中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030424

面面俱到—n 邊形之面積最大、極小值

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 徐捷	沈志強
國三 黃胤維	鄒耀偉
國三 林奕均	
國三 黃昱軒	

關鍵詞：全等性質、圓內接 n 邊形、最大面積

面面俱到—n邊形面積之最大、極小值

摘要

由我們所學三角形的『邊長關係』、『全等性質』、『面積公式』，進而討論到四邊形、n 邊形。並利用逐步推理的方式，由特殊四邊形推到一般四邊形的面積公式，而從一般四邊形公式可知圓內接四邊形爲最大，越退化成三角形或一直線時面積越小。最後依我們的研究方式推測 n 邊形給定邊長之最大面積範圍及面積極小值。

壹、 研究動機

自從二年級下學期我們開始接觸到幾何，學到了三角形的全等性質，激發了我們對幾何的興趣。有一次數學課，老師簡單的提到了 Heron 公式，勾起了我們強烈的好奇心：「是不是任意四邊形也有屬於它的面積公式？全等性質？那五邊形、六邊形、n 邊形呢？固定了它們的邊長後，它們的最大、極小面積又是多少呢？……」於是下課後，我們深入的去請教老師，從此開啓了我們對幾何世界更深入研究的另一扇門。

貳、 研究目的

1. 由我們所學三角形的『邊長關係』、『全等性質』、『面積公式』，進而推至四邊形、n 邊形。
2. 試導出四邊形給定邊長的一般面積公式及探討面積最大與極小值。
3. 推測 n 邊形給定邊長之最大面積公式，並利用 GSP 協助模擬相關性質。

參、 器材

GSP(動態幾何繪圖軟體)、電腦、紙、筆、人腦

肆、 研究過程

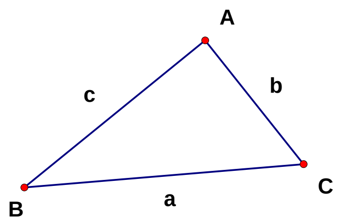
爲了區分內容性質，我們將以下的內容分爲三類，
「**探討**」表示：參考已有的資料，而對其做進一步的分析和討論；
「**研究**」表示：經由我們的想法再加以證實；
「**推測**」表示：在研究過程中，我們尚未或無法證明的想法。

在國中階段，我們對於多邊形性質的探討大多侷限於三角形及四邊形，甚至對於四邊形的性質探討的也不多，這次的研究我們想要從對三角形的了解進而推到四邊形、n 邊形。

我們將針對『**邊長關係**』、『**全等性質**』、『**面積公式**』來討論：

一. 三角形：

若我們已知ΔABC的邊長分別為 a、b、c，如圖一。



圖一

（一） 邊長關係： $a+b>c>|a-b|$

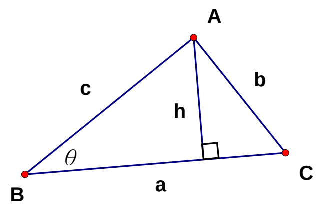
任兩邊之和大於第三邊；兩邊之差小於第三邊。

（二） 全等性質：

若以 S 代表邊、A 代表角，我們知道當符合 SSS、SSA、SAS、AAS、ASA (R 代表直角、H 代表斜邊、S 代表一股)這些性質之一時，兩三角形會全等，或者可說為『**確定唯一三角形**』。

在上課時，老師有提到三角形的全等至少需要三個要素(邊或角)，這讓我們想：不知道四邊形、n 邊形的全等最少需要幾個要素？我們將在之後討論。

（三） 面積公式：



圖二

1. 若已知ΔABC的底邊 $\overline{BC}$ 上的高為 h，如圖二，則我們知道ΔABC的面積可表示為 $\frac{1}{2}ah$ (底×高÷2)，或若我們知道 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BC}$ 的夾角為 θ 時，利用三角函數我們也可以知道ΔABC的面積也可以表示為 $\frac{1}{2}ac\sin\theta$ 。

而我們又從課堂上老師的補充中知道，若已知 ΔABC 的邊長分別為 a、b、c，則ΔABC的面積可表示如下：

2. **Heron** 公式：三角形面積= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。

Heron 公式的證明在高中的數學課本裡利用三角函數已有詳細的證明，但我們想要試著不用三角函數而得到證明。

探討 1：假設 ΔABC 的邊長分別為 a、b、c，利用畢氏定理證明 Heron 公式。

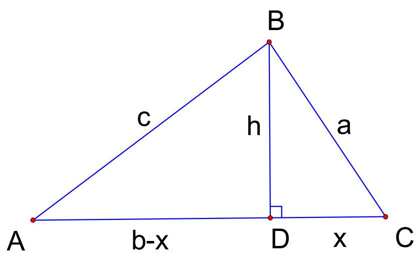
證明：如圖三， ΔABC 的邊長分別為 a、b、c， $\overline{BD}=h$ 為 $\overline{AC}$ 上的高，

設 $\overline{CD}=x$ ，則 $\overline{AD}=b-x$ ，由畢氏定理知：

$$h^2=a^2-x^2 \quad , \quad h^2=c^2-(b-x)^2$$

$$a^2-x^2=c^2-(b-x)^2$$
$$a^2-x^2=c^2-x^2+2bx-b^2$$
$$a^2+b^2-c^2=2bx$$

$$x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$



圖三

所以我們得到

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}$$
$$h^2 = \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}$$
$$h^2 = \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4b^2}$$
$$h^2 = \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4b^2}$$
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4b^2}$$
$$h = \pm\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2b}\text{(負不合)}$$
$$\therefore h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2b}$$

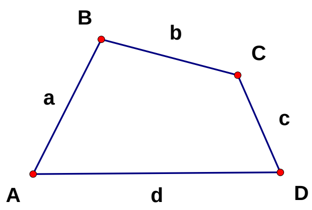
$$\begin{aligned}\because \Delta ABC\text{ 面積} &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2b} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4}\end{aligned}$$

設 $\frac{a+b+c}{2} = s$

$$\begin{aligned}\text{則三角形面積} &= \frac{\sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}}{4} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

證明完畢後我們發現這樣的證明比利用三角函數的證明複雜許多，因此我們往後的證明會多利用三角函數。

而從以上三角形性質的探討，我們想了解四邊形是否也有類似的性質，因此我們繼續底下的探討。



圖四

二．四邊形性質的探討：

若我們知道四邊形 $ABCD$ 的邊長分別為 a、b、c、d，如圖四。

（一） 邊長關係：

1. $a+b+c>d$

如同探討三角形時的想法一樣，四邊形任三邊長之和應大於第四邊，若三邊和小於或等於第四邊，此四邊形將退化為一直線，或甚至無法將其四邊相連。

在研究的過程中，我們發現四邊形的邊長還有底下關係。

2. 圓內接四邊形如果兩鄰邊 a、b 的夾角小於 90°，則 $a^2+b^2>c^2+d^2$。

研究 1：圓內接四邊形如果兩鄰邊 *a*、*b* 的夾角小於 90°，則 $a^2+b^2>c^2+d^2$。

證明：如圖五，設 $\theta<90°$ 利用餘弦定理，得：

$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$\because 2ab\cos\theta>0$

$\therefore e^2<a^2+b^2$

$\because$ 圓內接四邊形對角互補

$e^2=c^2+d^2-2cd\cos(180°-\theta)$

$\quad=c^2+d^2+2cd\cos\theta$

$\because 2cd\cos\theta>0$

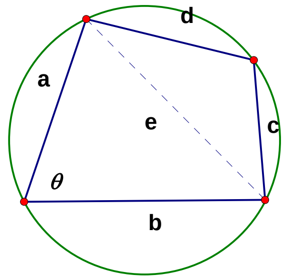
$\therefore e^2>c^2+d^2$

綜合上式，得：

$a^2+b^2>e^2>c^2+d^2$

$\therefore a^2+b^2>c^2+d^2$

故得証



圖五

（二）　全等性質：

我們知道三角形的全等性質最少要有三個要素，而且只要確定三邊長就可以確定唯一的三角形，但在四邊形中，四邊確定卻依然無法決定唯一的四邊形。這在上課時老師就舉過例子：正方形可經由角度改變而邊長不變下，變成和原正方形不全等的菱形。同理，長方形變平行四邊形或任意四邊形改變角度成為另一四邊形。

因此，四邊形的全等性質似乎無法只由四個要素來決定唯一的四邊形，我們試著去利用邊、角甚至對角線來決定四邊形的全等性質，我們研究的結果如下：

研究 2：四邊形中，若以 S 代表邊、A 代表角、L 代表對角線、R 代表直角，若符合 SSSSA、SASAS、ASSSA、ASASA、SLSLS、RSLSS、SASSL、RSLSR、LSLSR、RSLAS

