中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030419

從太武山上、看世界

學校名稱：金門縣立金湖國民中學

作者：	指導老師：
國二 呂佳穎	陳建盛
國二 潘雨彤	郭珮雲
國一 陳若瑄	

關鍵詞：相似三角形、比例式

從太武山上、看世界

摘要：

從太武山上望向前方，到底可以看多遠呢？利用三角形的相似性質，用對應邊成比例的特性，將我們要求的距離算出來，並考量實際光穿過大氣的折射率，調整成更符合實際情形。

壹、研究動機：

在一次學校舉行的太武山戶外教學中，採分組教學我被分配到數學組，我們這一組是研究如何測量太武山上的巨石『毋忘在莒』的高度，當時學習利用相似三角形邊會成比例的性質，去推算它的高度。此時站在金門最高地「太武山」上，向前看去一望無際的海面，也看到了烈嶼（小金門）和廈門島，戰地的氣息油然而生，正在享受當前美景時，有個疑頭『站在太武山上，到底可以看多遠？』爲了對這個問題有更深入的了解，於是我找了幾個同學一起來研究，並當成此次科展研究的題目。

貳、研究目的：

一、如何利用數學的方法，來推算太武山上可以看到多遠的地方？

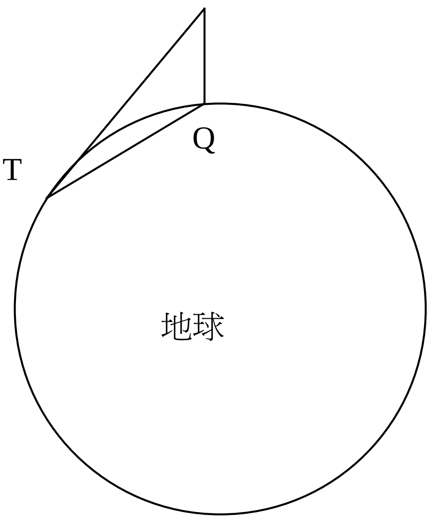
二、推算出來的結果是否符合實際情形？

參、研究設備及器材：

紙、筆、電腦、網路。

肆、研究過程或方法：

一、首先國中八年級第四冊（康軒版 3-2 三角形的全等）有提到當兩個三角形符合 SSS、SAS、ASA、AAS、RHS 其全等性質其中一個，便可以知道這兩個三角形全等，這時我們討論說：如果可以到兩個三角形，並且說明這兩個三角形全等，利用對應邊相等的結果來求出**可看到的距離**。於是利用這個概念我們先畫**太武山高度** $\overline{PQ}$ **、可看到的距離** $\overline{PT}$ **(切線)跟兩者地面距離** $\overline{QT}$ 所形成的直角三角形 ΔPTQ (如圖一)，並努力找出與它相似的直角三角形，最後嘗試的結果我們發現即使找到一個全等三角形，也要先測出此三角形的兩股長，似乎問題又回到了原點。



(圖一)

二、學校舉行的太武山戶外教學是相似形的概念，可以用來計算難以實際測量的物體高度,於是我與幾個同學開始研究相似形的一些基本概念。因爲國中八年級數學老師只提到AAA是相似性質而非全等性質，於是我們向九年級學長借了數學課本第五冊 1-2 相似三角形，並向數學老師請教此單元的一些基本概念如下：

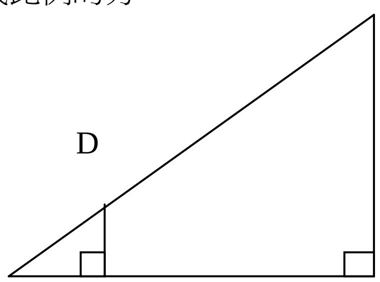
(一) 相似形的定義：將一個圖形放大或縮小之後，其形狀仍然不變，但面積變大或變小，我們稱這兩個圖形爲相似形。

