中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030422

誰最「數」配

學校名稱：臺中縣立新光國民中學

作者：	指導老師：
國一 邱弘毅	陳深書
國二 許庭禎	吳嵐婷
國一 林彥廷	
國二 李育丞	

關鍵詞：數列、整數分組、對稱

摘要

我們的研究主題是「若有連續 n 個數字（n∈N），要如何將這些數平分成 k 組，且使各組的數字和皆相同？」研究重點在於嘗試從列舉法得到的數據中，找到 n 與 k 的規律，並且找到最快且最方便的分組方法，研究方向朝「數字個數增加」及「次方數提高」兩個面向進行。最後，我們成功找出數字分組的規則和公式。

壹、研究動機

放假時，爸爸媽媽帶我們全家到陽明山賞花。走著走著，看到了一個大花鐘，令人目不暇給，也讓我想到個有趣的數學題目。「若是把一到十二，每個數字前都填一個加號或減號，使結果變爲零，那共有多少填法呢？」到學校後，我告訴同學這個問題，並一起討論。我們抱著求知的態度，去向老師請教。於是，我們展開了一場奇妙的數學旅程。

貳、研究目的

一、1~n 分成兩組（每組個數相同與個數不同），其和相等之分法。
二、1~R^2 分成 R 組，其和相等之分法。
三、1^2~n^2 分成兩組與三組，其和相等之分法。
四、1^3~n^3 分成兩組，其和相等之分法。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、工程用計算機、人腦、Microsoft Word

肆、研究過程與方法

我們最初的題目是：「若是把 1～12，每個數字前都填一個加號或減號，使結果變成零，那共有多少填法呢？」，一開始先考量正負號擺放位置與數字的關係，再分類討論所有情形，可是組合情況太複雜了，只好朝另一角度切入思考。後來，才發現若要使結果變成零，可以先把 1～12 這 12 個數平分成 2 組，且 2 組數字和相同，接著，讓其中一組皆爲正數，另一組皆爲負數，正負抵消剛好使結果爲零。於是，我們接下來的研究就開始尋找數字和相同分組的規律，並嘗試推廣找尋，當 n 的值增加與次方數提高時的規律性。研究方向朝「數字個數增加」及「次方數提高」兩個面向進行。

一、1~n 分成兩組（每組個數相同與個數不同），其和（S/2）相等之探討：

(一)規律解的討論：

從 n 的限制討論起，我們知道 1＋2＋3＋4＋……＋n＝$\frac{n(n+1)}{2}$（梯形公式），又因爲可以分成兩組，

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2}$ 必須為 2 的倍數

即 n(n+1)為 4 的倍數

$\because\ (n, n+1)=1$

$\therefore$ n 是 4 的倍數或 n+1 是 4 的倍數

$\Rightarrow$n＝4、8、12、16……、(4t) 或 n＝3、7、11、15……、(4t－1)

$\boxed{\text{證明：}(n, n+1)=1}$

假設$(n, n+1)=d>1$(沒有互質)

$$\begin{cases} d \mid n+1 \\ d \mid n \end{cases}$$

$\Rightarrow$d | (n+1)－n

$\Rightarrow$d | 1(和假設矛盾)

因此 n+1 與 n 互質

所以，我們從 n=4t 與 n=4t－1 兩方面著手。

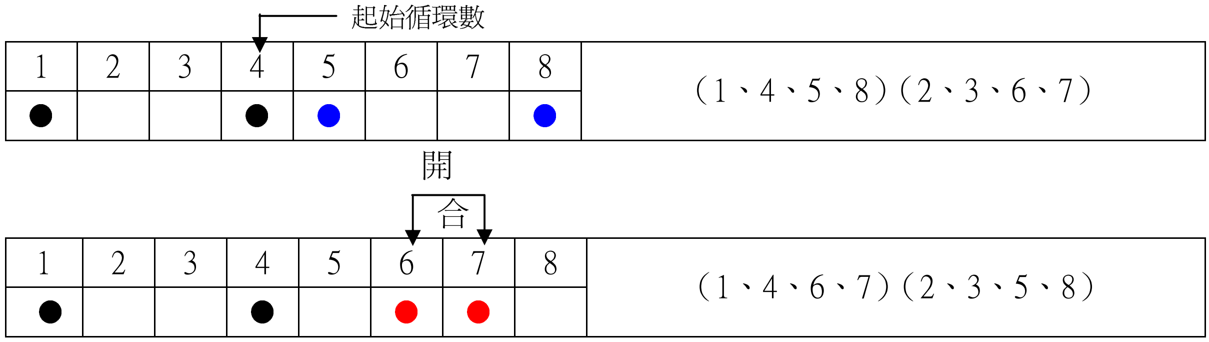
定義 1：

已知有從 1 開始的連續 n 個數分別為 1、2、3、……、n（n∈N），將這些數平分成 2 組，而 1、2、3…n 的數字總和為 S，分成 2 組，一邊和為 S/2，把一種組合的情形，稱為**一組解**。

定義 2：

已知有從 1 開始的連續 n 個數分別為 1、2、3、……、n（n∈N），若有一 n 值能將此 n 個數的總和平分成 2 組，使得每組個數相同，且從此 n 值開始往後延伸的解皆呈現某種規律的循環，則稱此數為**起始循環數**（參考下方圖示）。

解釋名詞：從起始循環數之後每 4 個數為一節，解的情況出現對稱關係，如下圖所示，稱為**開合**。



首先，採用列舉法，在 1～n 的總和(S)，可以平分成 2 組的情況下，從較小的 n 值開始討論，並觀察平分成 2 組（數字和相同），每組有 n/2 個數字的情形，最後，再逐漸增大 n 的值，

尋找符合的情況。過程中，發現符合要求的解，數量很多，透過觀察法，排除掉沒有規律性的特殊解，並將有規律性的解做整理，希望可以推廣到一般化的模式。
以下分成兩種類型說明：

1. n 是偶數(4t)：

假設$a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=3$、……、$a_m=4t$，而$\langle a_s\rangle$爲一個等差數列。由等差中項的概念，可知$a_m+a_1=a_{m-1}+a_2=\cdots\cdots=a_{\frac{m}{2}+1}+a_{\frac{m}{2}}=4t+1$，則每 2 項和爲一定値，如表 1-１所示，我們可以用 1～4 的解爲基本模式，以 4k（n∈N）爲週期，從起始循環數向後延伸，每 4 個數爲一節，以開合的方式填入，如表 1-1、１-2 所示，即可順利求解。

2. n 是奇數(4t-1)：

把 0 加入 1～4t－1 中，使其成爲 4t 個連續整數，即可仿照前段（n 是偶數(4t)）的作法，平分成 2 組，此時，各組的數字和相同，但個數不同（去掉零），如表 1-3、1-4 所示。

	項	1～n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
一	1	1~4	●			●												
二	1	1~8	●			●	🔵			🔵								
	2		●			●		🔴	🔴									
三	1	1~12	●			●	🔵			🔵	🔵			🔵				
	2		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴					
	3		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵				
	4		●			●		🔴	🔴			🔴	🔴					
四	1	1~16	●			●	🔵			🔵	🔵			🔵	🔵			🔵
	2		●			●	🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴	
	3		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴		🔵			🔵
	4		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴	
	5		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵
	6		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵		🔴	🔴	
	7		●			●		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵
	8		●			●		🔴	🔴			🔴	🔴			🔴	🔴	

1~n 分成兩組（個數相同）　表 1-1

<table>
<tr><th></th><th>項</th><th>1～n</th><th>S</th><th>S/2</th><th>平分 2 組情況（S/2）（S/2）</th><th colspan="2">解的個數</th></tr>
<tr><td>一</td><td>1</td><td>1～4</td><td>10</td><td>5</td><td>（1、4）（2、3）</td><td colspan="2">2^0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">二</td><td>1</td><td rowspan="2">1～8</td><td rowspan="2">36</td><td rowspan="2">18</td><td>（1、4、5、8）（2、3、6、7）</td><td rowspan="2" colspan="2">2^1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>（1、4、6、7）（2、3、5、8）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">三</td><td>1</td><td rowspan="4">1～12</td><td rowspan="4">78</td><td rowspan="4">39</td><td>（1、4、5、8、9、12）
（2、3、6、7、10、11）</td><td rowspan="4" colspan="2">2^2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>（1、4、5、8、10、11）
（2、3、6、7、9、12）</td></tr>
<tr><td>3</td><td>（1、4、6、7、9、12）
（2、3、5、8、10、11）</td></tr>
<tr><td>4</td><td>（1、4、6、7、10、11）
（2、3、5、8、9、12）</td></tr>
<tr><td rowspan="8">四</td><td>1</td><td rowspan="8">1～16</td><td rowspan="8">136</td><td rowspan="8">68</td><td>（1、4、5、8、9、12、13、16）
（2、3、6、7、10、11、14、15）</td><td rowspan="8" colspan="2">2^3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>（1、4、5、8、9、12、14、15）
（2、3、6、7、10、11、13、16）</td></tr>
<tr><td>3</td><td>（1、4、5、8、10、11、13、16）
（2、3、6、7、9、12、14、15）</td></tr>
<tr><td>4</td><td>（1、4、5、8、10、11、14、15）
（2、3、6、7、9、12、13、16）</td></tr>
<tr><td>5</td><td>（1、4、6、7、9、12、13、16）
（2、3、5、8、10、11、14、15）</td></tr>
<tr><td>6</td><td>（1、4、6、7、9、12、14、15）
（2、3、5、8、10、11、13、16）</td></tr>
<tr><td>7</td><td>（1、4、6、7、10、11、13、16）
（2、3、5、8、9、12、14、15）</td></tr>
<tr><td>8</td><td>（1、4、6、7、10、11、14、15）
（2、3、5、8、9、12、13、16）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">五</td><td rowspan="2">1
到
2^{t-1}</td><td rowspan="2">1～4t</td><td rowspan="2">$8t^2+2t$</td><td rowspan="2">$4t^2+t$</td><td>（1、4、5、8………4t－3、4t）
、
、
（2、3、6、7………4t－2、4t－1）</td><td>$\frac{2^{t-1}}{4}$</td><td rowspan="2">2^{t-1}</td></tr>
<tr><td>（1、4、5、8………4t－2、4t－1）
、
、
、
（2、3、6、7………4t－3、4t）</td><td>$\frac{2^{t-1}}{4}$</td></tr>
</table>