以上性質時，兩四邊形全等，或者可說是確定唯一的四邊形。

證明：如附註一

由以上研究我們發現，要證明四邊形全等至少需要 **5 個要素**，其中，四邊加一角的全等性質對我們繼續探討四邊形之面積公式很有幫助。

（三）　四邊形的面積：

由四邊形全等性質的討論我們可以知道，若只確定「四邊長的長度」而無固定的角度，則無法確定唯一的四邊形，其面積也將無法確定，因此對於四邊形的面積我們從已知的特殊四邊形面積公式，再進一步的去探討四邊長確定時，任意四邊形面積的最大值與極小值。

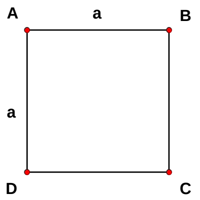
在研究進行時我們曾去請教過老師，得知四邊形的面積公式其實早就已經有了，但老師建議我們可以先用自己的想法去做研究，等遇到瓶頸或得到結論後再去參考別人的作

法，這樣子或許可以得到不同的作法、想法。因此，我們先開始了我們自己的研究。

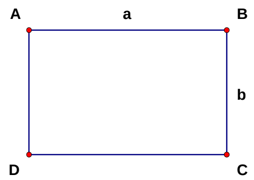
1. 四邊形面積公式

從國小到國中我們知道許多特殊的四邊形，如正方形、長方形、平行四邊形、梯形、菱形、鳶形的面積公式如下：

a.正方形：$a\times a=a^2$　　　　b.長方形：$a\times b$

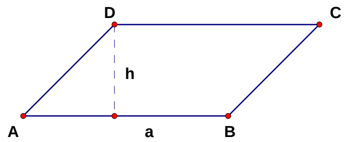


圖六

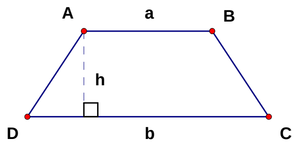


圖七

c.平行四邊形：$a\times h$　　　　d.梯形：$(a+b)\times h\div 2$

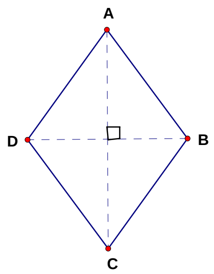


圖八

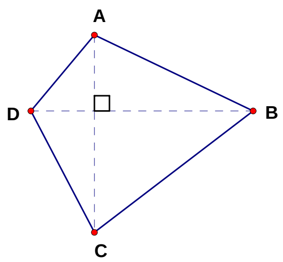


圖九

e.菱形、鳶形及任意對角線互相垂直的四邊形：$\overline{AC}\times\overline{BD}\div 2$



圖十



圖十一

以上我們所學過的特殊四邊形，彼此之間都有一些關係，就我們所學的，我們想推廣到一般四邊形面積，是否有共同的面積公式？我們從給定四邊長去進行討論：

(1) 四邊等長(a、a、a、a)：

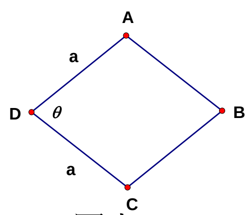
我們知道四邊等長即為菱形，若我們只想用邊長來表示面積公式而不從對角線來表示，那我們還必須知道一個角度才能確定唯一的四邊形。

探討 2：假設四邊形 $ABCD$ 四邊等長皆為 a，且其中一角為 θ 如圖十二，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 $a^2\sin\theta$。

證明：我們可將四邊形 $ABCD$ 切割長兩全等三角形 ΔADC 及 ΔABC，

$\therefore$四邊形 $ABCD$ 面積$=\Delta ADC+\Delta ABC$

$=2\,\Delta ADC$



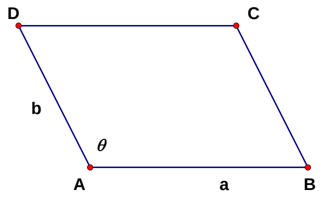
圖十二

$$
\begin{aligned}
&= 2 \times \frac{1}{2} a^2 \sin\theta \\
&= a^2 \sin\theta
\end{aligned}
$$

由以上可知四邊形若四邊等長，則當$\theta = 90°$時，也就是爲正方形時$\sin\theta = 1$，此時面積最大爲a^2，而當$\theta \to 0$時四邊形面積也會趨近於 0。

(2) 兩組邊等長(*a*、*a*、*b*、*b*)($a \neq b$)

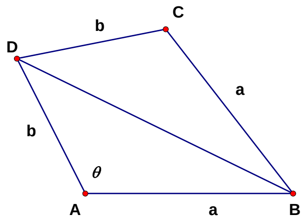
兩組邊等長的四邊形必可以組合成兩種特殊的四邊形──平行四邊形、鳶形。我們依舊只想用邊長及其中一角來表示面積公式而不從對角線來表示，所以我們的研究如下：



圖十三

探討 3：假設四邊形 *ABCD* 四邊長依序爲 *a*、*b*、*a*、*b*，且其中一角爲θ 如圖十三，則四邊形 *ABCD* 的面積爲$ab\sin\theta$

探討 4：假設四邊形 *ABCD* 四邊長依序爲 *a*、*a*、*b*、*b*，且其中一角爲θ 如圖十四，則四邊形 *ABCD* 的面積爲$ab\sin\theta$



圖十四

由於以上兩探討的證明與**探討 2** 的證明相同，因此不在此贅述。而從以上的研究我們也發現，其邊長的順序不一樣但面積卻相同，其實可從圖形上知道這只是兩個全等三角形的不同組合而已。而當其夾角爲 90°時面積最大爲ab，而當$\theta \to 0$時，四邊形的面積也會趨近於 0。

研究至此我們做了大膽的推測：

推測 1：*a.* 四邊形面積最大時，其中一夾角爲 90°。
**　　　　*b.* 邊長的順序並不會影響最大面積的大小。**
**　　　　*c.* 當四邊形面積極小時，爲其中一夾角趨近於 0°的時候。**

但當我們針對四邊形中：三邊等長另一邊不等長去做研究時，很快的我們發現我們的推測並不成熟。

(3) 三邊等長，另一邊不等長(*a*、*a*、*a*、*b*)($a \neq b$)

在一開始研究時，我們發現若只用邊長及其中一角來表示面積公式有一點困難，因此我們先用 GSP(動態幾何軟體)去模擬，我們取 ***a*=2**，則 ***b*<6**，爲了方便匯整成表格，*b* 只取整數，而 *a*、*b* 的夾角取 20 的倍數。如表一：

第四邊 面積 角度	b=1	b=3	b=4	b=5
20°				
40°		3.63172	4.57012	4.62257
60°	2.42727	4.58239	5.19615	
80°	2.75875	4.81681		
90°	2.85405	4.56125		
100°	2.89996	3.88381		
120°	2.85034			
140°	2.64272			
160°	2.33300			
面積最大時的角度	**104.47751°**	**75.52249°**	**60°**	**41.40962°**

(表一)

我們發現並不是當其中一夾角爲 90° 時面積最大，且角度也無法趨近於 0，甚至當 b 改變時，面積最大時的夾角 θ 也不一樣。從我們模擬的結果來看，我們把**推測** 1 改爲：**當改變一夾角使得此四邊形越對稱，或越「圓滿」，則此四邊形面積越大，而當四邊形退化成趨近於三角形時面積越小。**而甚麼叫做「圓滿」，我們一開始也無法解釋，四邊形退化趨近於三角形的狀況也不只一種，因此我們進一步去推出其公式。

在推導公式時，我們依 **SSSSA** 的全等性質，想要只用一夾角導出，但導出的公式過於複雜，因此老師建議我們利用兩個夾角及餘弦定理重新推導，得到的結果如下：

探討 5：假設四邊形 *ABCD* 四邊長依序爲 *a*、*a*、*a*、*b*，且其中一角爲 α，其對角爲 β 如圖十五，則四邊形 *ABCD* 的面積爲 $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b)^3(3a-b)-16a^3b\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}$

證明：若另四邊形 *ABCD* 面積爲 S，由三角函數的面積公式得知

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}a^2\sin\beta$$

$$4S=2ab\sin\alpha+2a^2\sin\beta$$

$$16S^2=4a^2b^2\sin^2\alpha+4a^4\sin^2\beta+8a^3b\sin\alpha\sin\beta \quad -①$$

由餘弦定理得知

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

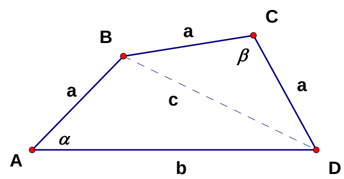
$$c^2=2a^2-2a^2\cos\beta$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=2a^2-2a^2\cos\beta$$

$$-a^2+b^2=2ab\cos\alpha-2a^2\cos\beta$$

$$(-a^2+b^2)^2=4a^2b^2\cos^2\alpha+4a^4\cos^2\beta-8a^3b\cos\alpha\cos\beta \quad -②$$

