中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030420

瑕疵之美-矩形磚牆瑕疵線的探討

學校名稱：彰化縣立員林國民中學

作者：	指導老師：
國二 郭秉憲 國二 葉鑑萱 國二 張淳慎 國二 賴天立	顏富明

關鍵詞：瑕疵線、切割線、矩形磚牆

作品名稱：瑕疵之美－矩形磚牆瑕疵線的探討

摘要：對於任一矩形磚牆，為了尋找如何用 1×2 的磚塊砌成沒有瑕疵線磚牆的策略。

本研究發現：

一、可以畫出沒有瑕疵線的磚牆最小規格為 5×6(奇數×偶數型)或 6×8(偶數×偶數型)的磚牆。

二、(一)、在 p×q 磚牆中(p 為奇數、q 為偶數)，若滿足條件 $p\times q \geqq 4p+3q-8$，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

(二)、在 p×q 磚牆中，(p、q 皆為偶數)，若滿足條件 $p\times q \geqq 4p+4q-8$，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

三、對於一奇×偶或偶×偶的磚牆(最小規格分別為 5×6 或 6×8)，必有策略可以畫出沒有瑕疵線的圖形。

壹、研究動機：

因本組組員參加2009年青少年數學國際城市邀請賽遴選初選，發現了下列這個題目，並對此問題的進一步擴充具有濃厚的興趣，所以決定進行此研究。

原始題目：

用長為1寬為2(不考慮厚度)的磚砌牆。砌出的牆如有貫穿全圖左右或上下的直線出現，稱此為瑕疵線(如圖1)。

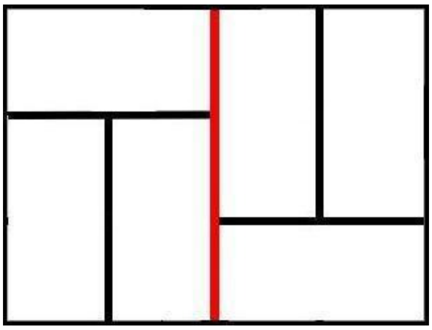

圖1： 3×4

5×6 的矩形牆可用以下兩種方式砌成沒有瑕疵線的牆(如圖2，圖3)：

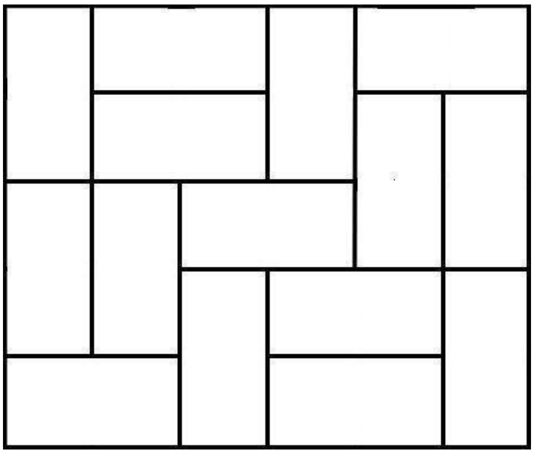

圖2： 5×6

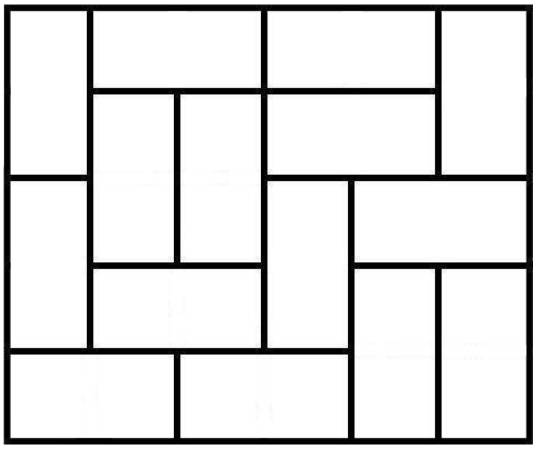

圖3： 5×6

請問6×6的矩形牆是否可以砌成沒有瑕疵線的牆？如果可以，請舉出一個例子；如果不能，請證明。

貳、研究目的：

一、找出能被畫出沒有瑕疵線磚牆的所有可能規格。

二、對於能被畫出沒有瑕疵線磚牆，尋找必能畫出沒有瑕疵線磚牆圖形的策略。

參、研究設備與器材：

電腦、筆、紙

肆、研究過程或方法：

一、名詞定義

切割線的定義：

切割線是指一個矩形磚牆內可以把磚牆內水平或垂直切割方向切成兩塊面積皆為整數的線段；也就是指將一矩形磚牆用1×1的磚塊填滿時，1×1的磚塊在磚牆內的邊可以和其他若干個1×1的磚塊在磚牆內的邊共同形成一條貫穿磚牆的線時，則稱此線為切割線(如圖4)。

如：

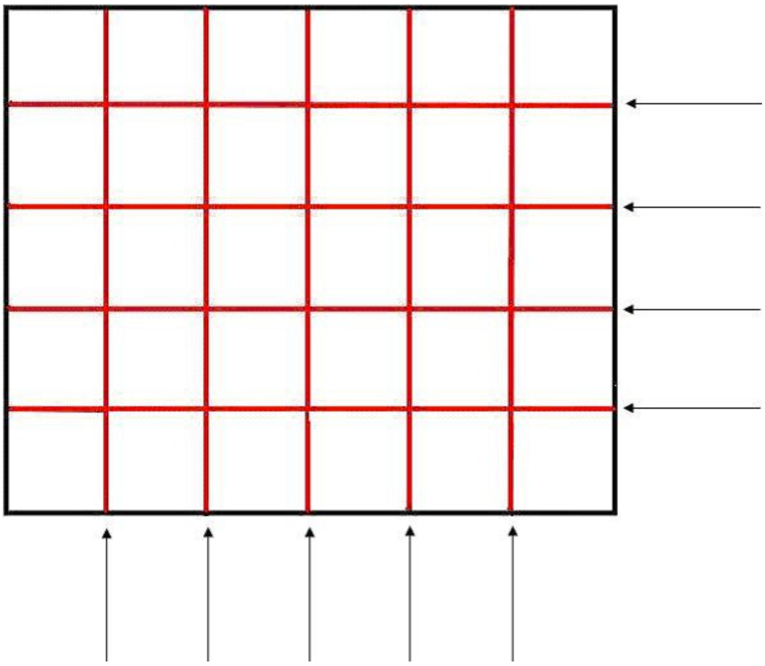

圖4： 5×6 切割線就是此圖中的箭頭所指的所有紅色直線

瑕疵線的定義：

用長為1寬為2(不考慮厚度)的磚砌矩形磚牆。砌出的牆如有至少為2塊1×2的磚塊的邊所形成貫穿全圖左右或上下的線段，稱此為瑕疵線(如圖5)。

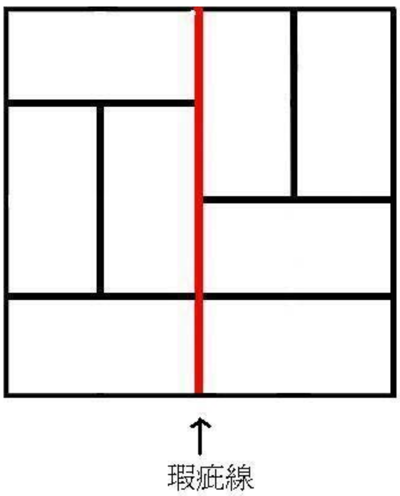

圖5： 4×4

二、可被1×2的磚塊填滿的磚牆面積必為偶數。

證明：

因1×2的磚塊的面積為2（2是偶數，偶數的倍數皆為偶數），所以可被1×2的磚塊填滿的磚牆面積必為偶數，也就是此磚牆的其中一邊必為偶數。（若兩邊長皆為奇數，奇數乘奇數等於奇數，即此磚牆的面積為奇數時，則此磚牆不可能被1×2的磚塊填滿。）

例如：

(一)、可被1×2的磚塊填滿的例子(如圖6，圖7)

（用紅色的字體標出長度為偶數的邊）：

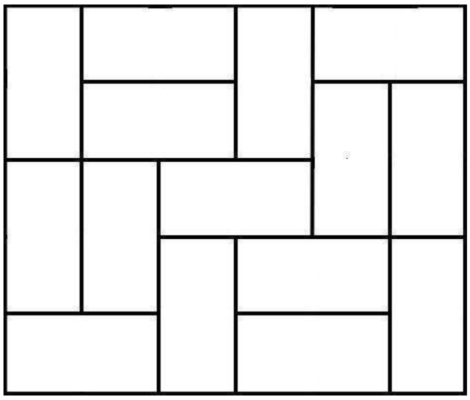

圖6： 5×6

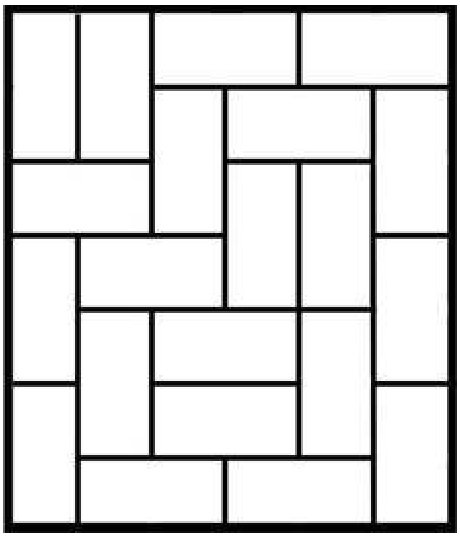

圖7： 7×6

(二)、不可被1×2的磚塊填滿的磚牆的例子(如圖8，圖9)：

(紅框為此磚牆被1×2的磚牆填滿時，所多出來且無法被1×2的磚塊填滿的部份)