					（1、4、6、7………4t－3、4t） 、 、 、 （2、3、5、8………4t－2、4t－1）	$\frac{2^{t-1}}{4}$	
					（1、4、6、7………4t－2、4t－1） 、 、 、 （2、3、5、8………4t－3、4t）	$\frac{2^{t-1}}{4}$	

1~n 分成兩組（個數相同）　表 1-2

	項	0～n-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
一	1	0~3	●			●												
二	1	0~7	●			●	🔵			🔵								
	2		●			●		🔴	🔴									
三	1	0~11	●			●	🔵			🔵	🔵			🔵				
	2		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴					
	3		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵				
	4		●			●		🔴	🔴			🔴	🔴					
四	1	0~15	●			●	🔵			🔵	🔵			🔵	🔵			🔵
	2		●			●	🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴	
	3		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴		🔵			🔵
	4		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴	
	5		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵
	6		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵		🔴	🔴	
	7		●			●		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵
	8		●			●		🔴	🔴			🔴	🔴			🔴	🔴	

1~ n-1 分成兩組（個數不同）　表 1-3

<table>
<tr><th></th><th>項</th><th>0～n-1</th><th>S</th><th>S/2</th><th>平分 2 組情況(去掉零)</th><th colspan="2">解的個數</th></tr>
<tr><td>一</td><td>1</td><td>0～3</td><td>6</td><td>3</td><td>(3)(1、2)</td><td colspan="2">2^0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">二</td><td>1</td><td rowspan="2">0～7</td><td rowspan="2">28</td><td rowspan="2">14</td><td>(3、4、7)(1、2、5、6)</td><td colspan="2" rowspan="2">2^1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(3、5、6)(1、2、4、7)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">三</td><td>1</td><td rowspan="4">0～11</td><td rowspan="4">66</td><td rowspan="4">33</td><td>(3、4、7、8、11)
(1、2、5、6、9、10)</td><td colspan="2" rowspan="4">2^2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(3、4、7、9、10)
(1、2、5、6、8、11)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(3、5、6、8、11)
(1、2、4、7、9、10)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(3、5、6、9、10)
(1、2、4、7、8、11)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">四</td><td>1</td><td rowspan="8">0～15</td><td rowspan="8">120</td><td rowspan="8">60</td><td>(3、4、7、8、11、12、15)
(1、6、7、10、11、14、15)</td><td colspan="2" rowspan="8">2^3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(1、4、5、 8、9、12、14、15)
(2、3、6、7、10、11、13)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(1、4、5、8、10、11、13)
(2、3、6、7、9 12、14、15)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(1、4、5、8、10、11、14、15)
(2、3、6、7、9、12、13)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(1、4、6、7、9、12、13)
(2、3、 5、8、10、11、14、15)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>(1、4、6、7、9、12、14、15)
(2、3、5、8、10、11、13)</td></tr>
<tr><td>7</td><td>(1、4、6、7、10、11、13)
(2、3、5、8、9、12、14、15)</td></tr>
<tr><td>8</td><td>(1、4、6、7、10、11、14、15)
(2、3、5、8、9、12、13)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">五</td><td rowspan="2">1
到
2^{t-1}</td><td rowspan="2">1～4t</td><td rowspan="2">$8t^2-2t$</td><td rowspan="2">$4t^2-t$</td><td>(3、4、7………4t−4、4−1)
、
、
、
(1、2、5、6………4t−3、4t−2)</td><td>$\frac{2^{t-1}}{4}$</td><td rowspan="2">2^{t-1}</td></tr>
<tr><td>(3、4、7………4t−3、4t−2)
、
、
、
(1、2、5、6………4t−4、4t−1)</td><td>$\frac{2^{t-1}}{4}$</td></tr>
</table>

					（3、5、6………4t－4、4t－1） 、 、 、 （1、2、4、7………4t－3、4t－2）	$\frac{2^{t-1}}{4}$	
					（3、5、6………4t－3、4t－2） 、 、 、 （1、2、4、7………4t－4、4t－1）	$\frac{2^{t-1}}{4}$	

1~n-1 分成兩組（個數不同）　表 1-4

(二) M 圖形的模式化填法：

一開始採用土法煉鋼的精神，把所有符合的解列出時，發現解的分佈情況非常不規則，後來，再把一些解的順序重新調整過之後，整個解的情況居然出現了英文字母 M 的圖形，於是，我們大膽猜測，這種 M 圖形的模式，是否在 1~n（n∈N）時，也會規律性的出現，如果答案是肯定，那麼我們等於是找到了快速求解法，而且填出來解的個數，也會比上述規律解還多。

接著，我們利用表格進行填解，並驗證分成的 2 組數列，數字和是否相同，沒想到居然完全符合，這個發現讓我們非常開心，因為，要找到 1~n（n∈N）分成 2 組數列的解，只要在表格上順著 M 圖形的模式填入記號，如表 1-5～表 1-7 所示，就可以快速找到滿足條件的解，如表 1-8 所示；這些解當中，除了上述找到的規律解之外，還包含其他特殊解。

另外，我們也嘗試利用 M 圖形的模式化填法，將其推廣到 1^2~n^2 與 1^3~n^3 的情況，但是，並無法順利填出，後來，再用列舉法並重新調換順序求解，發現解的分佈情況不太一樣，且 M 圖形的模式比較扁平，換句話說，就是在 n^2 與 n^3 的值越大時，解才填的出來，這個問題有待未來繼續深入研究。

1. 1~4：

項	1	2	3	4
1	●			●

表 1-5

[（1.4）(2.3）]，共 1 組。

2. 1~8：

項	1	2	3	4	5	6	7	8
1	●	●					●	●
2	●		●			●		●
3	●			●	●			●

表 1-6

[（1.2.7.8）(3.4.5.6）]、[（1.3.6.8）(2.4.5.7）]、[（1.4.5.8）(2.3.6.7）]，共 3 組。

結論：從這裡，我們發現解的分佈情況，開始呈現對稱的 M 圖形模式。

3. 1~12：

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●							●	●	●
2	●	●		●					●		●	●
3	●	●			●			●			●	●
4	●	●				●	●				●	●
5	●		●	●					●	●		●
6	●		●		●			●		●		●
7	●		●			●	●			●		●
8	●			●	●			●	●			●
9	●			●		●	●		●			●
10	●				●	●	●	●				●

表 1-7

[（1.2.3.10.11.12）(4.5.6.7.8.9）]、[（1.2.4.9.11.12）(3.5.6.7.8.10）]、[（1.2.5.8.11.12）(3.4.6.7.9.10）]
[（1.2.6.7.11.12）(3.4.5.8.9.10）]、[（1.3.4.9.10.12）(2.5.6.7.8.11）]、[（1.3.5.8.10.12）(2.4.6.7.9.11）]
[（1.3.6.7.10.12）(2.4.5.8.9.11）]、[（1.4.5.8.9.12）(2.3.6.7.10.11）]、[（1.4.6.7.9.12）(2.3.5.8.10.11）]
[（1.5.6.7.8.12）(2.3.4.9.10.11）]，共 10 組。

結論：觀察上圖，我們發現解的分佈情況，呈現對稱的 M 圖形模式，由大 M 逐漸變化成小 M。

4. 1~16：

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	●	●	●	●									●	●	●	●
2	●	●	●		●							●		●	●	●
3	●	●	●			●					●			●	●	●
4	●	●	●				●			●				●	●	●
5	●	●	●					●	●					●	●	●
6	●	●		●	●							●	●		●	●
7	●	●		●		●					●		●		●	●
8	●	●		●			●			●			●		●	●
9	●	●		●				●	●				●		●	●
10	●	●			●	●					●	●			●	●
11	●	●			●		●			●		●			●	●
12	●	●			●			●	●			●			●	●
13	●	●				●	●			●	●				●	●
14	●	●				●		●	●		●				●	●
15	●	●					●	●	●	●					●	●

