中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030426

挑戰全翻位

學校名稱：屏東縣立南榮代用國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃亮諭	劉雅芬
國二 陳雅筑	謝曉楓
國二 陳芯誼	
國二 孫宇廷	

關鍵詞：全翻位、最佳全翻位

摘　　　要

將 N 個正面朝上的硬幣，每次固定翻動 M 個硬幣，直到將全部硬幣翻成反面，稱為全翻位。在觀摩全國科展第四十三屆國小組優勝作品<最佳全翻位的探討>中，發現了部分公式的錯誤，我們的目的是要修正此錯誤，並簡化公式。除此之外，我們也將遊戲規則改變，延伸出環狀排列與連續數翻動兩種推廣研究。

壹、 研究動機

我們十分喜歡數學，對數學情有獨鍾，一聽見有科展的機會便毛遂自薦。在尋找適當的題目中，曾嘗試過兩種實驗但都無功而返、白忙一場。所以，我們大量的閱讀這幾年科展的優勝作品，觀摩他人的研究。

閱讀到全國科展第四十三屆作品<最佳全翻位的探討>覺得非常有趣，且與我們所學的數列有所相關。當發現其中內容有錯誤時，立刻激起我們想要修正它的決心，且更要把複雜難懂的公式簡化，力求報告的精簡與公式的完整性。

在實驗過程中，我們嘗試利用原來的方法修正錯誤，但是皆無法達成完美的結果。因此，我們試著想出其他方式來繼續研究，期望能完成這既有趣又極具挑戰性的課題。

貳、研究目的

一、找出最佳全翻位的操作模式。
二、找出能預測最佳全翻位的計算公式。
三、延伸研究一：環狀排列。
四、延伸研究二：連續數翻動。

参、名詞解釋

全翻位：將 N 個正面朝上的硬幣，每次固定翻動 M 個硬幣，直到將全部硬幣翻成反面，稱為全翻位。

最佳全翻位：使用最少步驟數，完成全翻位的方法。

符號說明：

N：每次實驗硬幣總數。

M：每一實驗步驟翻動硬幣數。

K：完成最佳全翻位所需的步驟數。

T：每個硬幣被翻動的總次數和。

P：N÷M＝P…R

肆、參考資料

一、趣味數學 300 題(凡異出版社)

二、解題思路訓練(謙謙出版社)
三、中華民國第 43 屆科學展覽數學科國小組<最佳全翻位的探討>

伍、文獻探討

中華民國第 43 屆科學展覽數學科國小組<最佳全翻位的探討>　第 10-15 頁

N：每次實驗硬幣總數。 M：每一實驗步驟翻動硬幣數。N÷M＝P…R

一、操作模式五：

當 M＝奇數，R＝奇數，且 M≦N≦M×2 時，操作步驟如下

A、先算出 N 個硬幣，同時翻 M 個硬幣，可翻 P 次，剩數個正面未翻。在翻第 P＋1 次時，從尾端往前翻 M 個硬幣，產生 Q 個正面未翻。

B、倘若在翻第P＋2次硬幣時，將翻幣範圍從正面區往前挪Q÷2個位置（不足M個從後面補足），便可剩下Q÷2個正面未翻。

C、翻第P＋2次硬幣後，又會產生M－Q÷2個正面

D、（M－Q÷2個正面）＋（Q÷2）個正面＝M個正面，此時只需再翻1次便完成全翻位所以總次數＝P＋3次

二、五種模式的使用時機一覽表：

模式	使用時機	最佳K值
模式一	當N＝M×P	K＝P（公式一）
模式二	當N－M＝1 （N＝偶數）	K＝N（公式二）
模式三	（1）當M＝奇數，R＝偶數 （2）當M＝偶數，R＝偶數，且M≦N≦M×2	K＝P+２（公式三）
模式四	（1）當M＝奇數，R＝奇數，且N≧M×2 （2）當M＝偶數，R＝偶數，且N≧M×2	K＝P+1（公式四）
模式五	當M＝奇數，R＝奇數，且M≦N≦M×2	K＝P+3（公式五）

探討一、依上述操作模式實際操作N＝14，M＝11：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 實驗步驟

○○○○○○○○○○○○○○ 14 個硬幣，同時翻 11 個硬幣，可翻 1 次，剩 3 個正面未翻。

●●●●●●●●●●●○○○ 在翻第 2 次時，從尾端往前翻 11 個硬幣，產生 8 個正面未翻。

●●●○○○○○○○○●●● 在翻第 3 次硬幣時，將翻幣範圍從正面區往前挪 Q÷2＝4 個位置（不足 11 個從後面補足）。翻完第 3 次硬

○○○●●●●○○○●○○○	幣的時候，所剩下的正面個數並非如步驟 B 所寫的 Q÷2＝4 個正面，而是只剩下 3 個正面不必被翻動。翻第 P＋2 次硬幣後，共產生了 9 個正面，並非如步驟 D 所言的 11 個正面。

N＝14，M＝11 符合 M＝奇數，R＝奇數，且 M≦N≦Mx2，但在實際操作過程中卻無法得到它所說的結果。

我們想要找出能夠將 N＝14，M＝11 完成至全翻位的方法。

探討二、該研究以 M、R 的奇偶與 N 的範圍將結論分成五種模式、七種使用時機及五種公式。

我們覺得這樣的分類太過於繁雜，希望能挑戰簡化它。

陸、研究過程

一、實際操作：

實際操作 N 個硬幣(N≤20)每次翻動 M 個硬幣，完成最佳全翻位所需次數爲 K，我們得到以下的 K 值數據：

N \ M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1																			
2	2	1																		
3	3		1																	
4	4	2	4	1																
5	5		3		1															
6	6	3	2	3	6	1														
7	7		3		3		1													
8	8	4	4	2	4	3	8	1												
9	9		3		3		3		1											
10	10	5	4	3	2	3	4	3	10	1										
11	11		5		3		3		3		1									
12	12	6	4	3	4	2	4	3	4	3	12	1								
13	13		5		3		3		3		3		1							
14	14	7	6	4	4	3	2	3	4	3	6	3	14	1						
15	15		5		3		3		3		3		3		1					
16	16	8	6	4	4	3	4	2	4	3	4	3	6	3	16	1				
17	17		7		5		3		3		3		3		3		1			
18	18	9	6	5	4	3	4	3	2	3	4	3	4	3	6	3	18	1		
19	19		7		5		3		3		3		3		3		3		1	
20	20	10	8	5	4	4	4	3	4	2	4	3	4	3	4	3	8	3	20	1

