中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030425

圓與規-塗色終極版

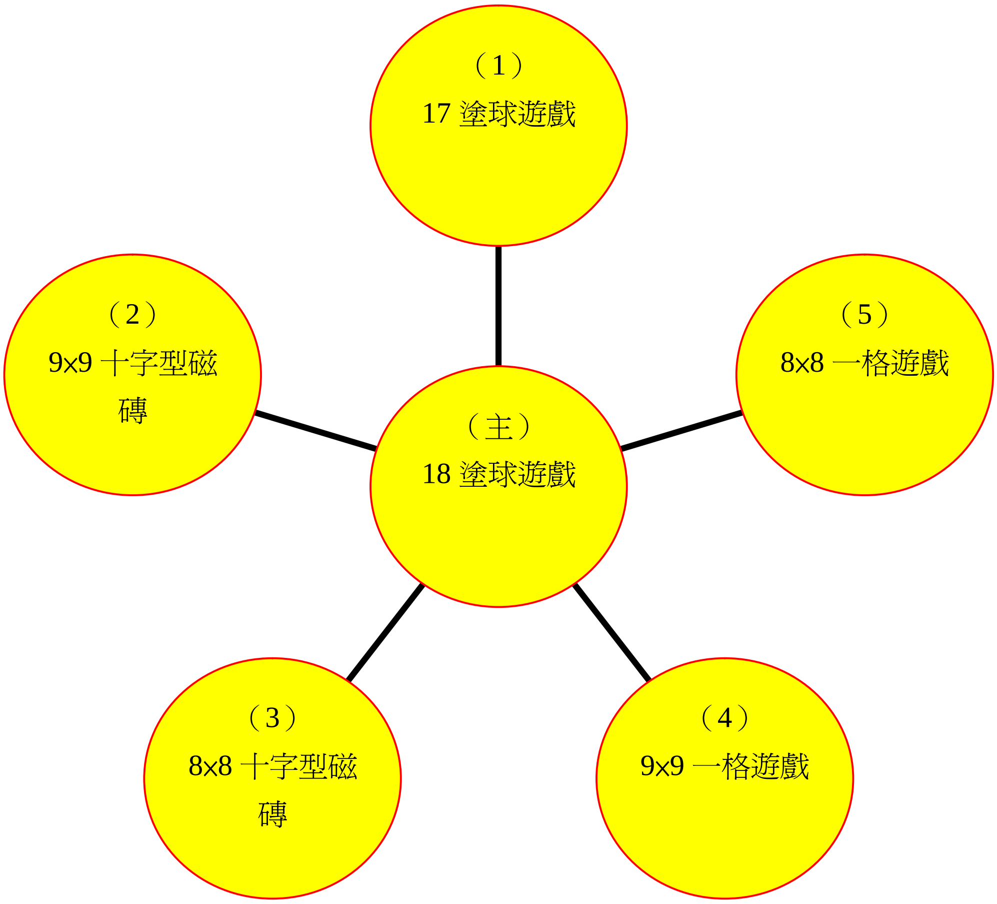
學校名稱：雲林縣立東勢國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃思嘉 國二 詹雅筑 國二 周筠芯 國二 陳瀅亘	楊雅明

關鍵詞：塗球遊戲、十字型磁磚

摘要

以下這個組織圖，可以說明我們研究的始末。



剛開始時我們注意到戲說數學中的 18 塗球遊戲，之後又在 18 塗球遊戲的遊戲規則後面看到十字型磁磚這個遊戲。

因此我們的研究內容主要爲：

一、18 塗球遊戲、17 塗球遊戲；

二、9×9 十字型磁磚、8×8 十字型磁磚、9×9 一格遊戲、8×8 一格遊戲

壹、研究動機：

一直對數學很有興趣的我們，報名參加數學科展。在瀏覽各式網頁的時候，不經意的看到一個遊戲，開啓了我們的興趣。那就是許志農教授所編著的「戲說數學」。接下來，就開始我們的研究過程。

貳、研究目的：

找出遊戲的必勝絕招!!

参、研究設備及器材：

筆、橡皮擦、紙、電腦、人腦!!

肆、研究過程或方法：

一、定義：

（一）先手（或先）：先塗的人；後手（或後）：後塗的人。

（二）<規律>：和我們的發現是一樣的

（三）<例外>：和我們的發現是不一樣的

二、

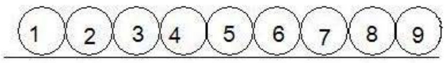
研究一、塗球遊戲

(一)遊戲規則：

1. 先手、後手輪流塗色，每次選取一個白球，把它塗成自己想要的顏色。
2. 塗過顏色的球不能再塗。
3. 不能塗完色之後，發生相鄰兩球都是同色的情形，這樣算違例。
4. 放棄或違例者輸。

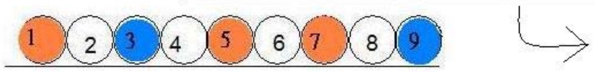
(二)

這個塗球遊戲是從直線 9 改良而來的（以 9 顆球由直線排列），如下：



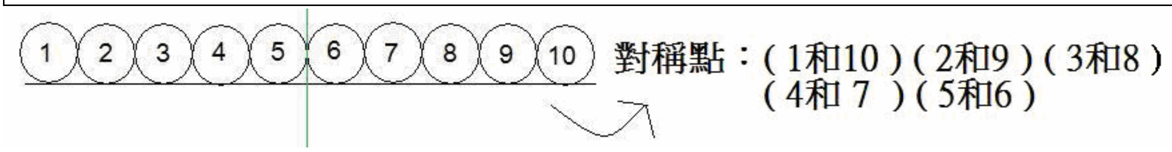
依照對稱原理來說，直線 9 是對先手有利的，因為他一開始只要塗中心點⑤，然後只要後手塗什麼，就依後手塗的數的之稱點來塗，如此一來，過不久後手便會遇到困難，先手便能獲勝！！

先	5	7	1
後	3	9	?



意思是先手先塗5，後手再塗3，再來先手塗7，後手塗9......

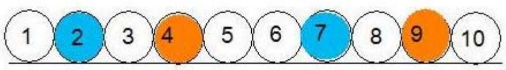
而上面的例子是在奇數顆球時先手的必勝方法，假如換成偶數顆球呢？讓我們一起來看看吧！！



這樣看起來，後手是有利的，因為中心並不是一顆球，一樣的運用對稱原理，反而會變成後手跟著先手塗了。

例如：

先	4	9	?
後	7	2	



但是這有個缺點，假如先手一開始塗 5 或 6 呢？而 5 的對稱點是 6 ， 6 的對稱點是 5 。規則中相鄰的兩個不是不能塗嗎？所以在這個情況下，我們就發現也可用以下這組規律：

① （1 對 6），（2 對 7），（3 對 8），（4 對 9），（5 對 10）

※如此一來後手還是非常利！！

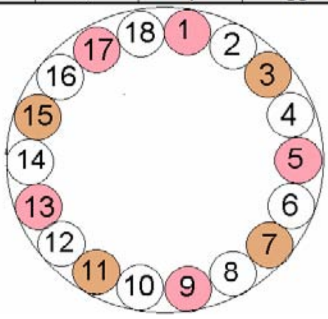
然而將直線改爲 18 顆球，再將直線 18 顆改爲圓球 18 顆，變成了本此科展的主題：＜18 顆圓球＞

首先我們來看看 18 顆圓球有那幾種可能：

1. 空 0 次 2 格

先：
後：

先	1	5	9	13	17
後	3	7	11	15	?

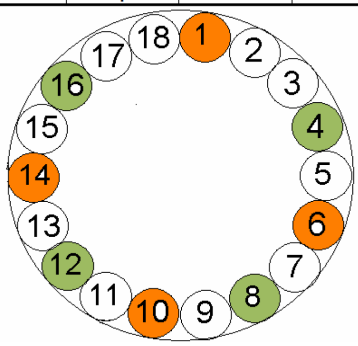


1格	9次
2格	0次

2. 空 2 次 2 格　　※結果證明不能空 1 次兩格

先：
後：

先	1	6	10	14	?
後	4	8	12	16	

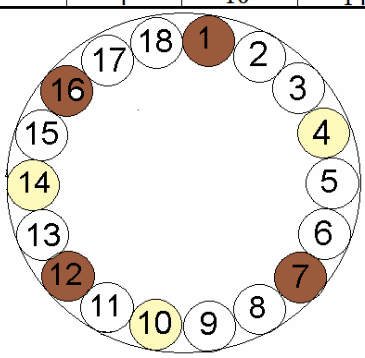


1格	6次
2格	2次

3. 空 4 次 2 格　　※結果證明不能空 3 次兩格

先：
後：

先	1	7	12	16
後	4	10	14	?

