中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030418

mxn 硬幣翻轉還原之數列化研究

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 田乃嘉	范佐孟
國二 蘇奕宇	鄭釧鋒
國二 葉恩多	
國一 周仔軒	

關鍵詞：硬幣翻轉、同餘、因數

$m\times n$硬幣翻轉還原之數列化研究

壹、 摘要

我們從硬幣直線翻轉(原爲柱體翻轉)做研究，根據遊戲規則(見 p.1)，得出對於s枚硬幣經過一次大翻轉的位置變換關係：

(1) 當x爲偶數，則$f(x)=\frac{1}{2}x$

(2) 當x爲奇數，則$f(x)=\frac{(2s+1)-x}{2}$

其中：x爲原位置，$f(x)$爲新位置。

接著，利用上述的變換關係，發展出我們的創意解法---**「鏈」**(見 p.7)，並研究出鏈的相關性質，利用其中的性質，解出直線翻轉的完美歸位通式：$2^{\ell}\equiv\pm1(\mathrm{mod}\ \ 2s+1)$，其中$\ell$爲主鏈長度，並從通式中再延伸出更多性質。

最後，我們將直線翻轉研究結果擴展到平面翻轉(見 p.14)，並發現平面翻轉完美歸位與兩方程式有關，即$\ell_n y-\ell_m x=0$，$\ell_n y-\ell_m x=1$，其中ℓ_n，ℓ_m分別表示行、列的主鏈長度。進一步，利用相關性質導出平面翻轉第一次完美歸位之通式。

特別聲明：本遊戲的硬幣翻轉規則與歷屆國展的硬幣翻轉規則完全不同。

貳、 研究動機

我們在校內科展作品中找到一份研究資料，其內容包含多個硬幣翻轉的不同遊戲，之後我們針對各遊戲規則分別上網搜尋相關資料。結果獨缺「柱狀翻轉」的研究資料相當有興趣，因此，我們選擇此遊戲規則，並稍加修改到$m\times n$的排列翻轉，做爲我們的研究。

參、 研究目的

一、 尋找硬幣直線翻轉位置變換的數學模式。

二、 探討本遊戲延伸出的性質。

三、 尋找直線翻轉硬幣完美歸位的操作次數之公式。

四、 尋找平面翻轉完美歸位次數之通式。

肆、 研究設備器材

硬幣二十枚、電腦 GSP 幾何繪圖軟體、Flash 動畫製作程式、紙、筆

伍、 研究過程及方法

本研究遊戲規則：

(一)直線排列翻轉：

1. 起始狀態：將 s 個硬幣正面朝上，排成一直線狀，由下而上排列並予以編號，分別爲1,2,⋯,s 如(圖一)。

(圖一)

2. 翻轉規則：由上而下翻轉

第一次操作：翻轉第 1 個硬幣(即將編號 s 翻面)。

第二次操作：翻轉第 1、2 個硬幣(即將編號 $s, s-1$ 硬幣翻面)，並且交換位置。

⋮

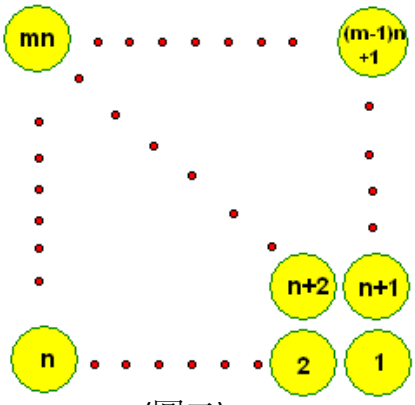
第 s 次操作：翻轉 s 個硬幣(即所有硬幣)。

重複上述操作，直到所有硬幣皆被操作回原位置，且全部正面朝上，方停止遊戲。

註：操作說明見 p. 3。

(二)平面翻轉：

1. 起始狀態：將 $m \times n$ 個硬幣排列成矩形且全部正面皆朝上，從右下角開始依序編號，分別爲1, 2,...., $m \times n$ (如圖二)。



(圖二)

2. 翻轉規則：

[步驟 1]：「行」的操作

第一次操作：翻轉第1行硬幣 (翻面)。

第二次操作：翻轉第1,2行硬幣，使第1, 2行位置互換，且此2行硬幣皆需翻面。

第三次操作：接前次操作後的狀態，翻轉第1,2,3行，使得第1,2,3行變成第3,2,1行，且此3行硬幣皆需翻面。

⋮

第 n 次操作：接第 $n-1$ 次操作後的狀態，翻轉第1,2,⋯,n 行，使得第1,2,⋯,n 行變成第 $n, n-1, \cdots 2, 1$ 行，且此 n 行硬幣皆需翻面。

[步驟 2]：「列」的操作：同「行」操作，只是將「行」翻轉改成「列」翻轉。

[步驟 3]：當依序完成 n 次「行」操作，m 次「列」操作，接著重複[步驟 1、2]之操作。直到所有硬幣回到原位置，且硬幣正面皆朝上，方停止遊戲進行。

爲了方便說明，我們先給本研究一些規定與定義：

一、 硬幣正面朝上，以黃色表示。硬幣反面朝上，以白色表示。

正面：　　反面：

二、 直線大翻轉：將 s 枚硬幣排成一柱狀，依直線排列翻轉規則，自第 1 個硬幣開始，完成 s 次的操作，稱此爲一次「直線大翻轉」，簡稱爲「大翻轉」

三、 $m\times n$ ：表示 n 行 m 列。

四、 行大翻轉：對於 $m\times n$ ，依遊戲規則操作，自第一行開始，依序經過 n 次行的操作，稱此爲一次「行大翻轉」。

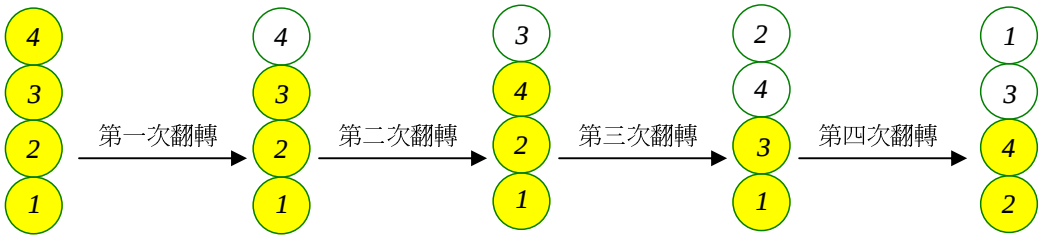
五、 列大翻轉：對於 $m\times n$ ，依遊戲規則，自第一列開始操作，依序經過 m 次列的操作，稱此爲一次「列大翻轉」。