①+②



圖十五

$$16S^2+(-a^2+b^2)^2=4a^2b^2\sin^2\alpha+4a^2b^2\cos^2\alpha+4a^4\sin^2\beta+4a^4\cos^2\beta$$
$$+8a^3b(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)$$
$$=4a^2b^2+4a^4-8a^3b\cos(\alpha+\beta)$$
$$=(2ab+2a^2)^2-8a^3b\left[1+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$16S^2=(2ab+2a^2)^2-(-a^2+b^2)^2-8a^3b\left[1+\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$=(2ab+2a^2-a^2+b^2)(2ab+2a^2+a^2-b^2)-16a^3b\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$
$$=(a+b)^2(3a^2+2ab-b^2)-16a^3b\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$
$$=(a+b)^3(3a+b)-16a^3b\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$
$$4S=\sqrt{(a+b)^3(3a-b)-16a^3b\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$
$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b)^3(3a-b)-16a^3b\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

由上面研究我們發現當 $\alpha+\beta=180°$ 時面積最大，也就是當**四邊形 *ABCD* 爲圓內接四邊形時面積最大**。

這樣的結論讓我們覺得很興奮，因此接下來我們繼續研究兩邊等長，但另兩邊不等長，且與兩等長邊也不等長。

(4) 兩邊等長，但另兩邊不等長 (*a*、*a*、*b*、*c*)($a\neq b\neq c$)

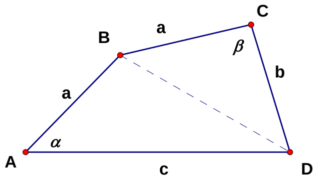
在做此研究時我們考慮了兩種狀況：

1. 兩等邊爲鄰邊**(*a*、*a*、*b*、*c*)($a\neq b\neq c$)**
2. 兩等邊爲對邊**(*a*、*b*、*a*、*c*)($a\neq b\neq c$)**

無論是哪一種狀況，我們研究出來的面積公式皆相同，如下：

探討 6：假設四邊形 *ABCD* 四邊長爲 *a*、*a*、*b*、*c*，且其中一角爲 α，其對角爲 β，如圖十六，則四邊形 *ABCD* 的面積爲

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2ab)^2-(b^2-c^2)^2-16a^2bc\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}\ \cdots\text{(1)或}$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{(b+c)^2(2a+b-c)(2a-b+c)-16a^2bc\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}\ \cdots\text{(2)}$$



圖十六

此探討的證明因與**探討 5** 證明方法相同，因此不再此贅述。

兩邊等長的四邊形我們寫出兩個公式，其實兩公式皆相等，公式(1)是推出公式(2)過程中的式子，感覺上比較簡單，但公式(2)的寫法與我們接下來的探討較類似。

無論是公式(1)或公式(2)我們都可以看出：

推測 2： ***a.*** 當 $\alpha+\beta=180°$ 時面積最大，也就是當四邊形 ***ABCD*** 爲圓內接四邊形時面積最大。

b. 邊長的順序會影響一般面積大小，卻不會影響最大面積之大小。

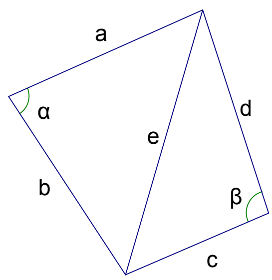
接下來，我們用相同的方法去推導，當四邊形的四邊皆不相等時的公式，也就是任意四邊形的面積公式。

(5) 任意四邊形其四邊不一定等長(*a*、*b*、*c*、*d*)

任意四邊形的面積公式，我們利用探討 5 的推導方式去推導出其一般式如探討 7，

探討 7：假設四邊形 *ABCD* 四邊長爲 a、b、c、d，且其中一角爲 α，其對角爲 β 如圖十七，則四邊形 *ABCD* 的面積爲 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}$

其中 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$



圖十七

接下來老師要我們去查資料，我們發現原來老師引導我們思考**證明四邊形面積公式**的方向與**蔡聰明教授所著作—數學的發現趣談**裡的證明相同(因此證明不再附上)。一開始我們有些沮喪，因爲**探討 7 的結果竟然和蔡教授所著一樣**，且蔡教授書裡已寫得相當完整，但老師鼓勵我們，因爲我們有自行思考研究過，在做進一步研究時才會更有幫助，所以我們重拾信心，繼續往我們一開始設定的方向研究，並且也開始蒐集更多跟我們主題相關的資料來幫助我們研究。

探討 7 的公式也就是 **Bretschneider** 公式(西元 1842 年)。而當 $\alpha+\beta=180°$ 時面積最大，也就是當四邊形 *ABCD* 爲圓內接四邊形時面積最大爲 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，這是 **Brahmagupta** 公式(西元 628 年)，這被列爲最美的數學定理之一。

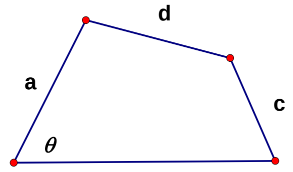
而我們的**推測** 2 也獲得了證明。

2. 任意四邊形固定其四邊長度之最大面積

我們在之前的**探討 7** 發現四邊形在給定邊長的情況下，**最大的面積爲圓內接四邊形** $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。但我們似乎忘記一件事情：我們忘記證明任意四邊形在給定邊長的情況下必存在一圓內接四邊形。因此，我們做了底下的證明：

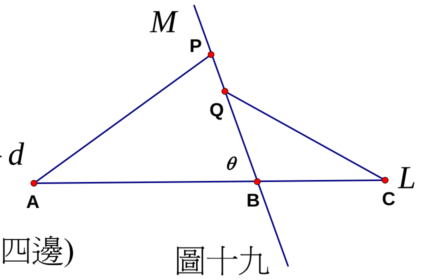
研究 3：任意四邊形在給定四邊邊長的情況下，必存在一外接圓，使得此四邊形爲此圓之圓內接四邊形。

證明：若四邊形邊長分別爲 a、b、c、d，且 a、b 夾角爲 θ，如圖十八，我們在一直線 L 上取 $\overline{AB}=b$、$\overline{BC}=d$，並過 B 點任意作一直線 M，在 M 上取 P、Q 兩點使得 $\overline{BP}=a$、$\overline{BQ}=c$，且 P、Q 在 L 的同一側，如圖十九



圖十八

$\Rightarrow |a-b| \le \overline{AP} \le a+b$ ， $|c-d| \le \overline{CQ} \le c+d$



圖十九

1.當 P 點在 L 上(M 與 L 重疊)，且當 $\overline{AP}=|a-b|$ 時 $\overline{CQ}=c+d$

$\Rightarrow \overline{CQ}-\overline{AP}=c+d-|a-b|>0$ (∵四邊形三邊和大於第四邊)

$\therefore \overline{CQ}>\overline{AP}$

2.當 P 點在 L 上(M 與 L 重疊)，當 $\overline{AP}=a+b$ 時 $\overline{CQ}=|c-d|$

$\Rightarrow \overline{AP}-\overline{CQ}=a+b-|c-d|>0$ (∵四邊形三邊和大於第四邊)

$\therefore \overline{AP}>\overline{CQ}$

又因爲此圖形具有連續性，所以存在一 a、b 夾角 θ 使得 $\overline{AP}=\overline{CQ}$，也就是 a、b 夾角 θ 使得四邊形對角互補，故必存在一圓使得此四邊形爲此圓之圓內接四邊形。

爲了想要利用已知四邊形之四邊長就畫出圓內接四邊形，我們利用圓內接四邊形對角互補的特性，即可求出任意兩邊的夾角，這對我們往後利用 GSP 畫圓內接四邊形及此研究有很大的幫助。

研究 4：當圓內接四邊形的邊長分別爲 a、b、c、d，且 a、b 夾角爲 θ，$0°<\theta<180°$，

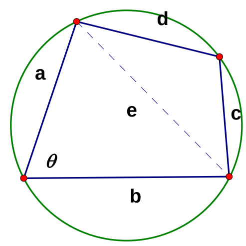
則 $\theta=\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{(2ab+2cd)}$

證明：如圖二十，利用餘弦定理，得：

$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ —①

$e^2=c^2+d^2-2cd\cos(180°-\theta)=c^2+d^2+2cd\cos\theta$ —②

合併①、②



圖二十

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2+2cd\cos\theta$$
$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos\theta+2cd\cos\theta$$
$$a^2+b^2-c^2-d^2=(2ab+2cd)\cos\theta$$
$$\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{(2ab+2cd)}=\cos\theta$$
$$\therefore \theta=\arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{(2ab+2cd)}$$

3. 任意四邊形固定其四邊長度之面積極小值

討論完最大面積後，我們接著討論面積的極小值。在研究過程中，我們發現面積極小值有以下特性：

(1) 邊長順序的改變，會影響其面積極小值。像邊長爲 1、2、3、4 的情況和 1、2、4、3 的情況完全不一樣，邊長爲 1、2、3、4 的四邊形可壓扁成趨近一直線，但 1、2、4、3 的四邊形則只能壓成趨近於三角形。