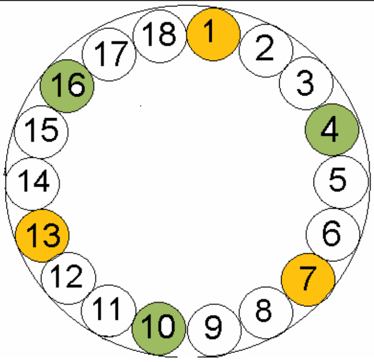


1格	3 次
2格	4 次

4. 空 6 次 2 格　　　　※結果證明不能空 5 次兩格

先：
後：

先	1	7	13	?
後	4	10	16	



1格	0次
2格	6次

①發現

如果想要先手贏，則：

1格	9次
2格	0次

1格	3 次
2格	4 次

如果想要後手贏，則：

1格	6次
2格	2次

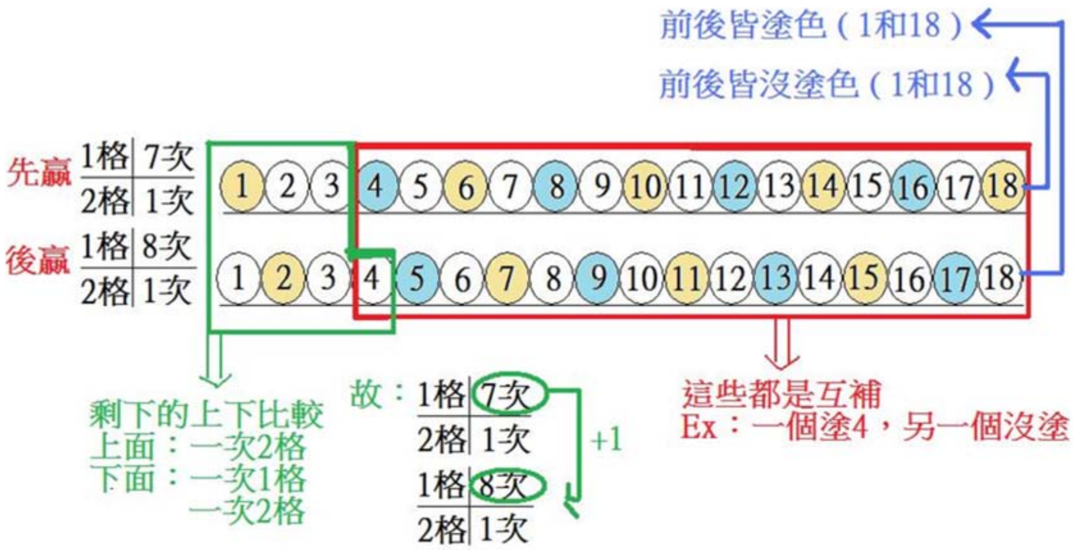
1格	0次
2格	6次

※只有 4 種可能

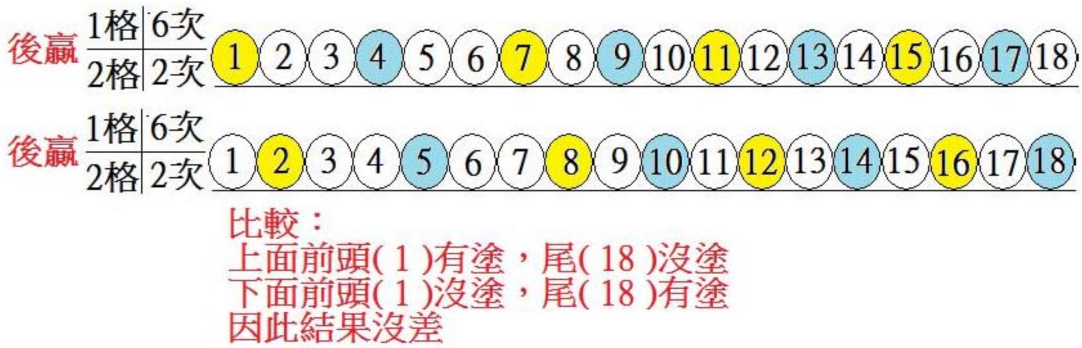
<直線的規律>

再來看看直線有什麼規律吧：

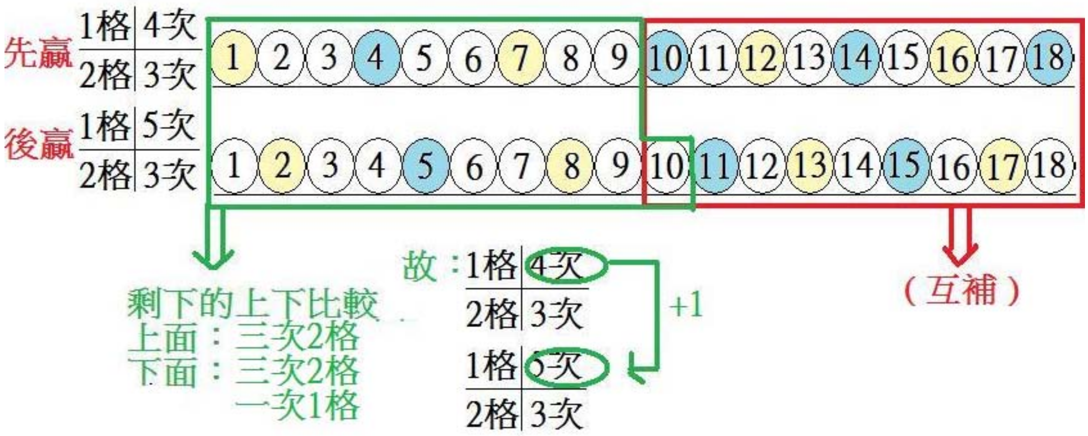
1.



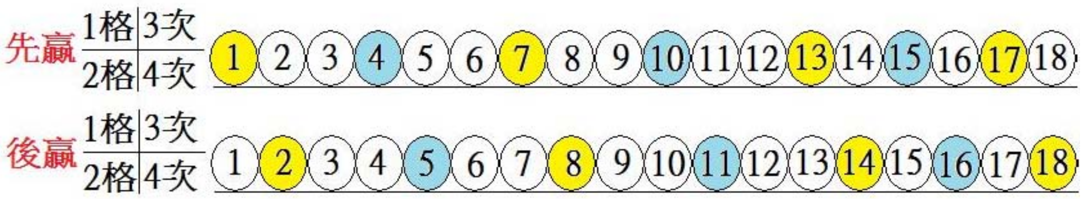
2.


後贏
1格 6次
2格 2次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
後贏
1格 6次
2格 2次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
比較：
上面前頭(1)有塗，尾(18)沒塗
下面前頭(1)沒塗，尾(18)有塗
因此結果沒差

3.


先贏
1格 4次
2格 3次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
後贏
1格 5次
2格 3次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
剩下的上下比較
上面：三次2格
下面：三次2格
一次1格
故：1格 4次
2格 3次
1格 5次
2格 3次
+1
(互補)

4.


先贏
1格 3次
2格 4次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
後贏
1格 3次
2格 4次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

5.


先贏
1格 1次
2格 5次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
後贏
1格 2次
2格 5次
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
剩下的上下比較
上面：五次2格
下面：五次2格
一次1格
故：1格 1次
2格 5次
1格 2次
2格 5次
+1
(互補)

結論（ 上面每組比較 ）：

空 2 格有奇數次　>>>在兩組比較中結果相反

空 2 格有偶數次　>>>在兩組比較中結果一樣

空 2 格偶數次的結果（塗 1 或 18 其中一個）：

先贏：　　　　　　　後贏：

1格	3 次
2格	4 次

1格	6次
2格	2次

<直線、圓球的關聯>

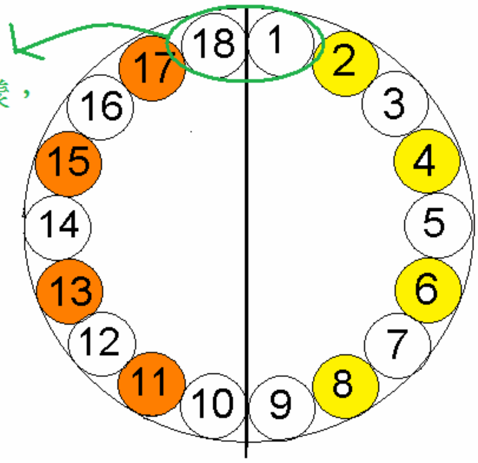
看完了 18 顆直線和 18 顆圓球，既然如此，18 直線和 18 圓球又有什麼關連呢?
看看下面的比較：

1.

先：
後：

先	2	4	6	8	?
後	11	13	15	17	

和拉成直線結果一樣，
2格都沒塗



塗球中1和18是算一次2格，直線中1和18是頭和尾，算是兩次1格

後贏

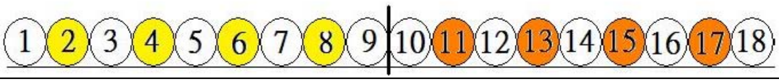
1格	6次
2格	2次

後贏

先	2	4	6	8	?
後	11	13	15	17	

1格	8次
2格	1次

（不同於塗球）

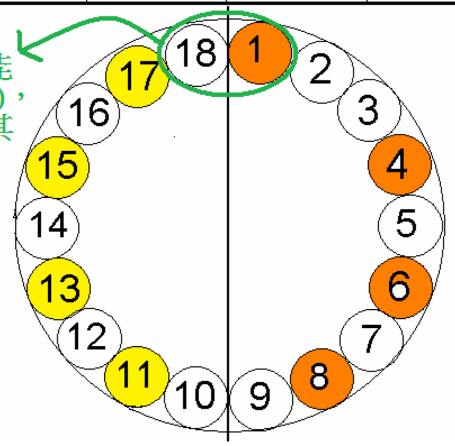


2.