六、 平面大翻轉：對於 $m\times n$ ，依遊戲規則，自第一行開始操作，依序完成了 $m+n$ 次的操作，稱此爲一次「平面大翻轉」。

七、 完美歸位：依遊戲規則操作，直到所有硬幣皆回到原位置且正面朝上，稱之。

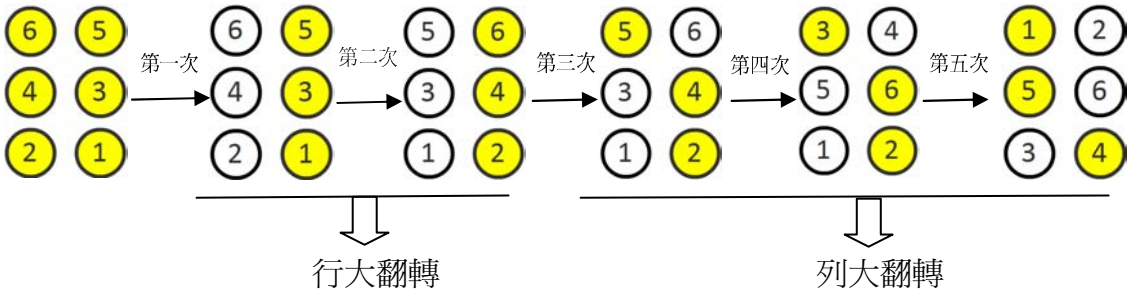
八、 不完美歸位：依遊戲規則操作，直到所有硬幣皆回到原位置，但未全部正面朝上，稱之。

1. 以 $s=4$ 爲例：



經過上面 4 次的翻轉操作，本研究稱此爲一次「直線大翻轉」。

2. 以 3×2 爲例：將 6 個硬幣排成 2 行 3 列。



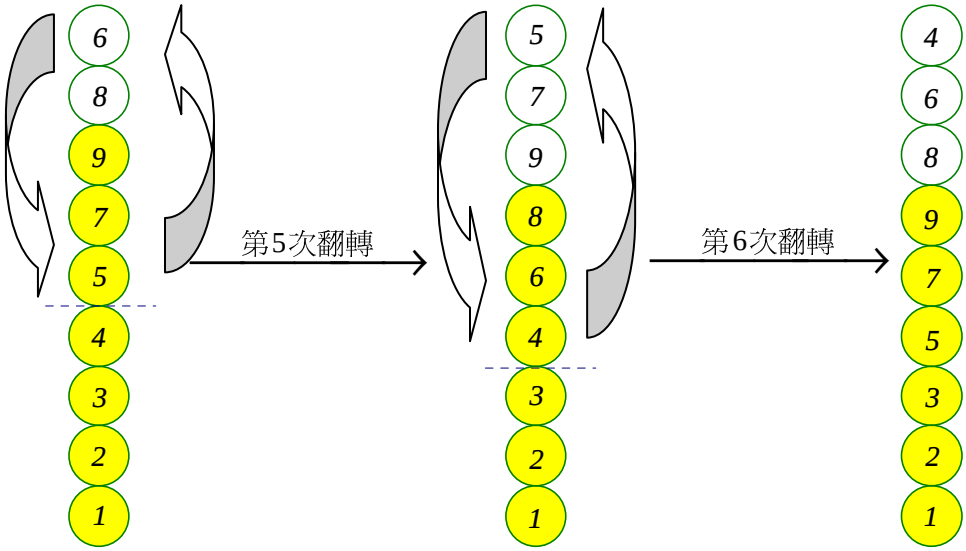
經過上面的 $2+3=5$ 次操作，我們稱爲一次「平面大翻轉」。

根據遊戲規則，很容易的可得知：若僅考慮行的翻轉，則遊戲即爲直線排列翻轉。因此，我們先從直線翻轉研究。

【研究 1】：直線翻轉

【研究 1-1】：根據「直線排列翻轉」規則，將 s 枚硬幣做一次（直線）大翻轉，其排列順序會如何？

以 $s=9$ 爲例，我們選出第 4,5,6 次的翻轉結果如下：



從圖形的操作變換，我們可發現：每一次的硬幣翻轉操作，有一定的模式，即：

「每一次的硬幣翻轉操作，會將上一次的硬幣編號順序，連同新加入的一個硬幣之編號，所形成的數列(由左而右)，做一次逆排列。」

利用此操作模式，可推得：當 s 個硬幣完成一次大翻轉操作，原硬幣編號相鄰的兩數必形成對稱位置(以正中央爲對稱中心)。且因爲第 s 次翻轉，必使得編號 1 之硬幣新位置在 s 號位置，所以編號 2 之硬幣新位置必在 1 號位置，接著可得編號 3 之硬幣新位置必在 $s-1$ 號位置.....如此下去，可知對於 s 個硬幣，經過一次大翻轉，硬幣的排列順序必爲(表一)。爲了方便表示，我們將此圖硬幣從由上而下排列改爲由左而右。

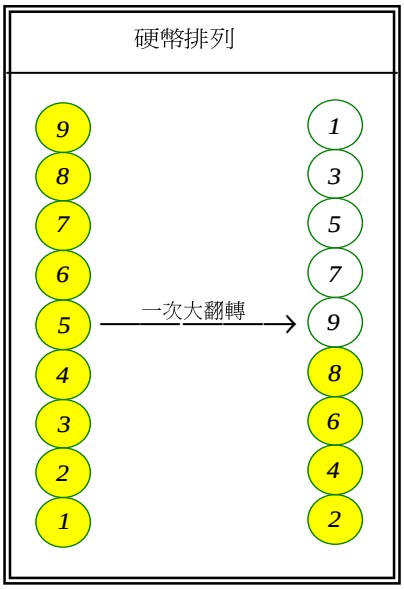
(表一)

原位置		s　s-1　s-2　. . . . . .　3　2　1
新位置	s 爲奇數	中心位置 1　3　5　. . .　s　. . .　6　4　2
	s 爲偶數	中心位置 1　3　5　. . .　s-1　s　. . .　6　4　2

【研究 1-2】：硬幣翻轉的數學模式探討

由於本研究是要探討「硬幣翻轉歸位的操作次數公式」，且歸位顯然跟操作後硬幣的新位置有關。所以我們想到可從【研究 1-1】硬幣經一次大翻轉後，其排列變化(如下表)，抽離出對於同一個硬幣(編號相同)，在大翻轉後，將原位置(以 x 表示)與新位置(以 $f(x)$ 表示)，寫成函數對應關係，以 $s=9$ 爲例，如(表二)(表三)：

(表二)



(表三)

原位置 x	新位置 $f(x)$
9	5
8	4
7	6
6	3
5	7
4	2
3	8
2	1
1	9

(1) 當 x 爲偶數，其〔原位置→新位置〕之關係如(表四)：

(表四)