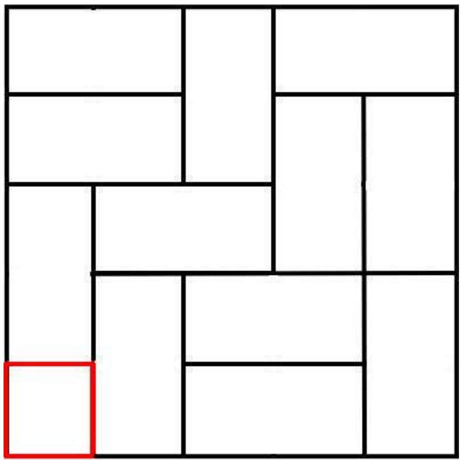

圖8： 5×5

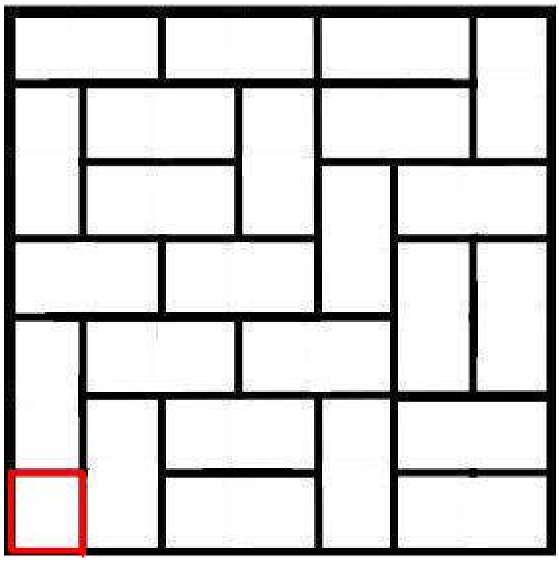

圖9： 7×7

三、可被1×2的磚塊填滿且沒有瑕疵線的磚牆，其切割線所切過1×2磚塊數的奇偶性與此切割線兩側磚牆面積的奇偶性相同。

證明：

為使任一切割線不為瑕疵線，它至少切過一塊1×2的磚塊；又為使此線到它所平行的邊的面積為可被1×2的磚塊填滿(扣掉被此線切過的1×2磚塊所佔的面積)，所以此任一切割線必切過與被此任一切割線所切出的兩側磚牆面積奇偶性相同的1×2磚塊。其中，切割線所切過1×2磚塊數的奇偶性與此切割線兩側磚牆面積的奇偶性相同。(因為任何能被1×2的磚塊填滿的磚牆，面積必為偶數，因為偶數等於奇數加奇數或偶數加偶數，當此磚牆被任意切割線切過時必被切成兩塊面積同為奇數或偶數的磚牆)

例如：(如圖10)

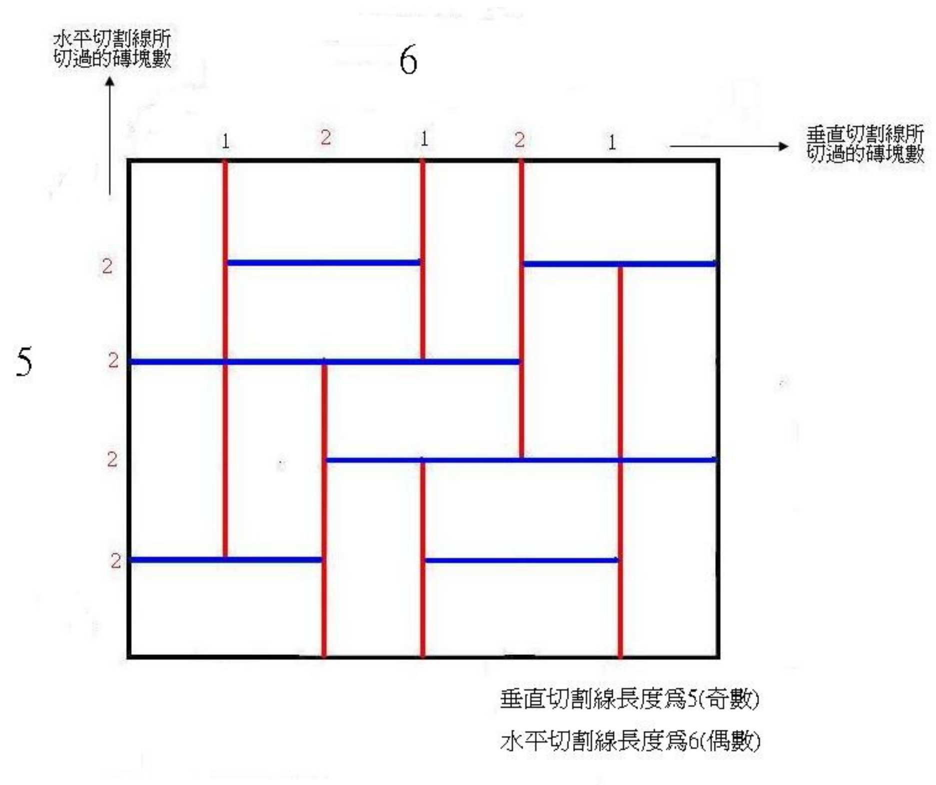

圖10： 5×6

用另一種方法來說明(如圖11)：

設有一矩形 m×n(m 為奇數 n 為偶數)，將長度為 n 的邊朝上，

設第一行有 x 個直立磚塊，則第一條切割線會切過 m-2x(奇數)塊橫列磚塊。

設第二行有 y 個直立磚塊，

m-(m-2x)-2y=2x-2y=2(x-y)

(m=第二行面積；m-2x=第一條切割線切過的橫列磚塊數，亦是此磚塊數在第二行所佔的面積；2y=第二行直立磚塊的面積)

因 2(x-y)必為偶數，所以第二條切割線會切過的橫列磚塊數為偶數。

依此類推 第一、三、五、……、(2n+1)條切割線會切過奇數塊的橫列磚塊。

第二、四、六、……、2n條切割線會切過偶數塊的橫列磚塊。

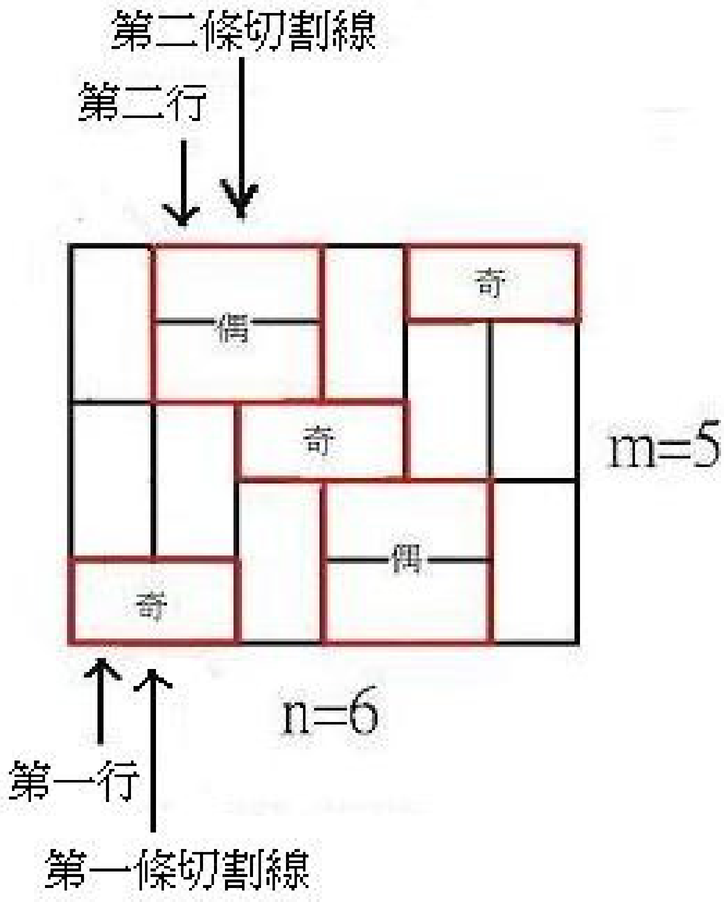

圖11： 5×6

四、可被1×2的磚塊填滿且沒有瑕疵線的p×q磚牆(q為偶數)，其平行偶數邊的切割線，必會切過偶數塊1×2的磚塊，且這些長度為q的切割線，至少共切過2(p－1)塊的1×2磚塊。

證明：

設某磚牆為p×q，q為偶數，某切割線的長度為偶數(q)，則此切割線到與它所平行的任一邊之間的面積必為偶數(偶數乘以偶數或奇數皆為偶數)，根據第三點，每條長度為偶數的切割線至少切過2塊的1×2的磚塊；又平行於此切割線的切割線(包含此切割線)共有p－1條，因此平行此切割線的切割線(包含此切割線)至少共切過2(p－1)塊的磚塊。