註：空格處表示無法完成全翻位

二、在實際操作實驗過程中，發現了幾種可完成最佳全翻位的操作手法，我們儘可能的找出能涵蓋全部情況的操作模式與計算公式。接下來將以例子說明的方式來解釋我們的研究過程：

手法 1-因倍數手法

使用時機：N÷M＝P (P 為整數)。

操作說明：N 個硬幣每步驟翻動 M 個，其中 M 為 N 的因數。

第一步翻動編號 1,2,3,⋯,M

第二步驟翻編號 M＋1,M＋2,M＋3,⋯,2M

第三步驟翻編號 2M+1,2M＋2,2M＋3,⋯,3M

⋯至完成全翻位。

例 1：N＝4，M＝2

1	2	3	4	實驗步驟
○	○	○	○	步驟 1：翻編號 1.2
●	●	○	○	步驟 2：翻編號 3.4
●	●	●	●	完成全翻位，共 2 步。

圖例說明 ----○：正面。 ●：反面。 底下劃紅線者○表示下一步將操作翻面。

例 2： N＝12，M＝3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1:翻編號 1.2.3
●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 2:翻編號 4.5.6
●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	步驟 3:翻編號 7.8.9
●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	步驟 4:翻編號 10.11.12
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 4 步

發現 1：以手法 1 操作 N 個硬幣，每次翻動 M 個，可得到 K＝N÷M＝P

手法 2-差一格手法

使用時機：N－M＝1(N 為偶數，M 為奇數時)

操作說明：

N 個硬幣每步驟翻動 M 個。在第 n 個步驟時，由編號 n 的硬幣開始往右翻動 M 個硬幣。

第一步翻動編號 1,2,3,⋯,M

第二步驟翻編號 2,3,4,⋯,M,M＋1

第三步驟翻編號 3,4,5,⋯,M＋1,M＋2

第 n 步驟翻編號 n,1,2,3,⋯,M－1

⋯至完成全翻位。

例 3：N＝4，M＝3

1	2	3	4	實驗步驟

○	○	○	○	步驟 1：翻編號 1.2.3
●	●	●	○	步驟 2：翻編號 2.3.4
●	○	○	●	步驟 3：翻編號 3.4.1
○	○	●	○	步驟 4：翻編號 4.1.2
●	●	●	●	完成全翻位，共 4 步。

例 4：N＝6，M＝5

1	2	3	4	5	6	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	第一步:翻 1.2.3.4.5
●	●	●	●	●	○	第二步:翻 2.3.4.5.6
●	○	○	○	○	●	第三步:翻 3.4.5.6.1
○	○	●	●	●	○	第四步:翻 4.5.6.1.2
●	●	●	○	○	●	第五步:翻 5.6.1.2.3
○	○	○	○	●	○	第六步:翻 6.1.2.3.4
●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 6 步。

發現 2：以$\boxed{\text{手法 2}}$操作 N 個硬幣，每次翻動 M＝N－1 個，可得到 K＝N

原因探究：

在此無法以完整的證明來驗證我們的發現是對的，只能藉由觀察實驗過程的規律性來解釋以上發現：

N＝4，M＝3 的實驗過程

1	2	3	4	步驟數	正面個數	反面個數
○	○	○	○	0	4	0
●	●	●	○	1	1	3
●	○	○	●	2	2	2
○	○	●	○	3	3	1
●	●	●	●	4	0	4

N＝6，M＝5 的實驗過程

1	2	3	4	5	6	步驟數	正面個數	反面個數
○	○	○	○	○	○	0	6	0
●	●	●	●	●	○	1	1	5
●	○	○	○	○	●	2	4	2
○	○	●	●	●	○	3	3	3
●	●	●	○	○	●	4	2	4
○	○	○	○	●	○	5	5	1
●	●	●	●	●	●	6	0	6

N＝8，M＝7

1 2 3 4 5 6 7 8	步驟數	正面個數	反面個數
○○○○○○○○	0	8	0
●●●●●●●○	1	1	7
●○○○○○○●	2	6	2
○○●●●●●○	3	3	5
●●●○○○○●	4	4	4
○○○○●●●○	5	5	3
●●●●●○○●	6	2	6
○○○○○○●○	7	7	1
●●●●●●●●	8	0	8

觀察以上三個實驗的正反面個數數據，可看出它的規律性：

若以差一格手法來操作硬幣，當步驟數爲偶數時，硬幣呈現反面的個數亦是此偶數。

如步驟數爲 2 時，就會有 2 個硬幣是呈反面朝上

如步驟數爲 4 時，就會有 4 個硬幣是呈反面朝上

.

.

.

因此若有偶數 N 個硬幣，必須操作 N 個步驟才能達成全翻位。

發現 3：若 N 奇數，M 爲偶數時，無法完成全翻位。

在操作的實驗過程中，當 N 奇數，M 爲偶數時，我們使用了各種原本所會的翻法，皆無法順利的完成全翻位，因此我們試著推論：若 N 奇數，M 爲偶數時，無法完成全翻位。於是，我們也試著去證明這個推論。

證明：

假設共有 N 個硬幣，每次翻動 M 個硬幣，翻動總次數共 T 次可完成全翻位，則 T 必爲 M 的倍數，即 T 爲偶數。

但每個硬幣要翻成反面一定會被翻動奇數次。

亦即 N 個硬幣翻動總次數 T＝N 個奇數相加。

因爲 N 爲奇數，所以 T 也爲奇數，與假設 T 爲偶數矛盾。

所以若 N 奇數，M 爲偶數時，無法完成全翻位。

手法 3-餘偶分兩堆

使用時機：N÷M＝P…R (P 爲整數，R 爲小於 2M 的最大偶數)

操作說明：

1.N 個硬幣每步驟翻動 M 個。實驗至第 P 個步驟，使剩下正面硬幣個數爲偶數。

2.將這些正面硬幣平分成兩堆，翻動其中一堆正面硬幣，不足 M 個時，則翻動其餘反面硬幣補足至 M 個。

3.此時硬幣情形若呈現 M 個正面，N－M 個反面，則最後一步驟就是將這些正面硬幣翻成反面，完成全翻位。

詳細操作步驟如下例：

例 5：N＝8，M＝3　　8÷3＝2…2

1	2	3	4	5	6	7	8	說明
○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻編號 1.2.3
●	●	●	○	○	○	○	○	步驟 2：翻編號 4.5.6
●	●	●	●	●	●	○	○	步驟 3：將剩下的兩個正面分成兩次完成，不足 2 個則翻動另 2 個反面硬幣。翻編號 7.1.2
○	○	●	●	●	●	●	○	步驟 4：翻編號 8.1.2
●	●	●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 4 步。