16	●		●	●	●							●	●	●		●
17	●		●	●		●					●		●	●		●
18	●		●	●			●			●			●	●		●
19	●		●	●				●	●				●	●		●
20	●		●		●	●					●	●		●		●
21	●		●		●		●			●		●		●		●
22	●		●		●			●	●			●		●		●
23	●		●			●	●			●	●			●		●
24	●		●			●		●	●		●			●		●
25	●		●				●	●	●	●				●		●
26	●			●	●	●					●	●	●			●
27	●			●	●		●			●		●	●			●
28	●			●	●			●	●			●	●			●
29	●			●		●	●			●	●		●			●
30	●			●		●		●	●		●		●			●
31	●			●			●	●	●	●			●			●
32	●				●	●	●			●	●	●				●
33	●				●	●		●	●		●	●				●
34	●				●		●	●	●	●		●				●
35	●					●	●	●	●	●	●					●

表 1-8

[（1.2.3.4.13.14.15.16）（5.6.7.8.9.10.11.12）]、[（1.2.3.5.12.14.15.16）（4.6.7.8.9.10.11.13）]
[（1.2.3.6.11.14.15.16）（4.5.7.8.9.10.12.13）]、[（1.2.3.7.10.14.15.16）（4.5.6.8.9.11.12.13）]
[（1.2.3.8.9.14.15.16）（4.5.6.7.10.11.12.13）]、[（1.2.4.5.12.13.15.16）（3.6.7.8.9.10.11.14）]
[（1.2.4.6.11.13.15.16）（3.5.7.8.9.10.12.14）]、[（1.2.4.7.10.13.15.16）（3.5.6.8.9.11.12.14）]
[（1.2.4.8.9.13.15.16）（3.5.6.7.10.11.12.14）]、[（1.2.5.6.11.12.15.16）（3.4.7.8.9.10.13.14）]
[（1.2.5.7.10.12.15.16）（3.4.6.8.9.11.13.14）]、[（1.2.5.8.9.12.15.16）（3.4.6.7.10.11.13.14）]
[（1.2.6.7.10.11.15.16）（3.4.5.8.9.12.13.14）]、[（1.2.6.8.9.11.15.16）（3.4.5.7.10.12.13.14）]
[（1.2.7.8.9.10.15.16）（3.4.5.6.11.12.13.14）]、[（1.3.4.5.12.13.14.16）（2.6.7.8.9.10.11.15）]
[（1.3.4.6.11.13.14.16）（2.5.7.8.9.10.12.15）]、[（1.3.4.7.10.13.14.16）（2.5.6.8.9.11.12.15）]
[（1.3.4.8.9.13.14.16）（2.5.6.7.10.11.12.15）]、[（1.3.5.6.11.12.14.16）（2.4.7.8.9.10.13.15）]
[（1.3.5.7.10.12.14.16）（2.4.6.8.9.11.13.15）]、[（1.3.5.8.9.12.14.16）（2.4.6.7.10.11.13.15）]
[（1.3.6.7.10.11.14.16）（2.4.5.8.9.12.13.15）]、[（1.3.6.8.9.11.14.16）（2.4.5.7.10.12.13.15）]
[（1.3.7.8.9.10.14.16）（2.4.5.6.11.12.13.15）]、[（1.4.5.6.11.12.13.16）（2.3.7.8.9.10.14.15）]
[（1.4.5.7.10.12.13.16）（2.3.6.8.9.11.14.15）]、[（1.4.5.8.9.12.13.16）（2.3.6.7.10.11.14.15）]
[（1.4.6.7.10.11.13.16）（2.3.5.8.9.12.14.15）]、[（1.4.6.8.9.11.13.16）（2.3.5.7.10.12.14.15）]
[（1.4.7.8.9.10.13.16）（2.3.5.6.11.12.14.15）]、[（1.5.6.7.10.11.12.16）（2.3.4.8.9.13.14.15）]
[（1.5.6.8.9.11.12.16）（2.3.4.7.10.13.14.15）]、[（1.5.7.8.9.10.12.16）（2.3.4.6.11.13.14.15）]
[（1.6.7.8.9.10.11.16）（2.3.4.5.12.13.14.15）]，共 35 組。

結論：觀察上圖，我們發現解的分佈情況，除了呈現對稱的 M 圖形模式，由大 M 逐漸變化成小 M 之外，從第 23 項到第 35 項的解，也展現出線對稱的圖形。

(三)M 對稱圖形的模式化填法說明：

1. 若是要寫出 1~n 的所有對稱圖形

1~4

項	1	2	3	4
1	●			●

1~8

項	1	2	3	4	5	6	7	8
1	●	●					●	●
2	●		●			●		●
3	●			●	●			●

·
·
·

推廣到 n 之 M 圖形的模式化填法說明：

項	1	2	3		t	t+1	t+2	t+3		2t	2t+1	2t+2		3t	3t+1	3t+2		4t
1	●	●	●		●	●								●	●	●		●
2	●	●	●		●		●								●	●		●
3	●	●	●	…	●			●	…				…		●	●	…	●
4	●	●	●		●										●	●		●
·	·	·	·		·	·	·	·		·	·	·		·	·	·		·
·	·	·	·		·	·	·	·		·	·	·		·	·	·		·
·	·	·	·		·	·	·	·		·	·	·		·	·	·		·
t-1	●	●	●		●							●			●	●		●
t	●	●	●		●					●	●				●	●		●

2. 先把兩邊各寫上$\frac{n}{4}$個●（第一項不得爲空白）。

以 1~12 爲例

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●							●	●	●
2	●											●
3	●											●
4	●											●
5	●											●
6	●											●

7	●											●
8	●											●
9	●											●
10	●											●

3. 再把兩邊靠中間的兩個◎依序往中間移。

●爲移動前的位置　　　　　　　　●爲上一組●的移動前的位置

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●							●	●	●
2	●	●	●→	●					●	←●	●	●
3	●	●		●→	●			●	←●		●	●
4	●	●			●→	●	●	←●			●	●
5	●											●
6	●											●
7	●											●
8	●											●
9	●											●
10	●											●

4. 等到第一對●都不能再往中間靠時，再把第二對●依序往中間移。

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●							●	●	●
2	●	●		●					●		●	●
3	●	●			●			●			●	●
4	●	●				●	●				●	●
5	●	●→	●→	●					●	←●	←●	●
6	●	●→	●	●→	●			●	←●	●	←●	●
7	●	●→	●		●→	●	●	←●		●	←●	●
8	●											●
9	●											●
10	●											●

5. 等到第二對●都不能再往中間靠時，再把第三對●依序往中間移。

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●							●	●	●
2	●	●		●					●		●	●
3	●	●			●			●			●	●
4	●	●				●	●				●	●
5	●		●	●					●	●		●
6	●		●		●			●		●		●
7	●		●			●	●			●		●
8	●		●→	●→	●			●	←●	←●		●
9	●		●→	●	●→	●	●	←●	●	←●		●
10	●			●→	●	●	●	●	←●			●

6. 以此類推。
7. 等到所有的●都無法向內移動（也就是所有的●都在中間）時，即大功告成。

完成圖如下：

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●							●	●	●
2	●	●		●					●		●	●
3	●	●			●			●			●	●
4	●	●				●	●				●	●
5	●		●	●					●	●		●
6	●		●		●			●		●		●
7	●		●			●	●			●		●
8	●			●	●			●	●			●
9	●			●		●	●		●			●
10	●				●	●	●	●				●

觀察上列對稱圖形之規律，可以發現：

1～8 ，是一個高度爲 3 的 M 圖形，組數共有 3（組）。

1～12，是四個高度分別爲 4、3、2、1（一條直線）的 M 圖形，組數共有 4＋3＋2＋1＝10（組）。

1～16，分成五個部分，分別爲 5＋4＋3＋2＋1＝15，4＋3＋2＋1＝10，3＋2＋1＝6，2＋1＝3，1，最後，再全部加起來，組數共有 15＋10＋6＋3＋1＝35（組），

以此類推，

所以，1～20 解的組數，是$\frac{(1+6)6}{2}$＋15＋10＋6＋3＋1＝56（組），

則，1～n 解的組數，爲$\frac{(\frac{n}{4}+1)(\frac{n}{4}+2)}{2}$＋⋯⋯⋯⋯＋15＋10＋6＋3＋1（組）。

以此類推，採用此 M 圖形的模式化填法，運用至〔4n-1〕的情況，同樣也可成立。

二、1~R^2分成 R 組，其和（S/R）相等之探討：

可將 1~R^2，共R^2個數，依序由左而右，由上而下，填入 R×R 階方陣。即可由對角線魚鉤狀填法得到相對應的一組解。

以 3×3 階爲例

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A	B	C
3+A	3+B	3+C
6+A	6+B	6+C

由上表可知，若依照對角線的規律把數字按照順序填入，即可得到三組和皆爲 A＋B＋C＋9 的情形，故（1、5、9）、（2、6、7）、（3、4、8）爲將 1~3^2分 3 組的解。

以 4×4 階爲例

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

（1、6、11、16）、（2、7、12、13）、（3、8、9、14）、（4、5、10、15）爲將 1~4^2分 4 組的解。

若按照這樣的規律，一直填到 R×R 階方陣，即可以輕易求得「將 1~R^2分成 R 組，其和（S/R）相等」的解。

三、1^2~n^2分成兩組，其和相等之探討。

定義 3：

已知有從1^2開始的連續 n 個數分別爲1^2、2^2、3^2、⋯⋯、n^2（n∈N），將這些數平分成 2 組，而1^2、2^2、3^2、⋯⋯、n^2的數字總和爲 S 分成 2 組，一邊和爲 S/2，把一種組合的情形，稱爲**一組平方解**。

