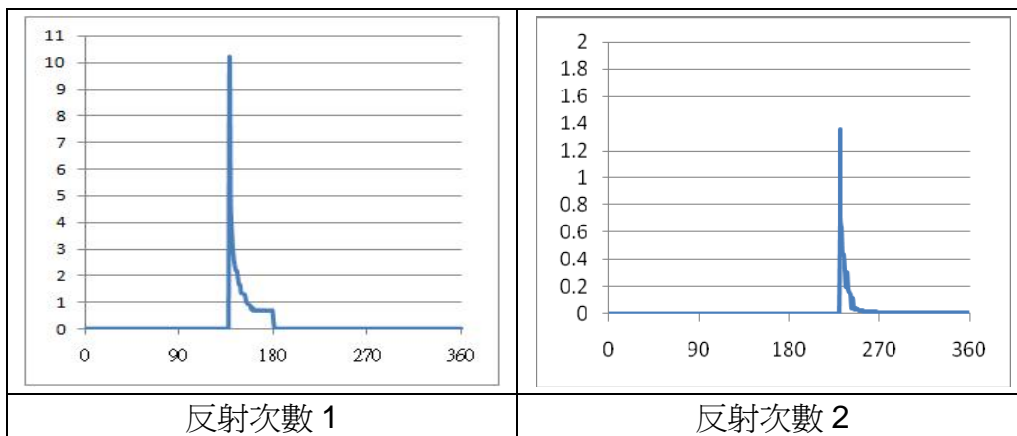
以下利用設計的程式對 1000 條等間隔平行入射光線進行統計：

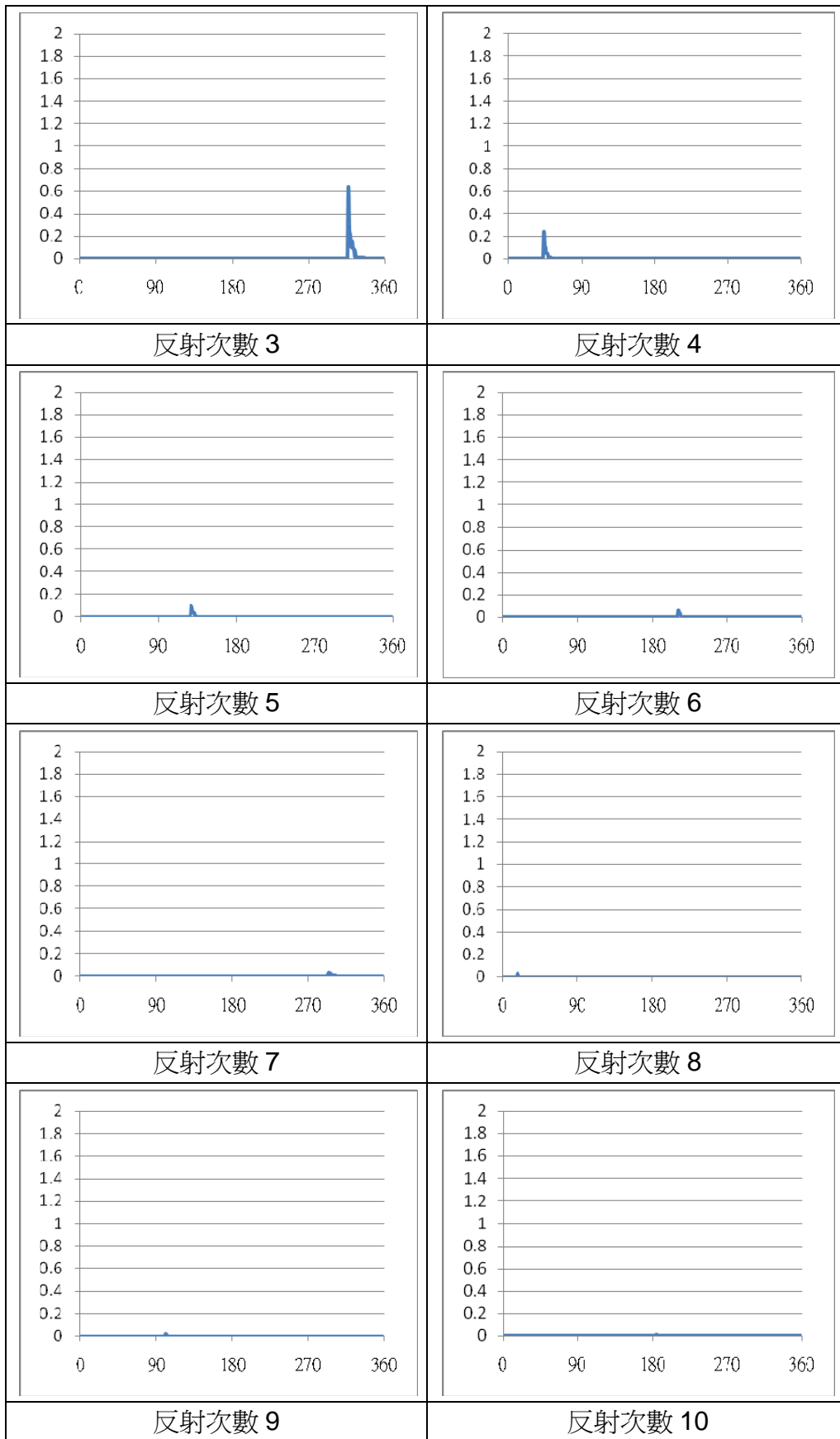
k=1 至 10 之每單位角度射出光線數目統計（橫坐標：角度；縱座標：光線數目）：