例 6：N＝10，M＝6　　10÷6＝1…4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻編號 1,2,3,4,5,6
●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	步驟 2：將剩下的四個正面分成兩次完成，不足 4 個則翻動另 4 個反面硬幣。翻編號 7.8.1.2.3.4
○	○	○	○	●	●	●	●	○	○	步驟 3：翻編號 1.2.3.4.9.10
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 3 步。

發現 4：以手法 3 操作 N 個硬幣，每次翻動 M 個。若 N÷M＝P…R　，R 為小於 2M 的最大偶數時，K＝P＋2

原因探究：

操作 N 個硬幣，每次翻動 M 個硬幣至第 P 個步驟時，找到餘數 R 為偶數，表示剩下偶數個正面，可在下一個步驟先翻(R÷2)個正面及(M－R÷2)反面（如例 5 步驟 3），這樣可製造出下一個步驟（如例 5 步驟 4）所需的(R÷2)＋(M－R÷2)＝M 個正面，也就是說最後一個步驟是將此 M 個正面翻成反面。所以當翻到 P 個步驟而剩餘正面個數為偶數時，可將這些正面分兩堆，再以兩步驟完成全翻位。

亦即 K＝P＋2

問題：為何 R 要是小於 2M 的最大偶數呢？

我們以兩大部分的說明來解答此問題

第一部分：說明相同的 N，M 條件下，R 為奇數時比 R 為偶數時所需的步驟更多。

例 7：N＝10，M＝3

我們知道 10÷3＝3…1　　R＝1 是奇數

＝2…4　　R＝4 是偶數

10÷3＝3…1 的實驗步驟(R 為奇數)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻 1.2.3

●●●○○○○○○○	步驟 2：翻 4.5.6
●●●●●●○○○○	步驟 3：翻 7.8.9
●●●●●●●●●○	步驟 4：翻 10.1.2
○○●●●●●●●●	步驟 5：翻 1.3.4
●○○○●●●●●●	步驟 6：翻 2.3.4
●●●●●●●●●●	完成全翻位，共 6 步。

實驗結果：此時 P＝3，R＝1，需再多翻一步驟（如上圖步驟 4），才能製造出偶數個正面，再來做分兩堆的工作，

此時的 K＝P＋1＋2＝P＋3＝3＋3＝6。

但若 10÷3＝2…4 時(R 為偶數)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	實驗步驟
○○○○○○○○○○	步驟 1：翻 1.2.3
●●●○○○○○○○	步驟 2：翻 4.5.6
●●●●●●○○○○	步驟 3：翻 7.8.1
○●●●●●●●○○	步驟 4：翻 9.10.1
●●●●●●●●●●	完成全翻位，共 4 步。

實驗結果： P＝2，R＝4，可將剩餘的 4 個正面分兩堆完成全翻位。

K＝P＋2＝2＋2＝4

而 4＜6。

所以 R 為偶數所得的 K 值較小。

在實驗過許多相同條件的例子，所得到的結果亦是如此。

第二部份：說明在相同的 N，M 條件下，R 皆為偶數時，若 R 值為小於 2M 的最大偶數，K 值會最小。

例 8：N＝14，M＝4

14÷4 有三種同餘數的可能，以下分別討論這三種實驗情形：

14÷4＝3…2　　R＝2 （2 為小於 2M 的偶數）

＝2…6　　R＝6 （6 為小於 2M 的最大偶數）

＝1…10　　R＝10（10 為大於 2M 的偶數）

14÷4＝3…2，操作 3 步驟後，將剩餘兩個正面分兩堆。其實驗過程如下：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	實驗步驟
○○○○○○○○○○○○○○	步驟 1：翻 1.2.3.4
●●●●○○○○○○○○○○	步驟 2：翻 5.6.7.8
●●●●●●●●○○○○○○	步驟 3：翻 9.10.11.12
●●●●●●●●●●●●○○	步驟 4：翻 13.1.2.3
○○○●●●●●●●●●●○	步驟 5：翻 14.1.2.3
●●●●●●●●●●●●●●	完成全翻位，共 5 步。

實驗結果：當 R＝2 爲偶數但不爲小於 2M 的最大偶數時，K＝3＋2＝5

14÷4＝2…6，操作 2 步驟後，將剩餘 6 個正面分兩堆。其實驗過程如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻 1.2.3.4
●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 2：翻 5.6.7.8
●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	步驟 3：翻 9.10.11.1
○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	步驟 4：翻 12,13,14,1
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 4 步。

實驗結果：當 R＝6 爲偶數且 6 爲小於 2M 的最大偶數時，K＝2＋2＝4

14÷4＝1…10，操作 1 步驟後，將剩餘 10 個正面分兩堆。其實驗過程如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻 1.2.3.4
●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 2：翻 5.6.7.8
●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	步驟 3：翻 10.11.12.13

實驗結果：10 爲大於 2M 的偶數。

在完成第一步驟後，將剩餘的 10 個正面分成兩堆，即 5.6.7.8.9 一組，10.11.12.13.14 一組。

第二步先翻 5.6.7.8，若符合手法 3 的推理情況，完成步驟 2 之後，所剩下的正面個數會是最後一步驟所需的 M 個正面。但實際操作情形並非如此，此時所得的 K 值必大於 4。

三者比較之下 14÷4＝3…2　K＝5

＝2…6　K＝4　K 值最小

＝1…10　K＞4

由以上兩大部分的說明，

我們可以規定 R 必須爲小於 2M 的最大偶數值。

【註】若 R＝2M 時，即 R＝0，採用手法 1 進行操作實驗。

問題：在計算 N＝14，M＝11，N÷M＝1…3，無法找到符合條件的 R 值。以手法 3 實際操作實驗 N＝14，M＝11 時，雖然過程中可以找到符合條件的偶數個正面硬幣（下圖步驟 2 後，正面硬幣數爲 8），但卻無法進行分兩堆的工作。N＝14，M＝11 實驗過程如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11

●●●●●●●●●●●○○○	步驟 2：翻 1.2.3.4.5.6.7.8.12.13.14
○○○○○○○○●●●●●●	在實驗 2 步驟後，若符合手法 3，應先翻動 4 個正面硬幣及 7 個反面硬幣，經由步驟 2 之後只剩 6 個反面硬幣。無法再以手法 3 繼續完成。