(2) 當兩邊和等於另兩邊和時，此四邊形面積極小值會趨近於 0。當兩鄰邊不等於另兩邊和時，會退化成四種三角形：

Δ_1：$a+b$、c、d ；Δ_2：a、$b+c$、d ；Δ_3：a、b、$c+d$ ；Δ_4：b、c、$d+a$ 。

其中必有第三邊(兩鄰邊之和)大於兩邊之和，此時便無法退化爲三角形。排除此情況，若第三邊越接近另兩邊時，或越接近$\frac{1}{2}$周長時，此四邊形面積越小。

根據以上各點，我們做了底下的研究：

研究 5：若一四邊形 *ABCD* 的邊長依序爲 a、b、c、d，若一組鄰邊 c、d 爲所有符合相鄰兩邊和小於等於 s 中最大者，則以 c、d 兩鄰邊夾角越接近 180°時面積越小，如圖二十一，面積應趨近於 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-(c+d))}$ 。

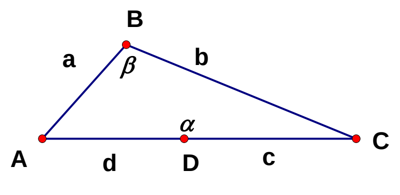
證明：我們從四邊形的面積公式來看

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

當一對角$\alpha+\beta$越接近 0°或 360°時面積越小。

當$\alpha=180°$，令$c+d=a+b-k\le s$，且$k\ge 0$

由餘弦定理得知



圖二十一

$$\cos\beta=\frac{a^2+b^2-(c+d)^2}{2ab}$$
$$=\frac{a^2+b^2-(a+b-k)^2}{2ab}$$
$$=\frac{-k^2+2ka+2kb-2ab}{2ab}$$

$$=-1+\frac{k(-k+2a+2b)}{2ab}\leq -1$$

$\therefore$當 $k=0$ 或 $k=2a+2b$ (不合)

$\cos\beta=-1$ ， $\beta=180°$

$\therefore$當 k 越接近 0，也就是 $c+d$ 越接近 $a+b$ ，或者說越接近 s ，面積越小。

因此若 c、d 爲所有符合相鄰兩邊和小於等於 s 中最大者，則以 c、d 兩鄰邊接近直線時面積越小

此時面積趨近於以 a、b、$c+d$ 爲三邊長的三角形，

故面積趨近於 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-(c+d))}$ 。

三. *n* 邊形性質的探討：

（一） 邊長關係：

我們先從五邊形著手，如同前面的探討，五邊形的邊長關係也是任四邊長之和應大於第五邊，若四邊和小於或等於第五邊，此五邊形將退化爲一直線，或甚至無法將其五邊相連。所以，若五邊形邊長分別爲 a、b、c、d、e，又 e 爲最大邊，則必符合此條件：

$$a+b+c+d>e$$

同樣地，在任意 n 邊形中，任意(n-1)邊長之和應大於第 n 邊，若(n-1)邊和小於或等於第 n 邊，此 n 邊形將退化爲一直線，甚至無法將其 n 邊相連。所以，若 n 邊形邊長分別爲 a_1 、 a_2 、⋯、 a_{n-1} 、 a_n ，又 a_n 爲最大邊，則必符合此條件：

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}>a_n$$

探討三角形、四邊形與 n 邊形邊長性質，是爲了協助求出多邊形的面積公式。

（二） 全等性質：

因爲我們主要是想探討利用已知邊長來求出面積，因此五邊形的全等我們只討論邊和角，我們得到底下的結論：

研究 6：五邊形若以 S 代表邊、A 代表角，若符合

SSSSASA、SSSASSA、SSAAASA、ASASASA、SSAASAA

以上性質時，兩五邊形全等，或者可說確定唯一五邊形。

證明：與四邊形全等類似，不在此贅述。

我們依已知的三角形、四邊形、五邊形全等性質觀察到：三角形全等至少需要 3 個要素；四邊形全等至少需要 5 個要素；五邊形全等至少需要 7 個要素。由上我們得到底下推測：

推測 3：任意兩 n 邊形需要 $(2n-3)$ 個要素，以證明兩 *n* 邊形全等。

雖然我們沒寫**推測 3** 的證明，但直覺上那是對的，因為每增加一邊形，必須增加一邊及一角證明其全等。若我們所有 n 邊形的邊長皆要用上時，則必須要再加上 $(n-3)$ 個角才能證明其全等。

（三） 面積公式：

同樣地，我們從五邊形探討起。

在探討五邊形的面積公式時，我們遇到非常大的困擾，因為一般在四邊形可以成立的性質在五邊形似乎不一定成立。例如：四邊形的各邊中點連線所圍成的四邊形必為平行四邊形，且為原四邊形面積的一半，但五邊形各邊中點連線並沒有特別的五邊形，且所圍成的面積與原五邊形的面積比值也並非一個固定的值；四邊形若為圓內接四邊形則對角互補，而圓內接五邊形的角度並無特殊規則。

我們嘗試了許多的推論五邊形面積的方法，例如：利用五邊形=一個三角形+一個四邊形；五邊形可分割成三個三角形…等等，但我們始終無法得到一較簡單表示方式。

相同的我們在討論六邊形時也無法用較簡單的方式表示，因此 n 邊形在給定 n 個邊長及 $(n-3)$ 個角情況下的面積公式目前我們無法推出，我們將聚焦於最大及極小面積。

1. *n* 邊形固定邊長之最大面積

首先我們需先確定 n 邊形固定邊長時，是否有一固定的形態來確定此 n 邊形面積最大？

因三角形只要給定三邊長其面積就固定，四邊形在給定四邊長的狀況下當此四邊形為圓內接四邊形時面積最大，因此我們做了底下的推測。

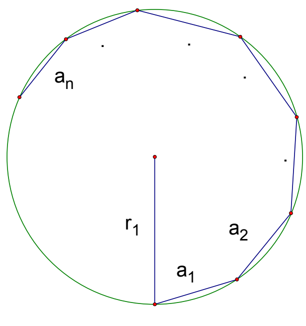
推測 4：若 n 邊形固定其 n 邊的邊長時，當此 n 邊形為圓內接 n 邊形時面積最大。

在證明此推測是正確之前，我們需先證明任意 n 邊形固定其 n 邊的邊長時，皆存在一外接圓使得此 n 邊形為圓內接 n 邊形，且不論 n 邊形邊長的順序如何改變，此外接圓皆為同一個圓。

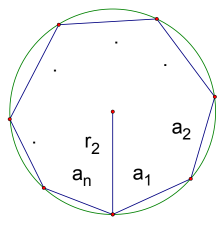
研究 7：任意 *n* 邊形若固定其 *n* 邊的邊長時，必存在一外接圓使得此 *n* 邊形為圓內接 *n* 邊形。

證明：若一 n 邊形其邊長分別為 a_1、a_2、…、a_n，如圖二十二：

當一個圓夠大時，必可在其圓上依序取得相連的弦 a_1、a_2、…、a_n，再縮小其半徑使得 a_n 與 a_1 相連，如圖二十三，則此圓為此 n 邊形的外接圓。



圖二十二

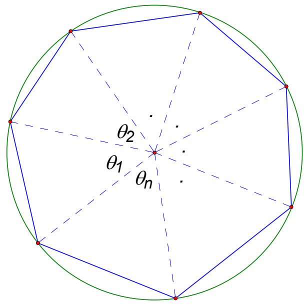


圖二十三

研究 8：任意 *n* 邊形若固定其 *n* 邊的邊長時，不論 *n* 邊形的邊長順序如何改變，其外接圓皆為半徑相同的圓。

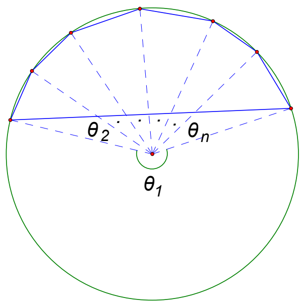
證明：

1. 外接圓圓心在圖形內：
我們先做一 n 邊形的外接圓，再將其分割成 n 個扇形，如圖二十四，若我們將這些扇形重新排列，不依序組合，因所有的扇形半徑皆相等，且 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=360°$，因此必可組合成一個圓，且與原來的圓有相同半徑。



圖二十四

2. 外接圓圓心在圖形外：
我們先做一 n 邊形的外接圓，再將其分割成 n 個扇形，如圖，此為環狀排列，所以將最長邊固定，若將其他扇形重新排列，不依序組合，因這些扇形半徑皆相等，且所有的弧度和為 360°，因此必可組合成一個圓，且與原來的圓有相同半徑。



圖二十五

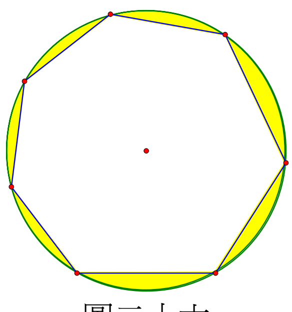
接著我們可證明之前的**推測 4**，在討論證明時，我們用了很多的代數方法，都無法順利證出，後來在找資料時，我們查到了「**等周定理**」，