先：
後：

先	8	6	4	1	?
後	11	13	15	17	

在直線中前後都能塗(1和18都能塗)，在塗球中只能徒其中一個



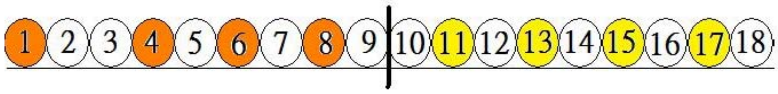
後贏

1格	6次
2格	2次

塗球中1塗18沒塗，結果和直線一樣

後贏

先	8	6	4	1	?
後	11	13	15	17	



1格	6次
2格	2次

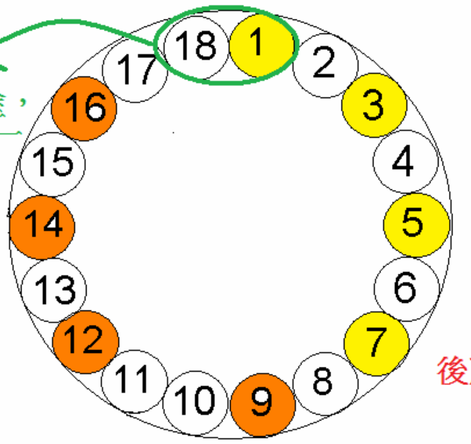
(和塗球一樣)

3.

先：
後：

先	3	5	7	1	?
後	16	14	12	9	

直線中1和18皆可塗，但塗球只能徒其中一個

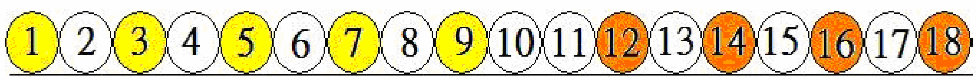


後贏

1格	6次
2格	2次

先贏

先	1	3	5	7	9
後	18	16	14	12	?

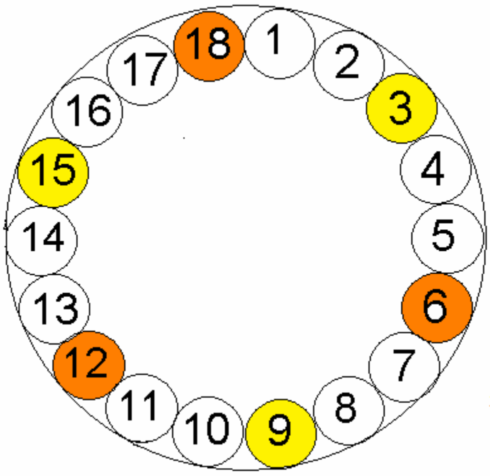


1格	7次
2格	1次

4.

先：(yellow)
後：(orange)

先	3	9	15	?
後	6	12	18	

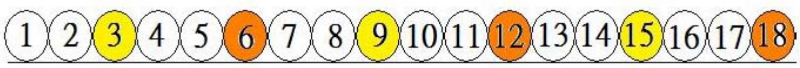


後贏

1格	6次
2格	0次

先贏

先	3	9	15	?
後	6	12	18	



1格	1次
2格	6次

※發現

如果直線前後都塗（1 和 18）轉成圓形，則結果會不一樣

（ 直線 >> 先手贏 ）

（ 塗球 >> 後手贏 ）

（1 和 18 相鄰只能塗 1 個 ）

①總結

（1）直線 18 和圓球 18 的比較：

因爲直線 1 和 18 可同時塗，而塗球不能

所以 2 種結果相反

如果直線只塗 1 和 18 其中一個 >>> 結果一樣

（ 圓球中 1 和 18 相鄰，只能塗 1 個 ）

（2）直線 18：

先塗 1 和先塗 2 也有差別

若 1 和 18 都塗或 2 個都沒塗 >>> 結果相反

{ n 次 n 個 }2 個皆沒或 2 個都塗（1 和 18）

多一個一次 1 格

若只塗 1 和 18(相鄰)其中一個 >>> 結果一樣

（3）圓球 18：

有 4 種可能

先贏：

1格	9次
2格	0次

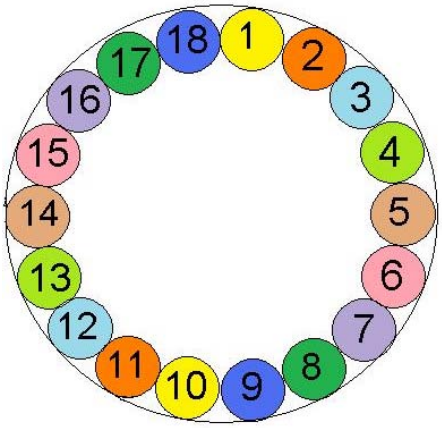
1格	3次
2格	4次

後贏：

1格	0次
2格	6次

1格	6次
2格	2次

看完了前面的比較，我們又找出另一種規律：



這規律是後手必勝的方法，假設先手塗的數字爲 x：

（1） 當 x >9

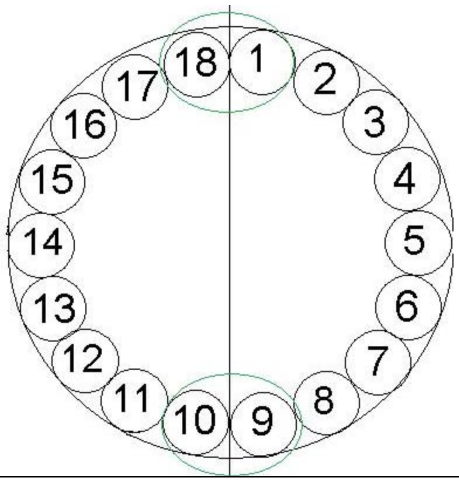
後手只要塗 x -9 的數字

（2） 當 x<9 或 x=9

後手只要塗 x+9 的數字

※依此規律後手必勝

然而除了這種規律我們還發現：



此方法是將圓分成 2 半，其中：

（1 對 18）（2 對 17）（3 對 16）（4 對 15）（5 對 14）（6 對 13）（7 對 12）

（8 對 11）（9 對 10）

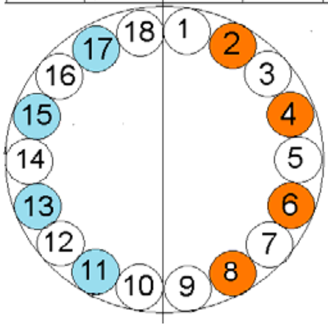
但是他對後手而言卻不保險，因爲塗 9 就不能塗 10，塗 1 就不能塗 18。

例如：

1.

先:
後:

先	8	6	4	2	?
後	11	13	15	17	

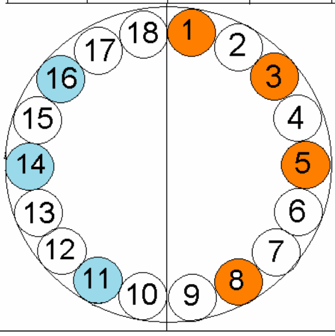


※後手贏

2.

先:
後:

先	8	5	3	1	
後	11	14	16	?	



※先手贏

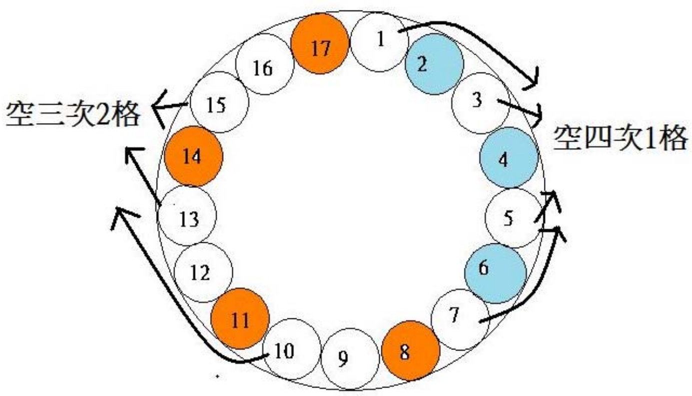
此對稱方法在直線 18 看來數字 18 是還可以塗，但是在塗球遊戲中的 18 圓球，18 不能塗。因此這種對稱方式不保險。

看過 18 顆球的後，我們發現在 18 顆球的時候，後手有絕對的優勢，我們再換來看看全數共 17 顆球的，找找看有沒有什麼圖形是先手比較佔優勢的：

1.

先：
後：

先	17	14	11	8
後	2	4	6	?



這是 1 個例子，3 次空 2 格的 $3\times 2=6$

4 次空 1 格的 $4\times 1=4$

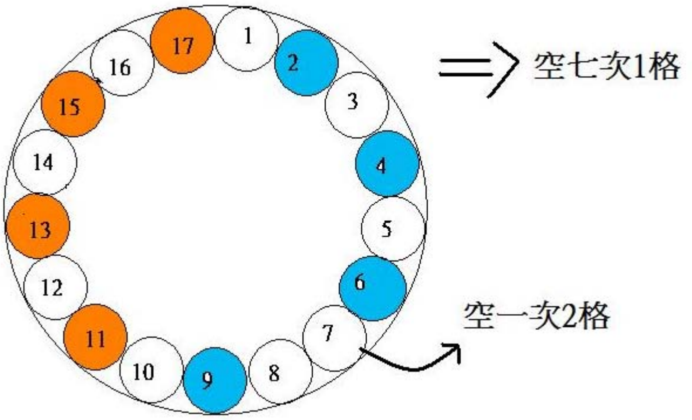
而全部有 1 7 顆球，扣掉 $6+4=10$，只剩 7 顆可以塗，

所以依這個圖形輪流下去，到最後後手會沒得塗。

2.