【註】手法 4 即可解決此類問題。

手法 4-麻煩分兩堆

使用時機：適用 N÷M＝P…R (P＝1，R 爲奇數)

操作說明：

1. N 個硬幣每步驟翻動 M 個，實驗 Q 個步驟後，找到正面個數爲小於或等於 2R 的最大偶數值。
2. 以類似手法 3 的分兩堆手法，再以兩步驟完成全翻位。

例 9：N＝14，M＝11　14÷11＝1…3 完成全翻位之實驗情形，K＝6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	步驟 2：翻 1.2.3.4.5.6.7.8.12.13.14
○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	步驟 3：8 個正面，若以分兩堆手法無助益，繼續翻
●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 4：繼續翻直至出現偶數個正面
○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	步驟 5：剩餘兩個正面，可用分兩堆手法
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	步驟 6：翻 1.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 6 步。

例 10：N＝12，M＝9　12÷9＝1…3　完成全翻位之實驗情形，K＝4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	實驗步驟
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 1：翻編號 1~9，此時剩下 3 個正面
●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	步驟 2：翻編號 10~12，編號 1~6。以製造出偶數個正面
○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	步驟 3：將剩下的 6 個正面均分成兩次完成。 翻編號 1~3，7~9
●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	步驟 4：翻編號 4~12
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	完成全翻位，共 4 步。

原因探究：

在 N÷M＝P…R (P＝1，R 爲奇數)這類實驗過程中，以手法 3 爲基礎翻法，我們仍朝向找到某一步驟爲剩餘偶數個正面，且這些剩餘的偶數個正面硬幣是可以使用分兩堆手法完成全翻位的。爲了找出規律性及 K 值的公式，我們擴大研究數據以便觀察其關係，很快的便能發現一些答案。

N＝14，M＝11，R＝3		
步驟數	正面個數	反面個數
0	14	0
1	3	11
2	8	6
3	9	5
4	2	12
5	11	3
6	0	14

N＝16，M＝11，R＝5		
步驟數	正面個數	反面個數
0	16	0
1	5	11
2	6	10
3	11	5
4	0	16

N＝18，M＝15，R＝3		
步驟數	正面個數	反面個數
0	18	0
1	3	15
2	12	6
3	9	9
4	6	12
5	15	3
6	0	18

N＝22，M＝19，R＝3		
步驟數	正面個數	反面個數
0	22	0
1	3	19
2	16	6
3	9	13
4	10	12
5	15	7
6	4	18
7	19	3
8	0	18

N＝44，M＝37，R＝7		
步驟數	正面個數	反面個數
0	44	0
1	7	37
2	30	14
3	21	23
4	16	28
5	35	9
6	2	42
7	37	7
8	0	44

N＝46，M＝37，R＝9		
步驟數	正面個數	反面個數
0	46	0
1	9	37
2	28	18
3	27	19
4	12	36
5	37	9
6	0	46

實驗 Q 個步驟後，找到正面個數為小於或等於 2R 的最大偶數值（各表中紅色數字）我們可用分兩堆手法再以兩步驟完成全翻位。

K 值算法如下：

N÷M＝P…R(P＝1，R 為奇數)

N÷R＝Q…r(Q 為整數，r 為小於或等於 2R 的最大偶數)

（1）若 r＝0，則 K＝Q。

（2）若 r≠0，則 K＝Q＋2。

如上例 9 及例 10，

N＝14，M＝11 時

14÷11＝1…3

14÷3＝4…2

K＝4＋2＝6

N＝12，M＝9 時

12÷9＝1…3

12÷3＝4…0

K＝4

再觀察上面例題 N＝14，M＝11 算式，從第二列開始的算法與 N＝14，M＝3 的算式相同，而 3＝14－11，因此我們可以得到一個新發現：

發現五：以$\boxed{\text{手法 4}}$操作 N 個硬幣，每次翻動 M 個，若 N÷M＝P…R (P＝1，R 為奇數)其 K 值與「操作 N 個硬幣，每次翻動 R 個硬幣」時相同。

【註】P≠1 時，在 N÷M＝P…R 的形式中都可以找到一個餘數 R，其中 R 為偶數

說明如下：

N÷M＝P…R

1.N 為奇數，M 為奇數，

(1)若 P 為奇數，則 R 為偶數。

(2)若 P 為偶數，則 R 為奇數。

此時　N÷M＝P…R

可轉化成 N÷M＝（P－1）…（R＋M），其中（R＋M）為偶數

2.N 為奇數，M 為偶數，無法完成全翻位。

3.N 為偶數，M 為奇數，

(1)若 P 為奇數，則 R 為奇數

此時　N÷M＝P…R

可轉化成 N÷M＝（P－1）…（R＋M）， 其中（R＋M）為偶數

(2)若 P 為偶數，則 R 為偶數

4.N 為偶數，M 為偶數，則 R 必為偶數。

所以在 P≠1 時， N÷M＝P…R 的形式都可以找到一個餘數 R 為偶數

三、如何預測 K 值？

觀察上表的規律配合著四種手法，我們可歸納出幾個快速計算 K 值的公式

第一類：N＝奇數，M＝偶數。無法完成全翻位

在發現 3，我們證明了當 N 奇數，M 為偶數時，無法完成全翻位。

第二類：N－M＝1。(N＝偶數，M＝奇數)　　使用$\boxed{\text{手法 2}}$

K＝N

例 11：N＝6，M＝5 時，K＝6

N＝12，M＝11 時，K＝12

第三類：N÷M＝P…R(規定 R 必須為小於 2M 的最大偶數)

（1）R＝0 時，K＝P　　　　　使用$\boxed{\text{手法 1}}$

（2）R≠0 時，K＝P＋2　　　　使用$\boxed{\text{手法 3}}$

例 12：N＝12，M＝4 時，K＝12÷4＝3

N＝14，M＝5 時，14÷5＝2…4。P＝2，R＝4 為小於 2M 最大偶數，

所以 K＝2＋2＝4

N＝18，M＝5 時，18÷5＝2…8。P＝2，R＝8 爲小於 2M 最大偶數，
所以 K＝2＋2＝4

第四類：N÷M＝P…R (P＝1，R 爲奇數時)　使用 $\boxed{\text{手法 4}}$　(若 P≠1，則採用第三類。)
K 值算法與「操作 N 個硬幣，每次翻動 R 個硬幣」時相同：
N÷R＝Q…r(規定 r 必須爲小於或等於 2R 的最大偶數)
（1）r＝0 時，K＝Q
（2）r≠0 時，K＝Q＋2

