中華民國 第49屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030416

打破有限的禁錮---$X^m=X^p$無限解之策略研究

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 林育立	洪國政
國二 洪偉聖	陳志和
國二 李瑄	
國二 魏家妤	

關鍵詞：自守數、有限解、無限解

打破有限的禁錮-----$X^m = X^p$ 無限解之策略研究

摘要:

何謂無限解？若 n 位正整數 B_n，滿足 $x^m \equiv x^p \bmod 10^n$，則稱 B_n 是 $x^m = x^p$ 的 n 位數解。例:$249^4 = 3844124\underline{001}$、$249^2 = 62\underline{001}$，所以 249 爲 $x^4 = x^2$ 的一個三位數解。當 $n \to \infty$ 時，則稱 B_n 是 $x^m = x^p$ 的一個無限位數解，簡稱爲無限解。

本研究主要在探討方程式 $x^2 = x$、$x^3 = x$、$x^4 = x$、、、、$x^m = x$、$x^m = x^p$ 無限解的規律性及各方程式無限解的個數，並加以證明。幸運地，我們利用任意數次方後其個位數每四個循環一次的特性，藉由整數論定理的推導，並佐以Mathematica軟體輔助計算，得到以下令人振奮的結論！

在 $X^m = X^p$ 的無限解中：

(1)若 $m-p+1$ 爲 4k-2 或 4k(即 $m-p+1$ 爲偶數) $k \in N$，則其必僅有兩個無限解。

(2)若 $m-p+1$ 爲 4k-1，$k \in N$，則其必僅有七個無限解。

(3)若 $m-p+1$ 爲 4k+1，$k \in N$，則其必僅有十三個無限解。

一、研究動機:

學校所教的數學總是說一是一，說二是二，$X^2 = X$ 的解一定只有兩個 0、1。但某一天看到「無限中的有限」這本書中提出了「$X^2 = X$ 無限解」的概念，徹底推翻了我們所學的正統理論，令我們感到既震驚又新鮮！又參考各文獻資料，發現歷年來的科展研究作品，都只針對二次、三次、四次、五次自守數去加以探討，並沒有討論到無限解的概念、更沒有將其一般化，如此更激發了我們的好勝心，決定加以深入研究。

二、研究問題:

（一）何謂無限解？

（二）找出 $x^2 = x$ 的無限解，並加以證明。

（三）找出 $x^3 = x$ 的無限解，並加以證明。

（四）找出 $x^4 = x$ 的無限解，並加以證明。

（五）找出 $x^5 = x$ 的無限解，並加以證明。

（六）找出 $x^m = x$ 的無限解，並加以證明。

（七）找出 $x^m = x^p$ 的無限解，其中 $m > p > 1$，並加以證明。

三、研究器材:

（一）十二位數計算機

（二）電腦（Mathematica 軟體）

四、研究過程:

（一）何謂無限解？

在一元二次方程式 $x^2 = x$ 中，解得 $x = 0$ 或 1，則 0 和 1 稱爲其有限解。當東方的中國人習慣於從左至右橫寫自己富有民族氣息的中國文字時，在非洲大陸的埃及人卻習慣於由右至左書寫橫行的阿拉伯文。算盤是我們祖先發明的，珠算的加法向來由左至右，而小學的筆算加法卻是從右到左，人們已經同時習慣於兩者，誰也不感覺期間有什麼不盡合理的地方。照此看來，當我們記述某數時，