定義 4：

若有一個有別於起始循環數的 n 值，但此數符合起始循環數的所有條件，則稱此數為**第二起始循環數**。若有多於 2 個起始循環數的狀況，則依序稱之為**第三起始循環數**、**第四起始循環數**，…。

解釋名詞：從起始循環數之後每 8 個數為一節，解的情況出現對稱關係，稱為一**開一合**。

起始循環數

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1^2~8^2	●			●		●	●			開				合			
1^2~16^2	●			●		●	●		●			●		●	●		
1^2~16^2	●			●		●	●			●	●		●			●	
										合				開			

表 3-1

在發現 1～n 分成兩組（每組個數相同與個數不同），其和相等之分法，果然存在某種特定開合規律後，我們嘗試把這樣的現象推廣到高次方，期望在現有一次方的解中找出可以讓 1^2～n^2 分成兩組，其和相等的解。

首先，採用觀察法，一項一項逐一檢查，我們發現 1～8 平分成兩組(每組個數相同、和相同)，的 4 組解中，只有（1、4、6、7）、（2、3、5、8）這一組解在我們將每組各項平方後，可以使得 $1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$。而所得到的（$1^2$、$4^2$、$6^2$、$7^2$）、（$2^2$、$3^2$、$5^2$、$8^2$）是唯一在 1^2~8^2 中符合我們條件的平方解。且 8 是平方解的起始循環數。

仿造一次方的部分，我們可以用（1^2、4^2、6^2、7^2）（2^2、3^2、5^2、8^2）這組平方解為基本模式，以 8k（$k\in N$）為週期，從起始循環數向後延伸，每 8 個數為一節，以開合的方式填入，如表 3-1 所示，即可順利求解。

由恆等式

$$t^2+(t+3)^2+(t+5)^2+(t+6)^2=(t^2)+(t^2+6t+9)+(t^2+10t+25)+(t^2+12t+36)=4t^2+28t+70,$$

$$(t+1)^2+(t+2)^2+(t+4)^2+(t+7)^2=(t^2+2t+1)+(t^2+4t+4)+(t^2+8t+16)+(t^2+14t+49)=4t^2+28t+70,$$

可知不論 t 是多少(t 為整數)，只要是 8 個一循環，皆可符合上式。

例如：$9^2+12^2+14^2+15^2=10^2+11^2+13^2+16^2$。

接下來，逐漸增大 n 的值，嘗試尋找其他符合平方解的情況，發現 1～12 平分成兩組(每組個數相同、和相同)，的 29 組解中，只有（1、3、7、8、9、11）、（2、4、5、6、10、12）這一組在將各項平方後，可以使得

$1^2+3^2+7^2+8^2+9^2+11^2=2^2+4^2+5^2+6^2+10^2+12^2$。而所得到的（$1^2$、$3^2$、$7^2$、$8^2$、$9^2$、$11^2$）、（$2^2$、$4^2$、$5^2$、$6^2$、$10^2$、$12^2$）也是唯一在 $1^2\sim12^2$ 中符合我們條件的平方解。

由上說明我們知道 12 是此平方解的第二起始循環數。之後用這組平方解爲基本模式，以 8k（k∈N）爲週期，從第二起始循環數向後延伸，每 8 個數爲一節，以開合的方式填入，參考表 3-1，即可順利求解。

我們發現，以 8 爲起始循環數，8k（k∈N）爲週期的平方解，和以 12 爲起始循環數，8k（k∈N）爲週期的平方解之間呈現一個交錯的循環：

1^2~8^2有 1 組	1^2~12^2有 1 組
1^2~16^2有 2 組	1^2~20^2有 2 組
1^2~24^2有 4 組	1^2~28^2有 4 組
、	、
、	、
、	、
以 8 爲起始循環數，8k（k∈N）爲週期的平方解，所以 n= 8～16 的解呈現開合狀態，以此類推，每一組都會往後各自延伸出 2 組解。	以 12 爲起始循環數，8k（k∈N）爲週期的平方解，所以 n= 12～20 的解呈現開合狀態，以此類推，每一組都會往後各自延伸出 2 組解。

表 3-2

因此，從起始循環數之後，每 8 個數爲一週期填入，參考表 3-1，如果有 R 個一開一合，就會有 2^R 組解，如表 3-2、表 3-3 所示。

由這樣的規律，我們可以依序塡寫出 n= 8、12、16、20、24、28、…的平方解。（參考表 3-2、表 3-3、表 3-4），接下來，觀察組數的規律，我們發現：

1^2~8^2有 1 組解、

1^2~12^2有 1 組解、

1^2~16^2有 2 組解、

1^2~20^2有 2 組解、

1^2~24^2有 4 組解、

1^2~28^2有 4 組解，

由上面的規律看，1^2~32^2、1^2~36^2應有 8 組、1^2~40^2、1^2~44^2應有 16 組。

由以上的推論，我們就可以輕鬆的推斷出 1^2~n^2有幾組平方解了。

項	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1^2~8^2	●			●		●	●																					
1^2~12^2	●		●				●	●	●		●																	
1^2~16^2	●			●		●	●			🔴	🔴		🔵			🔵												
	●			●		●	●		🔵			🔵		🔴	🔴													
1^2~20^2	●		●				●	●	●		●		🔵			🔵		🔴	🔴									
	●		●				●	●	●		●			🔴	🔴		🔵			🔵								
1^2~24^2	●			●		●	●		🔵			🔵		🔴	🔴		🔵			🔵		🔴	🔴					
	●			●		●	●		🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵				
	●			●		●	●			🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴					
	●			●		●	●			🔴	🔴		🔵			🔵		🔴	🔴		🔵			🔵				
1^2~28^2	●		●				●	●	●		●		🔵			🔵		🔴	🔴		🔵			🔵		🔴	🔴	
	●		●				●	●	●		●		🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵
	●		●				●	●	●		●			🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴	
	●		●				●	●	●		●			🔴	🔴		🔵			🔵		🔴	🔴		🔵			🔵

$1^2 \sim n^2$ 分成兩組（個數相同）　表 3-3

	項	$1^2 \sim n^2$	S	S/2	平分 2 組情況
一	1	$1^2 \sim 8^2$	204	102	（1^2、4^2、6^2、7^2）（2^2、3^2、5^2、8^2）
二	1	$1^2 \sim 12^2$	650	325	（1^2、3^2、7^2、8^2、9^2、11^2）（2^2、4^2、5^2、6^2、10^2、12^2）
三	1	$1^2 \sim 16^2$	1496	748	（1^2、4^2、6^2、7^2、9^2、12^2、14^2、15^2） （2^2、3^2、5^2、8^2、10^2、11^2、13^2、16^2）
	2				（1^2、4^2、6^2、7^2、10^2、11^2、13^2、16^2） （2^2、3^2、5^2、8^2、9^2、12^2、14^2、15^2）
四	1	$1^2 \sim 20^2$	2870	1435	（1^2、3^2、7^2、8^2、9^2、11^2、13^2、16^2） （2^2、4^2、5^2、6^2、10^2、12^2、14^2、15^2）
	2				（1^2、3^2、7^2、8^2、10^2、12^2、14^2、15^2） （2^2、4^2、5^2、6^2、9^2、11^2、13^2、16^2）
五	1	1^2~24^2	4900	2450	（1^2、4^2、6^2、7^2、9^2、12^2、14^2、15^2、17^2、20^2、22^2、23^2） （2^2、3^2、5^2、8^2、10^2、11^2、13^2、16^2、18^2、19^2、21^2、24^2）
	2				（1^2、4^2、6^2、7^2、9^2、12^2、14^2、15^2、18^2、19^2、21^2、24^2） （2^2、3^2、5^2、8^2、10^2、11^2、13^2、16^2、17^2、20^2、22^2、23^2）

	3				（1^2、4^2、6^2、7^2、10^2、11^2、13^2、16^2、17^2、20^2、22^2、23^2） （2^2、3^2、5^2、8^2、9^2、12^2、14^2、15^2、18^2、19^2、21^2、24^2）
	4				（1^2、4^2、6^2、7^2、10^2、11^2、13^2、16^2、18^2、19^2、21^2、24^2） （2^2、3^2、5^2、8^2、9^2、12^2、14^2、15^2、17^2、20^2、22^2、23^2）
六	1	1^2~24^2	7714	3857	（1^2、3^2、7^2、8^2、9^2、11^2、13^2、16^2、18^2、19^2、21^2、24^2、26^2、27^2） （2^2、4^2、5^2、6^2、10^2、12^2、14^2、15^2、17^2、20^2、22^2、23^2、26^2、27^2）
	2				（1^2、3^2、7^2、8^2、9^2、11^2、13^2、16^2、18^2、19^2、21^2、24^2、26^2、27^2） （2^2、4^2、5^2、6^2、10^2、12^2、14^2、15^2、17^2、20^2、22^2、23^2、26^2、27^2）
	3				（1^2、3^2、7^2、8^2、9^2、11^2、13^2、16^2、18^2、19^2、22^2、23^2、26^2、27^2） （2^2、4^2、5^2、6^2、10^2、12^2、14^2、15^2、17^2、20^2、21^2、24^2、26^2、27^2）
	4				（1^2、3^2、7^2、8^2、9^2、11^2、13^2、16^2、18^2、19^2、22^2、23^2、26^2、27^2） （2^2、4^2、5^2、6^2、10^2、12^2、14^2、15^2、17^2、20^2、21^2、24^2、26^2、27^2）