k=1 至 10 之每單位角度射出光能量統計（橫座標：角度；縱座標：光線能量和）：





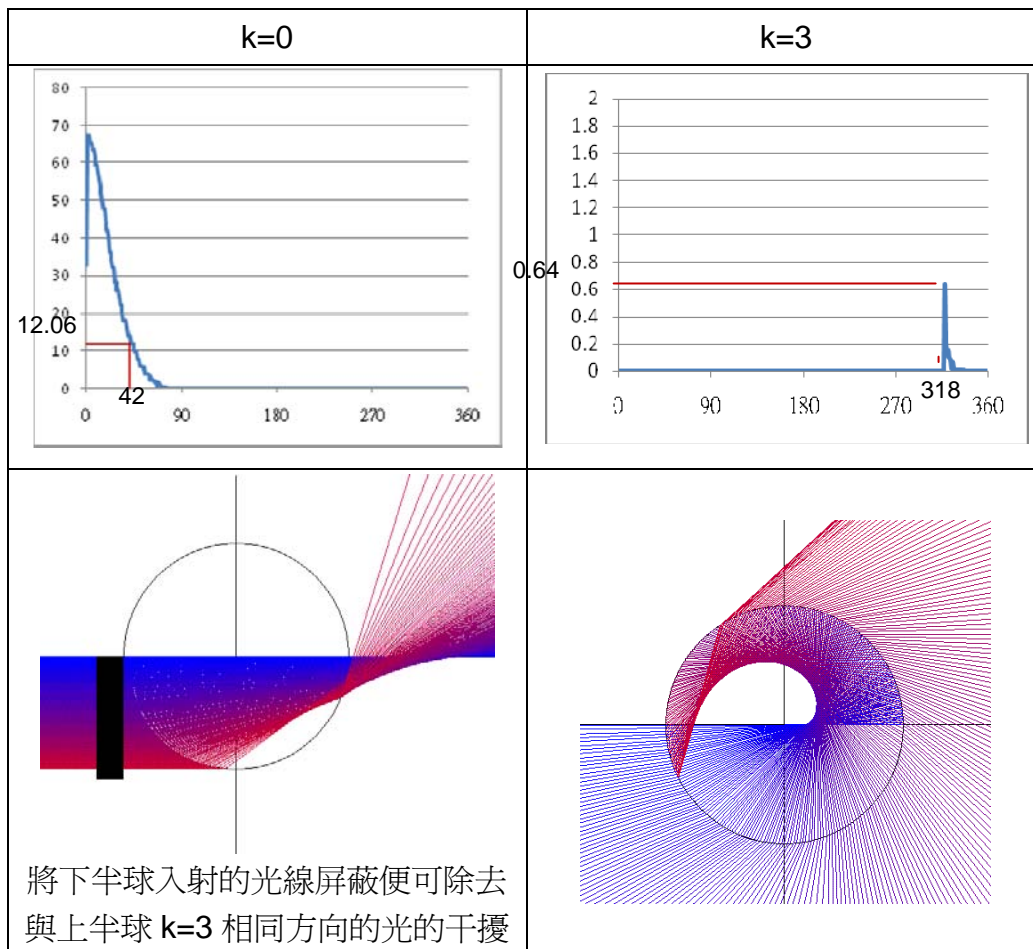
每單位角度的光線數目與每單位角度光能量的最大值皆發生在同一角度，這也跟最小總偏向角 θ 的角度相符。