例如 5876，也就無須呆板認定從左到右的書寫順序『5→8→7→6』，即使由右至左的書寫『5←8←7←6』，也不必大驚小怪了！若跳脫舊有的思維，由右至左反向思考，假設一位正整數 A_1，滿足 $x^2 \equiv x \bmod 10$(即同除以 10 的餘數相同)，則稱 A_1 是 $x^2 = x$ 的一位數解；若二位正整數 A_2，滿足 $x^2 \equiv x \bmod 10^2$，則稱 A_2 是 $x^2 = x$ 的二位數解；同理若 n 位正整數 A_n，滿足 $x^2 \equiv x \bmod 10^n$，則稱 A_n 是 $x^2 = x$ 的 n 位數解。例：$\underline{1}^2 = \underline{1}$、$\underline{5}^2 = 2\underline{5}$、$\underline{6}^2 = 3\underline{6}$，所以 1、5、6 皆為 $x^2 = x$ 的一位數解；$\underline{75}^3 = 4218\underline{75}$，所以 75 為 $x^3 = x$ 的一個二位數解；$\underline{376}^4 = 19987173\underline{376}$，所以 376 為 $x^4 = x$ 的一個三位數解。因為符合條件的位數（即 n 值），可以不斷地增加，並趨近於無窮大。因此，若 A_n 是一個 n 位正整數，且滿足 $x^2 \equiv x \bmod 10^n$，當 $n \to \infty$ 時，則稱 A_n 是 $x^2 = x$ 的一個無限位數解，簡稱為無限解。同理若 n 位正整數 B_n，滿足 $x^m \equiv x^p \bmod 10^n$，則稱 B_n 是 $x^m = x^p$ 的 n 位數解。例:$249^4 = 3844124\underline{001}$、$249^2 = 62\underline{001}$，所以 249 為 $x^4 = x^2$ 的一個三位數解。當 $n \to \infty$ 時，則稱 B_n 是 $x^m = x^p$ 的一個無限位數解，簡稱為無限解。

（二）有關 $x^2 = x$ 的無限解之探討:

1.了解無限解的意義後，首先我們從 $x^2 = x$ 的一位數解開始找起。

(1)只考慮個位數:

我們先找出個位數符合的數，當然因為現在是比個位數，所以平方後所得的數也要取個位。

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$

$4^2 = 16$　$5^2 = 25$　$6^2 = 36$
$7^2 = 49$　$8^2 = 64$　$9^2 = 81$

我們可發現個位數代入後只有 1,5,6 符合我們要的條件

(2)接下來取它們的十位數（取十位數，它的平方也要取十位數）

①個位數 1：

$01^2 = 01$　$51^2 = 2601$
$11^2 = 121$　$61^2 = 3721$
$21^2 = 441$　$71^2 = 5041$
$31^2 = 961$　$81^2 = 6561$
$41^2 = 1681$　$91^2 = 8281$

→可看出只有 01 符合我們所要的

②個位數 5：

$05^2 = 25$　$55^2 = 3025$
$15^2 = 225$　$65^2 = 4225$
$25^2 = 625$　$75^2 = 5625$
$35^2 = 1225$　$85^2 = 7225$
$45^2 = 2025$　$95^2 = 9025$

→發現有一個數 $25^2 = 625$ 符合我們要的。

③個位數 6：

$06^2 = 36$　$56^2 = 3136$
$16^2 = 256$　$66^2 = 4356$
$26^2 = 676$　$76^2 = 5776$
$36^2 = 1296$　$86^2 = 7396$
$46^2 = 2116$　$96^2 = 9216$

→發現有一個數 $76^2 = 5776$ 符合我們要的。

(3)由以上式子可發現 01,25,76 符合我們的條件，再來我們從 01,25,76 的第三位開始求，當然同樣的其平方也只取尾數三位。

① **01:**

$001^2=001$	$101^2=10201$	$201^2=40401$	$301^2=90601$	$401^2=160801$
$501^2=251001$	$601^2=361201$	$701^2=491401$	$801^2=641601$	$901^2=811801$

② **25：**

$025^2=625$	$525^2=275625$
$125^2=15625$	$625^2=390625$
$225^2=50625$	$725^2=525625$
$325^2=105625$	$825^2=680625$
$425^2=180625$	$925^2=855625$

→發現有一個數 $625^2=390625$ 符合我們要的。

③ **76：**

$076^2=5776$	$576^2=331776$
$176^2=30976$	$676^2=456976$
$276^2=76176$	$776^2=602176$
$376^2=141376$	$876^2=767376$
$476^2=226576$	$976^2=952576$

→發現有一個數 $376^2=141376$ 符合我們要的。

(4)我們找到了 001 , 625 和 376 符合我們的條件，但如此一來也衍生出幾個問題：

①顯然地，個位數 1 的無限解爲----0000000001(此爲有限解)

②這樣的過程太過繁雜了，且一般計算機的使用位數最高只到 12 位，搞不好求第 4 位數解時就不能顯示我們要的了，所以必須找一個能算龐大數字的計算機或程式。

③難道它沒有規律嗎？如果有規律，那用規律找應該會比較快吧！

(5)針對第三個問題，我們開始展開研究。終於皇天不負苦心人，我們真的找到規律了，請比對下列式子:

①尾數 5 的無限解求解順序:

$5^2=25$

$25^2=625$

$625^2=390625$

$0625^2=390625$

我們發現：當我們在求尾數 5 的無限解時，符合的解其平方後所對應的數的前一位（就是上列式子的紅字部分）就是我們求的解的下一位。

例如：

$5^2=25$ 符合我們要求，而 2 就是要平方的數的前一位，也就是如果我們推 5 的十位的時候所得的數一定是 2。

$25^2=625$ 符合，則我們推 25 的百位時所得的數一定是 6。

$625^2=390625$ 符合，則推 625 的千位時所得的數一定是 0。

$0625^2=390625$ 符合，則推 0625 的萬位時所得的數一定是 9。(以此類推)

當然也許會有人問：那求尾數 6 的無限解時，就沒有這個規律嗎？其實是有的，只是過程有些不同。

②尾數 6 的無限解求解順序:

$6^2=36$

$76^2=5776$

$376^2=141376$

$9376^2=87909376$

我們發現：當我們在求尾數 6 的無限解時，符合的解其平方後所對應的數的前一位用 10 減去的差取個位，(就是上列式子的紅色部分)就是我們求的解的下一位。

例如：

$6^2=36$ 符合我們要求，那 10-3＝7 就是要平方的數的前一位，也就是如果我們推 6 的十位時所得的數一定是 7。

$76^2=5776$，那我們推 76 的百位時所得的一定是 10-7＝3。

$376^2=141376$，那我們推 376 的千位時所得的一定是 10-1＝9。

$9376^2=87909376$，那我們推 9376 的萬位時所得的一定是 10-0＝10 的個位 0。(以此類推)

③我們利用 Mathematica 這個軟體當計算工具，得到以下的數據:

※尾數 5 的無限解：

位數	輸入數	答數
1.	$5^2=25$	
2.	$25^2=625$	
3.	$625^2=390625$	
4.	$0625^2=390625$	
5.	$90625^2=8212890625$	
6.	$890625^2=793212890625$	
7.	$2890625^2=8355712890625$	
8.	$12890625^2=166168212890625$	
9.	$212890625^2=45322418212890625$	
10.	$8212890625^2=67451572418212890625$	

※尾數 6 的無限解：

位數	輸入數	答數
1.	$6^2=36$	
2.	$76^2=5776$	
3.	$376^2=141376$	
4.	$9376^2=87909376$	
5.	$09376^2=87909376$	
6.	$109376^2=11963109376$	
7.	$7109376^2=50543227109376$	
8.	$87109376^2=7588043387109376$	
9.	$787109376^2=619541169787109376$	
10.	$1787109376^2=3193759921787109376$	

④由以上可知，我們的推論是符合的，而且由求尾數 5 和求尾數 6 的無限解的過程中，我們又發現了一個規律，那就是：尾數 5 和尾數 6 的無限解對應的末 n 位數相加會得和爲 10^n+1。
也就是：

一位：　$5+6=11=10^1+1$
二位：　$25+76=101=10^2+1$
三位：　$625+376=1001=10^3+1$
四位：　$0625+9376=10001=10^4+1$
五位：　$90625+09376=100001=10^5+1$

列表如下:　(表一)

	尾數和	總和
一位	5+6	10^1+1
二位	25+76	10^2+1
三位	625+376	10^3+1
四位	0625+9376	10^4+1
五位	90625+09376	10^5+1
:	:	:
n位	…90625＋…09376	10^n+1

因此如果我們要求 $X^2=X$ 的兩個無限解時，可利用第一個規律，先將尾數 5 或尾數 6 的無限解找出來，再利用第二個規律，將（10^n+1）減去求出來的無限解，即可獲得另一個無限解了。
⑤雖然我們利用很好的計算軟體 Mathematica 計算出 12 位數解,但畢竟沒有證明還稍嫌不足,所以針對它的一般性,我們做了以下的證明:
※設 A 爲 $X^2=X$ 的 n 位數解
(A)考慮 A 爲一位數，A^2 可能爲一位或二位數
1.若 A^2 爲一位數，令 $A^2=A \Rightarrow A^2-A=0 \Rightarrow A(A-1)=0 \Rightarrow A=0$ 或 1
2.若 A^2 爲二位數，令 $A^2=aA$
$\Rightarrow A^2=10a+A \Rightarrow A^2-A=10a \Rightarrow A(A-1)=10a$，故 $A(A-1)$ 爲 10 的倍數
但∵兩相鄰正整數互質　又 $10=1\times10=2\times5$
∴A 可能爲 2 的倍數，A-1 爲 5 的倍數　或　A 可能爲 5 的倍數，A-1 爲 2 的倍數。