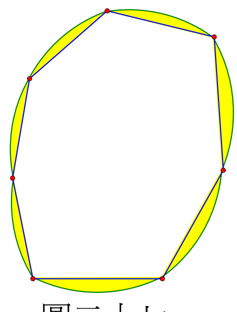
「**等周定理**」**：在周界固定的平面封閉曲線中，以圓的面積為最大。**
(維基百科 2008.03.20)

因此我們利用「**等周定理**」證明如下：

探討 8：若任意 *n* 邊形固定其 *n* 邊的邊長時，當此 *n* 邊形為圓內接 *n* 邊形時面積最大。

證明：我們做一 n 邊形的外接圓，黃色部份為外接圓與 n 邊形相差之弓形，如圖二十三當我們改變 n 邊形各邊的角度但弓形部分不變，則圖形可改變為圖二十四，從圖二十三我們知道，其弓形所圍成封閉曲線周長與圖二十四相等，而由「**等周定理**」我們知道圓面積最大，因此 n 邊形面積為圓面積減掉黃色公型面積為最大。
故當 n 邊形為圓內接 n 邊形時面積最大。


圖二十六


圖二十七

既然 n 邊形固定其 n 邊的邊長時，圓內接 n 邊形面積為最大，我們試著從五邊形開始去討論其圓內接五邊形面積公式。

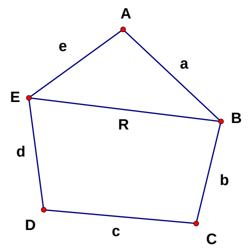
我們試著由三角形、圓內接四邊形去推測圓內接五邊形的面積，為了要保持**面積與邊長關係為 2 次式，且邊長順序不影響面積的最大值**，因此我們的推測如下：

推測 5：若圓內接五邊形的邊長分別為 *a*、*b*、*c*、*d*、*e*，且令 $s=\dfrac{a+b+c+d+e}{2}$ **，則五**

邊形面積$S=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}}$

在我們還沒證明之前，我們利用 GSP 去試著模擬(如底下第 19 頁附表二)，結果令人有點沮喪，因爲我們的公式並不符合真正的面積，甚至連正五邊形的面積也不相等，因此我們朝另一方向去思考。

在之前我們推論五邊形面積時，有考慮到五邊形 $ABCDE$ 面積=ΔABE 面積+四邊形 $BCDE$ 面積(如圖二十八)，當 ΔABE 與四邊形 $BCDE$ 的連接邊 $\overline{BE}$ 改變時 ΔABE 面積隨之改變，而此時四邊形 $BCDE$ 仍可改變，所以我們可否藉由 $\overline{BE}$ 的改變找出 ΔABE 的最大面積及四邊形 $BCDE$ 的最大面積，進而使得五邊形 $ABCDE$ 面積最大？我們提出了問題：



圖二十八

a. 三角形 ABC 若已知兩邊長 a、b，則第三邊的長度爲何時三角形 ABC 面積最大？
b. 四邊形 $ABCD$ 若已知三邊長 a、b、c，則第四邊的長度爲何時四邊形 $ABCD$ 面積最大？

研究 9：若 ΔABC 已知兩邊長 a、b，則第三邊 $R=\sqrt{a^2+b^2}$ 時 ΔABC 面積最大。

證明：假設 ΔABC 中 a、b 的夾角爲 θ，則 ΔABC 面積=$\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

$\therefore$ 當 $\theta=90^\circ$ 時，ΔABC 面積=$\dfrac{1}{2}ab$ 最大

此時第三邊 R 利用畢氏定理可得 $R=\sqrt{a^2+b^2}$

故得證。

研究 10：若四邊形 $ABCD$ 已知三邊長 a、b、c，則第四邊 R 爲 $R^3-(a^2+b^2+c^2)R-2abc=0$ 的根時的圓內接四邊形 $ABCD$ 面積最大。

證明：我們知道四邊形當其爲圓內接四邊形時面積最大，我們令四邊形 $ABCD$ 面積

$S(R)=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-R)}$，其中 $s=\dfrac{a+b+c+R}{2}$

$\because S(R)\geq 0$，求 R 使得 $S(R)$ 最大，與求 R 使得 $S^2(R)$ 最大是相同的。

$$S^2(R)=(s-a)(s-b)(s-c)(s-R)$$
$$=\frac{1}{16}(-a+b+c+R)(a-b+c+R)(a+b-c+R)(a+b+c-R)$$
$$=\frac{1}{16}(-R^4+2(a^2+b^2+c^2)R^2+8abcR+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4)$$

我們將 $S^2(R)$ 對 R 微分

令$\dfrac{d}{dR}S^2(R)=\dfrac{1}{16}(-4R^3+4(a^2+b^2+c^2)R+8abc)=0$

$\Rightarrow R^3-(a^2+b^2+c^2)R-2abc=0$

而二次微分$\dfrac{1}{16}(-12R^2+4(a^2+b^2+c^2))<0$

所以，當 R 爲 $R^3-(a^2+b^2+c^2)R-2abc=0$ 的根時四邊形 $ABCD$ 面積最大。

對於三次方程式，以我們目前所學並無法去解，因此我們去搜尋資料，知道有**Cardano 公式**可以解三次方程式，但得到此結果，原本我們不知其意義爲何？當我們去尋找資料時，我們恰好發現在**蔡聰明教授所著—數學的發現趣談**裡提到：「西元 1992 年大學聯考自然組有一考題如下：在右圖中，$\overline{AD}$ 爲圓之直徑，B、C 爲圓周上兩點。$a=\overline{AB}$，$b=\overline{BC}$，$c=\overline{CD}$，$d=\overline{AD}$，試證 d 爲方程式 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 之一根。」，也就是我們的研究中，當 R 使得四邊形面積最大時，R 爲其外接圓的直徑。

接著，我們再來觀察**研究 9** 中的 ΔABC 中 a、b 確定則第三邊 $R=\sqrt{a^2+b^2}$ 時 ΔABC 面積最大，此時 ΔABC 爲直角三角形，R 爲斜邊，也就是外接圓的直徑。因此我們做了底下的推測：

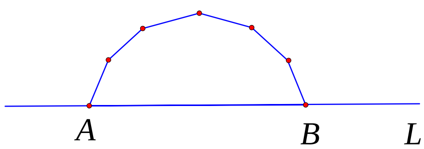
推測 6：是否 *n* 邊形當確定 *n*-1 邊的長度時，第 *n* 邊的長度爲此 *n* 邊形外接圓的直徑時面積會最大？

在證明之前，我們利用 GSP 去模擬，發現模擬的結果與我們的推論是相同的，因此我們做了底下的研究：

研究 11：任意 *n* 邊形當確定 *n*-1 邊的長度時，第 *n* 邊的長度爲此 *n* 邊形外接圓的直徑時面積爲最大。

證明：令 n 邊形面積爲 S_n

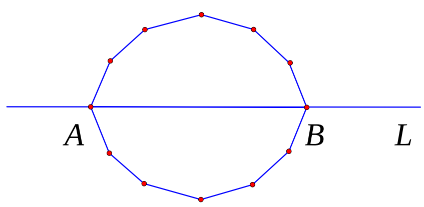
當 n 邊形確定 n-1 邊的長度時，令第 n 邊在直線 L 上之 $\overline{AB}$，如圖二十九



圖二十九

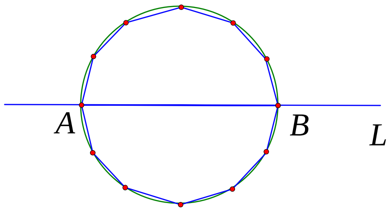
我們以 L 爲對稱軸，作其 n-1 邊的對稱圖形，如圖三十
此時圍成一個 2n-2 邊形，
令此 2n-2 邊形面積爲 S_{2n-2}

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}S_{2n-2}$，



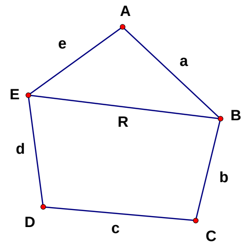
圖三十

$\because S_{2n-2}$ 面積最大時爲圓內接 $2n$-2 邊形，且此 $2n$-2 邊形又是對稱圖形，如圖三十一
$\therefore S_n$ 面積最大時，爲圓內接 n 邊形，並第 n 邊的長度爲此 n 邊形外接圓的直徑。



圖三十一

我們回到討論圓內接五邊形的面積，五邊形 $ABCDE$ 面積 $=\Delta ABE$ 面積+四邊形 $BCDE$ 面積(如圖三十二)，令 $\overline{BE}=R$，我們發現因爲 R 牽涉了 ΔABE 及四邊形 $BCDE$，因此 R 已無法單純爲其個別的外接圓的直徑。若 R 固定時四邊形 $BCDE$ 面積最大爲圓內接四邊形 $\sqrt{(s-R)(s-b)(s-c)(s-d)}$，其中 $s=\dfrac{R+b+c+d}{2}$，所以當 R 固定時五邊形