(二) 符 號：我們利用～來表示相似，△ABC 與△DEF 相似，可表成△ABC～△DEF。

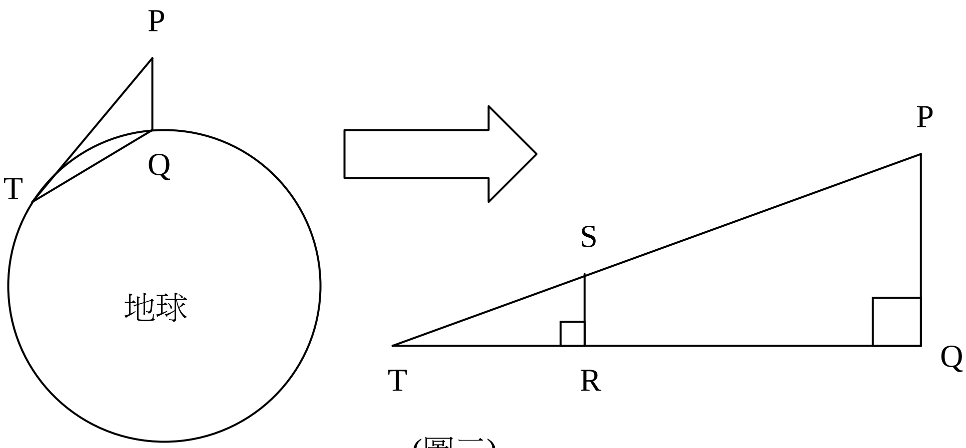
(三) 三角形的相似性質：兩個三角形的邊和角只要符合下列任一種條件，則此兩三角形相似：

1. AAA 相似性質：三組對應角相等。
2. AA 相似性質：兩組對應角相等。(同 AAA 相似性質)
3. SAS 相似性質：一組對應角相等且夾此等角的兩邊應成比例。
4. SSS 相似性質：三組對應邊成比例。

我們大約了解三角形的相似性質之後，並試著想利用課本的例題方式(如圖三)，如果可以先找出△ABC～△ADF 之後，再利用三組對應邊成比例，即 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ ，來求出我們需要的 $\overline{AB}$ 。於是我們試著把 ΔPTQ 重新放大(如圖三)，如果可以試著找出 $\overline{SR}$ ，並把需要的長度找出來，再利用對應邊成比例的方



(圖二)



(圖三)

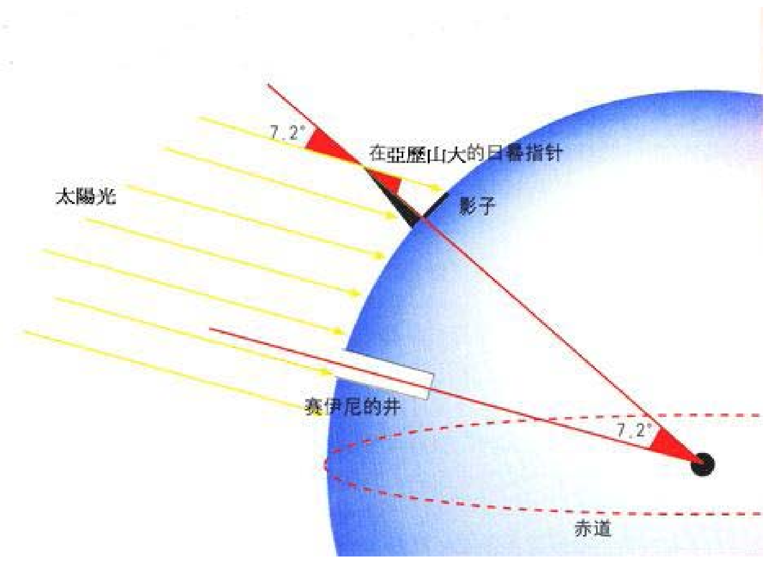
式，把 $\overline{PT}$ 求出來，但是就在一切就緒的情況之下，又遇到困難了，因為要找出 T、R 的位置實在讓我們頭痛不已，有同學提出問題：除了決定位置的難題，是否要坐飛機到達 R 點？$\overline{TR}$ 長度如何測量?……太多太多的問題相繼產生，於是我們決定換個相似三角形的方式來找出 $\overline{PT}$ 。