原位置 x	2	4	6	……	$s-1$	附註
新位置 $f(x)$	1	2	3	……	$\frac{s-1}{2}$	s 爲奇數
原位置 x	2	4	6	……	s	s 爲偶數
新位置 $f(x)$	1	2	3	……	$\frac{s}{2}$	

由表四 $(x, f(x))$ 所形成的數對關係，可得函數關係式爲 $f(x)=\frac{1}{2}x$

(2) 當 x 爲奇數，其〔原位置→新位置〕之關係如(表五)：

(表五)

原位置 x	1	3	5	.....	s	附註
新位置 $f(x)$	s	$s-1$	$s-2$	.....	$\frac{s-1}{2}$	s 爲奇數
原位置 x	1	3	5	.....	$s-1$	s 爲偶數
新位置 $f(x)$	s	$s-1$	$s-2$	.....	$\frac{s+2}{2}$	

由表五 $(x, f(x))$ 所形成的數對關係，即

$$\frac{(s-1)-s}{3-1}=\frac{(s-2)-(s-1)}{5-3}=\cdots=\frac{\frac{s+1}{2}-\frac{s+3}{2}}{s-(s-2)}=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\text{斜率}$$

所以可假設上述關係爲 $f(x)=-\frac{1}{2}x+k$

當 $x=1$

$$\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{2}+k=s$$

$$\Rightarrow k=s+\frac{1}{2}$$

即 $f(x)=-\frac{1}{2}x+s+\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{(2s+1)-x}{2}$

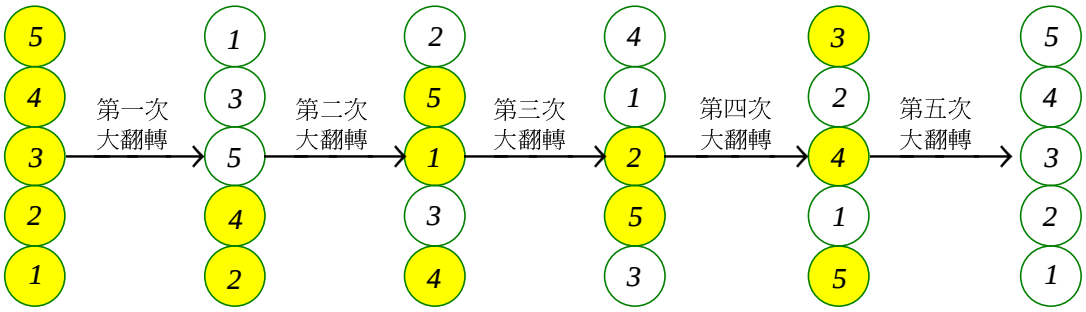
顯然，這兩個函數對我們的研究「硬幣歸位」很重要，因此，我們特別給它們定名爲

變換一： $f(x)=\frac{1}{2}x$ ，其中 x 爲偶數。

變換二： $f(x)=\frac{(2s+1)-x}{2}$ ，其中 x 爲奇數。

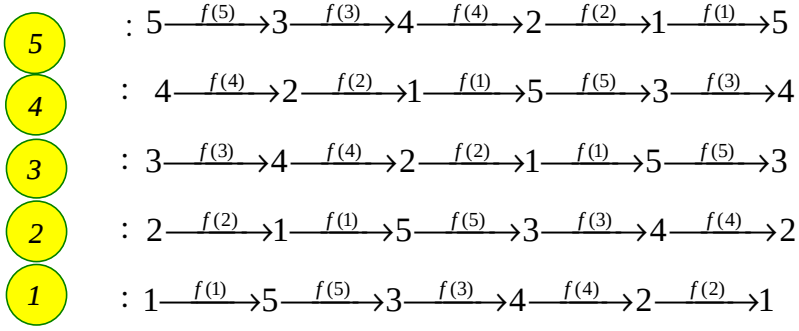
【研究 1-3】：直線翻轉完美歸位的相關探討

1. 我們先做出 $s=5$ ，硬幣的操作還原過程如下(圖三)：



(圖三)

經過五次大翻轉操作，五個硬幣的位置移動過程分別爲



由上述可得經五次大翻轉操作，每次大翻轉需經過 5 次翻轉操作，共 $5\times5=25$ 次。並使得每個硬幣被翻轉 $1+2+3+4+5=15$(奇數)次，讓所有硬幣反面朝上，故還需做五次大翻轉。

即 $s=5$ 的完美歸位，共需 50 次操作。我們將上述硬幣大翻轉的移動簡化成：

$1 \xrightarrow{f(1)} 5 \xrightarrow{f(5)} 3 \xrightarrow{f(3)} 4 \xrightarrow{f(4)} 2 \xrightarrow{f(2)} 1$，再簡化成：

$1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$，並用此表示編號的硬幣經過 5 次大翻轉其位置之變動。

我們將上述簡記稱爲**「鏈」**。

2. 完美歸位是否存在於不完整的大翻轉操作過程中？推論如下：

對於 s ($s\geq2$)個硬幣，在本遊戲的規則下，當遊戲一進行，我們可得知：

(1)當最下面的硬幣第一次加入翻轉操作，此時爲第 s 次操作，即第一次大翻轉。

(2)當1號硬幣被操作後，其所在位置已不在原位置，而是位置 s (最上面)。若要將1號硬幣歸位，則必然要做大翻轉的操作，即最下面(位置1)的硬幣要加入翻轉。

因此，當 s 枚硬幣可完成歸位，則必然是完整的大翻轉操作結束，即不可能結束在某一次未完整的大翻轉操作過程中。有了這推論，要完成完美歸位，我們只要討論大翻轉即可。因此，研究「鏈」，就變得很重要。

3. 鏈的定義與相關性質及完美歸位次數通式探討

鏈的相關定義：

(1)鏈：在本遊戲規則下，將起始位置 i_0 $(i_0=1,2,\cdots,s)$ 的硬幣，經過 ℓ 次大翻轉產生的位置變換，若能使位置爲 i_0 的硬幣第一次回到原位置，其對應型如 (a) 式

$$i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{\ell-1} \to i_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)\text{式}$$

則我們稱 (a) 式的對應關係爲一條鏈。

(2)鏈的長度：對於經過 ℓ 次變換得到的鏈，我們規定其長度爲 ℓ 。

(3)循環鏈：對於不重複位置的鏈(即(a)式中，$i_0,i_1,\cdots,i_{\ell-1},i_\ell$任兩數皆不相等)，稱之。

例如：$s=5$

$1\to5\to3\to4\to2\to1$　鏈的長度5

僅一條鏈組成。

鏈的相關性質：

【性質一】：可逆性

對於每一次大翻轉，原位置$(x_i)\to$新位置(y_i)，其逆操作大翻轉(註)就如同影片的倒帶，必會得到$y_i\to x_i$的對應。

＜註＞逆操作大翻轉：將本遊戲中s個直線狀排列的硬幣規則改成第一次操作s個硬幣，第二次操作位置$2\sim s$共$s-1$個硬幣，按此規律操作，直到第s次操作位置s的一個硬幣。我們將此完整的操作，稱之爲「逆操作大翻轉」。