圖三十二

$ABCDE$ 面積最大爲 $\sqrt{s_1(s_1-R)(s_1-a)(s_1-e)}+\sqrt{(s_2-R)(s_2-b)(s_2-c)(s_2-d)}$，其中 $s_1=\dfrac{R+e+a}{2}$、$s_2=\dfrac{R+b+c+d}{2}$，因爲曾經接觸過微積分，本嘗試著利用微分求出 R 爲何值時五邊形 $ABCDE$ 面積最大，但因所學有限，微分之後的式子對我們來說太複雜而作罷。若往後對微積分能再熟悉一些，希望能對此再做進一步的研究，因爲我們發現圓內接六邊形也可以看成兩個圓內接四邊形的和，似乎可以用相同的想法解決，若可利用微積分來解的話，或許就可得我們想要的結果。

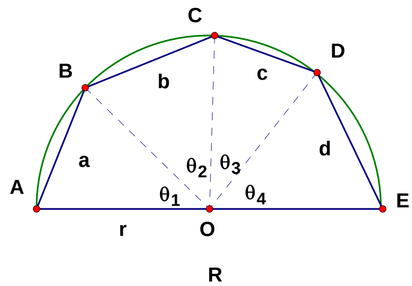
雖然我們仍無法推得圓內接五邊形的面積公式，我們試著縮小範圍再研究。

由**研究 11** 時我們知道任意 n 邊形當確定 n-1 邊的長度時，第 n 邊的長度爲此 n 邊形外接圓的直徑時面積爲最大。因此我們試著針對五邊形若一邊爲圓內接五邊形的直徑時的面積大小再去研究，終於讓我們得到一個一般式的公式。

研究 12：若圓內接五邊形 $ABCDE$ 的邊長分別爲 a、b、c、d、R，其中 R 爲外接圓之直徑，如圖三十三，則五邊形 $ABCDE$ 面積爲

$$\frac{1}{4}\sqrt{[R^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]^2+2R^4-2(a^4+b^4+c^4+d^4)}$$

證明：令圓內接五邊形面積爲 S，且設外接圓半徑爲 $r=\dfrac{R}{2}$，則



圖三十三

$$S=\frac{1}{2}r^2(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$$

$$S^2=\frac{1}{4}r^4(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\sin^2\theta_4+2\sin\theta_1\sin\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_3+$$
$$2\sin\theta_1\sin\theta_4+2\sin\theta_2\sin\theta_3+2\sin\theta_2\sin\theta_4+2\sin\theta_3\sin\theta_4)\cdots\cdots(1)$$

由餘弦定理知

$$a^2=r^2+r^2-2r^2\cos\theta_1=2r^2-2r^2\cos\theta_1$$

同理，$b^2=2r^2-2r^2\cos\theta_2$、$c^2=2r^2-2r^2\cos\theta_3$、$d^2=2r^2-2r^2\cos\theta_4$

將此四項相加並整理後得

$$8r^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)=2r^2(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4)$$

$$\begin{aligned}&(8r^2-(a^2+b^2+c^2+d^2))^2\\&=4r^4(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3+\cos^2\theta_4+2\cos\theta_1\cos\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_3+\\&\quad 2\cos\theta_1\cos\theta_4+2\cos\theta_2\cos\theta_3+2\cos\theta_2\cos\theta_4+2\cos\theta_3\cos\theta_4)\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

(1)×16－(2) 並利用三角函數積化和差化簡得

$$\begin{aligned}&16S^2-(8r^2-(a^2+b^2+c^2+d^2))^2\\&=4r^4(\sin^2\theta_1-\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_2-\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_3-\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_4-\cos^2\theta_4-2\cos(\theta_1+\theta_2)-\\&\quad 2\cos(\theta_1+\theta_3)-2\cos(\theta_1+\theta_4)-2\cos(\theta_2+\theta_3)-2\cos(\theta_2+\theta_4)-2\cos(\theta_3+\theta_4))\end{aligned}$$

$\because \sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin^2\theta-1$ 、 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=180^0$ 且 $\cos\theta=-\cos(180^0-\theta)$

$$\Rightarrow 16S^2-(8r^2-(a^2+b^2+c^2+d^2))=4r^4(2(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\sin^2\theta_4)-4)$$

又 $r^4\sin^2\theta_1=a^2r^2-\frac{1}{4}a^4$ (為不使本證明過於繁雜，詳見附註二)

$$\begin{aligned}&\therefore 16S^2-(8r^2-(a^2+b^2+c^2+d^2))^2=8r^2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(a^4+b^4+c^4+d^4)-16r^4\\&16S^2=(8r^2-(a^2+b^2+c^2+d^2))^2+8r^2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(a^4+b^4+c^4+d^4)-16r^4\\&\quad=48r^4+(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-8r^2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(a^4+b^4+c^4+d^4)\\&\quad=3R^4+(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2R^2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(a^4+b^4+c^4+d^4)\\&\quad=[R^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]^2+2R^4-2(a^4+b^4+c^4+d^4)\\&\therefore S=\frac{1}{4}\sqrt{[R^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]^2+2R^4-2(a^4+b^4+c^4+d^4)}\end{aligned}$$

當我們試著去推廣至六邊形時，我們遇到了麻煩，或許是我們三角函數還不夠熟練，我們無法將其化簡至一簡單的式子，因此我們不在此附上。

對於圓內接 n 邊形面積公式，我們一直期待能推導出一個一般式，但以我們目前所學似乎是有難度的。

在之前推測 5，我們推測圓內接五邊形面積為 $S=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}}$ ，雖然後來利用 GSP 模擬時發現是錯誤的，但或許可以用來當作是圓內接五邊形面積的近似值。因此，若我們用相同的想法，為了要保持面積與邊長關係為 2 次式，且邊長順序不影響面積的最大值，去推測圓內接六邊形的面積公式，我們推測圓內接六邊形若邊長為 a、b、c、d、e、f 的面積為 $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)(s-f)}{s^2}}$，這裡 $s=\frac{a+b+c+d+e+f}{2}$ ，接著我們對圓內接 n 邊形的面積一樣做近似值的推測。

推測 7：當 n 邊形的邊長分別爲 a_1 、 a_2 、⋯、 a_n ，且 $s=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$ ，則圓內接 n 邊形面積的近似値爲 $S_1(n)=\sqrt{\dfrac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{s^{n-4}}}$

此近似値 S_1 與正確圓內接 n 邊形面積的比値將在底下的表格二中呈現，

邊數	$S_1(n)$ 與正 N 邊形的比值	$S_1(n)$ 與圓內接 N 邊形的比值範圍
3	1	1
4	1	1
5	1.01300	1~1.01300
6	1.02640	1~1.02640
7	1.03828	1~1.03828
⋯	⋯	⋯
20	1.10450	1~1.10450
⋯	⋯	⋯

(表二)

從表格中我們發現，當 n=3、4 時 $S_1(3)$ 、 $S_1(4)$ 等於 **Heron** 公式及 **Brahmagupta** 公式，因此公式完全正確，而當 $n\geq 5$ 時，公式開始有誤差，我們所算出來的面積都比正確的面積來的大，n 越大時誤差越大，而且當爲正 n 邊形時誤差最大。

既然與正 n 邊形的誤差最大，因此我們試著推導出正 n 邊形的面積公式，並希望能對公式有所修正。

探討 9：若正 n 邊形的邊長爲 a，其內角爲 θ ，則正 n 邊形面積爲 $\dfrac{na^2}{4}\tan\dfrac{\theta}{2}$ 。

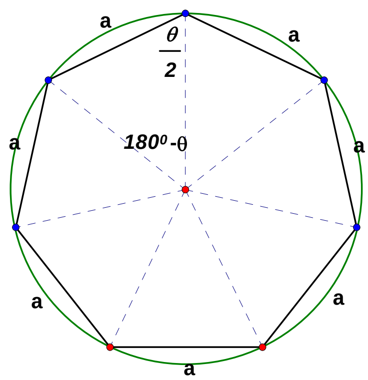
證明：設正 n 邊形外接圓的半徑爲 r，如圖三十四

由正弦定理可得 $\dfrac{r}{\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{a}{\sin\theta}$ $(\sin(180^0-\theta)=\sin\theta)$

利用倍角性質得 $\dfrac{r}{\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow r=\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$

正 n 邊形面積： $n\times\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$



圖三十四

$$=\frac{n}{2}\left(\frac{a}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{n}{4}a^2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{n}{4}a^2\tan\frac{\theta}{2}$$

與正 n 邊形的面積的公式比較後，我們對近似值公式稍作修正，我們取一修正常數 K 使得近似值公式修正為

$$S_2(n)=K\sqrt{\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{s^{n-4}}}$$

研究 13：若正 n 邊形的邊長為 a，其內角為 θ，圓內接 n 邊形面積近似值的公式修正常數 $K=\sqrt{\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}}\tan\frac{\theta}{2}$