例如：(如圖12)

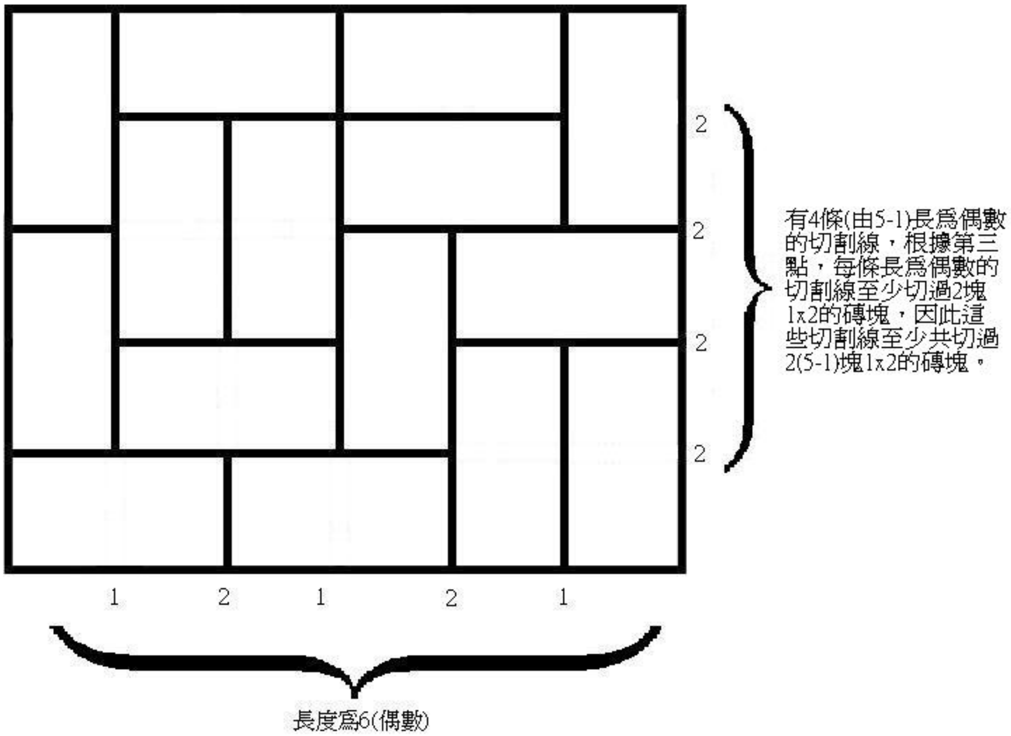

圖12： 5×6　此例中的p＝5，q＝6

五、可被1×2的磚塊填滿且沒有瑕疵線的p×q磚牆(p為奇數)，其平行奇數邊的切割線依序排列會切過奇數、偶數、奇數、……、偶數、奇數的1×2磚塊；且這些長度為p的切割線，至少共切過2（q／2－1）＋q／2塊的1×2磚塊。

證明：

某垂直切割線的長度p為奇數，根據第二點，則q必為偶數。

當此切割線與和它平行的邊之間的長度都為奇數時（此兩數的的和為q，q為偶數，偶數只會被切成兩塊長同為奇數或偶數的磚牆，不可能會切成長度為奇數加偶數的磚牆），因為平行此切割線的切割線（包含此切割線）將此磚牆所切成的面積從一端到另一端依序皆為奇數、偶數、奇數……偶數、奇數（最後一條切割線將此磚牆切成兩塊面積分別為p×1和p×(q－1)，因q為偶數，所以q－1為奇數；因此最後一條線將此磚牆切成兩塊面積皆為奇數的磚牆），所以，平行奇數邊的切割線依序排列會切過奇數、偶數、奇數、……、偶數、奇數的1×2磚塊。

因為長度為q的邊共有q－1條的切割線垂直於此邊，再加上因為其中將此磚牆切成兩塊面積皆為奇數的磚牆的切割線比將此磚牆切成兩塊面積皆為偶數的磚牆的切割線還多一條，所以其中將磚牆切成兩塊面積皆為偶數的磚牆的切割線數共有（q－1－1）/2＝q/2－1條，根據第三點，此切割線至少切過2塊1×2的磚塊，當此切割線與和它平行的邊之間的距離為偶數時，則這些切割線至少共切過2（q／2－1）塊1×2的磚塊；其中將磚牆切成兩塊面積皆為奇數的磚牆的切割線數共有（q－1＋1）/2＝q/2條，根據第三點，此切割線至少切過1塊1×2的磚塊，所以當此切割線與和它平行的邊之間的距離為奇數時的切割線至少共切過q／2塊1×2的磚塊。

綜合以上幾點，長度為p的切割線（包含此切割線）至少共切過2（q／2－1）＋q／2塊的1×2磚塊。

例如：(如圖13)

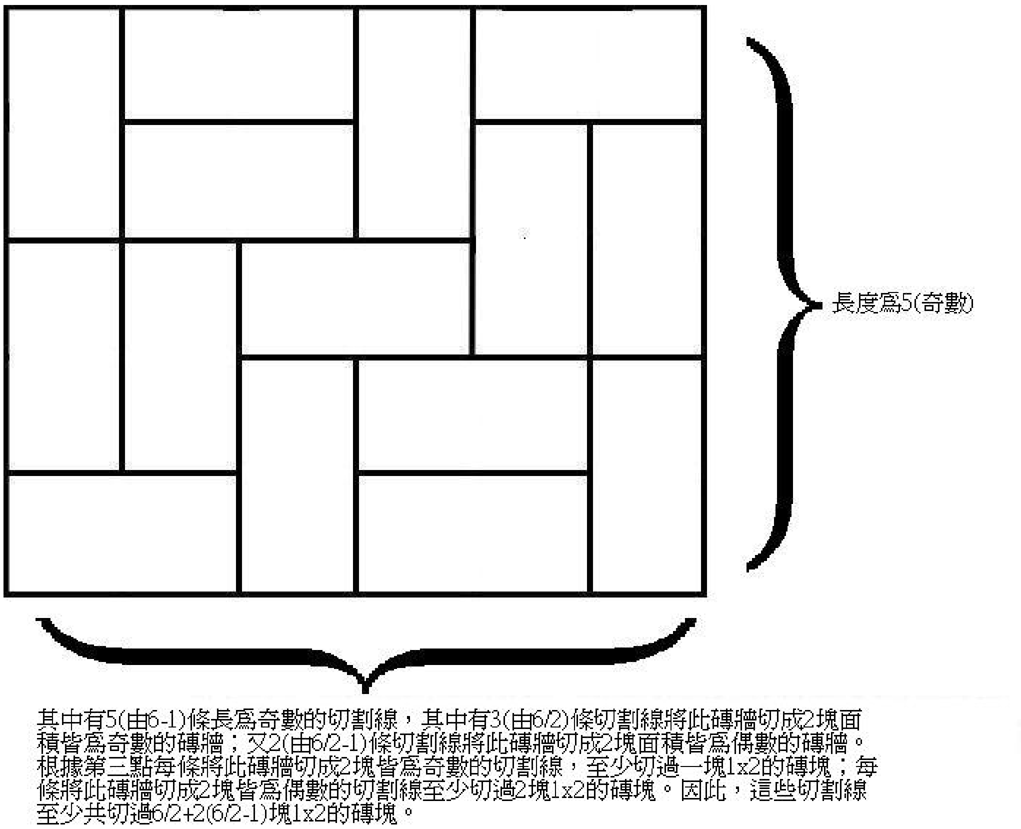

圖13： 5×6

六、在 p×q 磚牆中(p 為奇數、q 為偶數)，若滿足條件 p×q≧4p＋3q－8，則當此磚牆被1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

證明：

在 p×q 磚牆中(p 為奇數、q 為偶數)，利用第三點、第四點和第五點可以知道。pq／2(整個磚牆內所有 1×2 磚塊數目)≧2(p-1)(長度為 q 的水平切割線至少切過的 1×2 的總磚塊數)＋2(q/2-1)(長度為 p 且將此磚牆切成兩塊面積皆為偶數的的垂直切割線至少共切過的 1×2 的總磚塊數)＋q/2(長度為 p 且將此磚牆切成兩塊面積皆為奇數的垂直的切割線至少共切過的 1×2 的總磚塊數。)

將此式化簡後得到:若滿足條件 p×q≧４p＋３q－８，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，則必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

例如：3×4、5×6、7×6 的磚牆中，將這些數字代入不等式。(如圖 14，圖 15，圖 16)

(一)、3×4 的磚牆中，令 p＝3，q＝4，3×4＝12，4×3＋3×4－8＝16，12 並沒有大於或等於 16，因此 3×4 的磚牆無法用 1×2 的磚塊排出沒有瑕疵線的磚牆。像是：