根據【性質一】，我們寫出下面性質：

【性質二】：鏈必爲循環鏈

證明：假設鏈的長度爲ℓ

①當$\ell=1$，顯然成立。

②當$\ell>1$

若鏈不爲循環鏈，則(a)式中，至少存在$i_s=i_t\ (1<s<t\le\ell-1)$，即

$i_0\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_{s-1}\to i_s\to i_{s+1}\to\cdots\to i_{t-1}\to i_t\to\cdots\to i_{\ell-1}\to i_0\cdots$,

由[性質一]可推得　$i_s\to i_{s-1}$　，　$i_t\to i_{t-1}$

若$i_s=i_t$，則$i_{s-1}=i_{t-1}$，同理可推得$i_{s-2}=i_{t-2}$，…，如此下去，可推得

$i_0=i_1=i_2\cdots=i_{\ell-1}$。根據鏈的定義，可得知，$\ell=1$不合。

因此，由①②可得證，鏈必爲循環鏈。

【性質三】：任意起始位置，皆可產生一條鏈。

證明：假設對於起始位置i_0，經過大翻轉操作後

①當$f(i_0)=i_0$，顯然成立。

②當 $f(i_0) \neq i_0$ ，若鏈不存在(無法歸位)，遊戲會無限操作。但因硬幣數量有限(s 個)，所以其位置對應關係，必存在至少兩個變換位置相同，即

$i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{s-1} \to i_s \to i_{s+1} \to \cdots \to i_{t-1} \to i_t \to i_{t+1} \to \cdots\cdots$

，其中 $i_s = i_t$ ，

同【性質二】之證明，可得每一個位置皆相同，與前提不合。

因此，由①②可得証。

現在，我們可利用上述性質來證明一開始所提的第二個問題：

「對於任意給定的 s 枚硬幣，能否經過有限次的操作，讓 s 枚硬幣做完美歸位？」

答案是肯定的，證明如下：

由【性質二】及【性質三】可得知，任意起始位置 $i_0(i_0 = 1, 2, \cdots, s)$ 皆落在某條鏈中。且每條鏈皆爲循環鏈。假設s 枚硬幣之大翻轉操作共產出 m 條鏈，其長度分別爲

$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m$

令 $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m]$

則經過 ℓ 次的大翻轉必可讓 s 枚硬幣歸位，若爲不完美歸位，則再經過 ℓ 次的大翻轉，即可完美歸位，得証。

舉例： $s = 7$

根據【變換一】【變換二】可得出

$7 \to 4 \to 2 \to 1 \to 7 \Rightarrow$ 長度 $= 4$

$6 \to 3 \to 6 \Rightarrow$ 長度 $= 2$

$5 \to 5 \Rightarrow$ 長度 $= 1$　　共3條鏈

$\because [4, 2, 1] = 4$

$\therefore$ 歸位需4次大翻轉，此時每個硬幣皆被翻轉偶數次，即皆正面朝上。可得完美歸位操作次數爲 $7 \times 4 = 28$ 次。

上面証明中，要求完美歸位的操作次數，需尋求所有鏈長的最小公倍數。但是，當 s 夠大時，鏈必不好找，所有鏈長度的最小公倍數自然也不好求。因此，我們想從較小的 s 值，找出其是否有規律性？以下，我們做出 $2 \le s \le 10$ 的所有鏈(表六)：

(表六)

s	鏈	鏈的長度
2	$1\to 2\to 1$	2
3	$1\to 3\to 2\to 1$	3
4	$1\to 4\to 2\to 1$	3
	$3\to 3$	1
5	$1\to 5\to 3\to 4\to 2\to 1$	5
6	$1\to 6\to 3\to 5\to 4\to 2\to 1$	6
7	$1\to 7\to 4\to 2\to 1$	4
	$3\to 6\to 3$	2
	$5\to 5$	1
8	$1\to 8\to 4\to 2\to 1$	4
	$3\to 7\to 5\to 6\to 3$	4
9	$1\to 9\to 5\to 7\to 6\to 3\to 8\to 4\to 2\to 1$	9
10	$1\to 10\to 5\to 8\to 4\to 2\to 1$	6
	$3\to 9\to 6\to 3$	3
	$7\to 7$	1

註： $2\le s\le 20$ 之完整表格請參閱[附錄]。

從上表中，對於相同 s 值，我們有以下三個發現：

發現1. 含編號1的鏈爲最長鏈。

發現2. 若有兩條以上的鏈，所有鏈的長度所形成的最小公倍數，剛好等於「含有編號1的鏈之長度」。

發現3. 對於 s 枚硬幣中任兩枚硬幣，編號分別爲 p 、q 且 p 、q 爲 $2s+1$ 之因數，則 p 與 q 分屬於不同的鏈中。

爲了方便說明，我們定義：

1. 主鏈：含編號1的硬幣，所形成的鏈，稱之。
2. 副鏈：未含編號1的硬幣，所形成的鏈，稱之。

但上述的兩個發現，是否具有一般性？我們將這兩個發現，寫成下面敘述：

「在直線排列翻轉規則下，對於任意 s 個硬幣，其副鏈長度必為主鏈長度的因數。」

我們試著証明如下：

主鏈長度的尋找：

（1）由【變換二】，可得 $f(1)=\dfrac{(2s+1)-1}{2}=s$

所以主鏈必形如 $1\to s\to\cdots\to 4\to 2\to 1$ 。

（2）根據【可逆性】，我們可將主鏈寫成 $1\to 2\to 4\to\cdots\to s\to 1$

實際上，即是將：

【變換一】 $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ 改寫成 $x=2y$……【逆變換一】

【變換二】 $f(x)=\dfrac{(2s+1)-x}{2}$ 改寫成 $x=(2s+1)-2y$……【逆變換二】

（3） 當自 $y=1$ 開始做逆變換可得操作步驟如下：

步驟 1：根據【逆變換一】操作 a_1 次，可得：$1\to 2\to 2^2\to 2^3\to\cdots\to 2^{a_1}\cdots$①

當 $s<2^{a_1}<2s$ ，此時須將 2^{a_1} 還原成實際的位置，即需代入【逆變換二】

得 $x=(2s+1)-2^{a_1}$ ，所以①式改成：

$1\to 2\to 2^2\to\cdots\to 2^{a_1-1}\to[(2s+1)-2^{a_1}]$……②

步驟 2：繼續經過 a_2 次的【逆變換一】操作，可得

$1\to 2\to 2^2\to\cdots\to 2^{a_2}[(2s+1)-2^{a_1}]$……③

當 $s<2^{a_2}[(2s+1)-2^{a_1}]<2s$ ，此時需代入【逆變換二】還原實際的 x 位置，

得： $x=(2s+1)-2^{a_2}[(2s+1)-2^{a_1}]=2^{a_1+a_2}-(2s+1)(2^{a_2}-1)$

步驟 3：重複上述兩步驟。

最後可推得：

$$x=\left|2^{a_1+a_2+\cdots+a_k}-(2s+1)\left[2^{a_2+a_3+\cdots+a_k}-2^{a_3+a_4+\cdots+a_k}+\cdots+2^{a_k}-1\right]\right|\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