推導過程：正 n 邊形的邊長為 a，則 $s=\frac{na}{2}$，且

$$S_2(n)=K\sqrt{\frac{(s-a)(s-a)\cdots(s-a)}{s^{n-4}}}$$

$$=K\sqrt{\frac{1}{16}\frac{(n-2)^n a^n}{n^{n-4}a^{n-4}}}$$

$$=\frac{Ka^2}{4}\sqrt{\frac{(n-2)^n}{n^{n-4}}}$$

令 $\frac{Ka^2}{4}\sqrt{\frac{(n-2)^n}{n^{n-4}}}=\frac{na^2}{4}\tan\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow K=\sqrt{\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}}\tan\frac{\theta}{2}$$

所以我們得到修正的圓內接 n 邊形面積的近似值公式為

$S_2(n)=\sqrt{\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}}\tan\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{s^{n-4}}}$，其中 θ 為正 n 邊形之一內角角度。

若正確圓內接 n 邊形面積爲 $S(n)$ ，比較 $S_1(n)$ 、 $S_2(n)$ 及 $S(n)$ 的公式，我們發現 $S_1(3)=S_2(3)=S(3)$ ，且 $S_1(4)=S_2(4)=S(4)$ 。

同樣地，我們做了 $S_2(n)$ 與正確圓內接 n 邊形面積的比，首先我們先固定(n-1)邊等長，第 n 邊邊長改變長度，如下表格三、四。

邊數 / 邊長比	5	6	7	8
10：1	0.99077	0.99027	0.99131	0.99248
10：2	0.99350	0.99295	0.99360	0.99438
10：3	0.99554	0.99503	0.99541	0.99591
10：4	0.99074	0.99662	0.99683	0.99713
10：5	0.99813	0.99781	0.99791	0.99809
10：6	0.99889	0.99868	0.99873	0.99881
10：7	0.99940	0.99928	0.99930	0.99933
10：8	0.99972	0.99967	0.99967	0.99967
10：9	0.99989	0.99988	0.99988	0.99986

表三

邊數 / 邊長比	9	10	20
10：1	0.99359	0.99449	0.99826
10：2	0.99518	0.99582	0.99865
10：3	0.99647	0.99692	0.99898
10：4	0.99751	0.99782	0.99925
10：5	0.99834	0.99853	0.99948
10：6	0.99896	0.99908	0.99966
10：7	0.99942	0.99948	0.99979
10：8	0.99972	0.99975	0.99989
10：9	0.99989	0.99990	0.99994

表四

以上因爲我們固定了(n-1)邊等長，只改變第 n 邊邊長，因此 $S_2(n)$ 非常接近實際面積。我們持續做了很多的模擬，不斷的改變邊長，因表格過多不便完全呈現，因此我們整理其比值範圍如下表五：

邊數	$S_2(n)$ 與正 N 邊形的比值	$S_2(n)$ 與圓內接 N 邊形的比值範圍
3	1	1
4	1	1
5	1	0.98717~1
6	1	0.97428~1
7	1	0.96313~1
……	……	……
20	1	0.90542~1
……	……	……

表五

修正後的公式 $S_2(n)$ 因爲是利用正 n 邊形去修正的，因此與正 n 邊形皆無誤差，而從表格中發現 $S_2(n)$ 皆小於或等於正確值，當 n 邊形的形狀近似於退化成($n-k$)邊形 $(1 \le k \le n-3)$ ，且 k 越接近 $n-3$ 時誤差越大，也就是越退化成三角形時誤差越大。

其實修正後的公式 $S_2(n)$ ，若 k 不要接近 $n-3$ ，就算 n 很大，其誤差都在 0.01~0.02 以內，我們覺得這是個蠻精確近似值。

而由上面兩表，我們發現 $S_1(n)$ 比正確圓內接 n 邊形面積大，而 $S_2(n)$ 比正確圓內接 n 邊形面積小，因此 $S_2(n) \leqq S(n) \leqq S_1(n)$ 。

3. *n* 邊形固定邊長之極小面積

在討論極小面積時，藉由實際操作我們知道邊長的順序對我們的極小面積是有影響的，並且我們做了以下的推論：

由等周定理知道，當周長固定時，以圍成正 n 邊形面積最大，且 n 越大時面積越大。反過來說，當 n 越接近 3，或越趨近於一直線時，面積越小，且由我們的**研究 5** 知 n 邊形退化成三角形其一邊長越接近 $\frac{1}{2}$ 周長時面積越小，但因 n 邊形當我們確定將某些邊退化成一直線爲三角形的一邊時，三角形的另兩邊並未被同時確定，因此，我們知道另一邊的邊長亦越接近 $\frac{1}{2}$ 周長，而剩下的一邊越小，則面積越小。

直觀上，我們以上的推論是正確的，但以我們目前所學無法給較好的證明，但在實際操作的過程中我們得到了較好的尋找極小面積的方法(目前並無證明)，步驟如下：

1. 找出 n 邊形的最大邊，並以最大邊爲基準向兩邊相鄰邊依序累加 k 個邊，使得此 k 個邊和小於或等於 $\frac{1}{2}$ 周長，但加上第 k+1 邊時大於 $\frac{1}{2}$ 周長。令此 k 個邊和爲 a_k ，若 a_k 等於 $\frac{1}{2}$ 周長則此 n 邊形面積極小值趨近於 0。
2. 若 a_k 小於 $\frac{1}{2}$ 周長，找出上述 k 個邊的兩側相鄰邊之最小邊，令其爲 b。
3. 令剩餘之 $n-k-1$ 邊和爲 c_{n-k-1} 。
4. 則 n 邊形面積極小值會趨近於 $\sqrt{s(s-a_k)(s-b)(s-c_{n-k-1})}$

例：邊長爲 2、3、5、4、3、3、2 的七邊形，令$a_1 = 2$、$a_2 = 3$、$a_3 = 5$、$a_4 = 4$、$a_5 = 3$、$a_6 = 3$、$a_7 = 2$、$s = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{2} = 11$，以$a_3$爲基準邊，又 $a_1 + a_2 + a_3 = 10 < 11$、$a_2 + a_3 + a_4 = 12 > 11$，所以取$a_1 + a_2 + a_3$作爲最長邊，再找$a_7$當作最短邊，其餘當作第三邊，則此七邊形面積極小值爲邊長是 $10(a_1 + a_2 + a_3)$、$2(a_7)$、$10(a_4 + a_5 + a_6)$的三角形，面積爲：

$\sqrt{s(s-(a_1+a_2+a_3))(s-a_7)(s-(a_4+a_5+a_6))}$。

以上的尋找面積極小值的方法，礙於目前所學尚少，且研究面積的極小值時間太短，因此無法給予有利的論證來支持此方法是正確的，甚爲可惜。

伍、 結論

一、 假設四邊形 *ABCD* 四邊長爲 *a*、*b*、*c*、*d*，且其中一角爲α，其對角爲β，則四邊形 *ABCD* 的面積爲$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}$，其中$s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$。(Bretschneider 公式)

二、 四邊形 *ABCD* 爲圓內接四邊形時面積最大爲$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。(Brahmagupta 公式)

三、 任意四邊形在給定四邊邊長的情況下，必存在一外接圓，使得此四邊形爲此圓之圓內接四邊形。

四、 當圓內接四邊形的邊長分別爲 ***a***、***b***、***c***、***d***，且 ***a***、***b*** 夾角爲θ，$0° < \theta < 180°$，則 $\theta = \arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{(2ab+2cd)}$

五、 推測任意兩 ***n*** 邊形需要$(2n-3)$個要素，以證明兩 ***n*** 邊形全等。

六、 任意 ***n*** 邊形若固定其 ***n*** 邊的邊長時，必存在一外接圓使得此 ***n*** 邊形爲圓內接 ***n*** 邊形。

七、 任意 ***n*** 邊形若固定其 ***n*** 邊的邊長時，不論 ***n*** 邊形邊長的順序如何改變，其外接圓皆爲半徑相同的圓。

八、 若 ***n*** 邊形固定其 ***n*** 邊的邊長時，當此 ***n*** 邊形爲圓內接 ***n*** 邊形時面積最大。

九、 若Δ***ABC*** 已知兩邊長 ***a***、***b***，則第三邊$R = \sqrt{a^2+b^2}$時Δ***ABC*** 面積最大。

十、 若四邊形 ***ABCD*** 已知三邊長 ***a***、***b***、***c***，則第四邊R爲$R^3 - (a^2+b^2+c^2)R - 2abc = 0$的根時的圓內接四邊形 ***ABCD*** 面積最大。

十一、 任意 ***n*** 邊形當確定 ***n*-1** 邊的長度時，第 ***n*** 邊的長度爲此 ***n*** 邊形外接圓的直徑時面積爲最大。

十二、 若圓內接五邊形 ***ABCDE*** 的邊長分別爲a、b、c、d、R，其中R爲外接圓之直

徑，則五邊形 ***ABCDE*** 面積爲

$$\frac{1}{4}\sqrt{[R^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]^2+2R^4-2(a^4+b^4+c^4+d^4)}$$