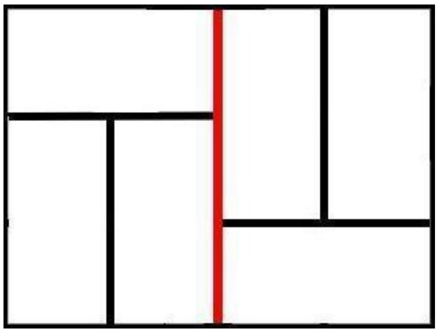

圖 14： 3x4

（二）、5x6 的磚牆中，令 p＝5，q＝6，5x6＝30，4x5＋3x6－8＝30，30 剛好等於 30，因此 5x6 的磚牆可以用 1x2 的磚塊排出沒有瑕疵線的圖形。像是：

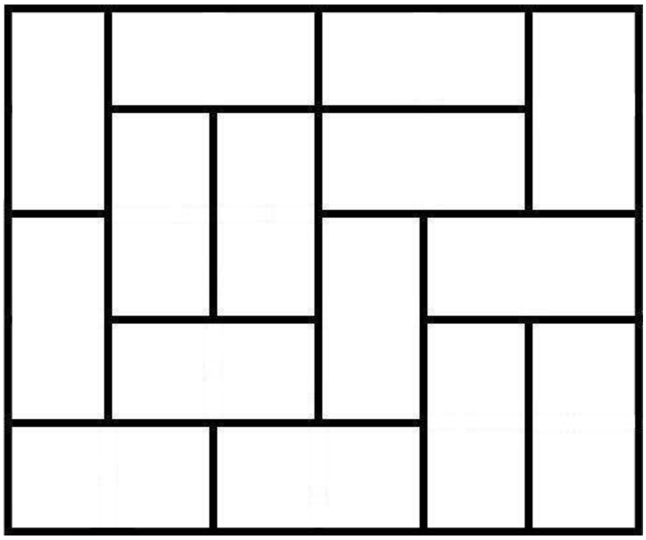

圖 15： 5x6

（三）、7x6 磚牆中，令 p＝7，q＝6，7x6＝42，4x7＋3x6－8＝38，42 大於 38，因此 7x6 的磚牆可以用 1x2 的磚塊排出沒有瑕疵線的圖形。像是：

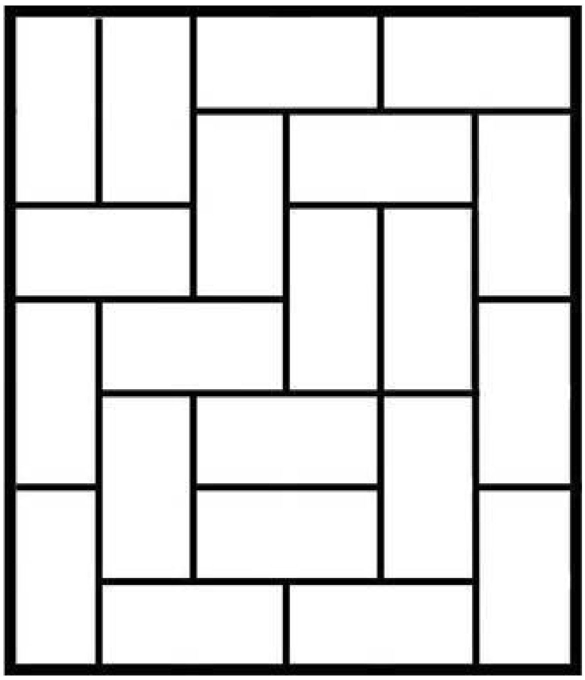

圖 16： 7x6

七、在 p×q 磚牆中，(p、q 皆為偶數)，若滿足條件 p×q≧４p+４q－８，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

證明：

在 p×q 磚牆中，(p、q 皆為偶數)，利用第四點可以知道。pq／2(整個磚牆內所有 1×2 磚塊數目)≧2(p-1)(長度為 q 的水平切割線至少切過的 1×2 的總磚塊數)＋2(q-1)(長度為 p 的垂直切割線至少切過的 1×2 的總磚塊數)。

將此式簡化後得到:

若滿足條件 p×q≧４p+４q－８，則當此磚牆被１×２的磚塊填滿時，則必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

(一)、例如：4×4、6×6、8×8、10×12 的磚牆中，將這些數字代入不等式。(如圖 17，圖 18，圖 19，圖 20)

4×4 的磚牆中，令 p＝4，q＝4，4×4＝16，4×4＋4×4－8＝24，16 並沒有大於或等於 24,因此 4×4 的磚牆無法用 1×2 的磚塊排出沒有瑕疵線的磚牆。像是：

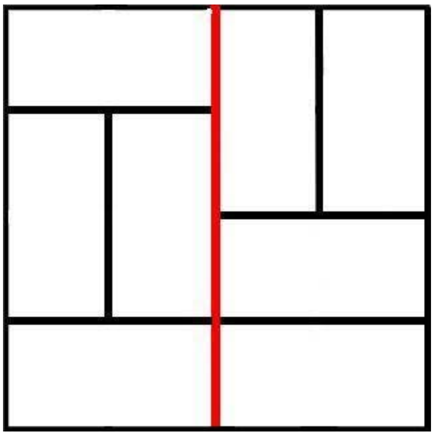

圖 17： 4x4

(二)、6×6 的磚牆中，令 p＝6，q＝6，6×6＝36，4×6＋4×6－8＝40，36 並沒有大於等於 40，因此 6×6 的磚牆無法用 1×2 的磚塊排出沒有瑕疵線的圖形。像是：

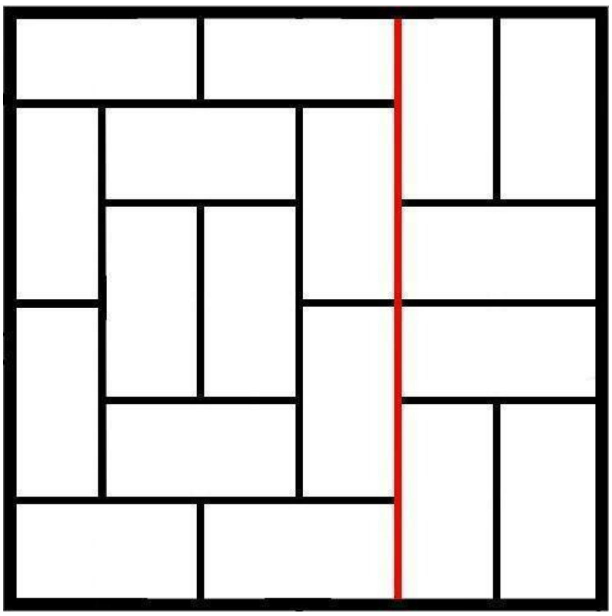

圖 18： 6×6

※原始問題在此已獲得證明。

(三)、8×8 的磚牆中，令 p＝8，q＝8，8×8＝64，4×8＋4×8－8＝56，64 大於 56，因此 8×8 的磚牆可以用 1×2 的磚塊排出沒有瑕疵線的圖形。像是：

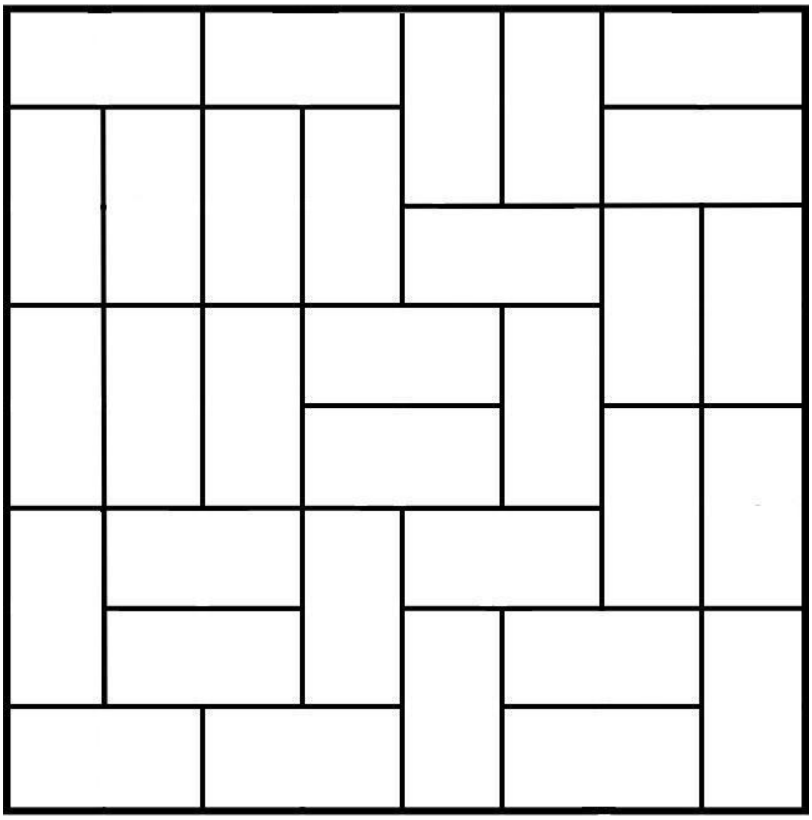

圖 19： 8×8

(四)、12×10 的磚牆中，令 p＝12，q＝10，12×10＝120，4×12＋4×10－8＝80，120 大於 80，因此 12×10 的磚牆可以用 1×2 的磚塊排出沒有瑕疵線的圖形。像是：