三、就在我們一籌莫展，不知道這個問題是否可以求出答案時，我們決定把我們所遇到的瓶頸向老師報告，並希望老師可以提供一些線索跟意見，老師知道之後並說：「老師給你們一個思考的線索，除了太武山的高度可以知道之外，還有沒有其他可以查得到或是知道的條件？」我們決定先各自回家後思考之後，再開個討論會，討論會當天我們一一說出自己的想法，並且有了個決定性的發現，那就是『**地球的直徑或半徑可以查詢的到**』，於是我們根據這個討論結果開始上網查詢地球半徑大約為 **6371 公里**，由網路上查到的資訊：亞歷山大城伊瑞斯典，在西元前三世紀首次正式測量地球半徑。伊瑞斯典由古籍得知：夏至正午太陽直射塞恩（位於亞歷山大城南方），但卻斜射亞歷山大，表示地表為一弧面。

(一)利用竿影求出亞歷山大太陽入射角（圓心角）。

(二)測量亞歷山大到賽伊尼的距離（弧長）。

(三)利用弧長和圓心角可以計算子午線周長。

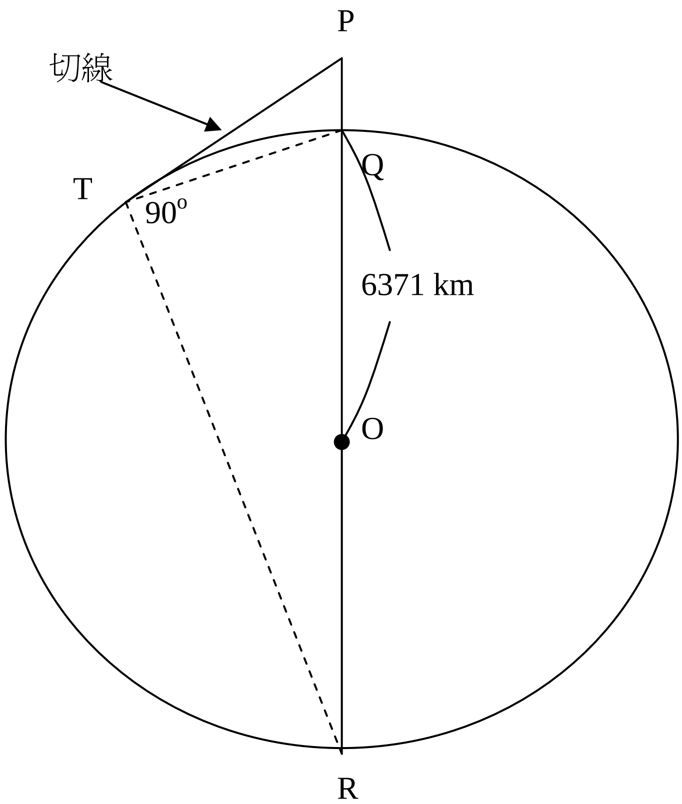


四、找出了地球的半徑之後，我們畫出了一張圖(如圖四)，我們將知道的長度與角度做了個整理： $\overline{OQ}$ =6371 km (地球半徑)

$\overline{PQ}$ = 253 公尺 = 0.253 km (太武山高度)

$\angle QTR = 90^{o}$ (半圓所對的圓周角)

畫出此圖之後，我們發現出現兩個三角形，即△PTQ 與△RTQ，如果能夠證明△PTQ～△RTQ 或許可以將 $\overline{PT}$ 求出來，我們索性把這兩個三角形剪下來，發現每個角對應都不相等，也就是這兩個三角形不相似，我們又遇到瓶頸無法進行下去，大家就可這個問題帶回家思考，並期待下次的討論會有一些新的發現。