例 13：N＝14，M＝9
N÷M＝14÷9＝1…5　　P＝1　R＝5
N÷R＝14÷5＝2…4　　Q＝2　r＝4 爲小於或等於 2R 最大偶數
K＝2＋2＝4

柒、延伸研究(1)—環狀排列

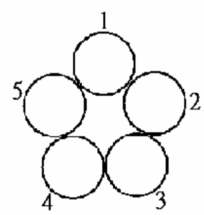
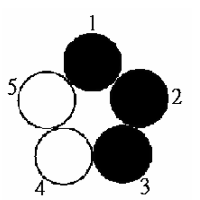
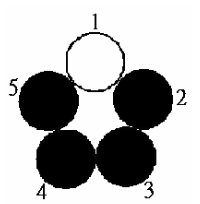
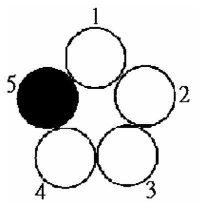
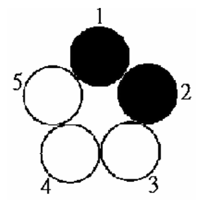
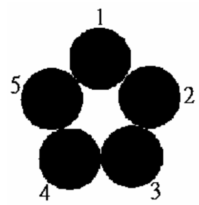
將遊戲規則改變如下：

將 N 個正面朝上的硬幣排成環狀，每次翻動連續 M 個硬幣，直到將全部硬幣翻成反面，完成全翻位，找出最小 K 值。

一、經多次實驗操作之後，找到較有規律性的環狀排列連續翻動翻法有二種：

連續翻法一：第一步翻動編號 1,2,3,…,M
第二步驟接著翻編號 M＋1,M＋2,M＋3,…,2M
…至完成全翻位。

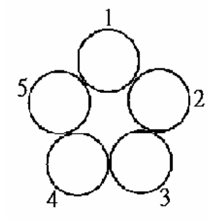
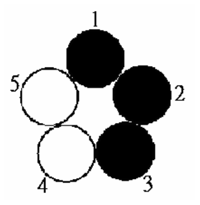
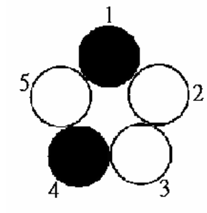
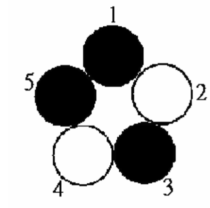
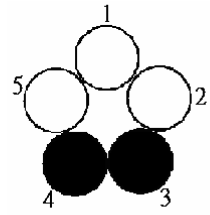
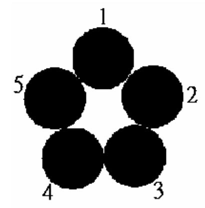
實驗步驟如下
例如：N＝5，M＝3

步驟 1： 翻編號 1.2.3	步驟 2： 翻編號 4.5.1	步驟 3： 翻編號 2.3.4	步驟 4： 翻編號 5.1.2	步驟 5： 翻編號 3.4.5	完成全翻位
					

連續翻法二：第一步翻動編號 1,2,3,…,M
第二步驟翻編號 2,3,4,…,M,M＋1
…至完成全翻位。

實驗步驟如下
例如：N＝5，M＝3

步驟 1： 翻編號 1.2.3	步驟 2： 翻編號 2.3.4	步驟 3： 翻編號 3.4.5	步驟 4： 翻編號 4.5.1	步驟 5： 翻編號 5.1.2	完成全翻位

二、翻法一與翻法二的比較

N	5	6	6	8	10	10	10
M	3	4	5	6	6	7	8
翻法一 K 值	5	2 步還原	6	4	5	10	5
翻法二 K 值	5	6 步還原	6	8 步還原	10	10	10 步還原

經由多次實驗之後，雖然兩種翻法都具有規律性，由上表可知方法一為較佳的方式。因此環狀排列的數據我們決定採用翻法一的。

三、依連續翻法一模式操作，可得到以下數據

N \ M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1																			
2	2	1																		
3	3		1																	
4	4	2	4	1																
5	5		5		1															
6	6	3	2		6	1														
7	7		7		7		1													
8	8	4	8	2	8	4	8	1												
9	9		3		9		9		1											
10	10	5	10		2	5	10		10	1										
11	11		11		11		11		11		1									
12	12	6	4	3	12	2	12		4	6	12	1								
13	13		13		13		13		13		13		1							
14	14	7	14		14	7	2		14	7	14		14	1						
15	15		5		3		15		5		15		15		1					
16	16	8	16	4	16	8	16	2	16	8	16	4	16	8	16	1				
17	17		17		17		17		17		17		17		17		1			
18	18	9	6		18	3	18		2	9	18		18	9	6		18	1		
19	19		19		19		19		19		19		19		19		19		1	
20	20	10	20	5	4	10	20		20	10	20	5	20	10	4		20	10	20	1

註：空格處表示無法完成全翻位

四、觀察以上數據，發現 N、M 及 K 值似乎與因倍數的概念有關。

1.與基本研究相同，當 N 為奇數，M 為偶數時，無法完成全翻位。

2.若 N 為 M 的倍數，則 K＝N÷M。例如：

N	6	8	10	15	18	20
M	2	4	5	3	6	4
K	3	2	2	5	3	5

3.若 N 與 M 互質，則 K＝N。例如：

N	7	8	9	10	13	15
M	5	7	7	9	11	13
K	7	8	9	10	13	15

4.若 N 與 M 不互質，則找到 N 與 M 的最小公倍數[N，M]＝G，則 K＝G÷M。例如：

N	8	12	12	15	16	20
M	6	9	10	9	10	15
G	24	36	60	45	80	60
K	4	4	6	5	8	4

但是在相同的條件下，仍有些數值在實際實驗過程中無法完成全翻位，

例如：

N	6	10	12	15	18	15
M	4	8	8	12	12	6
G	24	40	24	60	36	30

原因探究：

觀察上表中的 N 與 G，這些數值都符合 G 是 N 的偶數倍，

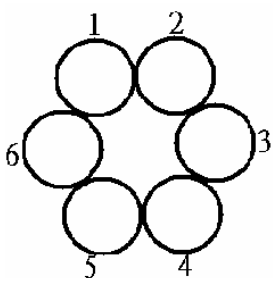
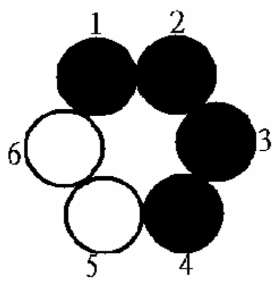
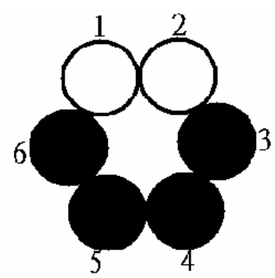
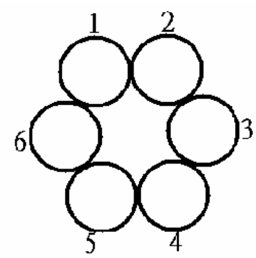
當 G 為 N 的偶數倍時，代表這 N 個硬幣都被翻動偶數次，而硬幣被翻動偶數次時，它會被翻回正面，所以無法完成全翻位。