若 $x=1$ 可得歸位，令 $\ell=a_1+a_2+\cdots+a_k$

$m=2^{a_2+a_3+\cdots+a_k}-2^{a_3+a_4+\cdots+a_k}+\cdots+2^{a_k}-1$

則④式可簡化爲：$1=\left|2^{\ell}-(2s+1)\cdot m\right|$

<I>若 $2^{\ell}-(2s+1)m>0$

則 $1=2^{\ell}-(2s+1)\cdot m\equiv 2^{\ell}(\mathrm{mod}\,2s+1)$

即 $2^{\ell}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2s+1)$

<II>若 $2^{\ell}-(2s+1)m<0$

則 $1=(2s+1)m-2^{\ell}\equiv -2^{\ell}(\text{mod } 2s+1)$

即 $2^{\ell}\equiv -1(\text{mod } 2s+1)$

可推得主鏈長度爲 ℓ 。

我們稱＜I＞＜II＞式爲【鏈的通式】

副鏈長度的尋找：

1. 令主鏈長度爲 ℓ ，若不將逆變換過程中得到的值予以還原，則其逆變換的對應爲：$1\to 2\to 2^2\to\cdots\to 2^{\ell}$(其中 $2^{\ell}\equiv\pm 1(\text{mod } 2s+1)$)
2. 若 i 爲某一條副鏈的起始位置，我們將上式每一個位置乘以 i 得：

$i\to 2i\to 2^2 i\to\cdots\to 2^{\ell}\cdot i$

$2^{\ell}\cdot i\equiv\pm i(\text{mod } 2s+1)$

即經過 ℓ 次的逆變換，編號 i 的硬幣會歸位。假設 i 所在的副鏈其長度爲 ℓ_i ，則因爲鏈爲循環鏈，所以副鏈長度 ℓ_i 必爲主鏈長度 ℓ 的因數。

由上述証明，我們確知「副鏈長度必爲主鏈長度之因數」，我們稱之爲【性質四】。

由【鏈的通式】可推得：

【性質五】：當給定任意 s 枚硬幣，若

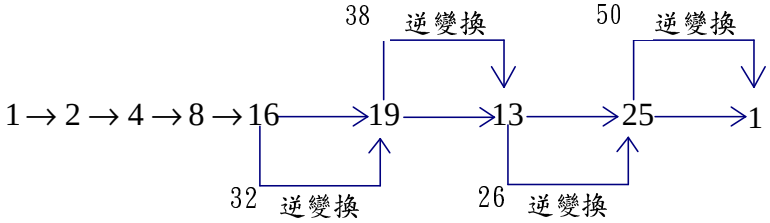
(1) $2^{\ell}\equiv 1(\text{mod } 2s+1)$

則經 ℓ 次大翻轉，即共需 $s\ell$ 次操作使 s 枚硬幣第一次完成完美歸位。

(2) $2^{\ell}\equiv -1(\text{mod } 2s+1)\Rightarrow 2^{2\ell}\equiv 1(\text{mod } 2s+1)$

則經 2ℓ 次大翻轉，即共需 $2s\ell$ 次操作使 s 枚硬幣第一次完成完美歸位。

例如： $s=25$ ，根據【逆變換】，可得



主鏈長度 $\ell=8$ ，又因主鏈中，共有偶數個（4個）位置編號出現奇數（1,19,13,25），所以經過8次的大翻轉，所有硬幣皆完美歸位。

即完成完美歸位，共需 $s\ell=25\times 8=200$ 次操作。

利用【性質五】，我們可將結果改成【性質六】：

【性質六】：對於任意正整數2^x，若$2^x \equiv 1 \pmod{2s+1}$，則

x的最小值$=\begin{cases} \ell\ ; & \text{當爲}k\text{偶數} \\ 2\ell\ ; & \text{當爲}k\text{奇數} \end{cases}$

其中：① ℓ表示本遊戲s枚硬幣的主鏈長度。

② k表示主鏈中有k個硬幣編號爲奇數。

例如：求$2^x \equiv 1 \pmod{51}$，x的最小值。

解：$\because 2s+1=51 \quad \therefore s=25$

主鏈：$1\to 2\to 4\to 8\to 16\to 19\to 13\to 25\to 1$

$\ell=8$，$k=4$（編號$1,19,13,25$）

可得x的最小值$=8$

【性質七】：「在本遊戲中，對於s枚硬幣中任兩枚硬幣，編號分別爲p、q且p、q爲$2s+1$之因數，則p與q分屬於不同的鏈中」

證明：令$p<q$，若q存在於含有p之鏈中，則必

$\left|m(2s+1)-p\cdot 2^r\right|=q$（不影響其一般性），$m$爲正整數

令$2s+1=dq$，則

$\left|m(2s+1)-p\cdot 2^r\right|=q \quad \Rightarrow \left|mdq-p\cdot 2^r\right|=q$