六、在實驗室內做出第三道彩虹

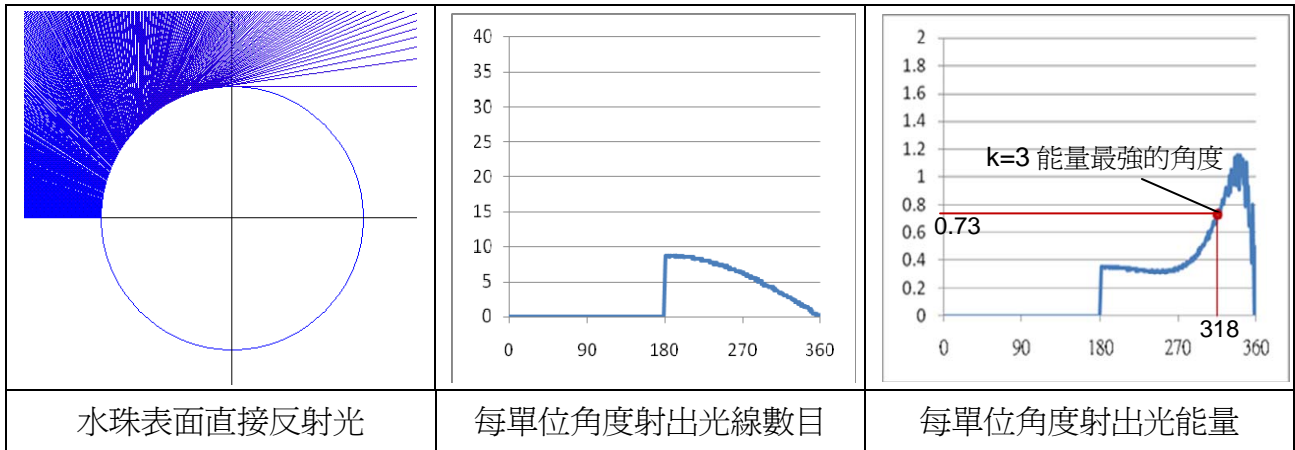
(一) 數據分析

- 由 $k=0$ 與 $k=3$ 兩者射出光在每單位角度能量的統計圖，可知在自然界中看不到第三道彩虹的原因是：第三道彩虹($k=3$)的能量比在同一方向直接穿透水珠的光($k=0$)要小很多 ($0.64/12.06 \approx 1/20$)，會被強光掩蓋，所以要看到第三道彩虹就必須除去 $k=0$ 的透射光。由電腦模擬圖可知會蓋掉 $k=3$ 的是入射光在另一半球的 $k=0$ ，也就是我們可以把另一半球的入射光除去，還能保留我們想要的 $k=3$ 。

每單位角度射出光能量與圖形：



- 再比較同半球入射光在水珠表面直接反射的光，發現與 $k=3$ 有同方向之處，但其每單位角度能量只為 $k=3$ 的 $\frac{0.73}{0.64}$ 約 $7/6$ 倍，所以預估仍可觀察出 $k=3$ 的射出光。