故(1)令 $A=5k$　(A 爲 5 的倍數)
$A-1=5k-1=2q$(2 的倍數)
其中 $k, q\in N, A<10$
$$k=\frac{A}{5}<\frac{10}{5}=2$$
$$\therefore q=\frac{5k-1}{2}=2k+\frac{k-1}{2}$$
即 $k=1, q=2$ 成立，$A=5$

(2)令 $A-1=5k$
$A=5k+1=2q$
其中 $k, q\in N, A<10$
$$k=\frac{A-1}{5}<\frac{9}{5}=1.8\Rightarrow k=1$$
$$\therefore q=\frac{5k+1}{2}=2k+\frac{k+1}{2}\text{(同理)}$$
即 $k=1, q=3$ 時成立, $A=6$

(B)考慮 A 爲二位數, A^2 可能爲三位或四位數
1.若 A^2 爲三位數　令 $A^2=aA=100a+A$
$\Rightarrow A^2-A=100a \Rightarrow A(A-1)=100a$

2.若 A^2 爲四位數 令 $A^2＝abA＝1000a+100b+A$

$\Rightarrow\quad A^2-A＝100(10a+b)\quad\Rightarrow\quad A(A-1)＝100(10a+b)$

由以上 1. 2.可得知

A(A-1)爲 100 的倍數 ，且 A 和 A-1 互質　又 $100＝1\times100＝2\times50＝4\times25＝10\times10$

所以只要 A 或(A-1)兩者有一爲 4 的倍數,另一爲 25 的倍數即可.

故(1)令 $A＝25k<100,\quad k<\dfrac{100}{25}＝4$

$\therefore A-1＝25k-1＝4q$

$q＝\dfrac{25k-1}{4}＝6k+\dfrac{k-1}{4}\in N$

故 $k＝1$, $q＝6$, $A＝25$ 成立

(2)令 $A-1＝25k\quad A＝25k+1＝4q<100$

$25k<99\ \Rightarrow\ k<\dfrac{99}{25}\quad q＝\dfrac{25k+1}{4}＝k+\dfrac{k+1}{4}\in N$

故 $k＝3$, $q＝19$, $A＝76$ 成立

(C)考慮 A 爲三位數時 , A^2 可爲五位或六位數

1.若 A^2 爲五位數 令 $A^2＝abA$

$\Rightarrow\quad A^2＝10000a+1000b+A\quad\Rightarrow\quad A(A-1)＝A^2-A＝1000(10a+b)$

2.若 A^2 爲六位數令 $A^2＝abcA$

$\Rightarrow\quad A^2＝100000a+10000b+1000c+A\quad\Rightarrow\quad A(A-1)＝1000(100a+10b+c)$

由 1、2 可知 A(A-1)爲 1000 的倍數且 A 和 A-1 互質 ，而 $1000＝1\times1000＝2\times500＝4\times250＝5\times200＝8\times125$，所以 A 或 A-1 兩數中有一爲 8 的倍數,另一爲 125 的倍數即可。

故(1)若 $A＝125k<1000\quad A-1＝125k-1＝8q$

$k<\dfrac{1000}{25}＝8$

$\therefore q＝\dfrac{125k-1}{8}＝15k+\dfrac{5k-1}{8}\in N$

故 $k＝5$, $q＝78$, $A＝625$ 成立

(2)若 $A-1＝125k\quad A＝125k+1＝8q<1000$

$125k<999\quad k<\dfrac{999}{125}＝7.9\ldots$

$\therefore q＝\dfrac{125k+1}{8}＝15k+\dfrac{5k+1}{8}\in N$

故 $k＝3$, $q＝47$, $A＝376$ 成立

(D)至此我們發現若 A 是一個 n 位數，且爲 $X^2＝X$ 的 n 位數解

則 A^2 可爲 2n-1 或 2n 位

1.若 A^2 爲 2n-1 位

令　$A^2＝a_{n-1}a_{n-2}\ldots\ldots a_2a_1A$　(A 爲 n 位)