$1^2 \sim n^2$ 分成兩組（個數相同）　表 3-4

四、1^3~n^3 分成兩組，其和相等之探討。

定義 3：

已知有從 1^3 開始的連續 n 個數分別為 1^3、2^3、3^3、……、n^3（$n\in N$），將這些數平分成 2 組，而 1^3、2^3、3^3、……、n^3 的數字總和為 S 分成 2 組，一邊和為 S/2，把一種組合的情形，稱為**一組立方解**。

在發現 1^2~n^2 分成兩組（每組個數相同與個數不同），其和相等之分法，確實存在某種特定開合規律後，我們更進一步，嘗試把這樣的現象推廣到立方。

仿照，平方解的討論，我們發現 n= 12、16、20、24 分別是立方解的第一、第二、第三、第四起始循環數，且皆以 16k（$k\in N$）為週期，從起始循環數向後延伸，每 16 個數為一節，以開合的方式填入，如表 4-1 所示，即可順利求解。

我們發現，各自以 n= 12、16、20、24 為起始循環數，16k（$k\in N$）為週期的立方解，之間呈現一個交錯的循環：

1^3~12^3有 1 組	1^3~16^3有 1 組	1^3~20^3有 1 組	1^3~24^3有 1 組
1^3~28^3有 2 組	1^3~32^3有 2 組	1^3~36^3有 2 組	1^3~40^3有 2 組
1^3~44^3有 4 組	1^3~48^3有 4 組	1^3~52^3有 4 組	1^3~56^3有 4 組
、	、	、	、
、	、	、	、
、	、	、	、
以 12 為起始循環數，16k（k∈N）為週期的立方解，所以，n= 13～28 的解呈現開合狀態，以此類推，每一組都會往後各自延伸出 2 組解。	以 16 為起始循環數，16k（k∈N）為週期的立方解，所以，n= 17～32 的解呈現開合狀態，以此類推，每一組都會往後各自延伸出 2 組解。	以 20 為起始循環數，16k（k∈N）為週期的立方解，所以，n= 21～36 的解呈現開合狀態，以此類推，每一組都會往後各自延伸出 2 組解。	以 24 為起始循環數，16k（k∈N）為週期的立方解，所以，n= 25～40 的解呈現開合狀態，以此類推，每一組都會往後各自延伸出 2 組解。

表 4-1

從起始循環數之後，每 16 個數為一週期填入，參考表 4-1，如果有 R 個（開合合開）或（合開開合），如表 4-1、表 4-2 所示，就會有 2^R 組解。

由以上的推論，我們就可以明確的推導出 1^3～n^3 有幾組立方解了。

$1^3\sim n^3$	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3	11^3	12^3	13^3	14^3	15^3	16^3	17^3	18^3	19^3	20^3	21^3	22^3	23^3	24^3	25^3	26^3	27^3	28^3	29^3	30^3	31^3	32^3	33^3	34^3	35^3	36^3
$1^3\sim12^3$	●	●		●				●	●			●																								
$1^3\sim16^3$	●					●	●			●	●		●			●																				
$1^3\sim20^3$	●			●			●		●		●	●	●	●			●			●																
$1^3\sim24^3$	●	●			●	●	●		●	●		●							●	●			●	●												
$1^3\sim28^3$	●	●		●				●	●			●	🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵								
	●	●		●				●	●			●		🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴									
$1^3\sim32^3$	●					●	●			●	●		●			●	🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵				
	●					●	●			●	●		●			●		🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴					
$1^3\sim36^3$	●			●			●		●		●	●	●	●			●			●	🔵			🔵		🔴	🔴			🔴	🔴		🔵			🔵
	●			●			●		●		●	●	●	●			●			●		🔴	🔴		🔵			🔵	🔵			🔵		🔴	🔴	

$1^3\sim n^3$分成兩組（個數相同） 表 4-2

	項	$1^3 \sim n^3$	S	S/2	平分 2 組情況
一	1	$1^3 \sim 12^3$	6082	3042	（1^3、2^3、4^3、8^3、9^3、12^3）（3^3、5^3、6^3、7^3、10^3、11^3）
二	1	$1^3 \sim 16^3$	18496	9248	（1^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3）（2^3、3^3、4^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3）
三	1	$1^3 \sim 20^3$	44100	22050	（1^3、4^3、7^3、9^3、11^3、12^3、13^3、14^3、17^3、20^3） （2^3、3^3、5^3、6^3、8^3、10^3、15^3、16^3、18^3、19^3）
四	1	$1^3 \sim 24^3$	90000	45000	（1^3、2^3、5^3、6^3、7^3、9^3、10^3、12^3、19^3、20^3、23^3、24^3） （3^3、4^3、8^3、11^3、13^3、14^3、15^3、16^3、17^3、18^3、21^3、22^3）
五	1	$1^3 \sim 28^3$	164836	82418	（1^3、2^3、4^3、8^3、9^3、12^3、13^3、16^3、18^3、19^3、22^3、23^3、25^3、28^3） （3^3、5^3、6^3、7^3、10^3、11^3、14^3、15^3、17^3、20^3、21^3、24^3、26^3、27^3）
	2				（1^3、2^3、4^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3、17^3、20^3、21^3、24^3、26^3、27^3） （3^3、5^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3、18^3、19^3、22^3、23^3、25^3、28^3）
六	1	$1^3 \sim 32^3$	278784	139392	（1^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3、17^3、20^3、22^3、23^3、26^3、27^3、29^3、32^3） （2^3、3^3、4^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3、18^3、19^3、21^3、24^3、25^3、28^3、30^3、31^3）
	2				（1^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3、18^3、19^3、21^3、24^3、25^3、28^3、30^3、31^3） （2^3、3^3、4^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3、17^3、20^3、22^3、23^3、26^3、27^3、29^3、32^3）
七	1	$1^3 \sim 36^3$	443556	221778	（1^3、4^3、7^3、9^3、11^3、12^3、13^3、14^3、17^3、20^3、21^3、24^3、26^3、27^3、30^3、31^3、33^3、36^3） （2^3、3^3、5^3、6^3、8^3、10^3、15^3、16^3、18^3、19^3、22^3、23^3、25^3、28^3、29^3、32^3、34^3、35^3）
	2				（1^3、4^3、7^3、9^3、11^3、12^3、13^3、14^3、17^3、20^3、22^3、23^3、25^3、28^3、29^3、32^3、34^3、35^3） （2^3、3^3、5^3、6^3、8^3、10^3、15^3、16^3、18^3、19^3、21^3、24^3、26^3、27^3、30^3、31^3、33^3、36^3）

$1^3 \sim n^3$ 分成兩組（個數相同）表 4-3

伍、研究結果

一、在 1~n，且 n＝4t 分成兩組（個數相同），其和相等之分法中，可以找到滿足條件的解，當 n 是偶數(4t)時，我們可以用 1～4 的解爲基本模式，以 4k（n∈N）爲週期，從起始循環數向後延伸，每 4 個數爲一節，以開合的方式填入表格中，即可順利求解，而規律解的組數有 2^{t-1} 個。

另外，當 n 是奇數(4t-1)時，可以把 0 加入 1～4t-1 中，再仿照前段（n 是偶數(4t)）的作法，平分成 2 組（個數不同，去掉零），也可以找到滿足條件的解。

最後，我們發現，如果想快速塡出符合的解，可以搭配表格並採用 M 圖形的模式化塡法求解，會比列舉法來的更有效率

二、$1\sim R^2$ 分成 R 組，其和相等之分法，可將 $1\sim R^2$，共 R^2 個數，依序由左而右，由上而下，塡入 R×R 階方陣。即可由對角線魚鉤狀塡法得到相對應的一組解。

三、在 $1^2\sim n^2$ 分成兩組，其和相等之分法中，我們發現，各自以 8 和 12 爲起始循環數，8k（k∈N）爲週期的平方解，呈現出交錯循環的情況，按此週期，在起始循環數之後，以開合狀態塡入表格中，即可順利求解。從起始循環數之後，每 8 個數爲一週期塡入，，如果有 R 個一開一合，就會有 2^R 組解。

四、在 $1^3\sim n^3$ 分成兩組，其和相等之分法中，我們發現，各自以 12、16、20、24 爲起始循環數，16k（k∈N）爲週期的立方解，呈現交錯循環情況。按此週期，在起始循環數之後，每 16 個數爲一週期塡入，如果有 R 個（開合合開）或（合開開合），就會有 2^R 組解。

<table>
<tr><th>數字</th><th>平分成 2 組，
n 的起始循環數</th><th>平分成 3 組，
n 的起始循環數</th><th>、、、</th><th>平分成 k 組，
n 的起始循環數</th><th>週期</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1、2、、、n</td><td rowspan="2">4</td><td>6</td><td rowspan="2">、、、</td><td rowspan="2">①k 爲偶數：2k
②k 爲奇數：2k、3k</td><td rowspan="2">2k</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1^2、2^2、、、n^2</td><td>8</td><td>18</td><td rowspan="2">、、、</td><td>$2k^2$</td><td rowspan="2">$2k^2$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>27</td><td>$3k^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1^3、2^3、、、n^3</td><td>12</td><td></td><td rowspan="4">、、、</td><td>$1.5k^3$</td><td rowspan="4">$2k^3$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>54</td><td>$2k^3$</td></tr>
<tr><td>20</td><td></td><td>$2.5k^3$</td></tr>
<tr><td>24</td><td>81</td><td>$3k^3$</td></tr>
</table>