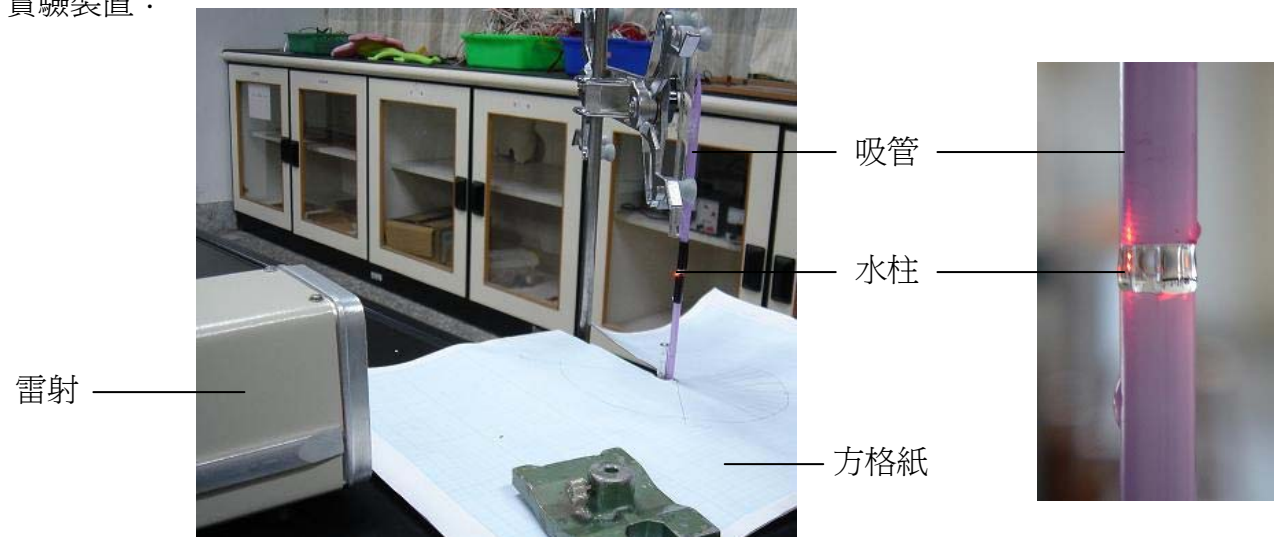
(二) 利用水柱做出第三道彩虹

為得到穩定水柱我們曾嘗試利用水龍頭及漏斗來產生連續水柱，但皆因水柱表面會震動而失敗。我們便想出製作完全靜態水柱的第三種方法——分別將兩支吸管各一端封住使其不會漏水，另一末端以黑膠布纏繞（避免雷射光受吸管干擾）。由開口端注滿水，一朝上一朝下固定在架上，兩支吸管上下對齊，留約 0.5 公分間隙，再用滴管使水連接，形成完全靜態水柱。

實驗器材：

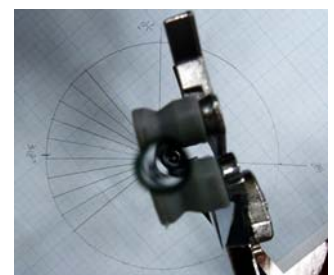
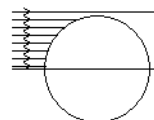
氦氖雷射光	吸管	滴定架	方格紙	數位相機
-------	----	-----	-----	------