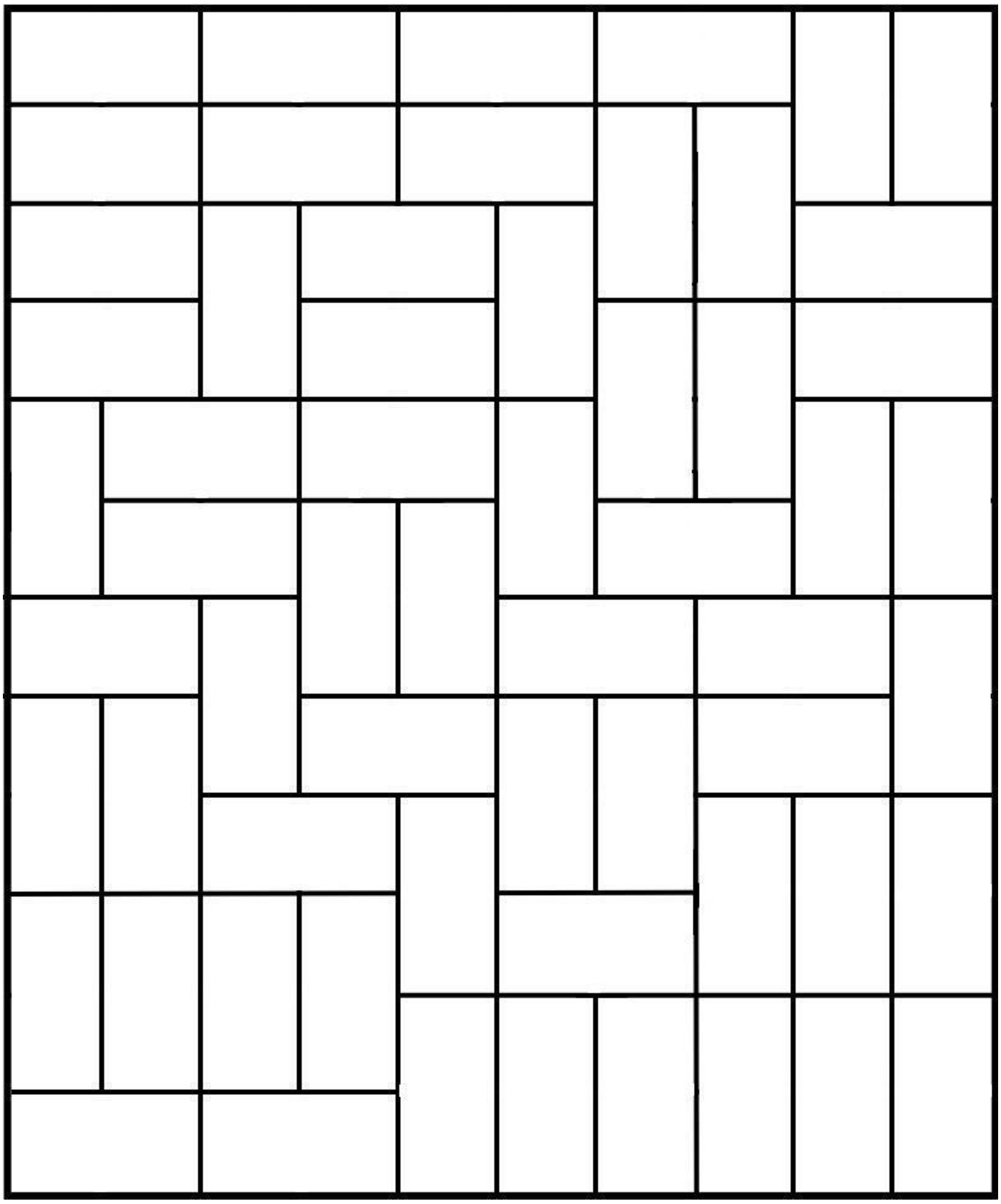

圖 20： 12×10

八、可被 1×2 的磚塊填滿且沒有瑕疵線的 p×q 磚牆中(p 為奇數，q 為偶數)，可自由擺放(即橫放或直放皆可)的磚塊數(pq－4p－3q＋8)/2 塊。

證明：

邊長為奇數(p)乘偶數(q)的磚牆中，

pq(磚牆的面積總和)－(4p＋3q－8)(為使此圖形沒有瑕疵線時一定要擺下的 1×2 磚塊所佔的面積)＝可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊的總面積，再將它除以每塊 1×2 磚塊的面積 2，可以得到可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊的總數目為(pq－4p－3q＋8)/2 塊。

例如：9×10(如圖 21)(紅框內為可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊的總數目。其中此磚牆(9×10－4×9－3×10＋8)/2＝16 塊的可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊數)

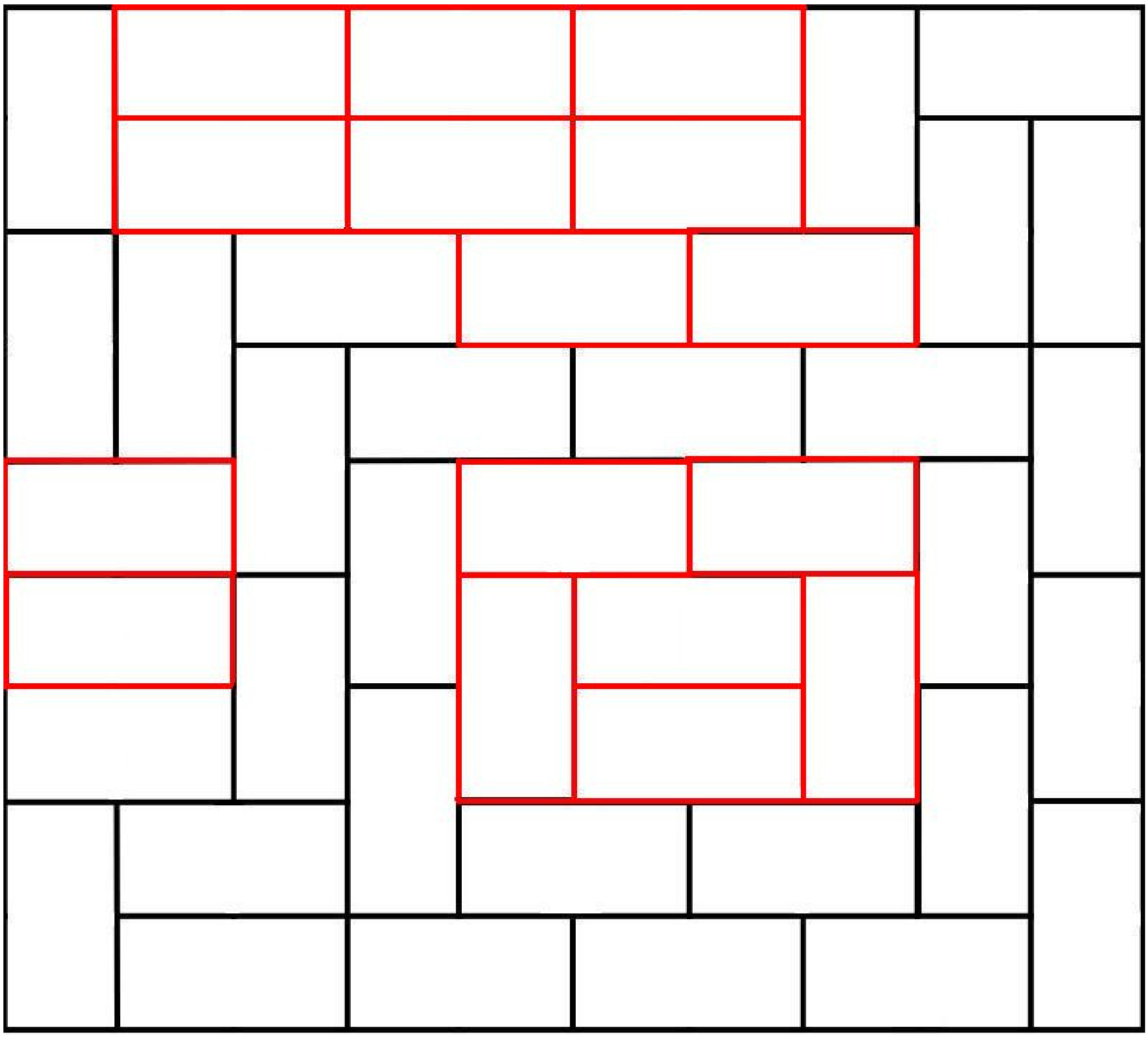

圖 21： 9×10，紅色磚塊處為可自由擺放磚塊的區域

九、可被 1×2 的磚塊填滿且沒有瑕疵線的 p×q 磚牆中(p、q 皆為偶數)，可自由擺放(即橫放或直放皆可)的磚塊數為(pq－4p－4q＋8)/2 塊。

證明：

邊長為偶數(p)乘偶數(q)的磚牆中，

pq(磚牆的面積總和)－(4p＋4q－8)(為使此圖形沒有瑕疵線時要擺下的 1×2 磚塊至少所佔的面積)＝可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊的總面積，

再將它除以每塊 1×2 磚塊的面積 2，

可以得到可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊的總數目為(pq－4p－4q＋8)/2 塊。