以平分成 3 組爲例，如下表所示，如果想要平分成 k 組，以此規律類推。

	數字	平分成 3 組
一次方	1、2、、、6	(1、6)、(2、5)、(3、4)
	1、2、、、9	(1、5、9)、(2、6、7)、(3、4、8)
二次方	1^2、2^2、、、18^2	$(1^2、6^2、9^2、10^2、14^2、17^2)$、 $(2^2、3^2、11^2、12^2、13^2、16^2)$、 $(4^2、5^2、7^2、8^2、15^2、18^2)$
	1^2、2^2、、、27^2	$(1^2、5^2、9^2、12^2、13^2、17^2、20^2、24^2、25^2)$ 、 $(2^2、6^2、7^2、10^2、14^2、18^2、21^2、22^2、26^2)$ 、 $(3^2、4^2、8^2、11^2、15^2、16^2、19^2、23^2、27^2)$
三次方	1^3、2^3、、、54^3	$(1^3、6^3、9^3、10^3、14^3、17^3、20^3、21^3、29^3、30^3、31^3、34^3、$ $40^3、41^3、43^3、44^3、51^3、54^3)$、 $(2^3、3^3、11^3、12^3、13^3、16^3、22^3、23^3、25^3、26^3、33^3、36^3、$ $37^3、42^3、45^3、46^3、50^{33}、53^3)$、 $(4^3、5^3、7^3、8^3、15^3、18^3、19^3、24^3、27^3、28^3、32^3、35^3、38^3、$ $39^3、47^3、48^3、49^3、52^3)$
	1^3、2^3、、、81^3	$(1^3、5^3、9^3、12^3、13^3、17^3、20^3、24^3、25^3、29^3、33^3、34^3、$ $37^3、41^3、45^3、48^3、49^3、53^3、57^3、58^3、62^3、65^3、69^3、70^3、$ $73^3、77^3、81^3)$、 $(2^3、6^3、7^3、10^3、14^3、18^3、21^3、22^3、26^3、30^3、31^3、35^3、$ $38^3、42^3、43^3、46^3、50^3、54^3、55^3、59^3、63^3、66^3、67^3、71^3、$ $74^3、78^3、79^3)$、 $(3^3、4^3、8^3、11^3、15^3、16^3、19^3、23^3、27^3、28^3、32^3、36^3、$ $39^3、40^3、44^3、47^3、51^3、52^3、56^3、60^3、61^3、64^3、68^3、72^3、$ $75^3、76^3、80^3)$

陸.未來研究方向

一、在未來可以運用電腦來跑出所有組數，或許會看出更不同的規律性，並期盼找到更多的求解方法，得出一些規律。

二、找到 1~4、1~8、1~12、1~16……1~n 的總組數之間的關係。

三、希望未來可以繼續朝三次方、四次方、五次方來研究解的規律性。

四、可以朝平分成 3 組、4 組、5 組來研究。

柒.參考資料及其他

一、李雨濃、江天勤(2004)。談整數分組問題。第 44 屆全國科展高中組數學科報告。

二、洪智偉、黃朝群(2008)。公平分法(談整數分組)。第 48 屆彰化縣科展國中組數學科報告。

三、左太政()。如何從事數學科學展覽。2008 年 10 月 2 日，取自：
http://home.lsjh.tp.edu.tw/chiny/cgi-bin/PJBlog/attachments/month_0706/k200763203123.doc。
四、林福來等(2006)。普通高級中學數學第一冊。台北市：南一書局企業股份有限公司。

捌.附件

數據如下：

一、1~4　共 1 組

[（1.4）（2.3）]

二、1~8　共 4 組

[（1.2.7.8）（3.4.5.6）][（1.3.6.8）（2.4.5.7）][（1.4.5.8）（2.3.6.7）][（1.4.6.7）（2.3.5.8）]

三、1~12　共 29 組

[（1.2.3.10.11.12）（4.5.6.7.8.9）][（1.2.4.9.11.12）（3.5.6.7.8.10）][（1.2.5.8.11.12）（3.4.5.7.9.10）]
[（1.2.5.9.10.12）（3.4.6.7.9.11）][（1.2.6.7.11.12）（3.4.5.8.9.10）][（1.2.6.8.10.12）（3.4.5.7.9.11）]
[（1.2.6.9.10.11）（3.4.5.7.8.12）][（1.2.7.8.9.12）（3.4.5.6.10.11）][（1.2.7.8.10.11）（3.4.5.6.9.12）]
[（1.3.4.8.11.12）（2.5.6.7.9.10）][（1.3.4.9.10.12）（2.5.6.7.8.11）][（1.3.5.7.11.12）（2.4.6.8.9.10）]
[（1.3.5.8.10.12）（2.4.6.7.9.11）][（1.3.5.9.10.11）（2.4.6.7.8.12）][（1.3.6.7.10.12）（2.4.5.8.9.11）]
[（1.3.6.8.9.12）（2.4.5.7.10.11）][（1.3.6.8.10.11）（2.4.5.7.9.12）][（1.3.7.8.9.11）（2.4.5.6.10.12）]
[（1.4.5.6.11.12）（2.3.7.8.9.10）][（1.4.5.7.10.12）（2.3.6.8.9.11）][（1.4.5.8.9.12）（2.3.6.7.10.11）]
[（1.4.5.8.10.11）（2.3.6.7.9.12）][（1.4.6.7.9.12）（2.3.5.8.10.11）][（1.4.6.7.10.11）（2.3.5.8.9.12）]
[（1.4.6.8.9.11）（2.3.5.7.10.12）][（1.4.7.8.9.10）（2.3.5.6.11.12）][（1.5.6.7.8.12）（2.3.4.9.10.11）]
[（1.5.6.7.9.11）（2.3.4.8.10.12）][（1.5.6.8.9.10）（2.3.4.7.11.12）]

四、1~16　共 239 組

[（1.2.3.4.13.14.15.16）（5.6.7.8.9.10.11.12）][（1.2.3.5.12.14.15.16）（4.6.7.8.9.10.11.13）]
[（1.2.3.6.11.14.15.16）（4.5.7.8.9.10.12.13）][（1.2.3.6.12.13.15.16）（4.5.7.8.9.10.11.14）]
[（1.2.3.7.10.14.15.16）（4.5.6.8.9.11.12.13）][（1.2.3.7.11.13.15.16）（4.5.6.8.9.10.12.14）]
[（1.2.3.7.12.13.14.16）（4.5.6.8.9.10.11.15）][（1.2.3.8.9.14.15.16）（4.5.6.7.10.11.12.13）]
[（1.2.3.8.10.13.15.16）（4.5.6.7.9.11.12.14）][（1.2.3.8.11.12.15.16）（4.5.6.7.9.10.13.14）]
[（1.2.3.8.11.13.14.16）（4.5.6.7.9.10.12.15）][（1.2.3.8.12.13.14.15）（4.5.6.7.9.10.11.16）]
[（1.2.3.9.10.12.15.16）（4.5.6.7.8.11.13.14）][（1.2.3.9.10.13.14.16）（4.5.6.7.8.11.12.15）]
[（1.2.3.9.11.12.14.16）（4.5.6.7.8.10.13.15）][（1.2.3.9.11.13.14.15）（4.5.6.7.8.10.12.16）]
[（1.2.3.10.11.12.13.16）（4.5.6.7.8.9.14.15）][（1.2.3.10.11.12.14.15）（4.5.6.7.8.9.13.16）]
[（1.2.4.5.11.14.15.16）（3.6.7.8.9.10.12.13）][（1.2.4.5.12.13.15.16）（3.6.7.8.9.10.11.14）]
[（1.2.4.6.10.14.15.16）（3.5.7.8.9.11.12.13）][（1.2.4.6.11.13.15.16）（3.5.7.8.9.10.12.14）]
[（1.2.4.6.12.13.14.16）（3.5.7.8.9.10.11.15）][（1.2.4.7.9.14.15.16）（3.5.6.8.10.11.12.13）]
[（1.2.4.7.10.13.15.16）（3.5.6.8.9.11.12.14）][（1.2.4.7.11.12.15.16）（3.5.6.8.9.10.13.14）]
[（1.2.4.7.11.13.14.16）（3.5.6.8.9.10.12.15）][（1.2.4.7.12.13.14.15）（3.5.6.8.9.10.11.16）]
[（1.2.4.8.9.13.15.16）（3.5.6.7.10.11.12.14）][（1.2.4.8.10.12.15.16）（3.5.6.7.9.11.13.14）]
[（1.2.4.8.10.13.14.16）（3.5.6.7.9.11.13.14）][（1.2.4.8.11.12.14.16）（3.5.6.7.9.10.13.15）]
[（1.2.4.8.11.13.14.15）（3.5.6.7.9.10.12.16）][（1.2.4.9.10.11.15.16）（3.5.6.7.8.12.13.14）]