例：N＝6，M＝4 時，[6，4]＝12

每步驟翻動 4 枚硬幣，共 12÷4＝3 步驟，總翻動次數為 12 次。

但這六枚硬幣，每一枚都被翻動 12÷6＝2 次，即翻回了正面。

實際操作過程如下：

步驟 1： 翻編號 1.2.3.4	步驟 2： 翻編號 5.6.1.2	步驟 3： 翻編號 3.4.5.6	全部還原， 無法完成全翻位
			

結論：綜合以上幾點，可歸納出求得 K 值得計算公式

第一類：N 為奇數，M 為偶數，無法完成全翻位。

第二類：[N，M]÷N 為偶數，無法完成全翻位。

例：N＝12，M＝8，[12，8]＝24

[N，M]÷N＝24÷12＝2　無法完成全翻位

第三類：[N，M]÷N 為奇數，K＝[N，M]÷M。

例：N＝16，M＝10，[16，10]＝80

[N，M]÷N＝80÷16＝5

K＝[N，M]÷M＝80÷10＝8

捌、延伸研究(2)--連續數翻動

一、再試著改變遊戲規則：

每次實驗硬幣總數 N，實驗步驟為第 M 步驟時必須翻動 M 個硬幣(M≦N)，求此 N 個硬幣完成最佳全翻位 K 值。

例如：

N＝1 時，K＝1。

1	實驗步驟
○	步驟 1：翻動一個。翻 1
●	完成全翻位

N＝2 時，無法完成全翻位

N＝3 時，K＝2

1	2	3	實驗步驟
○	○	○	步驟 1：翻動一個。翻編號 1
●	○	○	步驟 2：翻動二個。翻編號 2.3
●	●	●	完成全翻位，共 2 步。

N＝4 時，K＝3

1	2	3	4	實驗步驟
○	○	○	○	步驟 1：翻動一個。翻 1
●	○	○	○	步驟 2：翻動二個。翻 2.3
●	●	●	○	步驟 3：翻動三個。翻 1.2.3
○	○	○	○	步驟 4：翻動四個。翻 1.2.3.4
●	●	●	●	完成全翻位，共 4 步。

N＝5 時，K＝5

1　2　3　4　5　實驗步驟
○ ○ ○ ○ ○ 步驟 1：翻動一個。翻 1
● ○ ○ ○ ○ 步驟 2：翻動二個。翻 1.2
○ ● ○ ○ ○ 步驟 3：翻動三個。翻 3.4.5
○ ● ● ● ● 步驟 4：翻動四個。翻 2.3.4.5
○ ○ ○ ○ ○ 步驟 5：翻動五個。翻 1.2.3.4.5
● ● ● ● ● 完成全翻位，共 5 步。

二、在實驗過程中，我們亦發現可由代數計算的方式來檢測 N 是否能完成全翻位。

1.若 N 可以用最小 t 值表示成 1±2±3±……±t，

則 N 可達成最佳全翻位且 K=t

如 N＝5＝1＋2＋3＋4－5　則 K=5

N＝10＝1＋2＋3＋4　則 K=4

N＝12＝1＋2－3＋4－5＋6＋7　則 K=7

2.若 N＝a1＋a2＋a3－a4＋a5，

在操作實驗中代表總共需要 5 個步驟，翻動硬幣總次數 T＝a1＋a2＋a3＋a4＋a5 次，其中有 a1＋a2＋a3＋a5 次是由正面翻至反面，有 a4 次的硬幣是由反面翻至正面。

例如：N＝5＝1＋2＋3＋4－5，實際操作過程中，共需翻動硬幣 1＋2＋3＋4＋5＝15 次，其中 10 次硬幣是由正面翻成反面，5 次硬幣必須再由反面翻爲正面，所以最後實驗結果爲 5 個反面。(如下表)

1　2　3　4　5　實驗步驟	由正面翻爲反面硬幣數	由反面翻爲正面硬幣數
○ ○ ○ ○ ○ 步驟 1：翻 1	1	0
● ○ ○ ○ ○ 步驟 2：翻 1.2	1	1
○ ● ○ ○ ○ 步驟 3：翻 3.4.5	3	0
○ ● ● ● ● 步驟 4：翻 2.3.4.5	0	4
○ ○ ○ ○ ○ 步驟 5：翻 1.2.3.4.5	5	0
● ● ● ● ● 完成全翻位	共有 10 個	共有 5 個

原因探究：

(1)若 N 個硬幣完成全翻位需 M 個步驟，實際總翻動次數爲 1＋2＋3＋…＋M 次

但 N 個硬幣要翻至背面，每個硬幣都需翻奇數次，在此情況之下，每個最少翻動 1 次，N 個硬幣至少翻動 N 次。

所以完成最佳全翻位的翻動總次數爲 1＋2＋3＋…＋M＝N

(2)但若 1＋2＋3＋…＋M≧N

即 $\frac{M(1+M)}{2}\geq N$

代表有多翻了 $\frac{M(1+M)}{2}-N$ 次，亦即有 $\frac{M(1+M)}{2}-N$ 是某些硬幣必須由正面翻至反面，

又再翻回正面的，這些硬幣各都多翻了 2 次，因此若可以在 1，2，3，…M 中找到一些數的和等於 S，使得 $S=[(\frac{M(1+M)}{2}-N)]\div 2$

則 N＝1＋2＋3＋⋯－S＋⋯＋M

例如 N＝9 時，9＜1＋2＋3＋4＋5＝15

其中 15－9＝6 次是有幾個硬幣由正面翻至反面後，又由反面翻回正面，我們可算出 6÷2＝3 個硬幣，即 S＝3。

所以 9＝1＋2－3＋4＋5，此時 K＝5

依上式操作，過程如下：

1 2 3 4 5 6 7 8 9	實驗步驟	
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	第一步：翻 1.	＋1
● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	第二步：翻 2,3	＋2
● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○	第三步：翻 1,2,3	－3
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	第四步：翻 1,2,3,4	＋4
● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○	第五步：翻 5,6,7,8,9	＋5
● ● ● ● ● ● ● ● ●	完成全翻位	＝9