$\Rightarrow mdq-p\cdot 2^r=\pm q \quad \Rightarrow q(md\pm 1)=p\cdot 2^r$

$\because p$、q爲$2s+1$的因數

$\therefore p$、q必爲奇數，可得q爲p之因數，但$p<q$矛盾

所以不合，即q必不存在於含有p之鏈中。

結論：對於枚硬幣，若$(2s+1)$除了本身外，還有k個正因數，則至少有k條鏈存在。

以$s=19$爲例：

$s=19$，$2s+1=39$，除了本身之外，有正因數$1,3,13$

其中：1所在的鏈爲主鏈。3，13所在的鏈爲副鏈。

$3\Rightarrow 13\Rightarrow 5\times 13-1=2^6$……此爲以3爲起始的副鏈，其長度爲6

$13\Rightarrow 3\Rightarrow 3-1=2^1$……此爲以13爲起始的副鏈，其長度爲1

最後進入平面翻轉得探討----------【研究2】：平面翻轉

【研究 2】：平面翻轉完美歸位次數之通式探討。

如同我們尋找主鏈長度，我們先利用遊戲介面來操作2×2到10×10的歸位次數並以表格加以記錄，以便從中尋找其規律性，如(表七)。

	ℓ_m	ℓ_n	$m+n$	歸位次數		ℓ_m	ℓ_n	$m+n$	歸位次數
2x2	2(x)	2(x)	4	8	6x6	6(x)	6(x)	12	72
2x3	2(x)	3(○)	5	43	6x7	6(x)	4(○)	13	**156**
2x4	2(x)	3(x)	6	16	6x8	6(x)	4(x)	14	672
2x5	2(x)	5(x)	7	103	6x9	6(x)	9(x)	15	**540**
2x6	2(x)	6(x)	8	**48**	6x10	6(x)	6(○)	16	**192**
2x7	2(x)	4(○)	9	**36**	7x2	4(○)	2(x)	9	**36**
2x8	2(x)	4(x)	10	**80**	7x3	4(○)	3(○)	10	83
2x9	2(x)	9(x)	11	295	7x4	4(○)	3(x)	11	**132**
2x10	2(x)	6(○)	12	**144**	7x5	4(○)	5(x)	12	**240**
3x2	3(○)	2(x)	5	17	7x6	4(○)	6(x)	13	**156**
3x3	3(○)	3(○)	6	18	7x7	4(○)	4(○)	14	56
3x4	3(○)	3(x)	7	**42**	7x8	4(○)	4(x)	15	**120**
3x5	3(○)	5(x)	8	77	7x9	4(○)	9(x)	16	**576**
3x6	3(○)	6(x)	9	**108**	7x10	4(○)	6(○)	17	**204**
3x7	3(○)	4(○)	10	37	8x2	4(x)	2(x)	10	**80**
3x8	3(○)	4(x)	11	13	8x3	4(x)	3(○)	11	91
3x9	3(○)	9(x)	12	**216**	8x4	4(x)	3(x)	12	244
3x10	3(○)	6(○)	13	**78**	8x5	4(x)	5(x)	13	57
4x2	3(x)	2(x)	6	56	8x6	4(x)	6(x)	14	336
4x3	3(x)	3(○)	7	**42**	8x7	4(x)	4(○)	15	**120**
4x4	3(x)	3(x)	8	24	8x8	4(x)	4(x)	16	64
4x5	3(x)	5(x)	9	**135**	8x9	4(x)	9(x)	17	757
4x6	3(x)	6(x)	10	**120**	8x10	4(x)	6(○)	18	**432**
4x7	3(x)	4(○)	11	**132**	9x2	9(x)	2(x)	11	101
4x8	3(x)	4(x)	12	44	9x3	9(x)	3(○)	12	**216**
4x9	3(x)	9(x)	13	**117**	9x4	9(x)	3(x)	13	**117**
4x10	3(x)	6(○)	14	84	9x5	9(x)	5(x)	14	**630**
5x2	5(x)	2(x)	7	37	9x6	9(x)	6(x)	15	**540**
5x3	5(x)	3(○)	8	163	9x7	9(x)	4(○)	16	**576**
5x4	5(x)	3(x)	9	**135**	9x8	9(x)	4(x)	17	467
5x5	5(x)	5(x)	10	50	9x9	9(x)	9(x)	18	162
5x6	5(x)	6(x)	11	61	9x10	9(x)	6(○)	19	**312**
5x7	5(x)	4(○)	12	**240**	10x2	6(○)	2(x)	12	**144**
5x8	5(x)	4(x)	13	463	10x3	6(○)	3(○)	13	**78**
5x9	5(x)	9(x)	14	**630**	10x4	6(○)	3(x)	14	168
5x10	5(x)	6(○)	15	**450**	10x5	6(○)	5(x)	15	**450**
6x2	6(x)	2(x)	8	**48**	10x6	6(○)	6(x)	16	**192**
6x3	6(x)	3(○)	9	**108**	10x7	6(○)	4(○)	17	**204**
6x4	6(x)	3(x)	10	**120**	10x8	6(○)	4(x)	18	**432**
6x5	6(x)	5(x)	11	599	10x9	6(○)	9(x)	19	**312**
註：黑粗字代表 m ， n 互換結果相同。					10x10	6(○)	6(○)	20	342

表中，ℓ_m 與 ℓ_n 分別爲 m ， n 各自主鏈長度。

（○）：經過一次主鏈操作能完美歸位　（X）：經過一次主鏈操作產生不完美歸位

根據遊戲規則，對於$m\times n$的硬幣翻轉，很容易得知：

1. 行大翻轉只改變列的硬幣排序及硬幣的正反面，但不改變任意行的硬幣排序。

2. 列大翻轉只改變行的硬幣排序及硬幣的正反面，但不改變任意列的硬幣排序。

再根據「直線排列，硬幣翻轉的直線結果」，可得知：

3. 完美(或不完美)歸位，不存在於未完成的行(或列)大翻轉中。

由上述1、2、3可得知，$m\times n$的第一次完美歸位，只存在於下列兩種情形：

〈case1〉完整的平面大翻轉。

〈case2〉完整的行大翻轉。

①行的翻轉歸位：其行大翻轉次數必爲$\ell_n\cdot y$(x爲正整數)。

②列的翻轉歸位：其列大翻轉次數必爲$\ell_m\cdot x$(y爲正整數)。

---

1. 若完美歸位存在於〈case1〉，即「行大翻轉」次數等於「列大翻轉」次數等於「平面大翻轉」次數，則可得下列方程式：$\ell_n y-\ell_m x=0$

2. 若完美歸位存在於〈case2〉，則「行大翻轉」次數減去「列大翻轉」次數等於1，可得下列方程式：$\ell_n y-\ell_m x=1$

令$(\ell_m,\ell_n)=d$

①當$d>1$，在〈case2〉無解。因此$m\times n$的完美歸位必完成於〈case1〉

令$\ell_m=\ell_m'\cdot d$ ，$\ell_n=\ell_n'\cdot d$ ，其中$(\ell_m',\ell_n')=1$

代入$\ell_n y-\ell_m x=0$

得$\ell_n'\cdot d\cdot y-\ell_m'\cdot d\cdot x=0$

$\ell_n' y-\ell_m' x=0$

$\therefore \begin{cases} x=\ell_n' \\ y=\ell_m' \end{cases}$爲一組最小正整數解。

此時，平面大翻轉共$\ell_m\cdot\ell_n'=\ell_m'\cdot d\cdot\ell_n'=[\ell_n,\ell_m]$次。但仍需考慮行翻轉、列翻轉各自在經過主鏈長的次數大翻轉後，其狀態爲完美歸位或不完美歸位而定。其第一次完美歸位次數如下(表八)：

(表八)