[（1.2.4.9.10.12.14.16）（3.5.6.7.8.11.13.15）][（1.2.4.9.10.13.14.15）（3.5.6.7.8.11.12.16）]
[（1.2.4.9.11.12.14.15）（3.5.6.7.8.10.13.16）][（1.2.4.9.11.12.13.16）（3.5.6.7.8.10.14.15）]
[（1.2.4.10.11.12.13.15）（3.5.6.7.8.9.14.16）][（1.2.5.6.9.14.15.16）（3.4.7.8.10.11.12.13）]
[（1.2.5.6.10.13.15.16）（3.4.7.8.9.11.12.14）][（1.2.5.6.11.12.15.16）（3.4.7.8.9.10.13.14）]
[（1.2.5.6.11.13.14.16）（3.4.7.8.9.10.12.15）][（1.2.5.6.12.13.14.15）（3.4.7.8.9.10.11.16）]
[（1.2.5.7.8.14.15.16）（3.4.6.9.10.11.12.13）][（1.2.5.7.9.13.15.16）（3.4.6.8.10.11.12.14）]
[（1.2.5.7.10.12.15.16）（3.4.6.8.9.11.13.14）][（1.2.5.7.10.13.14.16）（3.4.6.8.9.11.12.15）]
[（1.2.5.7.11.12.14.16）（3.4.6.8.9.10.13.15）][（1.2.5.7.11.13.14.15）（3.4.6.8.9.10.12.16）]
[（1.2.5.8.9.12.15.16）（3.4.6.7.10.11.13.14）][（1.2.5.8.9.13.14.16）（3.4.6.7.10.11.12.15）]
[（1.2.5.8.10.11.15.16）（3.4.6.7.9.12.13.14）][（1.2.5.8.10.12.14.16）（3.4.6.7.9.11.13.15）]
[（1.2.5.8.11.12.13.16）（3.4.6.7.9.10.14.15）][（1.2.5.8.11.12.14.15）（3.4.6.7.9.10.13.16）]
[（1.2.5.9.10.11.14.16）（3.4.6.7.8.12.13.15）][（1.2.5.9.10.12.13.16）（3.4.6.7.8.11.14.15）]
[（1.2.5.9.10.12.14.15）（3.4.6.7.8.11.13.16）][（1.2.5.9.11.12.13.15）（3.4.6.7.8.10.14.16）]
[（1.2.5.10.11.12.13.14）（3.4.6.7.8.9.15.16）][（1.2.6.7.8.13.15.16）（3.4.5.9.10.11.12.14）]
[（1.2.6.7.9.12.15.16）（3.4.5.8.10.11.13.14）][（1.2.6.7.9.13.14.16）（3.4.5.8.10.11.12.15）]
[（1.2.6.7.10.12.14.16）（3.4.5.8.9.11.13.15）][（1.2.6.7.10.11.15.16）（3.4.5.8.9.12.13.14）]
[（1.2.6.7.10.13.14.15）（3.4.5.8.9.11.12.16）][（1.2.6.7.11.12.13.16）（3.4.5.8.9.10.14.15）]
[（1.2.6.7.11.12.14.15）（3.4.5.8.9.10.13.16）][（1.2.6.8.10.11.14.16）（3.4.5.7.9.12.13.15）]
[（1.2.6.8.10.12.13.16）（3.4.5.7.9.11.14.15）][（1.2.6.8.10.12.14.15）（3.4.5.7.9.11.13.16）]
[（1.2.6.8.11.12.13.15）（3.4.5.7.9.10.14.16）][（1.2.6.9.10.12.13.15）（3.4.5.7.8.11.14.16）]
[（1.2.6.9.11.12.13.14）（3.4.5.7.8.10.15.16）][（1.2.7.8.9.11.14.16）（3.4.5.6.10.12.13.15）]
[（1.2.7.8.9.12.13.16）（3.4.5.6.10.11.14.15）][（1.2.7.8.10.11.13.16）（3.4.5.8.9.12.14.15）]
[（1.2.7.8.10.11.14.15）（3.4.5.6.9.12.13.16）][（1.2.7.8.10.12.13.15）（3.4.5.6.9.11.14.16）]
[（1.2.7.8.11.12.13.14）（3.4.5.6.9.10.15.16）][（1.2.7.9.10.12.13.14）（3.4.5.6.8.11.15.16）]
[（1.2.7.9.10.11.13.15）（3.4.5.6.8.12.14.16）][（1.2.7.9.10.11.12.16）（3.4.5.6.8.13.14.15）]
[（1.2.8.9.10.11.12.15）（3.4.5.6.7.13.14.16）][（1.2.8.9.10.11.13.14）（3.4.5.6.7.12.15.16）]
[（1.3.4.5.10.14.15.16）（2.6.7.8.9.11.12.13）][（1.3.4.5.11.13.15.16）（2.6.7.8.9.10.12.14）]
[（1.3.4.5.12.13.14.16）（2.6.7.8.9.10.11.15）][（1.3.4.6.9.14.15.16）（2.5.7.8.10.11.12.13）]
[（1.3.4.6.10.13.15.16）（2.5.7.8.9.11.12.14）][（1.3.4.6.11.12.15.16）（2.5.7.8.9.10.13.14）]
[（1.3.4.6.11.13.14.16）（2.5.7.8.9.10.12.15）][（1.3.4.6.12.13.14.15）（2.5.7.8.9.10.11.16）]
[（1.3.4.7.8.14.15.16）（2.5.6.9.10.11.12.13）][（1.3.4.7.9.13.15.16）（2.5.6.8.10.11.12.14）]
[（1.3.4.7.10.12.15.16）（2.5.6.8.9.11.13.14）][（1.3.4.7.10.13.14.16）（2.5.6.8.9.11.12.15）]
[（1.3.4.7.11.13.14.15）（2.5.6.8.9.10.12.16）][（1.3.4.8.9.12.15.16）（2.5.6.7.10.11.13.14）]
[（1.3.4.8.9.13.14.16）（2.5.6.7.10.11.12.15）][（1.3.4.8.10.11.15.16）（2.5.6.7.9.12.13.14）]
[（1.3.4.8.10.12.14.16）（2.5.6.7.9.11.13.15）][（1.3.4.8.10.13.14.15）（2.5.6.7.9.11.12.16）]
[（1.3.4.8.11.12.14.15）（2.5.6.7.9.10.13.16）][（1.3.4.9.10.11.14.16）（2.5.6.7.8.12.13.15）]
[（1.3.4.9.10.12.13.16）（2.5.6.7.8.11.14.15）][（1.3.4.9.10.12.14.15）（2.5.6.7.8.11.13.16）]
[（1.3.4.9.11.12.13.15）（2.5.6.7.8.10.14.16）][（1.3.4.10.11.12.13.14）（2.5.6.7.8.9.15.16）]
[（1.3.5.6.8.14.15.16）（2.4.7.9.10.11.12.13）][（1.3.5.6.9.13.15.16）（2.4.7.8.10.11.12.14）]
[（1.3.5.6.10.12.15.16）（2.4.7.8.9.11.13.14）][（1.3.5.6.10.13.14.16）（2.4.7.8.9.11.12.15）]