實驗裝置：

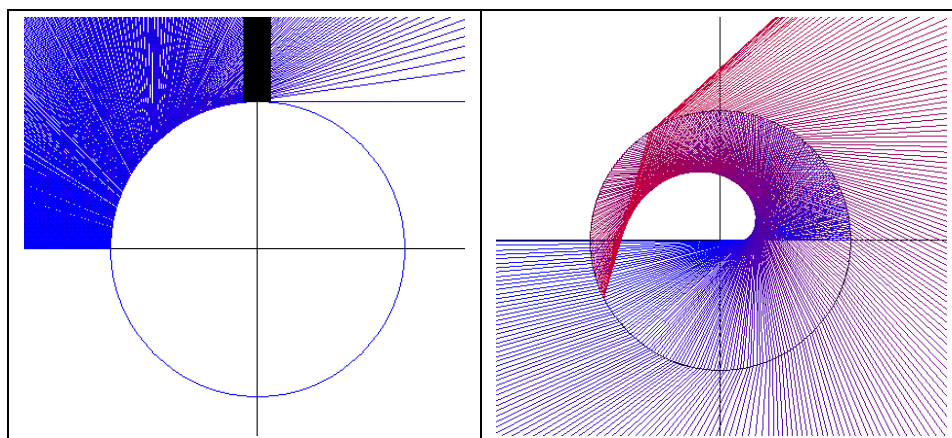


實驗方法：

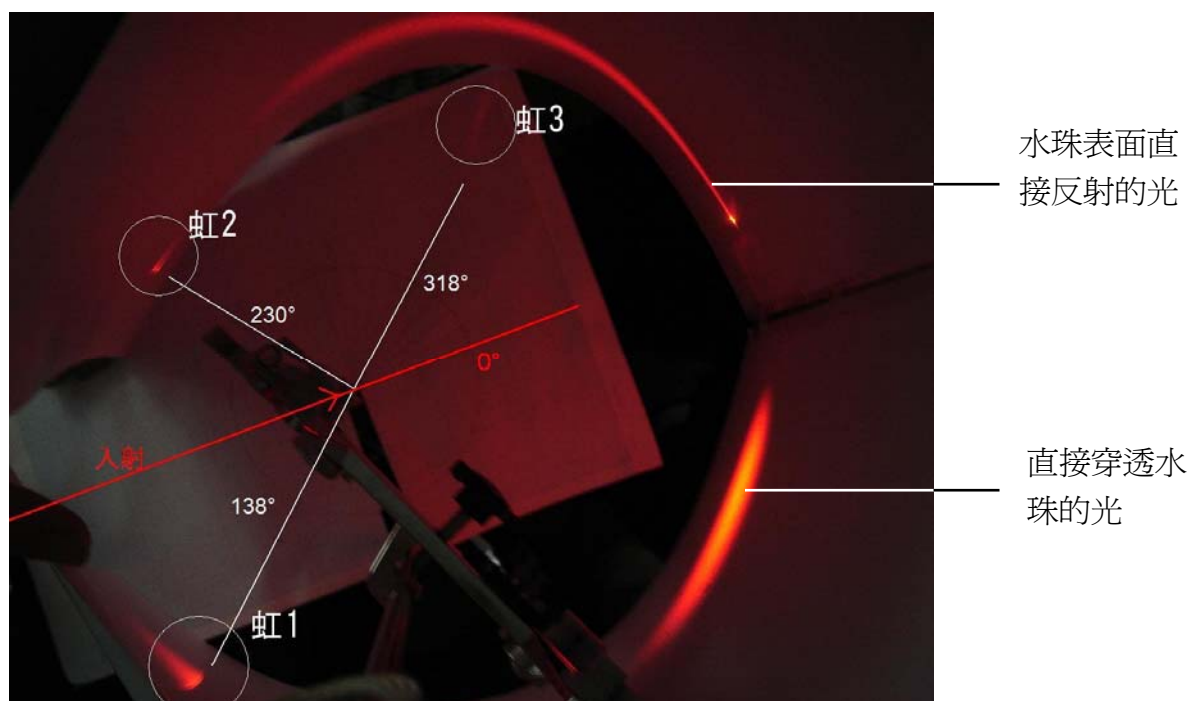
1. 畫上角度的方格紙架在中間，並以硬紙板為在外圈作為屏幕，僅留下光線入射的開口。
2. 調整雷射光，由內側逐漸外移，使另一半球無入射光，就相當於排除了自另一半球入射 $k=0$ 的直接穿透光：



3. 理論上還可以將水珠表面直接反射光屏蔽，但如此一來同時也會擋住第三道彩虹，所以我們便不做這一遮蔽：



實驗結果：



由照片可清楚看到前三道彩虹皆出現在預先由理論計算所畫記的方向上。

k	射出角度 (理論值)
1	137.9° (137.6°)
2	229.1° (230.4°)
3	316.8° (317.5°)