<table>
<tr><td colspan="5">$\ell_n y-\ell_m x=0$ ，當$(\ell_m,\ \ell_n)>1$ ，令$\frac{[\ell_m,\ \ell_n]}{\ell_m}=a_m$　$\frac{[\ell_m,\ \ell_n]}{\ell_n}=b_n$</td></tr>
<tr><td>(m)列翻轉</td><td>(n)行翻轉</td><td colspan="3">操作次數通式</td></tr>
<tr><td>$2^{\ell m}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2n+1)$
⇒完美歸位</td><td>$2^{\ell n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2m+1)$
⇒完美歸位</td><td colspan="3">$[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2^{\ell m}\equiv -1(\mathrm{mod}\,2n+1)$
⇒不完美歸位</td><td rowspan="2">$2^{\ell n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2m+1)$
⇒完美歸位</td><td rowspan="2">a_m</td><td>偶</td><td>$[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
<tr><td>奇</td><td>$2[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2^{\ell m}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2n+1)$
⇒完美歸位</td><td rowspan="2">$2^{\ell n}\equiv -1(\mathrm{mod}\,2m+1)$
⇒不完美歸位</td><td rowspan="2">b_n</td><td>偶</td><td>$[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
<tr><td>奇</td><td>$2[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2^{\ell m}\equiv -1(\mathrm{mod}\,2n+1)$
⇒不完美歸位</td><td rowspan="2">$2^{\ell n}\equiv -1(\mathrm{mod}\,2m+1)$
⇒不完美歸位</td><td rowspan="2">a_m+b_n</td><td>偶</td><td>$[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
<tr><td>奇</td><td>$2[\ell_m,\ \ell_n](m+n)$</td></tr>
</table>

②當 $d\ =1$

因爲$\ell_n y-\ell_m x=0$與$\ell_n y-\ell_m x=1$均有正整數解，所以需比較兩方程式的最小正整數解之大小。

〈1〉$\ell_n y-\ell_m x=0$

$\because(\ell_n,\ell_m)=1\ \ \therefore\ \ \begin{cases}x=\ell_n\\ y=\ell_m\end{cases}$ 爲一組最小正整數解

〈2〉$\ell_n y-\ell_m x=1$

假設 $\begin{cases}x=x_1\\ y=y_1\end{cases}$ 爲一組最小正整數解

比較x_1與ℓ_n的大小？

首先，我們在代數辭典裡找到下面定理：

定理：若a,b是兩個互質的正整數，$b>1$，則$(b\text{-}1)$個數$a,2a,3a,.....,(b\text{-}1)a$分別除以$b$所得的餘數不相等。

證明：設h,k是$1,2,\cdots,(b-1)$中不相等的數，則ha ，ka分別除以b所得的餘數不相等。

理由：$ha-ka=(h-k)a$，

$0<h<b, 0<k<b$

若設$h>k$，則$0<h-k<b$

設ha, ka分別除以b所得的餘數相等，則$(h-k)a$應能被b整除。但a, b互質，故$h-k$應能被b整除。但$0<h-k<b$，所以矛盾，故ha，ka分別除以b所得的餘數不相等。 #

由上面定理知，對於(ℓ_n-1)個數

$\ell_m, 2\ell_m, 3\ell_m, \ldots, (\ell_n-1)\ell_m$分別除以$\ell_n$所得的餘數不相等。

又ℓ_n, ℓ_m除以ℓ_m之餘數爲0

因此，可得知

$\ell_m, 2\ell_m, 3\ell_m, \ldots, (\ell_n-1)\ell_m$中必存在一數$k\ell_m$ $(1\le k\le \ell_n-1)$，使得$k\ell_m$除以ℓ_n之餘數爲1。假設此時的商爲y_1，則

$\begin{cases} x=x_1=k \\ y=y_1 \end{cases}$ 是$\ell_n y-\ell_m x=1$的一組最小正整數解，得$x_1<\ell_n$。

又因爲$(\ell_n, \ell_m)=1$，所以$\ell_n y-\ell_m x=1$第二小的正整數解爲$\begin{cases} x=x_1+\ell_n \\ y=y_1+\ell_m \end{cases}$ #

整理上述討論可得：

1. 對於$m\times n$，$(\ell_m, \ell_n)=1$

(1) $\ell_n y-\ell_m x=0$

最小正整數解$\begin{cases} x=\ell_n \\ y=\ell_m \end{cases}$

(2) $\ell_n y-\ell_m x=1$

①最小正整數解 $\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$ ②第二小正整數解 $\begin{cases} x=x_1+\ell_n \\ y=y_1+\ell_m \end{cases}$

兩方程式解的大小關係：$x_1<\ell_n<x_1+\ell_n$……(Ⅰ)式

2. 行、列大翻轉各自經過主鏈長ℓ_n、ℓ_m次的大翻轉產生之完美或不完美歸位。

第一次完美歸位，行、列大翻轉次數之奇偶性限定如下(表九)：

(表九)

(列，行)	(O，O)	(O，×)	(×，O)	(×，×)
奇偶性	(無，無)	(無，偶)	(偶，無)	(奇，奇)、(偶，偶)

3. 由(Ⅰ)式可得第一次完美歸位操作次數之通式，其分類方式如（表十）：

(表十)

歸位類型	ℓ_m	ℓ_n	$(x_1 \text{ ，} y_1)$	$(\ell_n \text{ ，} \ell_m)$	$(x_1+\ell_n \text{ ，} y_1+\ell_m)$	操作次數通式
(O，O)	無限制					$\ell_m x_1(m+n)+n$
(O，×)	偶	奇	(偶，奇)	**(奇，偶)**		$\ell_m \ell_n(m+n)$
	偶	奇	(奇，奇)	**(奇，偶)**		$\ell_m \ell_n(m+n)$
	奇	偶	(奇，奇)	(偶，奇)	**(奇，偶)**	$\ell_m(x_1+\ell_n)(m+n)+n$
	奇	偶	**(奇，偶)**			$\ell_m x_1(m+n)+n$
	奇	奇	(偶，奇)	(奇，奇)	**(奇，偶)**	$\ell_m(x_1+\ell_n)(m+n)+n$
	奇	奇	**(奇，偶)**			$\ell_m x_1(m+n)+n$
(×，O)	偶	奇	**(偶，奇)**			$\ell_m x_1(m+n)+n$
	偶	奇	(奇，奇)	(奇，偶)	**(偶，奇)**	$\ell_m(x_1+\ell_n)(m+n)+n$
	奇	偶	(奇，奇)	**(偶，奇)**		$\ell_m \ell_n(m+n)$
	奇	偶	(奇，偶)	**(偶，奇)**		$\ell_m \ell_n(m+n)$
	奇	奇	**(偶，奇)**			$\ell_m x_1(m+n)+n$
	奇	奇	(奇，偶)	(奇，奇)	**(偶，奇)**	$\ell_m(x_1+\ell_n)(m+n)+n$
(×，×)	偶	奇	(偶，奇)	(奇，偶)	**(奇，奇)**	$\ell_m(x_1+\ell_n)(m+n)+n$
	偶	奇	**(奇，奇)**			$\ell_m x_1(m+n)+n$
	奇	偶	**(奇，奇)**			$\ell_m x_1(m+n)+n$
	奇	偶	(奇，偶)	(偶，奇)	**(偶，偶)**	$\ell_m(x_1+\ell_n)(m+n)+n$
	奇	奇	(偶，奇)	**(奇，奇)**		$\ell_m \ell_n(m+n)$
	奇	奇	(奇，偶)	**(奇，奇)**		$\ell_m \ell_n(m+n)$