(圖四)

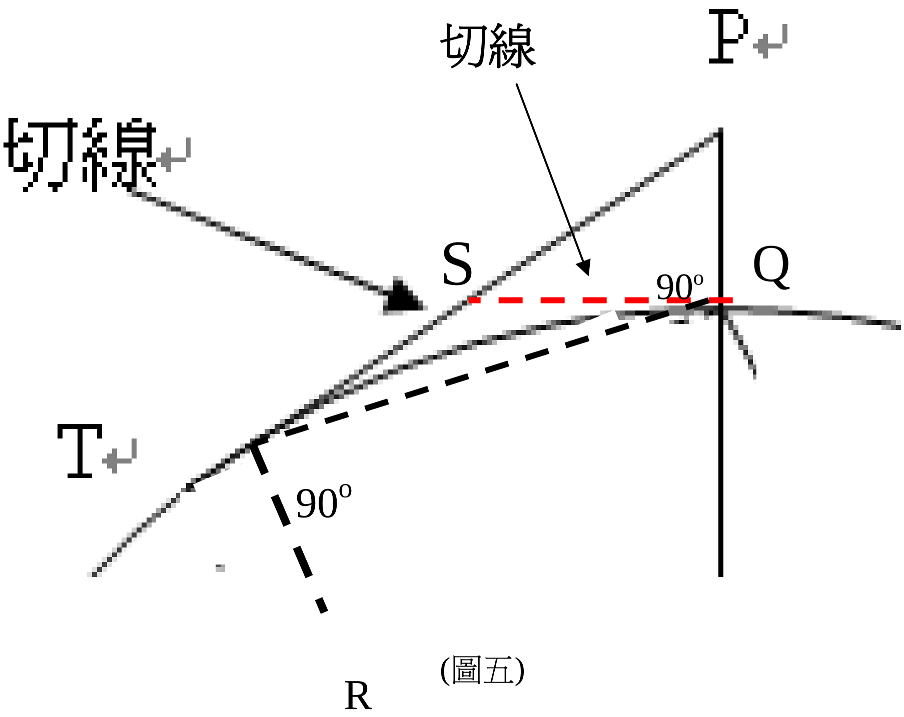
五、終於讓我們期待的討論會又來臨了，我們將上次未完成的問題再次拿出來探討，這次我們找來老師一起討論，觀察 (圖四) 中的三角形，老師給我們一個想法：你們要找的相似三角形，是否只有△PTQ 與△RTQ 兩個嗎？給了我們這個線索之後，老師便留給我們自己去探索思考。之後我們討論了許久，一直無法有新的突破，突然有位同學提出：「那如果是考慮△PTQ、△RTQ 和△RTP 這三個三角形呢？」，這時大家開始討論，並且研究這些三角形是否有相似性質，首先：

(一) △PTQ 和△RTQ 這兩個三角形不相似已經確認。

(二) △RTQ 和△RTP 這兩個三角形很明顯的不相似。(△RTQ 爲直角三角形，但△RTP 不是直角三角形。)

(三) △PTQ 和△RT P 這兩個三角形中，我們發現 $\angle P=\angle P$ (共用角)，我們只要再找到一組對應角相等，或是 $\angle P$ 的兩邊成比例，便可證明相似。我們開始探討 $\angle PQT$ 與 $\angle RTP$ 會不會相等呢？我們將△PTQ 放大之後(如圖五)，並通過 Q 點作一條切線交 $\overline{PT}$ 於 S 點，$\angle PQS=90^{\circ}$，且形成△QST，我們發現：

在△QST 中，因為 $\overline{QS}$ 與 $\overline{TS}$ 為兩切線，交點為 S，故 $\overline{QS}=\overline{TS}$，所以△QST 為等腰三角形，則 $\angle STQ=\angle SQT$，所以 $\angle PTR=90^{\circ}+\angle STQ=\angle SQT+90^{\circ}=\angle PQT$