先：
後：

先	17	15	13	11	?
後	2	4	6	9	



這個例子是，１次空 2 格的１×２＝２

７次空 1 格的７×１＝７

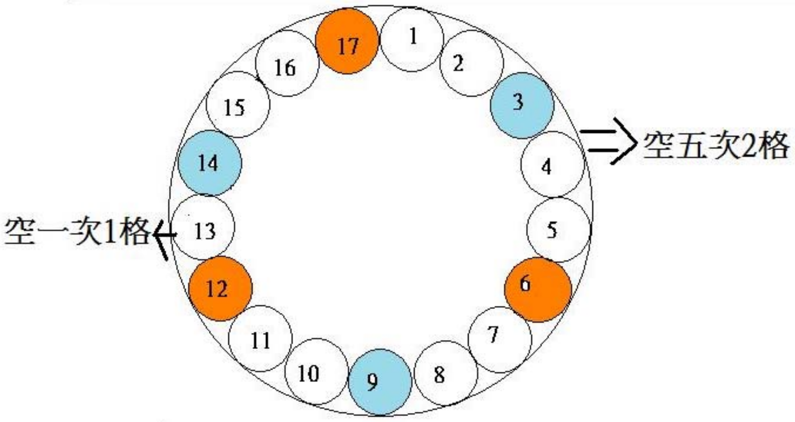
而全部有１７顆球，扣掉２＋７＝９，剩下８顆可以塗

這樣輪流下去，先手便會輸。

3.

先：
後：

先	17	6	12	?
後	3	9	14	



他是５次空 2 格的５×２＝１０

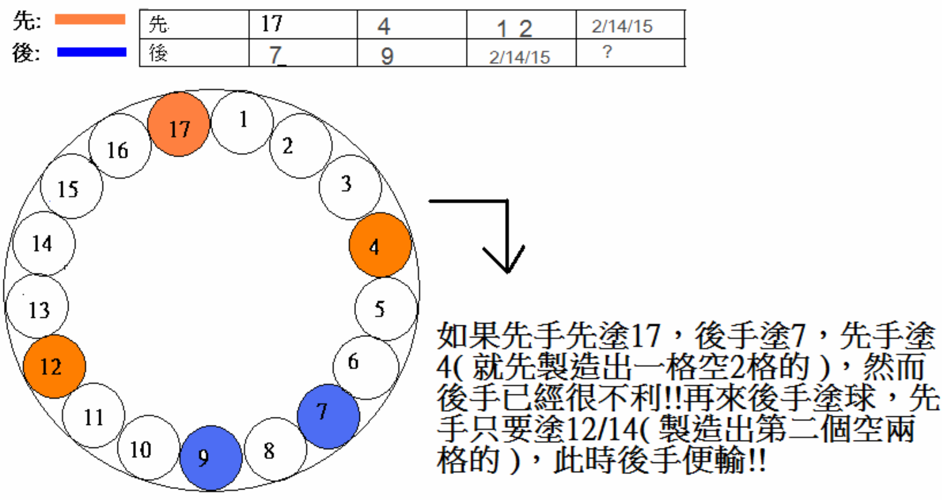
１次空 1 格的１×１＝１

全部的１７顆球，在扣掉１０＋１＝１１，只剩６顆可以塗。

這樣輪流下去，先手便會輸。

爲什麼先手有利呢？明明後手贏的情況有兩種啊！？

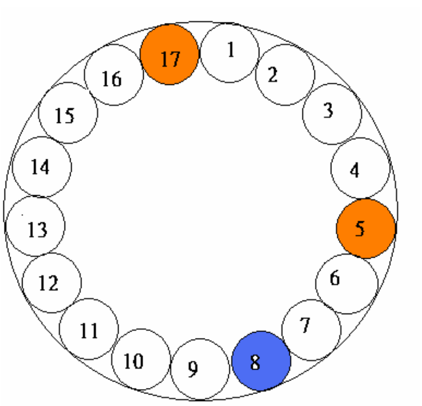
我們一起來看看：

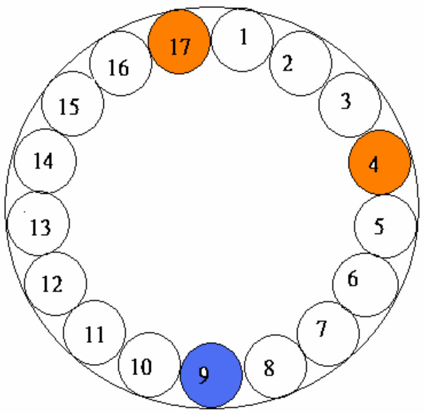


就像這樣，雖然後手可以贏的方式有兩種，但是都不好達到。

一開始先塗１７，而後手不一定要塗７他也可以塗８／９：

當後手塗８時，先手可以塗５：　　　當後手塗９時，先手可塗４：





這便可發現，先手在１７顆球中，只要動點腦筋，相較於後手，先手是有利的！！

①統整

先手會贏的有：

1格	4次
2格	3次

後手會贏的有：

1格	7次
2格	1次

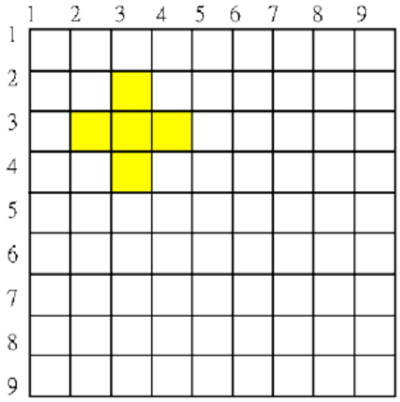
1格	1次
2格	5次

研究二、十字型磁磚塗色遊戲

(一) 遊戲規則：

1. 輪流鋪十字型磁磚，每次一塊。
2. 不可以鋪超出土地，也不可以與已鋪設的十字型磁磚有所重疊。
3. 放棄或違例者輸。

(二)說明：



以這個例子來說，十字的位置在（3，2）、（3，3）、（3，4）、（2，3）、（4，3），因為是要完整十字，超出邊界就不算了！所以，不可塗

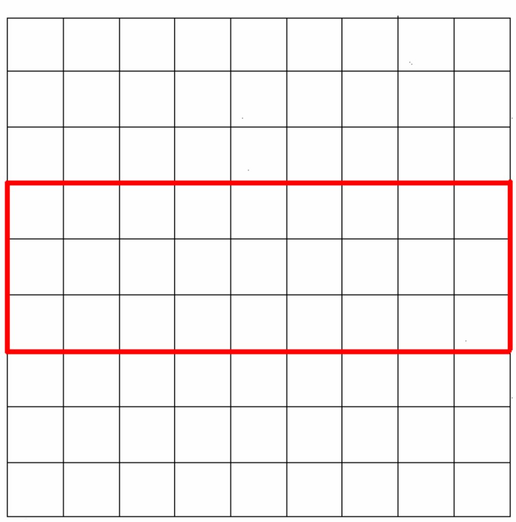
【（1，1）、（2，1）、（3，1）、（2，2）】、
【（1，1）、（1，2）、（1，3）、（2，2）】、
【（3，1）、（4，1）、（5，1）、（4，2）】、
【（4，1）、（5，1）、（6，1）、（5，2）】、
【（1，3）、（1，4）、（1，5）、（2，4）】

PS：【（1，1）、（2，1）、（3，1）、（2，2）】指的是一組座標!

(三)

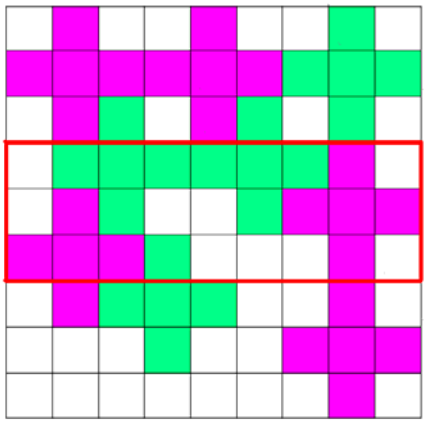
1. 9x9 的方格遊戲

因為做一個十字至少需要周圍和內部的構成，所以至少在不考慮其他十字占住的格子時，需要 9 個格子。因為 3x3，所以必須在中間列出一個 3x9 的大方格，像這樣：



在紅色方格裡，完整的十字十分稀少，至多就只有 3 個而已。而進一步發現，只要有奇數個完整的十字在紅色方格裡的話，則先手贏。而要是格中是偶數個完整十字，則後手贏。

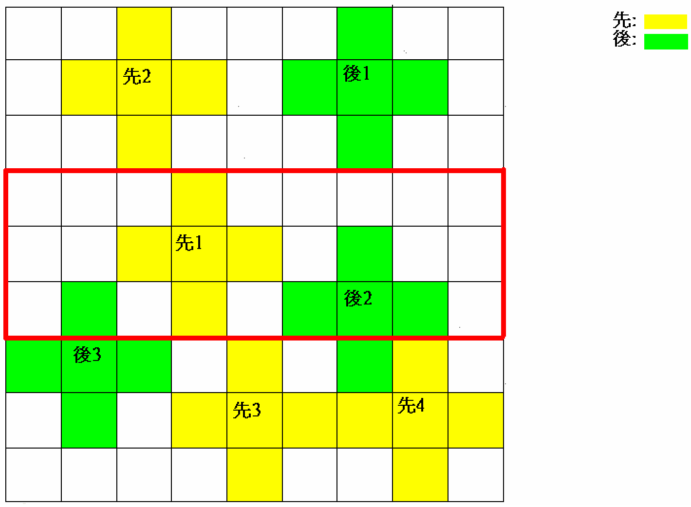
像:



註解 [N1]: 此為先手贏，因爲有一個十字，和上面發現的規則一樣

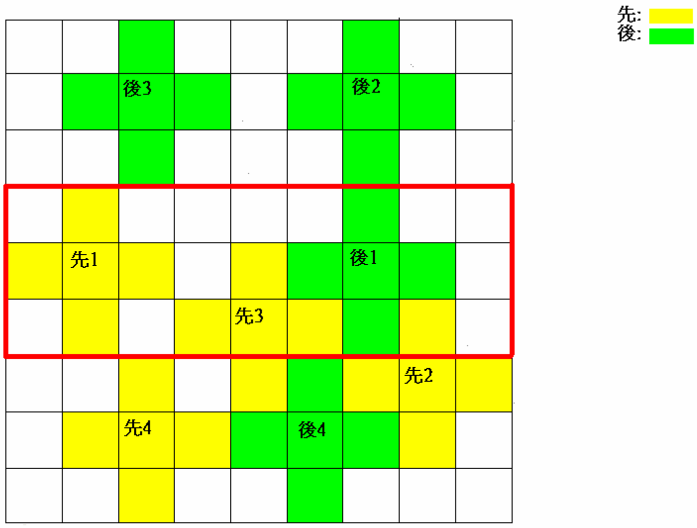
<規律 1>:先手贏

來試一個對先手有利的例子(只要有單數個完整的十字在紅色方格裡的話，則先手贏。)



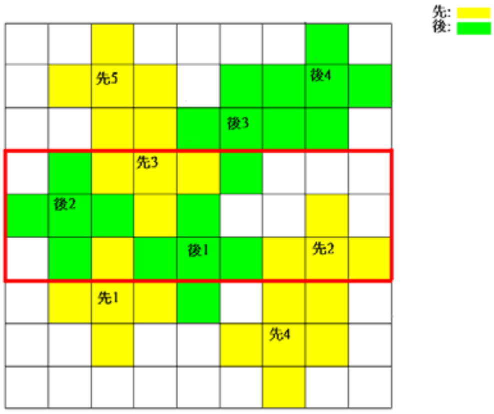
<規律 2>:後手贏

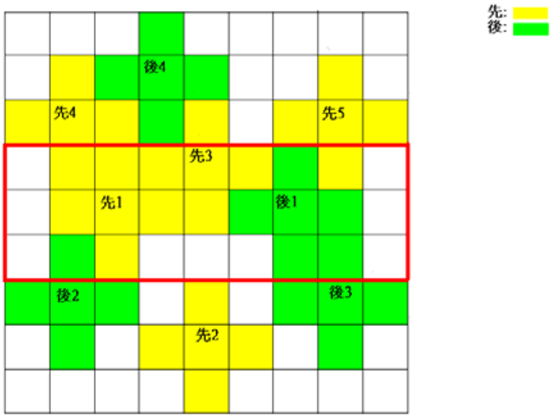
再來試一個對後手有利的例子(而要是格中只有偶數個完整十字，則後手贏。)



※但是我們在過程中發現幾個例外。所以我們發現的規律不一定是完全一樣的。

<例外一>:先手贏　　　　　　　　　　　<例外二>:先手贏

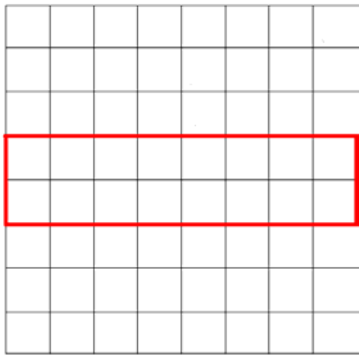




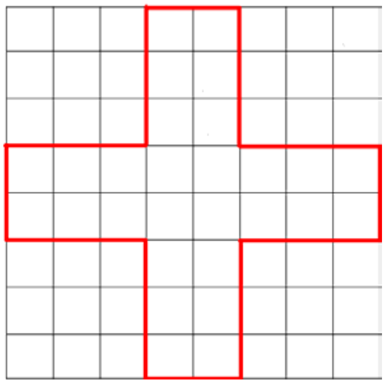
2. 8x8 的方格遊戲

由於 9x9 的方格遊戲是由中心基準點的方式去找，但是 8x8 最多就只有中間的那兩行可以勉強算是中心基準點（圖一）。但如果只有任一兩行就無法構成前面 9x9 所說的完整十字，因為如此，所以我們想到了一個辦法，就把它變成一個完整的大十字（圖二）。以下是圖一和圖二的解釋方法！

＜圖一＞

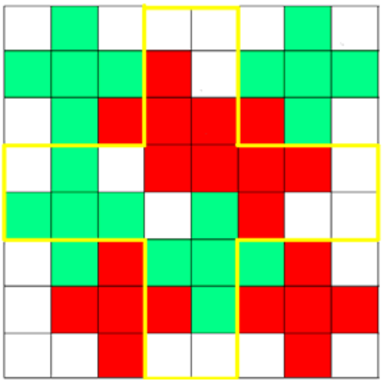


＜圖二＞



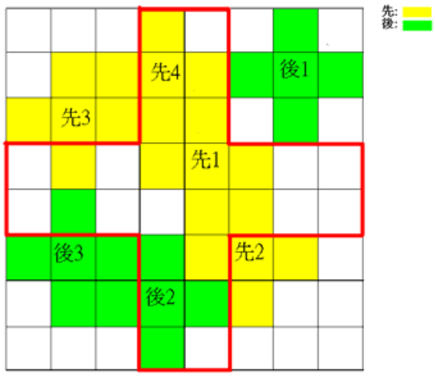
最後，我們發現:只要是奇數個十字在大十字裡的話，就是先手贏；而要是是偶數個十字在大十字裡的話，就是後手贏!

例如：

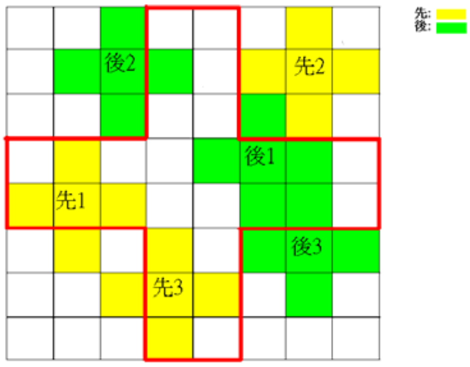


註解 [us2]: 因為在黃色方格裡都沒有任一完整十字，所以結果是後手贏

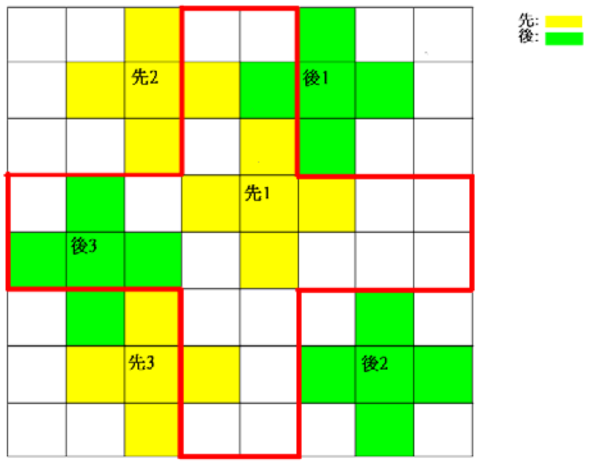
<規律 1>:先手贏(奇數個十字在大十字裡的話，就是先手贏)



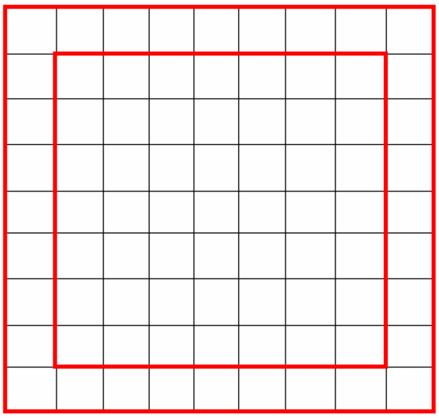
<規律 2>:後手贏（偶數個十字在大十字裡的話，就是後手贏）



<例外一>:後手贏



※此爲十字型磁磚專用

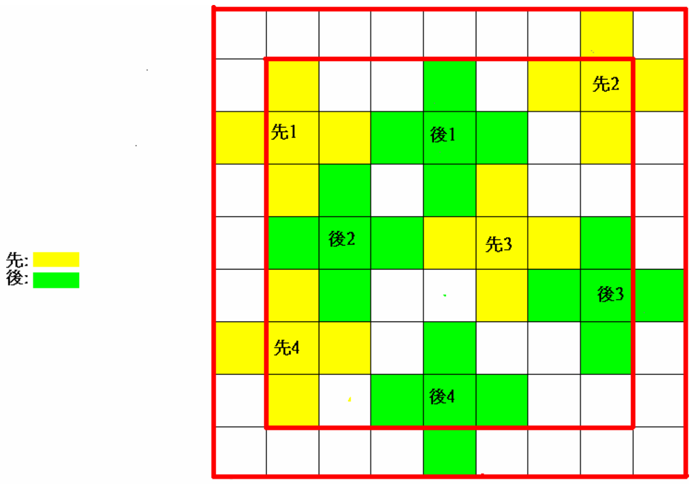


然後，我們意外發現另一個規律，就是:如左圖，外面紅色的框框裡面，有奇數格被塗過的，即爲先手贏，相反的，偶數個被塗過，就是後手贏啦!