伍、 討論

一、 $k \rightarrow k+1$

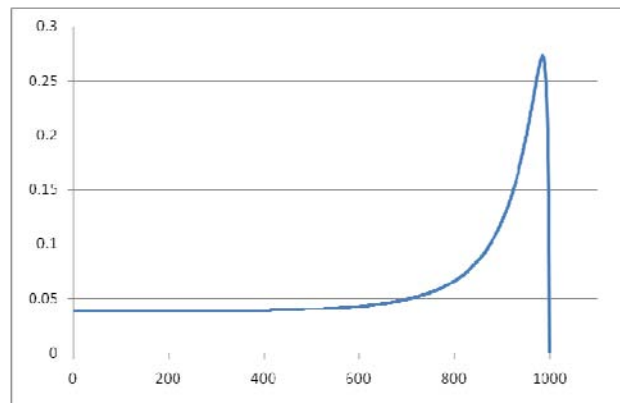
反射次數 1 到 10 的圖形中，第 k 次的最小偏向角會對應到 $(k+1)/4$ 取餘數的象限，我們本來認為這是它的規律。但在 $k=11$ 的紅光時，其最小偏向角 $\theta = 266.9^\circ$ 並未發生在我們

預期的第四象限，經過仔細觀察發現，由於其最小偏向角每一次改變的角度雖然接近但並非剛好 90° ，因此反射四次後並不會回到原點，而是持續「向後退」。因此會造成 $k=10$ 與 $k=11$ 紅光的最小偏向角在同一象限的現象。

二、光線能量和密度

一開始的過程中，我們所計算出單一光線之能量最強處並未發生在光線最密集處，思考計算程序後發現，計算時比較的是單一光線之能量強度，也就是說我們計算的是每一條光線在不同角度及反射次數時穿透出之能量。但實際觀察時，眼睛所接受的並非單一光線之能量，眼睛接受的光強度是考慮水滴在每一度角發射的所有光線之能量總和，因此，我們將每一度角所有光線之能量累加起來後，才形成研究五之圖表，證明實際能量最強處確實與光線最密集處符合。

例如 $k=1$ 時（見附錄一、 $k=1$ 之能量與密度表），從表中我們看到單一射出之能量最高處在 149.19° ，而光線最密集處在 137.63° ，也是光線能量累加後最強處，因此我們實際看到的虹位於 137.63° 。



（橫軸：光線編號；縱軸：光線能量）

三、包絡線(Envelope)

在幾何學，某個曲線族的包絡線，是跟該曲線族的每條線都有至少一點相切的一條曲線 (From Wikipedia)。電腦模擬圖形中我們發現，高階彩虹內部反射線形成的包絡線呈現出十分美麗的螺線軌跡。

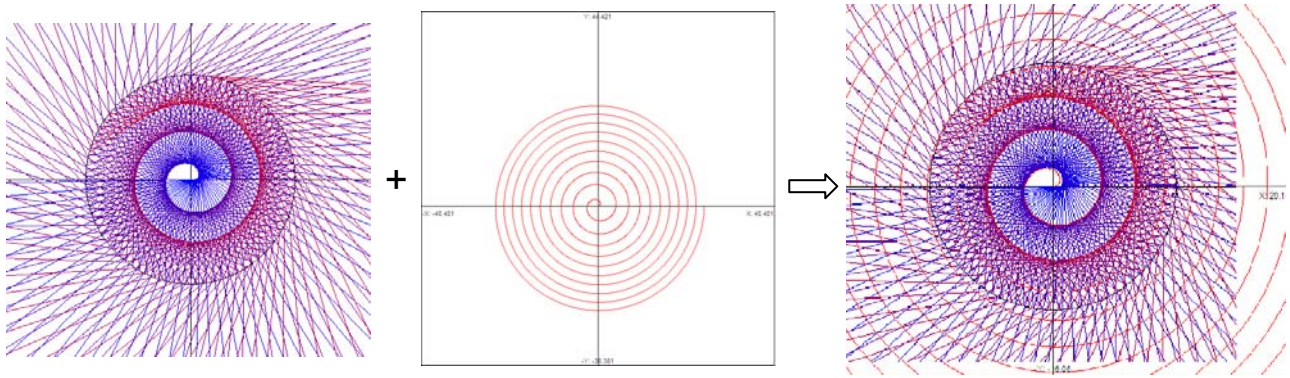
由於我們經過數次嘗試，仍難以從定義下手求出其方程式，便決定換從螺線的角度去看。

說明：

將偶數反射次數構成圖形命名為 G_{2n} ，奇數則命名為 G_{2n-1} ， $n \in \mathbb{N}$ 。

- (一) 由圖形可知，當 $n \geq 3$ ，圖形將形成一條螺線(Spiral)，其中 G_{2n} 、 G_{2n-1} 螺線經翻轉、調整大小後皆可重合。
- (二) 該螺線之螺距大小隨離中心點距離而成等比，此性質屬對數螺線(Logarithmic spiral)之性質。
- (三) 尋找適當比例，我們於極座標系定義一函數： $r = \theta^{313/512}$ 為 G_n 圖形之近似曲線。