三、依此操作規則，我們得到一些數據如下：

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	1	X	2	3	5	3	5	4	5	4	5	7	5	7	5
N	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	7	6	7	6	7	6	7	9	7	9	7	9	7	9	8

我們發現一些較特別的 N 值，這些 N 都等於 M 個連續整數相加

N＝1＝1　　　　K＝1

N＝3＝1＋2　　　　K＝2

N＝6＝1＋2＋3　　　　K＝3

N＝10＝1＋2＋3＋4　　　K＝4

N＝15＝1＋2＋3＋4＋5　　K＝5

N＝21＝1＋2＋3＋4＋5＋6　K＝6

N＝28＝1＋2＋3＋4＋5＋6＋7　K＝7

我們以這些數爲分界重新整理上表：

N	K	N	K	N	K	N	K	N	K	N	K	N	K	N	K
1	1	2	X	4	3	7	5	11	5	16	7	22	7	29	9
		3	2	5	5	8	4	12	7	17	6	23	9	30	8
				6	3	9	5	13	5	18	7	24	7	31	9
						10	4	14	7	19	6	25	9	32	8
								15	5	20	7	26	7	33	9
										21	6	27	9	34	8
												28	7	35	9
														36	8

觀察以上表格，我們發現除了 N＝2 以外，這些 N 的 K 值存在一個極漂亮的規律！

整理計算公式如下：

第一類：N＝2 時，無法完成全翻位。

第二類：若 N＝1＋2＋3＋⋯＋M，則 K＝M

例：N＝28

N＝1＋2＋3＋4＋5＋6＋7，M＝7

∴K＝M＝7

第三類：若 N≠1＋2＋3＋⋯＋M，

則找到一個最小 M 使得 1＋2＋3＋⋯＋M＞N

即 $\frac{(1+M)\times M}{2} > N$

1.當 $\frac{(1+M)\times M}{2} - N$ 為偶數時，K＝M

2.當 $\frac{(1+M)\times M}{2} - N$ 為奇數時，(1)若 M 為偶數，K＝M＋1

(2)若 M 為奇數，K＝M＋2

例：N＝23＜1＋2＋3＋4＋5＋6＋7，M＝7 為奇數

$\frac{(1+M)\times M}{2} - N = 28 - 23 = 5$ 為奇數，則 K＝7＋2＝9

例：N＝19＜1+2+3+4+5+6，M＝6 為偶數

$\frac{(1+M)\times M}{2} - N = 21 - 19 = 2$ 為偶數，則 K＝M＝6

玖、結論

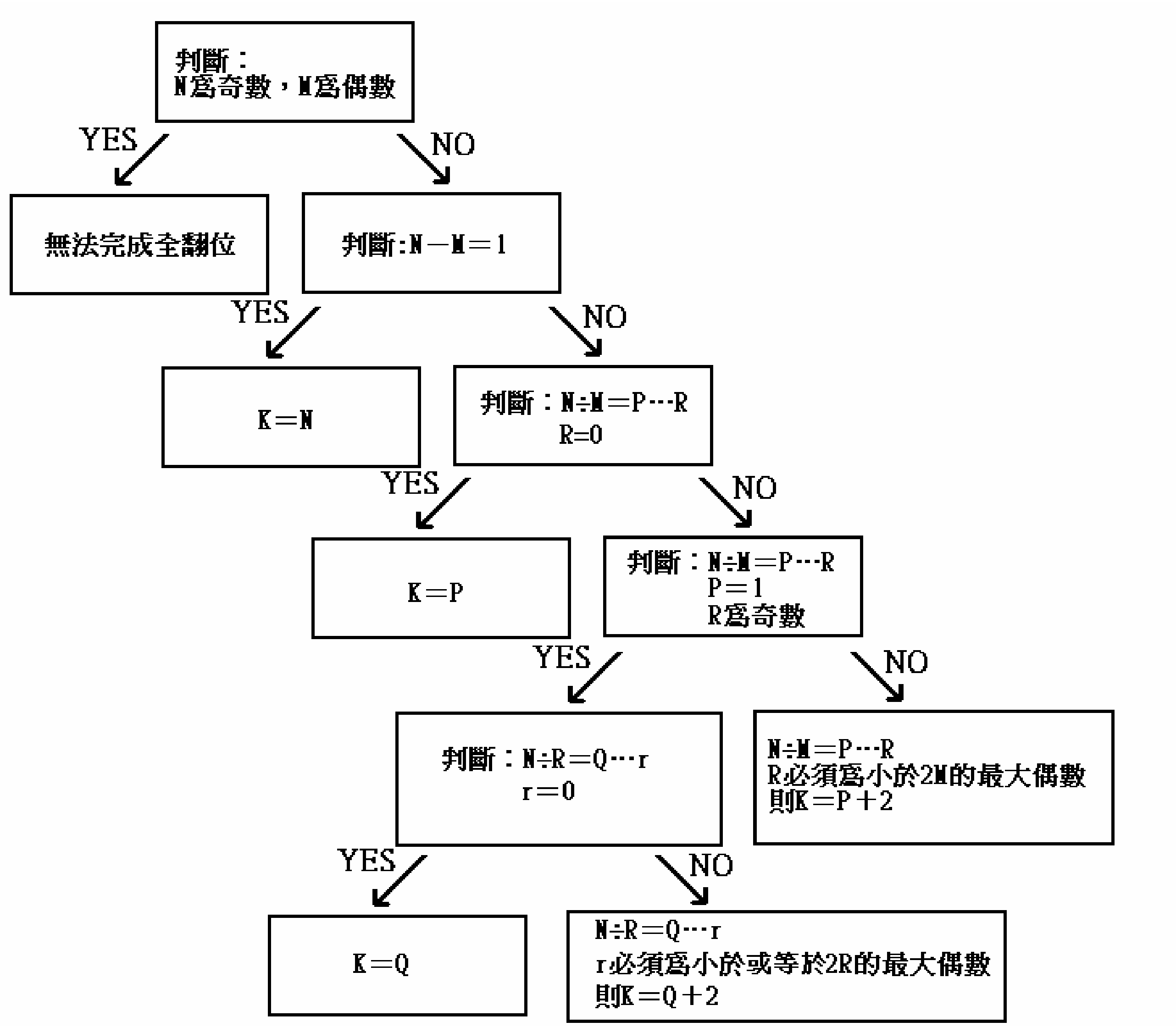
在努力了 5 個多月後，終於完成了科展。從一開始亂無章法的翻，到找出規律、歸納公式，甚至延伸研究，每一個環節都使我們一個頭兩個大。但在找到解決方法時，又令我們興奮不已。經由一再的修正數據與報告，終於歸納出以下的三大結論：