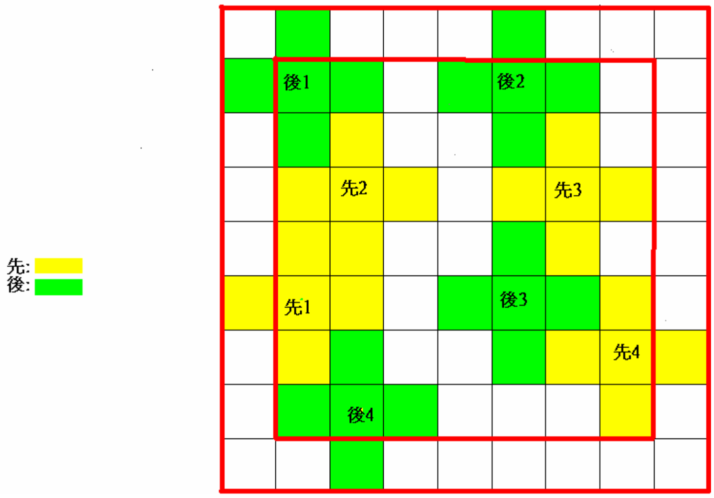
其實，這個方法也可以用來輔助我們一開始尋找的規律!

9x9 十字

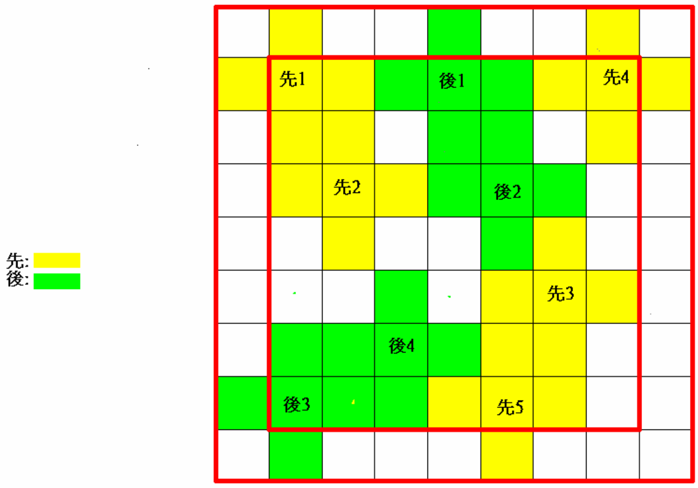
<規律 1>:後手贏



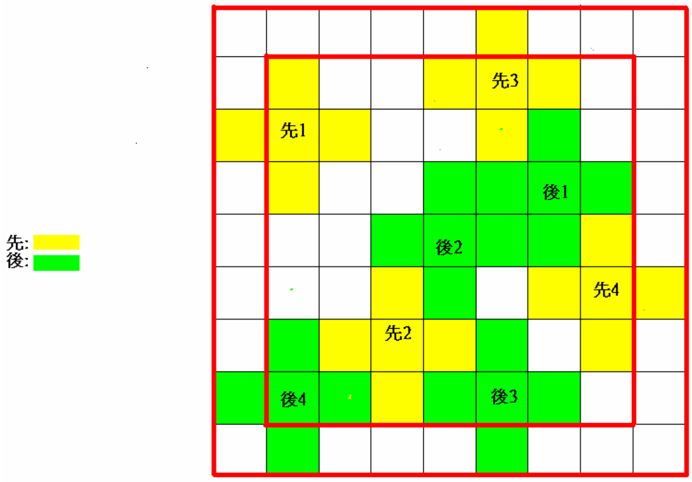
<規律 2>:後手贏



<例外一>:先手贏

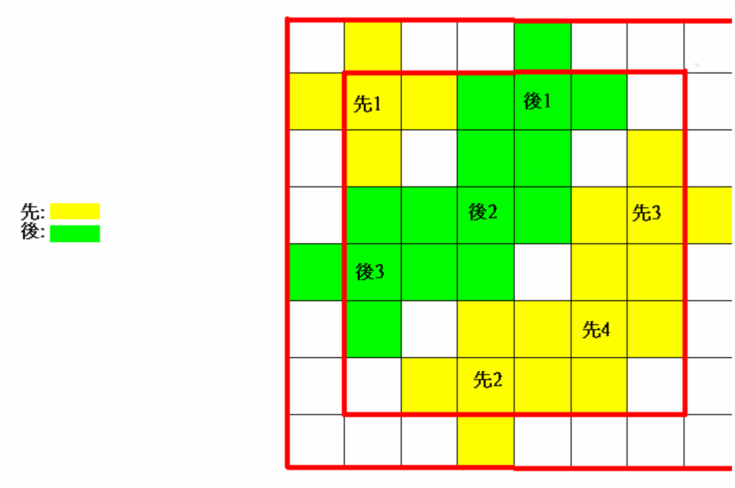


<例外二>:後手贏

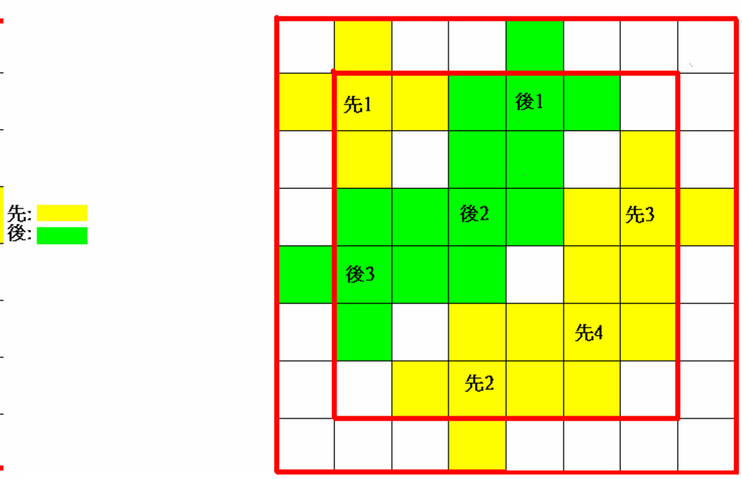


8x8 十字

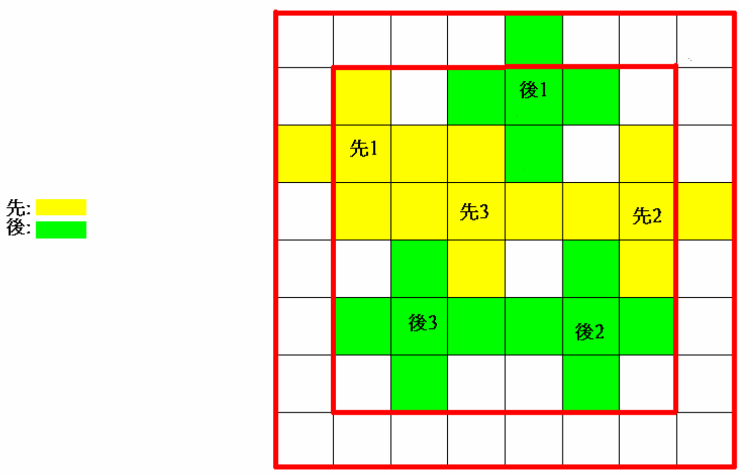
<規律 1>:先手贏



<規律 2>:先手贏



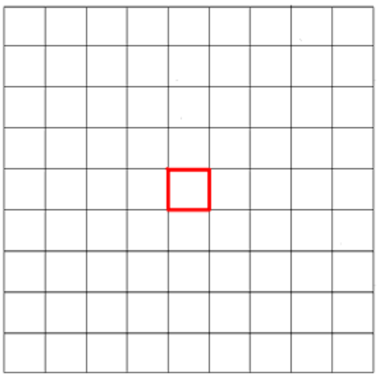
<例外一>:後手贏



3. 9x9 一格遊戲

這個 9x9 的主題最主要就在中心基準點，全部的全部可以用中心基準點貫串全文。在 9x9 和 8x8 的十字遊戲最主要的重點還沒有那麼明顯。我們發現，8x8 和 9x9 的一格遊戲特別注重的是中心基準點，全部掌握的只有一個特點，那就是中間的 5x5 格子。(圖一)

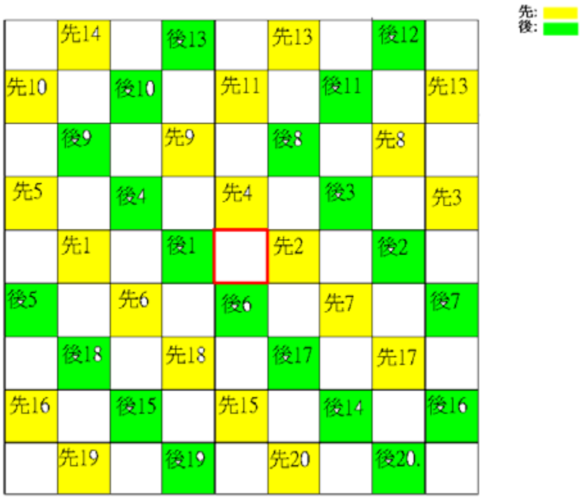
＜圖一＞



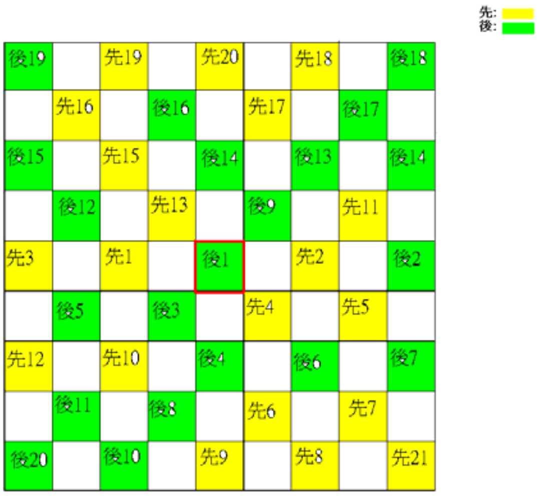
註解 [N1]: 5X5是指中間框起來紅色那一格

雖然 5×5 的格子乍看沒什麼特別的，但是 9×9 一格遊戲也只有掌握在那裡面而已。然而，我們發現，如果中間沒有塗色，不管其他地方有沒有塗色，輸的人永遠都是先手；但如果中間有塗色，則如果先手搶先塗了 5×5，那贏的人就是後手；但如果是後手塗了 5×5，那贏的人就是先手。