[（1.3.5.6.11.12.14.16）（2.4.7.8.9.10.13.15）][（1.3.5.6.11.13.14.15）（2.4.7.8.9.10.12.16）]
[（1.3.5.7.8.13.15.16）（2.4.6.9.10.11.12.14）][（1.3.5.7.9.12.15.16）（2.4.6.8.10.11.13.14）]
[（1.3.5.7.9.13.14.16）（2.4.6.8.10.11.12.15）][（1.3.5.7.10.11.15.16）（2.4.6.8.9.12.13.14）]
[（1.3.5.7.10.12.14.16）（2.4.6.8.9.11.13.15）][（1.3.5.7.10.13.14.15）（2.4.6.8.9.11.12.16）]
[（1.3.5.7.11.12.13.16）（2.4.6.8.9.10.14.15）][（1.3.5.7.11.12.14.15）（2.4.6.8.9.10.13.16）]
[（1.3.5.8.9.11.15.16）（2.4.6.7.10.12.13.14）][（1.3.5.8.9.12.14.16）（2.4.6.7.10.11.13.15）]
[（1.3.5.8.9.13.14.15）（2.4.6.7.10.11.12.16）][（1.3.5.8.10.11.14.16）（2.4.6.7.9.12.13.15）]
[（1.3.5.8.10.12.13.16）（2.4.6.7.9.11.14.15）][（1.3.5.8.10.12.14.15）（2.4.6.7.9.11.13.16）]
[（1.3.5.8.11.12.13.15）（2.4.6.7.9.10.14.16）][（1.3.5.9.10.11.13.16）（2.4.6.7.8.12.14.15）]
[（1.3.5.9.10.11.14.15）（2.4.6.7.8.12.13.16）][（1.3.5.9.10.12.13.15）（2.4.6.7.8.11.14.16）]
[（1.3.5.9.11.12.13.14）（2.4.6.7.8.10.15.16）][（1.3.6.7.8.12.15.16）（2.4.5.9.10.11.13.14）]
[（1.3.6.7.8.13.14.16）（2.4.5.9.10.11.12.15）][（1.3.6.7.9.12.14.16）（2.4.5.8.10.11.13.15）]
[（1.3.6.7.9.13.14.15）（2.4.5.8.10.11.12.16）][（1.3.6.7.10.11.14.16）（2.4.5.8.9.12.13.15）]
[（1.3.6.7.10.12.13.16）（2.4.5.8.9.11.14.15）][（1.3.6.7.10.12.14.15）（2.4.5.8.9.11.13.16）]
[（1.3.6.7.11.12.13.15）（2.4.5.8.9.10.14.16）][（1.3.6.8.9.10.15.16）（2.4.5.7.11.12.13.14）]
[（1.3.6.8.9.11.14.16）（2.4.5.7.10.12.13.15）][（1.3.6.8.9.12.13.16）（2.4.5.7.10.11.14.15）]
[（1.3.6.8.9.12.14.15）（2.4.5.7.10.11.13.16）][（1.3.6.8.10.11.13.16）（2.4.5.7.9.12.14.15）]
[（1.3.6.8.10.11.14.15）（2.4.5.7.9.12.13.16）][（1.3.6.8.10.12.13.15）（2.4.5.7.9.11.14.16）]
[（1.3.6.8.11.12.13.14）（2.4.5.7.9.10.15.16）][（1.3.6.9.10.11.13.15）（2.4.5.7.8.12.14.16）]
[（1.3.6.9.10.12.13.14）（2.4.5.7.8.11.15.16）][（1.3.7.8.9.10.14.16）（2.4.5.6.11.12.13.15）]
[（1.3.7.8.9.11.13.16）（2.4.5.6.10.12.14.15）][（1.3.7.8.9.11.14.15）（2.4.5.6.10.12.13.16）]
[（1.3.7.8.9.12.13.15）（2.4.5.6.10.11.14.16）][（1.3.7.8.10.11.13.15）（2.4.5.6.9.12.14.16）]
[（1.3.7.8.10.12.13.14）（2.4.5.6.9.11.15.16）][（1.3.7.9.10.11.12.15）（2.4.5.6.8.13.14.16）]
[（1.3.7.9.10.11.13.14）（2.4.5.6.8.12.15.16）][（1.3.8.9.10.11.12.14）（2.4.5.6.7.13.15.16）]
[（1.4.5.6.7.14.15.16）（2.3.8.9.10.11.12.13）][（1.4.5.6.8.13.15.16）（2.3.7.9.10.11.12.14）]
[（1.4.5.6.9.12.15.16）（2.3.7.8.10.11.13.14）][（1.4.5.6.9.13.14.16）（2.3.7.8.10.11.12.15）]
[（1.4.5.6.10.11.15.16）（2.3.7.8.9.12.13.14）][（1.4.5.6.10.12.14.16）（2.3.7.8.9.11.13.15）]
[（1.4.5.6.10.13.14.15）（2.3.7.8.9.11.12.16）][（1.4.5.6.11.12.13.16）（2.3.7.8.9.10.14.15）]
[（1.4.5.6.11.12.14.15）（2.3.7.8.9.10.13.16）][（1.4.5.7.8.12.15.16）（2.3.6.9.10.11.13.14）]
[（1.4.5.7.8.13.14.16）（2.3.6.9.10.11.12.15）][（1.4.5.7.9.11.15.16）（2.3.6.8.10.12.13.14）]
[（1.4.5.7.9.12.14.16）（2.3.6.8.10.11.13.15）][（1.4.5.7.9.13.14.15）（2.3.6.8.10.11.12.16）]
[（1.4.5.7.10.11.14.16）（2.3.6.8.9.12.13.15）][（1.4.5.7.10.12.13.16）（2.3.6.8.9.11.14.15）]
[（1.4.5.7.10.12.14.15）（2.3.6.8.9.11.13.16）][（1.4.5.7.11.12.13.15）（2.3.6.8.9.10.14.16）]
[（1.4.5.8.9.10.15.16）（2.3.6.7.11.12.13.14）][（1.4.5.8.9.11.14.16）（2.3.6.7.10.12.13.15）]
[（1.4.5.8.9.12.13.16）（2.3.6.7.10.11.14.15）][（1.4.5.8.9.12.14.15）（2.3.6.7.10.11.13.16）]
[（1.4.5.8.10.11.13.16）（2.3.6.7.9.12.14.15）][（1.4.5.8.10.11.14.15）（2.3.6.7.9.12.13.16）]
[（1.4.5.8.10.12.13.15）（2.3.6.7.9.11.14.16）][（1.4.5.9.10.11.12.16）（2.3.6.7.8.13.14.15）]
[（1.4.5.9.10.11.13.15）（2.3.6.7.8.12.14.16）][（1.4.5.9.10.12.13.14）（2.3.6.7.8.11.15.16）]
[（1.4.6.7.9.10.15.16）（2.3.5.8.11.12.13.14）][（1.4.6.7.9.11.14.16）（2.3.5.8.10.12.13.15）]
[（1.4.6.7.9.12.13.16）（2.3.5.8.10.11.14.15）][（1.4.6.7.9.12.14.15）（2.3.5.8.10.11.13.16）]

[（1.4.6.7.10.11.13.16）（2.3.5.8.9.12.14.15）][（1.4.6.7.10.11.14.15）（2.3.5.8.9.12.13.16）]
[（1.4.6.7.10.12.13.15）（2.3.5.8.9.11.14.16）][（1.4.6.8.9.12.13.15）（2.3.5.7.10.11.14.16）]
[（1.4.6.8.10.11.12.16）（2.3.5.7.9.13.14.15）][（1.4.6.8.10.11.13.15）（2.3.5.7.9.12.14.16）]
[（1.4.6.8.10.12.13.14）（2.3.5.7.9.11.15.16）][（1.4.6.9.10.11.12.15）（2.3.5.7.8.13.14.16）]
[（1.4.6.9.10.11.13.14）（2.3.5.7.8.12.15.16）][（1.4.7.8.9.10.13.16）（2.3.5.6.11.12.14.15）]
[（1.4.7.8.9.10.14.15）（2.3.5.6.11.12.13.16）][（1.4.7.8.9.11.12.16）（2.3.5.6.10.13.14.15）]
[（1.4.7.8.9.11.13.15）（2.3.5.6.10.12.14.16）][（1.4.7.8.9.12.13.14）（2.3.5.6.10.11.15.16）]
[（1.4.7.8.10.11.12.15）（2.3.5.6.9.13.14.16）][（1.4.7.8.10.11.13.14）（2.3.5.6.9.12.15.16）]
[（1.4.7.9.10.11.12.14）（2.3.5.6.8.13.15.16）][（1.4.8.9.10.11.12.13）（2.3.5.6.7.14.15.16）]
[（1.5.6.7.8.10.15.16）（2.3.4.9.11.12.13.14）][（1.5.6.7.8.11.14.16）（2.3.4.9.10.12.13.15）]
[（1.5.6.7.8.12.13.16）（2.3.4.9.10.11.14.15）][（1.5.6.7.8.12.14.15）（2.3.4.9.10.11.13.16）]
[（1.5.6.7.9.10.14.16）（2.3.4.8.11.12.13.15）][（1.5.6.7.9.11.13.16）（2.3.4.8.10.12.11.15）]
[（1.5.6.7.9.12.13.15）（2.3.4.8.10.11.14.16）][（1.5.6.7.10.11.12.16）（2.3.4.8.9.13.14.15）]
[（1.5.6.7.10.11.13.15）（2.3.4.8.9.12.14.16）][（1.5.6.7.10.12.13.14）（2.3.4.8.9.11.15.16）]
[（1.5.6.8.9.10.13.16）（2.3.4.7.11.12.14.15）][（1.5.6.8.9.10.14.15）（2.3.4.7.11.12.13.16）]
[（1.5.6.8.9.11.13.15）（2.3.4.7.10.12.14.16）][（1.5.6.8.9.12.13.14）（2.3.4.7.10.11.15.16）]
[（1.5.6.8.10.11.12.15）（2.3.4.7.9.13.14.16）][（1.5.6.8.10.11.13.14）（2.3.4.7.9.12.15.16）]
[（1.5.6.9.10.11.12.14）（2.3.4.7.8.13.15.16）][（1.5.7.8.9.10.12.16）（2.3.4.6.11.13.14.15）]
[（1.5.7.8.9.10.13.15）（2.3.4.6.11.12.14.16）][（1.5.7.8.9.11.12.15）（2.3.4.6.10.13.14.16）]
[（1.5.7.8.9.11.13.14）（2.3.4.6.10.12.15.16）][（1.5.7.8.10.11.12.14）（2.3.4.6.9.13.15.16）]
[（1.5.7.9.10.11.12.13）（2.3.4.6.8.14.15.16）][（1.6.7.8.9.10.11.16）（2.3.4.5.12.13.14.15）]
[（1.6.7.8.9.10.12.15）（2.3.4.5.11.13.11.16）][（1.6.7.8.9.10.13.14）（2.3.4.5.11.12.15.16）]
[（1.6.7.8.9.11.12.14）（2.3.4.5.10.13.15.16）][（1.6.7.8.10.11.12.13）（2.3.4.5.9.14.15.16）]

【評語】030422

針對如何等分 1 到 n 這些連續數字為個數相近，且總合相等的兩組或者多組數字，給出了一些系統化的分配方式。能透過簡單的想法構造解答，充分掌握了解決這個問題的關鍵。如果能對平分為兩組的問題作更深入的討論，找出所有可能的分配形式，或得出這些分配形式的通性，會是很棒的結果。