例如：10×10(如圖 22)(紅框內為可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊的總數目。其中此磚牆(10×10－4×10－4×10＋8)/2＝14 塊的可以任意擺置於磚牆內的 1×2 磚塊數)

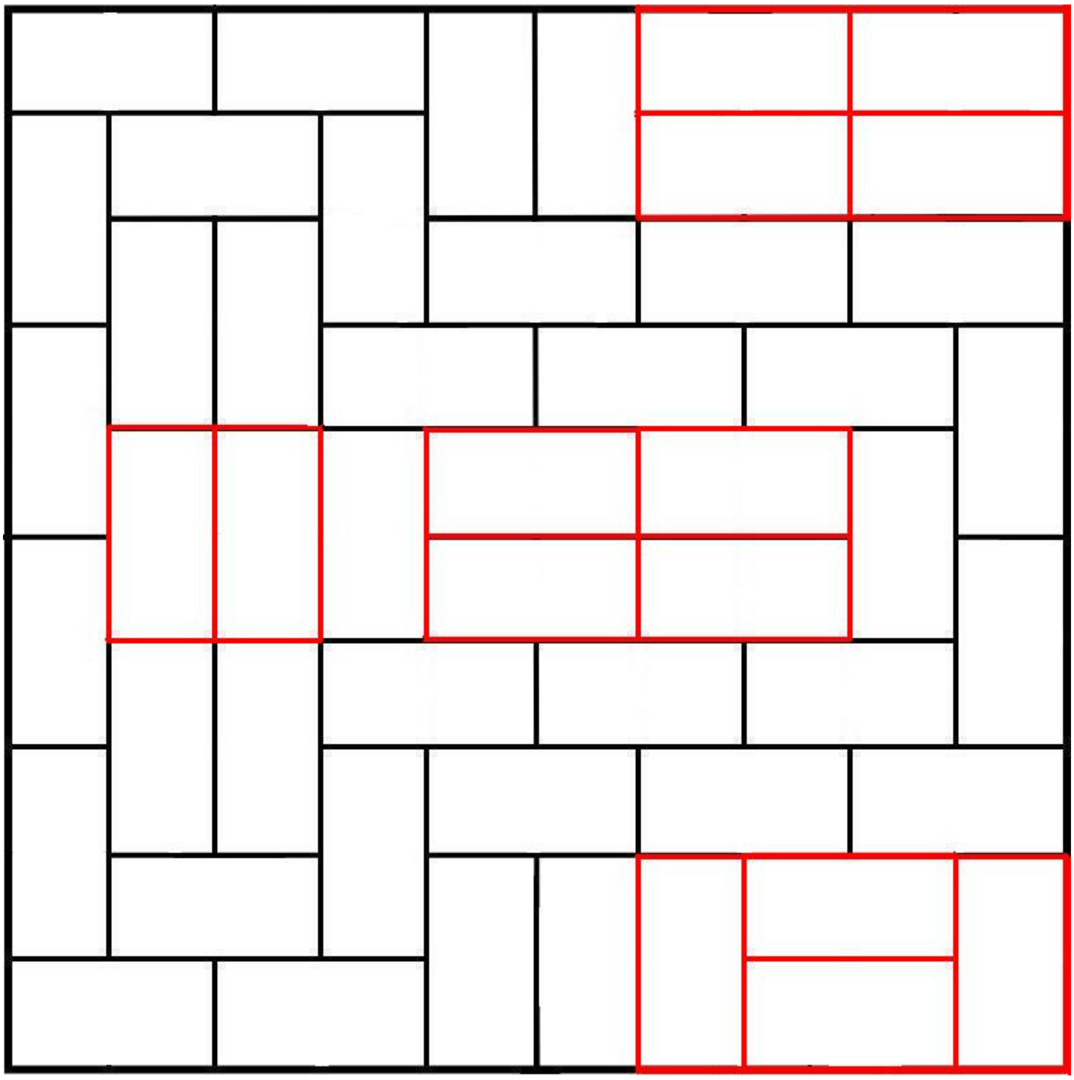

圖 22： 10x10 ，紅色磚塊處為可自由擺放磚塊的區域

十、可排出無瑕疵線的偶數乘偶數的磚牆規格最小為6x8。

證明：

(設一磚牆為 p×q)，p、q 皆為偶數，

由 $p \times q \geqq 4p + 4q - 8$ 的不等式，可得

$(p-4)(q-4) \geqq 8 \longrightarrow p \geqq 6$ 或 $q \geqq 6$，

但因為 6x6 的磚牆無法畫出沒有瑕疵線的圖形，因此偶數乘偶數且可以排出無瑕疵線的磚牆規格至少要是 6x8。

從上列可以發現，當一個為偶數乘以偶數的磚牆只要它的邊長大於等於 6x8 時，它代入不等式的值必大於等於 8(因 $p-4 \geqq 2$，$q-4 \geqq 4$，所以 $(p-4)(q-4) \geqq 8$)，因此可知，一個長寬皆為偶數的圖形當它的規格大於等於 6x8 時的圖形，就一定可以畫出沒有瑕疵線的圖形。

當 $p=q$ 時，根據第二點，邊長一定要為偶數乘偶數(正方形邊長只可能為奇數乘以奇數或偶數乘以偶數)；再藉由上述的推論，正方形磚牆，邊長≧8 時(因為 6x6 的磚牆代入此不等式時的值為 36≧40，矛盾，故 6x6 的磚牆不合)，則此磚牆被磚塊填滿時，就可以沒有瑕疵線。

十一、可排出無瑕疵線的奇數乘偶數磚牆規格最小為 5×6。

證明：

設一磚牆為 p×q，p 為奇數、q 為偶數，由 $p\times q \geqq 4p+3q-8$ 可得

到 $(p-3)(q-4) \geqq 4 \longrightarrow p \geqq 5$ 或 $q \geqq 6$。

十二、一定有可以將一磚牆(最小規格為5×6或6×8)畫出沒有瑕疵線圖形的策略。

證明：

我們找出有一種策略一定可以將一磚牆畫出為沒有瑕疵線的圖形。

先將此磚牆的邊長代入不等式

1..若為奇數(p)乘以偶數(q)，要先符合 $p\times q \geqq 4p+3q-8$ 這個不等式後，將此磚牆中長度為偶數的水平切割線每條都先切過 2 塊的 1×2 磚塊；長度為奇數的垂直切割線從左到右(或從右到左)先依序切過 1 塊、2 塊、1 塊……2 塊、1 塊的 1×2 磚塊。其中沒有被這些 1×2 的磚塊覆蓋的面積，若被分成數塊圖形時，再經過適當的選擇調整之前被長度為奇數的切割線所切過的 1 塊、2 塊、1 塊……2 塊、1 塊的 1×2 磚塊，必可使每塊的面積皆為偶數(若其中有面積為奇數的圖形，就無法被面積為偶數的 1×2 磚塊填滿)，最後再用 1×2 的磚牆將剩下沒被 1×2 的磚塊的地方填滿就行了。

例如：11×12，先代入第六點的不等式，令 $p=11$，$q=12$，$pq=132$，$4p+3q-8=72$，132 大於 72，因此 11×12 的磚牆可以排出沒有瑕疵線的圖形。接著將每條切割線至少切過的 1×2 磚塊，先畫到此磚牆中，並使其中沒被切到的面積，被分成數塊，此時要使每塊的面積皆為偶數(如圖 23)。