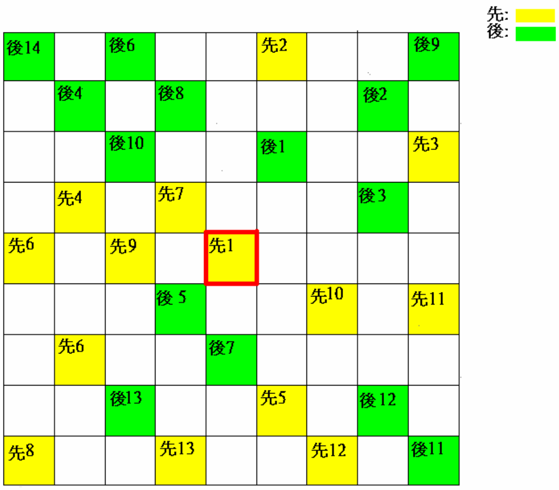
<規律 1>:後手贏(如果中間沒有塗色，不管其他地方有沒有塗色，都是後手贏)



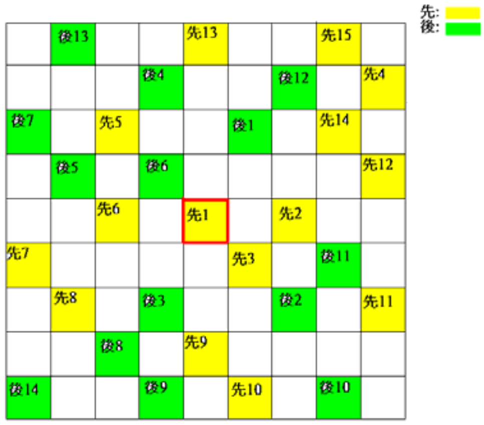
<規律 2-1>先手贏(如果是後手塗了 5×5 的格子，那贏的人就是先手)

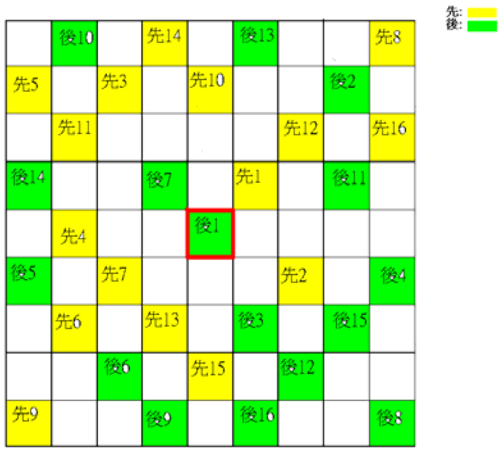


<規律 2-2>後手贏(如果是先手塗了 5×5 的格子，則後手贏)



<例外一>:先手贏　　　　　　　　<例外二>:後手贏

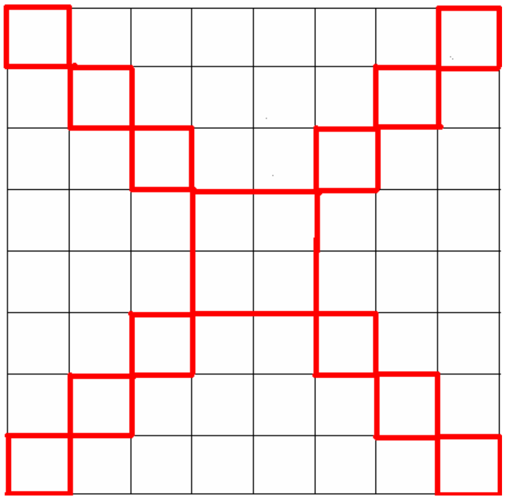


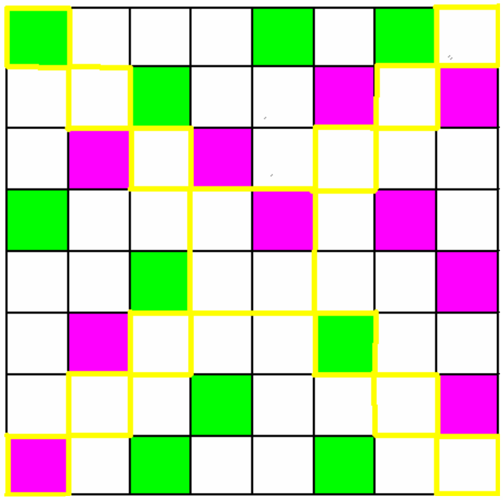


4. 8x8 一格遊戲

在 9x9 和 8x8 的十字遊戲中，雖然是一樣的格子數目，但是在形式上略有不同。十字講求的是正中央的中心基準點，但是一格的 8x8 遊戲中，每一個格子都是分散的，但是我們找到了一個方法，就是在每一個 8x8 的方格裡，打一個大xx（圖一），去數裡面有幾個塗顏色的方格(圖二)，但是在遊戲過程中要注意的是，千萬不可以犯規！不然前面的心機也就白費了！

＜圖一＞　　　　　　　　＜圖二＞

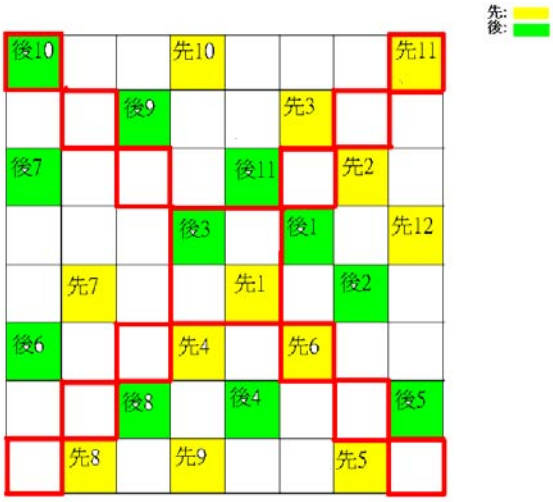




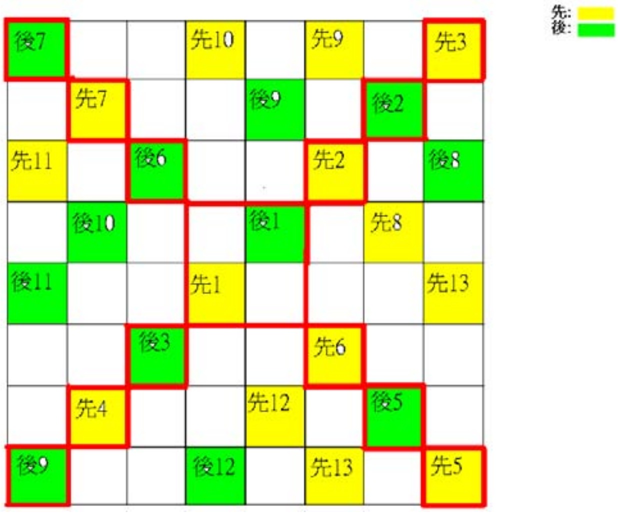
最後，我們發現，在大xx的方格中，如果裡面有奇數個塗過色的格子，則結果爲先手贏；但如果大xx的格子裡只有偶數個格子，那就是後手贏。由上面的圖二來看，分別有 4 個格子占住範圍內的黃色xx，所以結果爲後手贏。

註解 [N3]: 因爲 4 是偶數，所以爲乙贏。

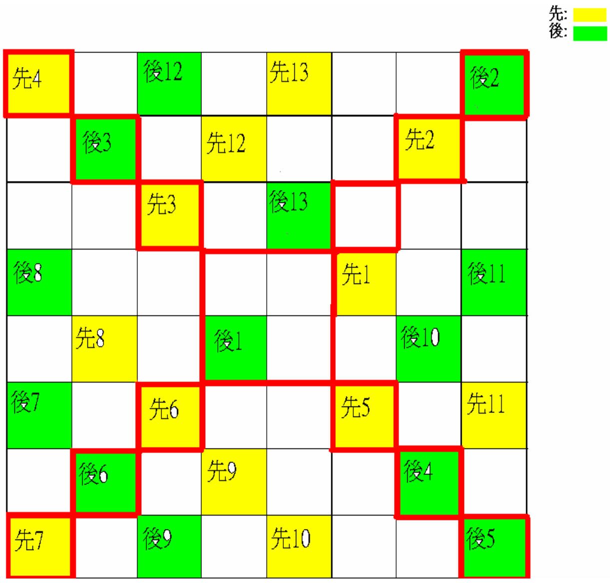
<規律 1>:先手贏(在大xx的方格中，如果裡面有奇數個塗過色的格子，則結果爲先手贏)