(圖五)

伍、研究結果：

一、綜合以上發現整理如下：(圖四)

在△PTQ 和△RT P 中

因為 $\angle P=\angle P$ (共用角)

$\angle PTR=90^{\circ}+\angle STQ=\angle SQT+90^{\circ}=\angle PQT$ (上面探討結果)

所以由 AA 相似性質可知：△PTQ～△RT P

故 $\dfrac{\overline{PT}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PT}}$

$\overline{PT}^{2}=\overline{PQ}\times\overline{PR}$

$=0.253\times(0.253+6371\times 2)$

$=3223.790009$

所以 $\overline{PT}\fallingdotseq 56.77843$

也就是站在太武山上約可看到 57km 遠處。

二、我們還是存有疑問：在真實世界上真的可以看到，如我們計算的距離嗎？於是我們決定上網找尋資料與翻閱書籍，得知的結果為：因為光穿過大氣的折射率為 6%，實際上可以看得更遠，所以將 56.77843×（1+ 6%）= 60.1851358 (km)，大約 60 km 遠處。

陸、討論：

一、剛開始我們接觸到這個問題時，我們只會用我們所學到的全等三角形性質去思考，但我們發現無法利用課堂所學來解決時，只好額外學習相似三角形的性質。

二、過程中遇到的一些困難，利用團體思考、腦力激盪，印證團結力量大。從這個學習當中，也知道地球半徑的測量方法及其歷史，這是額外的學習收穫。

三、在課堂上我們大多侷限於課本的知識，想獲得額外的知識卻缺少一種動力，產生被動的學習，透過此次科展更讓我們獲得比這個成果更高的價值，那就是『正確學習態度的養成』。

柒、結論：

這次的研究，我們大致可以得到一個結論：

可以利用相似三角形去計算以些難以測量的高度與長度，這對人類探知事物有很大的幫助，在此次科展的結果中，更可以運用計算在 101 大樓（高約 508m）、玉山(高約 3952m)、甚至聖母峰上(高約 8850m)，遼望地球可以看到的遠方距離，分別是：

（一）101 頂樓可看到的遠處距離＝$\sqrt{0.508\times(0.508+6371\times2)}\times1.06 \fallingdotseq 80$ (km)

（二）玉山山頂可看到的遠處距離＝$\sqrt{3.952\times(3.952+6371\times2)}\times1.06 \fallingdotseq 238$(km)

（三）聖母峰頂可看到的遠處距離＝$\sqrt{8.85\times(8.85+6371\times2)}\times1.06 \fallingdotseq 356$ (km)

捌、參考資料及其他：

一、康軒第四冊 3-2 三角形的全等

二、康軒第五冊 1-2 相似三角形、1-3 相似三角形的運用

三、康軒第二冊 1-3 比例式

四、不可忽視的數學疑問問題　　　仲田紀夫　著

五、網路資料：

（一）http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1508112207198（地球半徑）

（二）http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1106092300440（地球半徑）

（三）http://tw.wrs.yahoo.com/_ylt=A3eg8qC_WBVKSXsBNblr1gt.;_ylu=X3oDMTBzbWY4bm9pBHNlYwNzcgRwb3MDMTAEY29sbwN0dzEEdnRpZAM-/SIG=13d4jh97r/EXP=1242999359/**http%3a//np.cpami.gov.tw/index.php%3foptio

n=com_content%26task=view%26id=598%26Itemid=10004（太武山高度）

（四）http://www.ysnp.gov.tw/01yushan/01-yushan.asp　（玉山高度）

（五）http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1005033103345（101 高度）

（六）http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1105051004803（聖母峰高度）

【評語】030419

1. 立足於家鄉的場景，進行數學探討，是一件可愛的作品，惟數學內涵的部分可再深化，以厚實本作品的數學價值。

2. 所謂「〝可看到〞的遠處距離」應說明清楚。