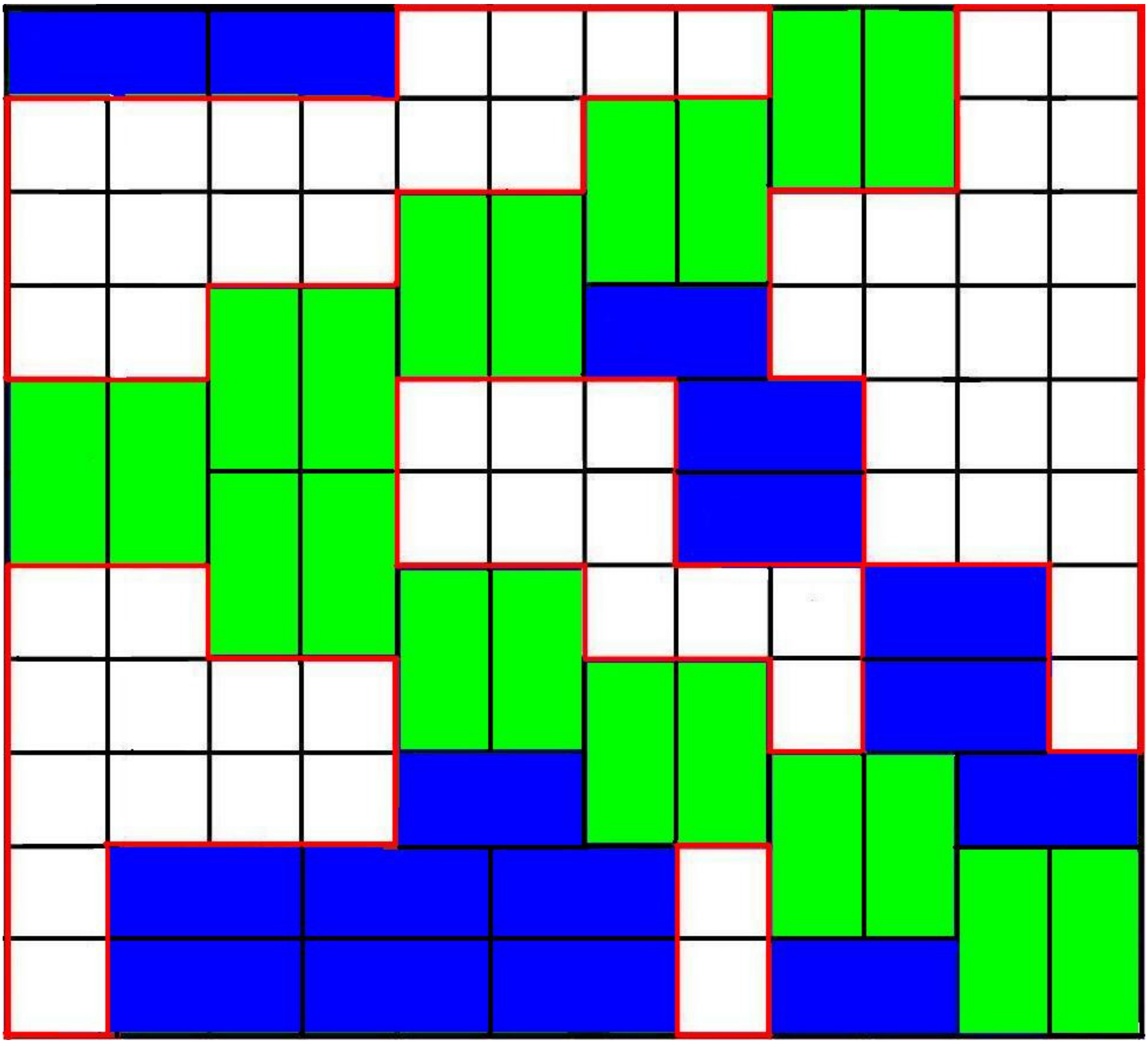

圖 23： 11×12， 其中被紅框圈起來的面積為扣掉此磚牆內至少切過的 1×2 磚塊後剩下的面積，
藍色：垂直切割線所至少切過的 1×2 磚塊；綠色：水平切割線所至少切過的 1×2 磚塊。

最後，再用 1×2 的磚塊將剩下沒被 1×2 的磚塊填滿的地方填滿就行了(如圖 24)。

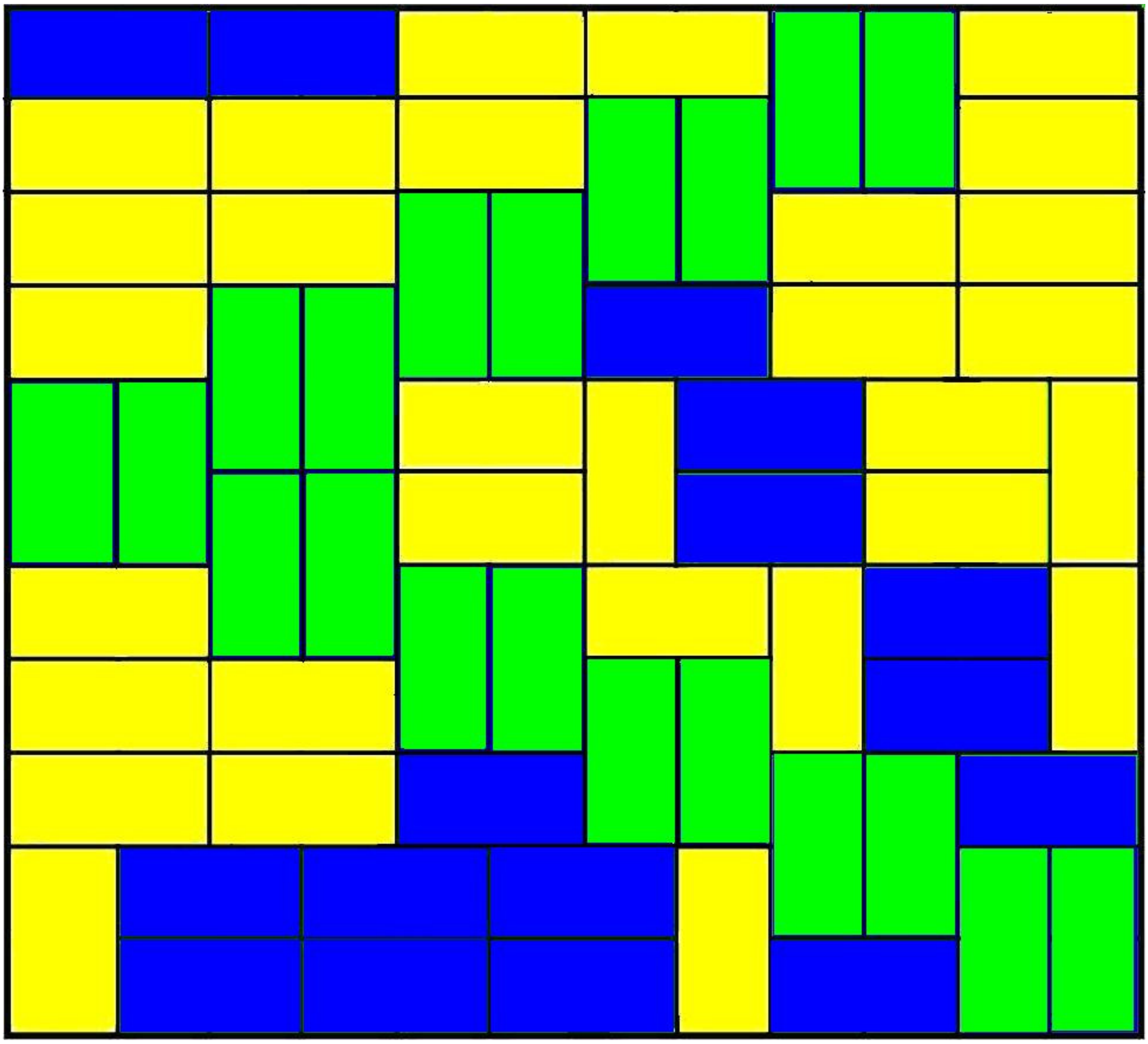

圖 24： 11×12， 藍色：垂直切割線所至少切過的 1×2 磚塊；綠色：水平切割線所至少切過的 1×2 磚塊；黃色：可自由擺放 1×2 磚塊的區域。

2、若為偶數(p)乘以偶數(q)，要先符合 $p\times q \geqq 4p+4q-8$ 這個不等式後，將此磚牆中所有的切割線每條都先切過 2 塊的 1×2 磚塊。其中沒有被這些 1×2 的磚塊覆蓋的面積，若被分成數塊圖形時，再經過適當的選擇調整之前被長度為偶數的垂直切割線所切過的 1×2 磚塊，必可使每塊的面積皆為偶數(若其中有面積為奇數的圖形，就無法被面積為偶數的 1×2 磚塊填滿)。

例如：12x12，先代入不等式，令 p＝12，q＝12，pq＝144，4p＋4q－8＝88，144 大於 88，因此 12x12 的磚牆可以排出沒有瑕疵線的圖形。