十三、 推測當 ***n*** 邊形的邊長分別爲 a_1 、 a_2 、⋯、 a_n ，且 $s=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$ ，則圓內接 ***n*** 邊形面積的近似值爲

$$S_1(n)=\sqrt{\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{s^{n-4}}} \text{ 、 } S_2(n)=\sqrt{\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}}\tan\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{s^{n-4}}}$$

其中 θ 爲正 ***n*** 邊形之一內角角度。

十四、 若正確圓內接 ***n*** 邊形面積爲 $S(n)$ ，則 $S_2(n)\leqq S(n)\leqq S_1(n)$ 。

十五、 若 ***n*** 邊形固定其 ***n*** 邊的邊長時，當此 ***n*** 邊形退化趨近於三角形時面積越小。

十六、 透過實際操作得到了較好的尋找面積極小值的方法。

陸、 未來展望

五邊形以上的多邊形，要單純以邊長及夾角來導出一般公式實在過於複雜，就算能導出來，實用價值也不高。但，n 邊形之最大面積一圓內接 n 邊形應有個較漂亮的公式。當往後對幾何的性質能更進一度了解時，希望能有機會推導出圓內接 n 邊形之正確公式。

另外，對於 n 邊形的面積極小值，礙於研究時間太短，所討論太少，甚爲可惜，希望以後能有機會最更進一步的探討。

柒、 參考資料

一、國中數學第四冊一康軒出版社。

二、國中數學第五冊一康軒出版社。

三、高中數學第一冊一翰林出版社。

四、蔡聰明(民 89)。數學的發現趣談。台北市，三民書局。

五、張海潮(民 92 年 12 月)。數學傳播，27 卷 4 期。

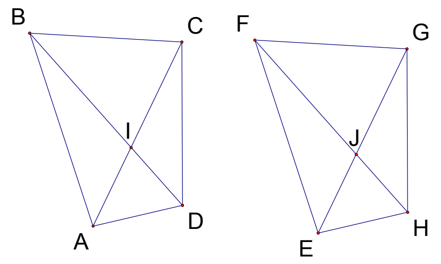
六、王文光(民 93 年 12 月)。數學傳播，28 卷 4 期。

七、陳敏皓。三次方程式的歷史溯源，蘭陽女中。

八、維基百科。

捌、 附註

一、 四邊形若以 **S** 代表邊、**A** 代表角、**L** 代表對角線、**R** 代表直角，若符合
SSSSA、**SASAS**、**ASSSA**、**ASASA**、**SLSLS**、**RSLSS**、**SASSL**、**RSLSR**、**LSLSR**、**RSLAS**
以上性質時，兩四邊形全等，或者可說確定唯一四邊形。我們只針對 **SSSSA**、**SASAS**、**SLSLS**、**RSLSS** 證明，其餘因證明方法類似，在此便不再贅述。**(**底下證明之圖形皆如圖三十五**)**



圖三十五

1. SSSSA 全等：若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 、 $\overline{AD}=\overline{EH}$ 、 $\overline{BC}=\overline{FG}$ 、 $\overline{CD}=\overline{GH}$ 且 $\angle A=\angle E$ ，則

四邊形 ***ABCD*** $\cong$ 四邊形 ***EFGH***。

證明：在 ΔABD 與 ΔEFH 中，

$\because \overline{AB}=\overline{EF}$ 、 $\overline{AD}=\overline{EH}$ 、 $\angle A=\angle E$ ，則 $\Delta ABD\cong\Delta EFH\,(SAS)$ ，$\therefore \overline{BD}=\overline{FH}$ 。

又在 ΔBCD 與 ΔFGH 中，

$\because \overline{BC}=\overline{FG}$ 、 $\overline{CD}=\overline{GH}$ 、 $\overline{BD}=\overline{FH}$ ，則 $\Delta BCD\cong\Delta FGH\,(SSS)$

$\therefore ABCD\cong EFGH$ 　故得證。

2. SASAS 全等：若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 、 $\angle A=\angle E$ 、 $\overline{AD}=\overline{EH}$ 、 $\overline{CD}=\overline{GH}$ 、 $\angle D=\angle H$ ，則

四邊形 ***ABCD*** $\cong$ 四邊形 ***EFGH***。

證明：在 ΔABD 與 ΔEFH 中，

$\because \overline{AB}=\overline{EF}$ 、 $\angle A=\angle E$ 、 $\overline{AD}=\overline{EH}$ ，則 $\Delta ABD\cong\Delta EFH\,(SAS)$

又在 ΔACD 與 ΔEGH 中，

$\because \overline{AD}=\overline{EH}$ 、 $\overline{CD}=\overline{GH}$ 、 $\angle D=\angle H$ ，則 $\Delta ACD\cong\Delta EGH\,(SAS)$

$\overline{BC}=\overline{FG}$ ，所以 $ABCD\cong EFGH\,(SSSSA)$ 　故得證。

3. SLSLS 全等：若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 、 $\overline{BD}=\overline{FH}$ 、 $\overline{AD}=\overline{EH}$ 、 $\overline{CD}=\overline{GH}$ 、 $\overline{AC}=\overline{EG}$ ，則

四邊形 ***ABCD*** $\cong$ 四邊形 ***EFGH***。

證明：在 ΔABD 與 ΔEFH 中，

$\because \overline{AB}=\overline{EF}$ 、 $\overline{BD}=\overline{FH}$ 、 $\overline{AD}=\overline{EH}$ ，則 $\Delta ABD\cong\Delta EFH\,(SSS)$

又在 ΔACD 與 ΔEGH 中，

$\because \overline{AD}=\overline{EH}$ 、 $\overline{CD}=\overline{GH}$ 、 $\overline{AC}=\overline{EG}$ ，則 $\Delta ACD\cong\Delta EGH\,(SSS)$

$\overline{BC}=\overline{FG}$ ，所以 $ABCD \cong EFGH\,(SSSSA)$ 故得證。

4. RSLSS 全等： 若 $\angle A=\angle E=90^\circ$、$\overline{AD}=\overline{EH}$、$\overline{BD}=\overline{FH}$、$\overline{BC}=\overline{FG}$、$\overline{CD}=\overline{GH}$ ，

則四邊形 *ABCD* ≅ 四邊形 *EFGH*。

證明： 在 ΔABD 與 ΔEFH 中，

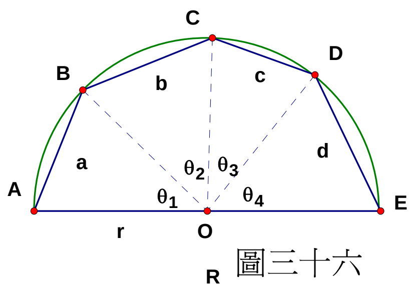
$\because \angle A=\angle E=90^\circ$ 、$\overline{AD}=\overline{EH}$ 、$\overline{BD}=\overline{FH}$ ，則 $\Delta ABD \cong \Delta EFH\,(RHS)$

又在 ΔBCD 與 ΔFGH 中，

$\because \overline{BC}=\overline{FG}$ 、$\overline{CD}=\overline{GH}$ 、$\overline{BD}=\overline{FH}$ ，則 $\Delta BCD \cong \Delta FGH\,(SSS)$

$\therefore ABCD \cong EFGH$ 故得證。

二、 **若圓內接五邊形 *ABCDE* 的邊長分別為 *a*、*b*、*c*、*d*、*R*，其中 *r* 為外接圓之半徑，如圖三十六，則** $r^4\sin^2\theta_1=a^2r^2-\frac{1}{4}a^4$ 、$r^4\sin^2\theta_2=b^2r^2-\frac{1}{4}b^4$ 、$r^4\sin^2\theta_3=c^2r^2-\frac{1}{4}c^4$ 、$r^4\sin^2\theta_4=d^2r^2-\frac{1}{4}d^4$ 。



圖三十六

證明： 由正弦定理得知

$$\frac{a}{\sin\theta_1}=\frac{r}{\sin(90^0-\frac{1}{2}\theta_1)} \Rightarrow r\sin\theta_1=a\cos\frac{\theta_1}{2}$$

又 $\because \dfrac{a}{2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}}=\dfrac{r}{\cos\frac{\theta_1}{2}}$

$\therefore r\sin\frac{\theta_1}{2}=\frac{a}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore r^4\sin^2\theta_1 &= r^2(r\sin\theta_1)^2\\ &= r^2(a\cos\frac{\theta_1}{2})^2\\ &= r^2a^2\cos^2\frac{\theta_1}{2}\\ &= r^2a^2(1-\sin^2\frac{\theta_1}{2})\\ &= a^2r^2-a^2r^2\sin^2\frac{\theta_1}{2}\\ &= a^2r^2-a^2(\frac{a}{2})^2\\ &= a^2r^2-\frac{1}{4}a^4\end{aligned}$$

故得證。

【評語】030424

本作品討論給定任一多邊形邊長所能圍成最大、最小面積的凸多邊形的方法。推演具最大面積為圓內接多邊形，但最小面積之凸多邊形，可尋找求面積最大下限之求法。