在此以 $k=10$ 為例進行疊圖：



陸、 結論

- 一、當 $\theta_i = \cos^{-1} \left[\sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}} \right]$ ，總偏向角有最小值。同時可以發現， k 值越大 θ_i 越接近 90° 。
- 二、單一光線能量最強處與彩虹角度並不一致。
原因為：實際觀察時，眼睛接受的光強度是考慮水滴在每一角度發射的所有光線之能量總和，因此「光線最密集處之能量總和」會較「單一光線能量最強，但密度不高」的能量總和大。
- 三、第三道彩虹為光線經過三次反射後，射出光為面向陽光仰角 42.47° 的方向。由於此能量與陽光直接穿透水珠的能量比為 $\frac{0.64}{12.06} = 0.053$ ，兩者相差了近 20 倍，因此無法看見。
但藉由排除從另一半球入射而反射次數為 0 的透射光，最終成功在實驗室內做出第三道彩虹。

柒、 參考資料

基礎物理課本

Archibald W. Hendry. Indiana University, Bloomington: A Triple Rainbow?

Grant R. Fowles (1975). Introduction to Modern Optics. p.44

附錄一、k=1 之能量與密度表

一千條入射線的第__道線，射出角度，能量

1,179.942402844566,3.87176006218094E-02	38,177.811467426875,3.87176351715388E-02
2,179.884805706527,3.87176006220575E-02	39,177.753883210861,3.87176389590712E-02
3,179.82720860328,3.87176006231321E-02	40,177.696299678605,3.87176430501834E-02
4,179.769611552223,3.87176006260253E-02	41,177.638716847922,3.87176474607401E-02
5,179.712014570754,3.87176006321259E-02	42,177.581134736652,.038717652207018
6,179.654417676274,3.87176006432198E-02	43,177.523553362655,3.87176573057063E-02
7,179.596820886186,3.87176006614896E-02	44,177.465972743815,3.87176627739075E-02
8,179.539224217899,3.87176006895153E-02	45,177.40839289804,3.87176686291384E-02
9,179.481627688823,.038717600730274	46,177.35081384326,3.87176748893307E-02
10,179.424031316372,3.87176007871401E-02	47,177.293235597431,3.87176815728319E-02
11,179.366435117967,3.87176008638856E-02	48,177.235658178532,3.87176886984062E-02
12,179.308839111033,3.87176009646804E-02	49,177.178081604571,3.87176962852356E-02
13,179.251243313001,3.87176010940919E-02	50,177.120505893579,3.87177043529203E-02
14,179.193647741309,.038717601257086	51,177.062931063615,3.87177129214802E-02
15,179.136052413401,3.87176014590267E-02	52,177.005357132765,3.87177220113555E-02
16,179.07845734673,3.87176017056766E-02	53,176.947784119144,3.87177316434076E-02
17,179.020862558755,3.87176020031974E-02	54,176.890212040894,3.87177418389204E-02
18,178.963268066946,3.87176023581498E-02	55,176.832640916186,3.87177526196009E-02
19,178.905673888781,3.87176027774939E-02	56,176.775070763221,3.87177640075809E-02
20,178.848080041747,3.87176032685897E-02	57,176.71750160023,3.87177760254171E-02
21,178.790486543342,3.87176038391974E-02	58,176.659933445475,.038717788696093
22,178.732893411076,3.87176044974776E-02	59,176.602366317248,3.87178020430196E-02
23,178.675300662467,3.87176052519917E-02	60,176.544800233875,3.87178160900365E-02
24,178.617708315049,3.87176061117027E-02	61,176.487235213713,3.87178308614134E-02
25,178.560116386364,3.87176070859752E-02	62,176.42967127515,3.87178463818505E-02
26,178.502524893972,3.87176081845755E-02	63,176.372108436611,3.87178626764806E-02
27,178.444933855441,3.87176094176732E-02	64,176.314546716554,3.87178797708695E-02
28,178.387343288357,3.87176107958406E-02	65,176.256986133471,3.87178976910177E-02
29,178.32975321032,3.87176123300538E-02	66,176.199426705888,3.87179164633615E-02
30,178.272163638944,3.87176140316927E-02	67,176.14186845237,.038717936114774
31,178.214574591858,3.87176159125421E-02	68,176.084311391516,.038717956672567
32,178.156986086709,.038717617984792	69,176.026755541963,3.87179781644916E-02
33,178.099398141161,3.87176202610379E-02	70,175.969200922384,.03871800061874
34,178.041810772894,.038717622754282	71,175.911647551493,3.87180240639468E-02
35,177.984223999605,3.87176254779334E-02	72,175.85409544804,3.87180485291899E-02
36,177.926637839013,3.87176284458085E-02	73,175.796544630815,3.87180740439924E-02
37,177.869052308851,3.87176316721324E-02	74,175.738995118649,.038718100638324