接著將每條切割線至少切過的 2 塊 1x2 磚塊，先畫到此磚牆中，並使其中沒被切到的面積，被分成數塊，此時要使每塊的面積皆為偶數(如圖 25)。

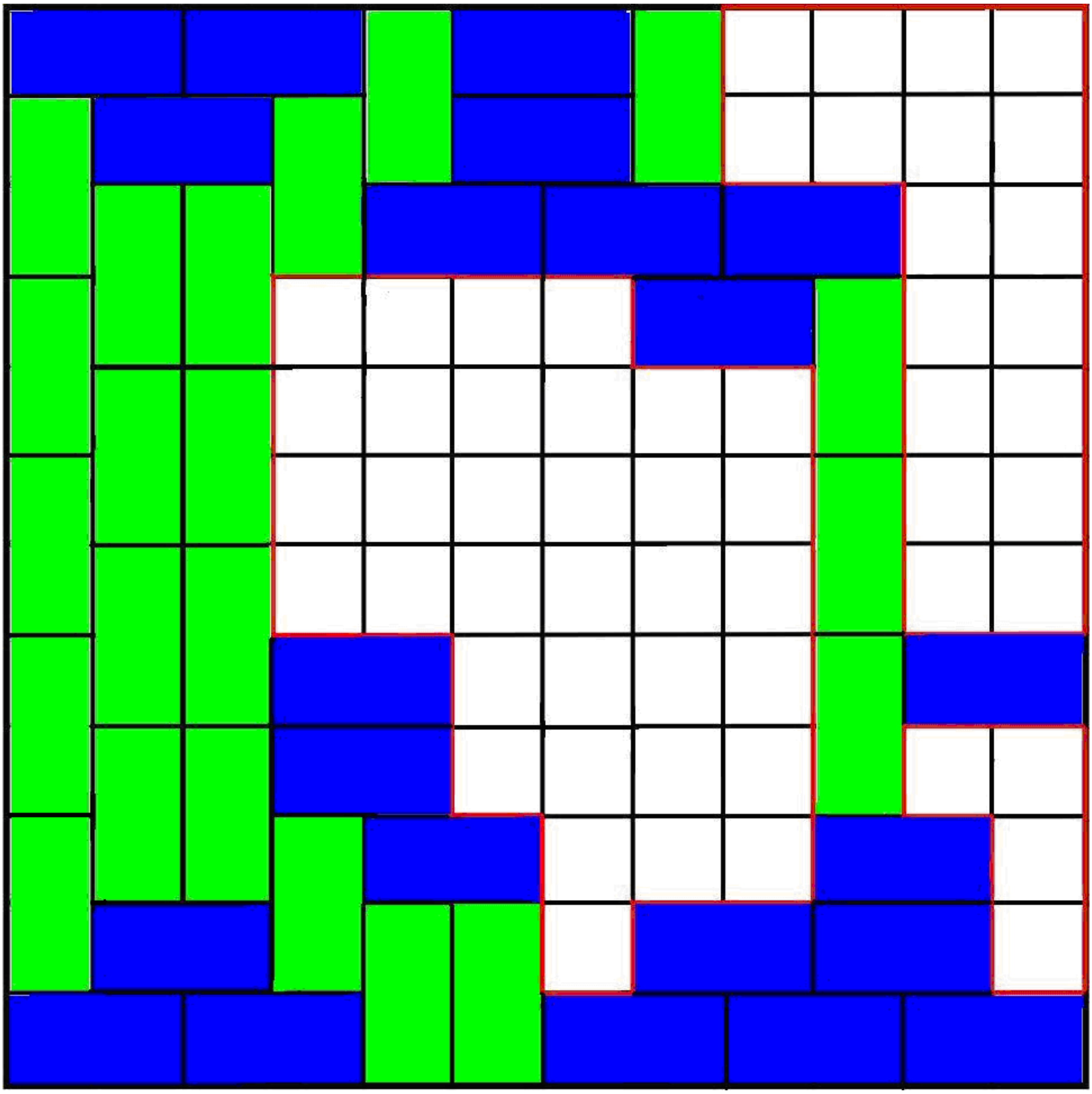

圖 25： 12x12， 其中被紅框圈起來的面積為扣掉此磚牆內至少切過的 1x2 磚塊後剩下的面積，藍色：垂直切割線所至少切過的 1x2 磚塊；綠色：水平切割線所至少切過的 1x2 磚塊。

最後，再用 1x2 的磚塊將剩下沒被 1x2 的磚塊填滿的地方填滿就行了(如圖 26)。

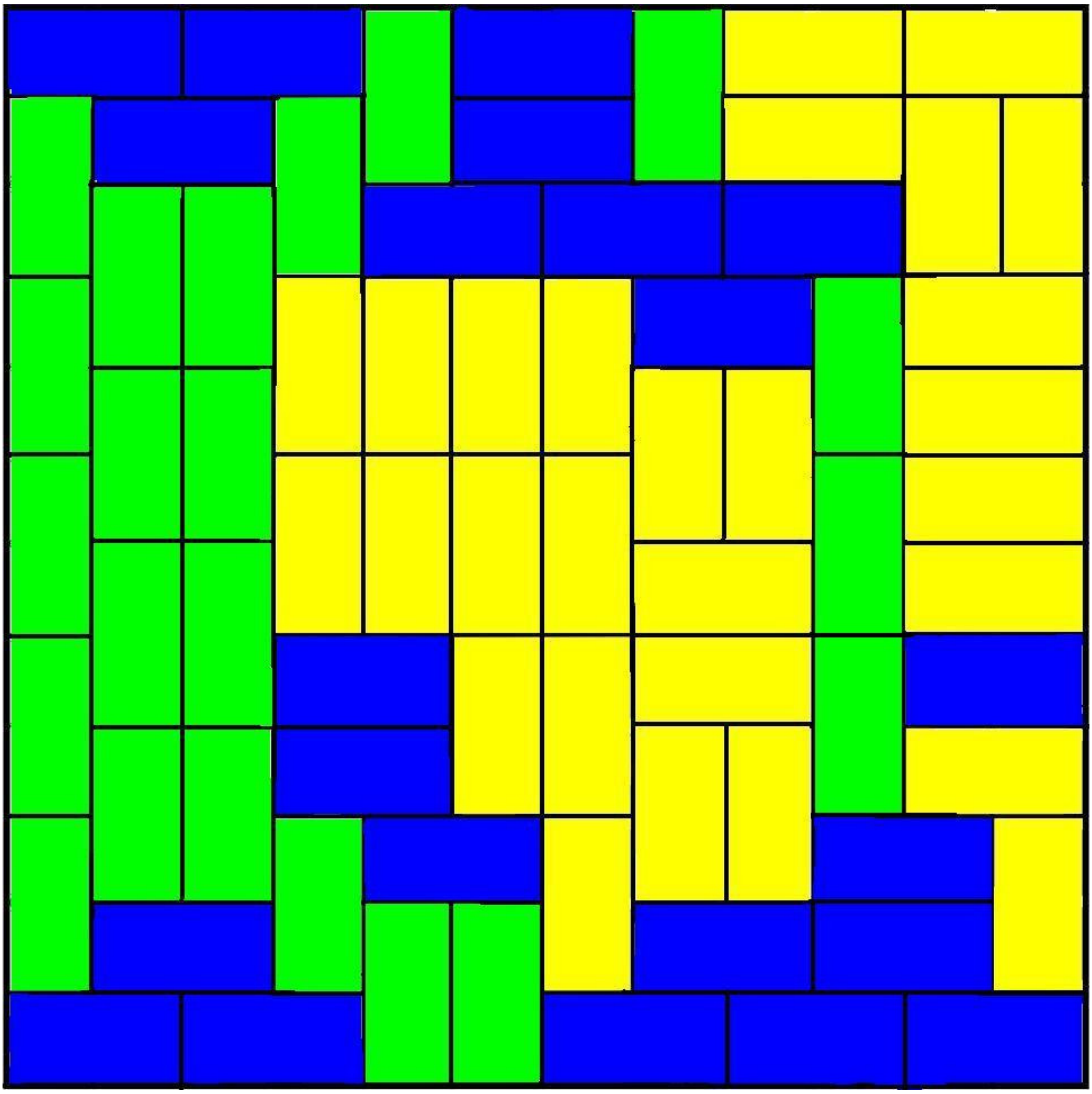

圖 26： 12×12，

藍色：垂直切割線所至少切過的 1×2 磚塊；綠色：水平切割線所至少切過的 1×2 磚塊；黃色：可自由擺放1×2磚塊的區域。

伍、研究結果

一、若一矩形為 p×q，且可被 1×2 的磚塊填滿，則 p、q 中至少有一數必為偶數。

二、可被1×2的磚塊填滿且沒有瑕疵線的磚牆，其切割線所切過1×2磚塊數的奇偶性與此切割線兩側磚牆面積的奇偶性相同。

三、在 p×q 磚牆中(p 為奇數、q 為偶數)，若滿足條件 $p\times q \geqq 4p+3q-8$，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

四、在 p×q 磚牆中，(p、q 皆為偶數)，若滿足條件 $p\times q \geqq 4p+4q-8$，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

五、(一)、在 p×q 的磚牆中(p 為奇數，q 為偶數)，可自由擺放(即橫放或直放皆可)的磚塊數 $(pq-4p-3q+8)/2$ 塊。

(二)、在 p×q 的磚牆中(p、q 皆為偶數)，可自由擺放(即橫放或直放皆可)的磚塊數為 $(pq-4p-4q+8)/2$ 塊。

六、在可被 1×2 的磚塊填滿且沒有瑕疵線的磚牆，

(一)、若切割線的長度為偶數時，則平行偶數邊的切割線依序排列，切過的 1×2 磚塊數皆為偶數。

(二)、若切割線的長度為奇數時，則平行奇數邊的切割線依序排列，切過的1×2磚塊數為奇數、偶數、奇數、……、偶數、奇數。

七、若要使一磚牆可以畫出沒有瑕疵線的圖形，偶數邊要≧6，奇數邊要≧5。若此磚牆為正方形，則邊長要≧8

八、對於一奇×偶或偶×偶的磚牆(最小規格為 5×6 或 6×8)，必有策略可以畫出沒有瑕疵線的圖形。

陸、結論

本研究發現：

一、可以畫出沒有瑕疵線的磚牆最小規格為 5×6(奇數×偶數型)或 6×8(偶數×偶數型)的磚牆。

二、(一)、在 p×q 磚牆中(p 為奇數、q 為偶數)，若滿足條件 $p\times q \geqq 4p+3q-8$，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

(二)、在 p×q 磚牆中，(p、q 皆為偶數)，若滿足條件 $p\times q \geqq 4p+4q-8$，則當此磚牆被 1×2 的磚塊填滿時，必可以排出沒有瑕疵線的磚牆。

三、對於一奇×偶或偶×偶的磚牆(最小規格分別為 5×6 或 6×8)，必有策略可以畫出沒有瑕疵線的圖形。

柒、參考資料與其他

「2009 年青少年數學國際城市邀請賽」參賽代表遴選初選個人數學競賽試題，第二部分：計算證明第二題。

【評語】030420

1. 本作品具實用性。

2. 論述嚴謹完善。

3. 操作實物相當熟練。

4. 應可再深入探討瑕疵線的個數，以及在固定瑕疵線的個數下有幾種排法。