結論一：將 N 個正面朝上的硬幣，每次固定翻動 M 個硬幣，直到將全部硬幣翻成反面，完成最佳全翻位的手法及 K 值計算公式如下：

類別	N 與 M 的條件	使用手法	K 值計算公式
第一類	N＝奇數，M＝偶數。	無法完成全翻位	
第二類	N－M＝1 (N＝偶數，M＝奇數)	手法 2	K＝N
第三類	N÷M＝P⋯R	R＝0 時，使用手法 1	K＝P

	(規定 R 必須爲小於 2M 的最大偶數)	R≠0 時，使用$\boxed{\text{手法 3}}$	K＝P＋2
第四類	N÷M＝P…R (P＝1，R 爲奇數時)	$\boxed{\text{手法 4}}$	K 值算法與「操作 N 個硬幣，每次翻動 R 個硬幣」時相同

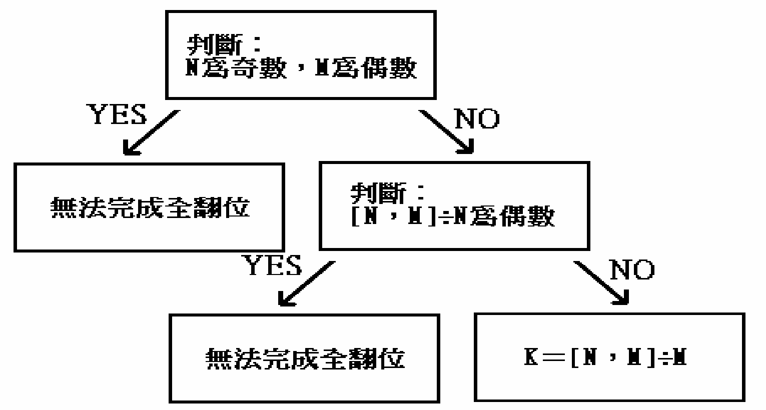
快速判斷 K 值流程圖：



結論二：將 N 個正面朝上的硬幣排成環狀，每次固定翻動連續 M 個硬幣，直到將全部硬幣翻成反面，完成最佳全翻位的 K 值計算公式如下：

類別	N 與 M 的條件	K 值計算公式
第一類	N 爲奇數，M 爲偶數	無法完成全翻位
第二類	[N，M]÷N 爲偶數	無法完成全翻位
第三類	[N，M]÷N 爲奇數	K＝[N，M]÷M

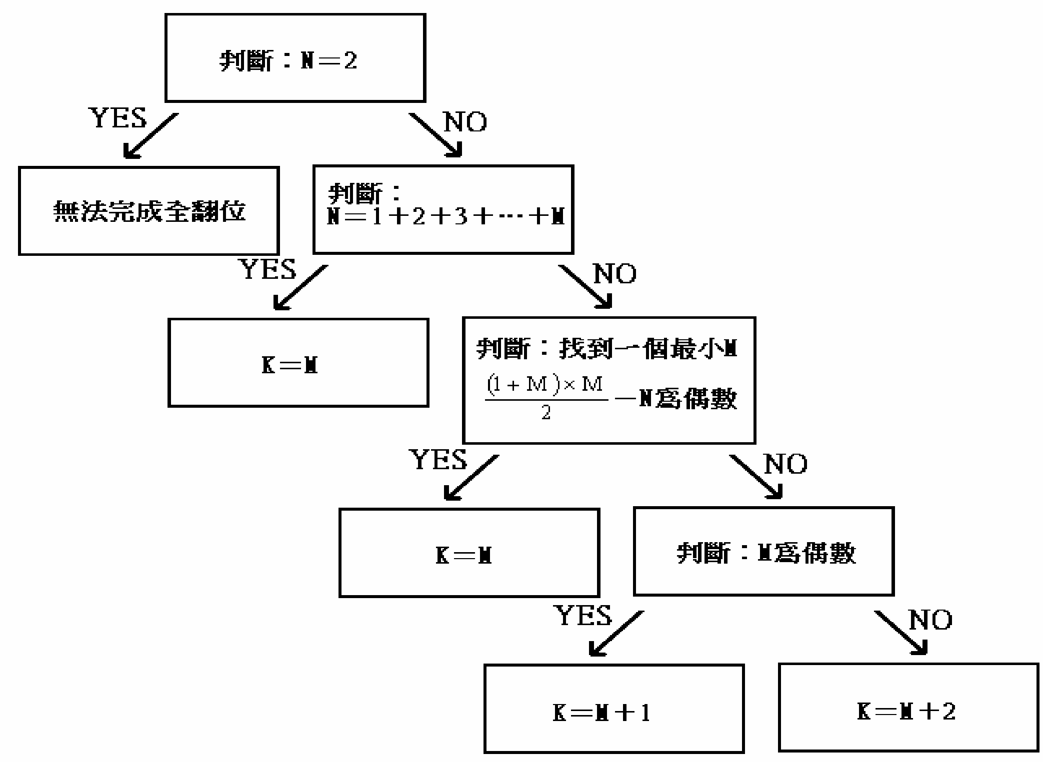
快速判斷 K 值流程圖：



結論三：每次實驗硬幣總數 N，實驗步驟爲第 M 步驟時必須翻動 M 個硬幣(M≦N)，直到將全部硬幣翻成反面，完成最佳全翻位的 K 值計算公式如下：

類別	N 與 M 的條件	K 值計算公式
第一類	N＝2	無法完成全翻位
第二類	N＝1＋2＋3＋⋯＋M	K＝M
第三類	N≠1＋2＋3＋⋯＋M 找到一個最小 M,使得 $\frac{(1+M)\times M}{2}>N$	當 $\frac{(1+M)\times M}{2}-N$ 爲偶數時，K＝M
		當 $\frac{(1+M)\times M}{2}-N$ 爲奇數時， (1)若 M 爲偶數，K＝M＋1 (2)若 M 爲奇數，K＝M＋2

快速判斷 K 值流程圖：



【評語】030426

1. 本作品論述清晰，證明嚴謹。

2. 除環狀排列具創意外，創新性稍不足。