(中略)

846,137.696781020151,8.29722179006328E-02	962,143.175453998401,.225344968504159
847,137.688892329452,8.34557073927361E-02	963,143.348575851373,.227849166325525
848,137.681470392025,.083945417593167	964,143.527052084301,.230369799713636
849,137.674521188991,.084441445708941	965,143.711119688572,.23290395718662
850,137.668050808333,.084943890758248	966,143.901032813691,.235448254388462
851,137.662065447462,.085452853608853	967,144.097064549222,.237998764724078
852,137.656571415839,8.59684370173529E-02	968,144.299508951805,.240550938677271
853,137.651575137702,8.64907456693068E-02	969,144.508683359741,.243099509677275
854,137.647083154856,8.70198862202559E-02	970,144.724931046637,.245638383911749
855,137.643102129561,8.75559673376496E-02	971,144.948624276849,.248160510897419
856,137.639638847511,8.80990997436939E-02	972,145.180167839681,.250657730879357
857,137.636700220901,8.86493962591363E-02	973,145.420003157319,.25312059418982
858,137.634293291595,8.92069718480066E-02	974,145.668613084636,.255538146495162
859,137.632425234394,8.97719436633253E-02	975,145.9265275488,.257897672309949
860,137.631103360412,9.03444310937969E-02	976,146.194330215584,.260184387144572
861,137.630335120557,9.09245558115012E-02	977,146.472666420475,.262381066015367
862,137.630128109129,9.15124418205985E-02	978,146.762252670834,.264467592558186
863,137.630490067536,9.21082155070587E-02	979,147.063888117052,.266420408326893
864,137.631428888128,9.27120056894312E-02	980,147.378468515543,.268211835565654
865,137.632952618169,.093323943670664	981,147.707003378885,.269809238145041
866,137.635069463934,9.39441632909831E-02	982,148.050637250001,.27117397344904
867,137.637787794944,9.45728009818437E-02	983,148.410676381313,.27226007128952
868,137.641116148355,9.52099958209589E-02	984,148.788622598273,.273012552097334
869,137.645063233484,.095855889588414	985,149.186216863481,.273365262075686
870,137.649637936507,.096510626823872	986,149.60549617046,.273238051897129
871,137.654849325304,9.71743548848711E-02	987,150.048869118889,.272533048331974
872,137.660706654493,9.78472240062182E-02	988,150.519218264446,.271129648749739
873,137.667219370623,9.85293873604739E-02	989,151.020041838206,.268877678476153
874,137.674397117566,9.92210011195285E-02	990,151.555655095377,.265587839244137

【評語】 040101

- 1、 原理探討，電腦模擬及實驗驗證與討論，研究過程完整。尤其從簡易裝置，成功實驗觀察第一、二、三階彩虹，更屬難得。
- 2、 研究內容與教材切合。
- 3、 高階彩虹理論與實驗，國內外均有發表之論文，雖有改進，創新性較不足，且未在報告內回顧介紹前人研究之文獻與成果。