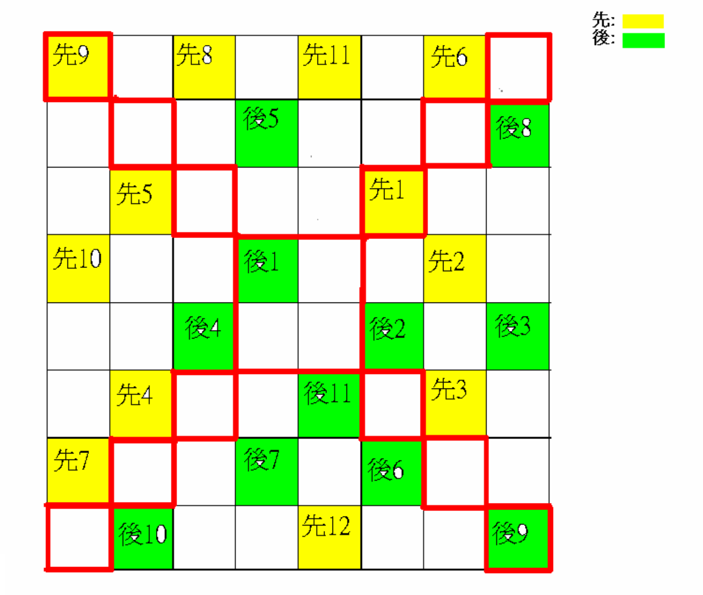
<規律 2>:後手贏(在大xx的方格中，有偶數個格子，那就是後手贏。)



<例外一>:後手贏



<例外二>:先手贏



伍、研究結果：

一、

塗球遊戲

在 18 顆球中，我們統整出來的結果是：（1 和 10）（2 和 11）（3 和 12）（4 和 13）（5 和 14）（6 和 15）（7 和 16）（8 和 17）（9 和 18）也是一個點對上通過圓心的那點，這是一個規律：

先手塗１，後手就塗１０

先手塗２，後手就塗１１

先手塗３，後手就塗１２……

依這樣塗下去，後手是絕對會贏的！！

而另一種塗法是依空格數來判斷！

先手會贏的規律有：

1格	3次
2格	4次

1格	9次
2格	0次

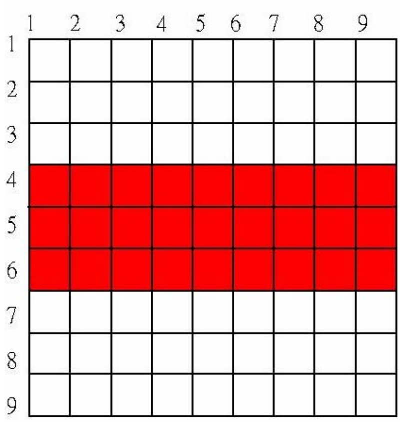
後手會贏的規律有：

1格	6次
2格	2次

1格	0次
2格	6次

二 、

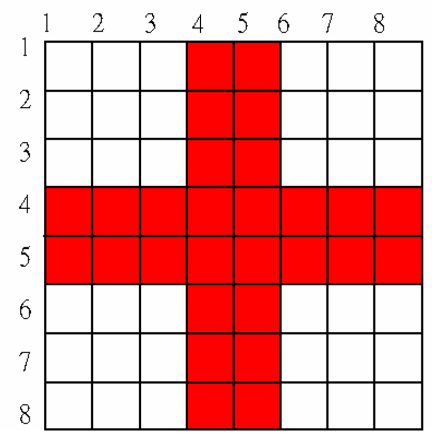
9x9 十字遊戲



在 範圍內，如果出現單數個完整十字 →先手贏

在 範圍內，如果出現單數個完整十字 → 後手贏

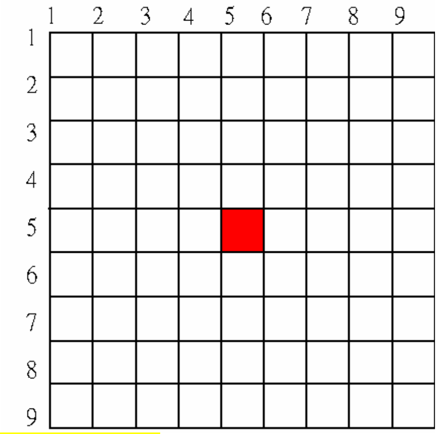
8x8 十字遊戲



在 範圍內，如果出現奇數個完整十字⟶ 先手贏

在 範圍內，如果出現偶數個完整十字⟶ 後手贏

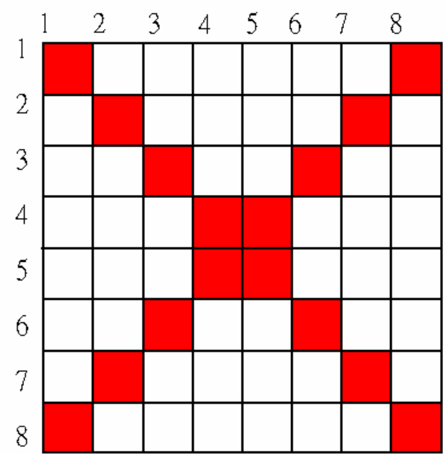
9x9 一格遊戲



在 範圍內，如果沒有塗色的話 ⟶ 乙贏

在 範圍內，如果是對手塗的顏色的話 ⟶自己贏

8x8 一格遊戲



在 範圍內，如果有奇數個格子被塗色 先手贏 ⟶

在 範圍內，如果有偶數個格子被塗色 後手贏 ⟶

陸、討論：

區分

＊ 目的：區別出戲說數學（許志農著）中的塗球遊戲和我們的研究的異同。

塗球遊戲

我們開始接觸這個遊戲時，是看到許志農教授的戲說數學，這本書告訴我們：「圓上的塗球遊戲是由直線上來的， 直線上的塗球遊戲是指直線排列的 9 個白-球……」⟶

由此我們便想如果直線變成偶數呢？因此我們便將直線 9 改成 10，就找出直線 10 的規律。此書告訴我們：「圓上的塗球遊戲是由直線遊戲拉成一個圓來玩，在 18 個球的情形，不難發現：1 與 10，2 與 11，3 與 12，4 與 13，5 與 14，6 與 15，7 與 16，8 與 17，9 與 18 剛好使直徑，也就是說，這 18 個球剛好對稱圓心。所以當先手塗一個球之後，後手可以選與這球對稱的球來塗（直徑塗法）……」我們看了書中的規律，便又延伸出規律的公式，然而又想到另一種必勝方法。

①我們由一開始的直線 9 ⟶ 直線 10 ⟶ 直線 18 及塗球 18 比較

⟶ 塗球 17

十字型磁磚

許志農教授：提出"9x9 十字型磁磚"這個遊戲，而我們用來做我們的研究。

(原因：許志農教授在戲說數學一書中，說道：「……當筆者打字到這裡，靈光乍現，忽然聯想到一道雷同的遊戲，就順手把它記錄下來，並取名爲鋪十字型磁磚的遊戲……」表示這是個雷同的遊戲，而且是在打 18 圖球遊戲的當下想到的，是碰巧，也是偶然。)

我們的研究：9x9 十字型磁磚雖然是許志農教授提出的遊戲，但在許志農教授所著的「戲說數學」只說了遊戲規則，並沒有提出這個遊戲的必勝絕招。所以，我們由這一點來開始我們的研究。

◎ 由上面的區分可以了解，我們的研究和許志農教授相同的地方是遊戲本身，而我們不同的部份就是在我們的研究方面，我們發現了必勝的規律。

＊ 所以我們在找到我們的研究主題(十字型磁磚)後，就開始找我們的規律。但是，在「戲說數學」一書又說：「……在鋪十字型磁磚的比賽中，甲只要先佔據正中央的地點，接下來就可以輕易的以點對稱的魔棒打敗對手，你想到了嗎？但是，如果土地是偶數邊形，那麼結果又如何呢？……」我們由這一點，就開始我們的研究二(遊戲二中的 8x8 十字型磁磚。)

＊所以

引申 ⇨ 8x8 十字型磁磚（遊戲+規律+過程）

◎ 我們又想到，既然有十字的遊戲，何不做做看一格遊戲的呢？

所以引申 ⇨ 9x9 一格遊戲（遊戲+規律+過程）

8x8 一格遊戲（遊戲+規律+過程）

這便是我們和許志農教授不一樣的地方及研究過程。

柒、結論：

一、在 17 顆球的塗球遊戲中，先手雖然不一定會有絕對的勝算，但是相較於後手他是有利的；然而在 18 顆球中，後手卻是有必勝方法，他只要照著對稱軸塗，百分之百後手一定贏。

二、在 9x9 和 8x8 十字棋盤中，如果同時擁有奇數個十字在大方格裡，則先手贏；但若同時擁有偶數個十字在大方格裡，則後手贏。

三、在 9x9 一格遊戲中，有兩種情況；如果中間沒有塗色，不管其他地方有沒有塗色，輸的人永遠都是先手；但如果中間有塗色，則先手搶先塗了 5x5 的地方，那贏的人就是後手但如果是後手塗了 5x5 的地方，那贏的人就是先手。

四、在 8x8 的一格遊戲中，在大xx的方格中，如果裡面有奇數個塗過色的格子，則結果爲先手贏；但如果大xx的格子裡只有偶數個格子，那就是後手贏。

五、本次實驗因時間不足，發現了鋪磁磚一些例外的例子，導致無法研究的非常透徹；未來有時間，希望還能研究完塗球的奇數顆球與偶數顆球和棋盤遊戲的關係

捌、參考資料及其他：

一、許志農(2007)。戲說數學

二、各屆科展作品介紹，取自：

http://www.ntsec.gov.tw/m1.aspx?sNo=0000263

【評語】030425

1. 本作品環狀圖塗色遊戲頗具創意。

2. 惟數學性較不足，建議多參閱「推理與解題」等相關書籍以增加深度。