陸、結論與討論

一、 直線翻轉：

1. 按本遊戲的規則，可得對於s枚硬幣經過第一次大翻轉的 [數學模式]：

<1> 當 x 爲偶數，則 $f(x)=\frac{1}{2}x$ ……【變換一】

<2> 當 x 爲奇數， $f(x)=\frac{(2s+1)-x}{2}$ ……【變換二】

其中： x 爲原位置， $f(x)$ 爲新位置。

2. 完美歸位不可能發生在不完整的大翻轉操作過程中。

3. 對於 s 枚硬幣，若 $2^{\ell}\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,2s+1)$ ，則主鏈長度 $=\ell$ 。

4. 利用「鏈」，我們得到下列重要結論：

<1> 副鏈長度必爲主鏈長度的因數。

<2> 對於 s 枚硬幣，若主鏈長度 $=\ell$ ，且主鏈中有 k 個位置編號爲奇數，則：

① 當 k 爲偶數，則第一次完美歸位須 $s\ell$ 次操作。

② 當 k 爲奇數，則第一次完美歸位須 $2s\ell$ 次操作。

5. 對於任意正整數 2^x ，若 $2^x\equiv1(\mathrm{mod}\,2s+1)$ ，則

$$x\text{的最小值}=\begin{cases}\ell\ ; & \text{當爲}k\text{偶數}\\ 2\ell\ ; & \text{當爲}k\text{奇數}\end{cases}$$

其中：① ℓ 表示本遊戲 s 枚硬幣的主鏈長度。

② k 表示主鏈中有 k 個位置編號爲奇數。

二、 平面翻轉：

對於 $m\times n$ 的硬幣翻轉，令行列大翻轉主鏈長分別爲 ℓ_n ， ℓ_m ，則

1. 完美歸位只存在於：

〈case1〉完整的平面大翻轉中。其平面大翻轉次數與方程式 $\ell_n y-\ell_m x=0$ 有關。

〈case2〉完整的行大翻轉中，其行大翻轉次數與方程式 $\ell_n y-\ell_m x=1$ 有關。

2. 當 $(\ell_m,\ell_n)>1$ ，則完美歸位必存在於〈case1〉。其第一次完美歸位通式如(表八)

3. 當 $(\ell_m,\ell_n)=1$ ，其第一次完美歸位通式如(表十)

柒、參考文獻

洪國政 (2006).你今天翻了沒？-翻硬幣遊戲的進階探討.台北縣九十五學年度國民中小學科學展覽會. 台北縣政府教育局.

張桓瑞 (2005). 再翻出一片天. 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會. 國立科學教育館.

陳美文,范姜敏容 (2005). 翻動「棋跡」. 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會. 國立科學教育館.

羅資涵,姜巧卿,謝維櫻,姜子荃 (2005). 乾坤大挪移. 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會. 國立科學教育館.

代數學辭典(上). p.262. 九章編輯部譯.

[附錄]

n	鏈	鏈的長度
2	$1\to 2\to 1$	2
3	$1\to 3\to 2\to 1$	3
4	$1\to 4\to 2\to 1$	3
	$3\to 3$	1
5	$1\to 5\to 3\to 4\to 2\to 1$	5
6	$1\to 6\to 3\to 5\to 4\to 2\to 1$	6
7	$1\to 7\to 4\to 2\to 1$	4
	$3\to 6\to 3$	2
	$5\to 5$	1
8	$1\to 8\to 4\to 2\to 1$	4
	$3\to 7\to 5\to 6\to 3$	4
9	$1\to 9\to 5\to 7\to 6\to 3\to 8\to 4\to 2\to 1$	9
10	$1\to 10\to 5\to 8\to 4\to 2\to 1$	6
	$3\to 9\to 6\to 3$	3
	$7\to 7$	1
11	$1\to 11\to 6\to 3\to 10\to 5\to 9\to 7\to 8\to 4\to 2\to 1$	11
12	$1\to 12\to 6\to 3\to 11\to 7\to 9\to 8\to 4\to 2\to 1$	10
	$5\to 10\to 5$	2
13	$1\to 13\to 7\to 10\to 5\to 11\to 8\to 4\to 2\to 1$	9
	$3\to 12\to 6\to 3$	3
	$9\to 9$	1
14	$1\to 14\to 7\to 11\to 9\to 10\to 5\to 12\to 6\to 3\to 13\to 8\to 4\to$	14
15	$1\to 15\to 8\to 4\to 2\to 1$	5
	$3\to 14\to 7\to 12\to 6\to 3$	5
	$5\to 13\to 9\to 11\to 10\to 5$	5
16	$1\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$	5
	$3\to 15\to 9\to 12\to 6\to 3$	5

	$5 \to 14 \to 7 \to 13 \to 10 \to 5$	5
	$11 \to 11$	1
17	$1 \to 17 \to 9 \to 13 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$	12
	$5 \to 15 \to 10 \to 5$	3
	$7 \to 14 \to 7$	2
18	$1 \to 18 \to 9 \to 14 \to 7 \to 15 \to 11 \to 13 \to 12 \to 6 \to 3 \to 17 \to 10 \to 5 \to 16$ $4 \to 2 \to 1$	18
19	$1 \to 19 \to 10 \to 5 \to 17 \to 11 \to 14 \to 7 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$	12
	$3 \to 18 \to 9 \to 15 \to 12 \to 6 \to 3$	6
	$13 \to 13$	1
20	$1 \to 20 \to 10 \to 5 \to 18 \to 9 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$	10
	$3 \to 19 \to 11 \to 15 \to 13 \to 14 \to 7 \to 17 \to 12 \to 6 \to 3$	10

【評語】030418

本作品探討 mxn 硬幣翻轉還原性的問題。(1)找出對 m、n 判斷能否翻轉還原。(2)能還原找出適當過程、大翻轉、鏈等工具計算完美歸位次數之通式，有不錯的數學演繹，也具趣味性。