$＝a_{n-1}\times10^{2n-2}+a_{n-2}\times10^{2n-3}+\ldots+a_2\times10^{n+1}+a_1\times10^n+A$

$＝10^n(a_{n-1}\times10^{n-2}+a_{n-2}\times10^{n-3}+\ldots+a_2\times10+a_1)+A$

$\Rightarrow A(A-1)＝10^n\times C$　(其中 $C＝a_{n-1}\times10^{n-2}+a_{n-2}\times10^{n-3}+\ldots+a_2\times10+a_1$)$＝2^n\times5^n\times C$

2.若 A^2 爲 2n 位

令　$A^2＝a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1A$　(A 爲 n 位)

$＝a_n\times10^{2n-1}+a_{n-1}\times10^{2n-2}+\ldots+a_2\times10^{n+1}+a_1\times10^n+A$

$＝10^n\times(a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\ldots+a_2\times10+a_1)+A$

$\Rightarrow A(A-1)＝10^n\times D$　(其中 $D＝a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\ldots+a_2\times10+a_1$)$＝2^n\times5^n\times D$

我們可知 A(A-1)必爲 10^n 的倍數又 A 和 A-1 互質，故只要 A 和 A-1 兩者中有一爲 2^n 的倍數，另一爲 5^n 的倍數即可。又對任意正整數 n，2^n 與 5^n 互質，依最大公因數的性質，必有兩個正整數 b 與 c，使得 $b<5^n$，$c<2^n$，而且 $2^nb-5^nc＝1$, $5^n(2^n-c)-2^n(5^n-b)＝1$ 因爲 $2^nb<10^n$，$5^n(2^n-c)<10^n$，故 2^nb 與 $5^n(2^n-c)$的位數不大

於 n，又因$(2^nb)^2-(2^nb)=10^nbc$，$[5^n(2^n-c)]^2-5^n(2^n-c)=10^n(2^n-c)(5^n-b)$，故 2^nb 與 $5^n(2^n-c)$都滿足 $X^2\equiv X \bmod 10^n$，故它們都是 $X^2=X$ 的無限解。又因 $2^nb+5^n(2^n-c)=10^n+1$，而 $5^n(2^n-c)$的個位數是 5（因爲它是奇數），故 2^nb 的個位數是 6，而且 2^nb 與 $5^n(2^n-c)$兩數中，除個位數字外，其餘的同位數字之和都是 9 (參考寓數學於遊戲第一輯)。因此可以得到下表的結論:

	尾數和	總和
一位	5+6	10^1+1
二位	25+76	10^2+1
三位	625+376	10^3+1
四位	0625+9376	10^4+1
五位	90625+09376	10^5+1
:	:	:
n位	…90625＋…09376	10^n+1

推論:若 k 是 $X^2=X$ 的一個 n 位數解，則(10^n+1-k)亦爲 $X^2=X$ 的一個 n 位數解

證明: ∵k 是 $X^2=X$ 的一個 n 位數解∴$k^2\equiv k \bmod 10^n$ 推得 $k^2-k\equiv 0 \pmod{10^n}$

考慮$(10^n+1-k)^2-(10^n+1-k)\equiv(1-k)^2-(1-k)\equiv k^2-k\equiv 0 \pmod{10^n}$

$(10^n+1-k)^2\equiv(10^n+1-k) \pmod{10^n}$ ∴(10^n+1-k)亦爲 $X^2=X$ 的一個 n 位數解

⑥接下來我們要證明爲何 $A^2=YaA$, a 爲尾數 5 的無限解的下一位。

證明：設 A 爲尾數爲 5 的 n 位數,且 A 爲 $X^2=X$ 的一個 n 位數解，即滿足 $X^2\equiv X \bmod 10^n$

則 A^2 爲(2n-1)位,或(2n)位 (n 爲 A 的位數)

令 $A^2=YaA$ 【其中 Y 爲(n-2)或(n-1)位數，aA 爲(n+1)位數】

$(aA)^2=(a\times 10^n+A)^2=(a\times 10^n)^2+2\times a\times 10^n\times A+A^2$ (代成 YaA)

$=a^2\times 10^{2n}+2\times a\times 10^n\times A+YaA$

∵A 的個位爲 5 ∴ $2\times a\times 10^n\times A$ 末尾(n+1)位皆爲 0

故 aA 爲 $X^2=X$ 的一個(n＋1)位數解，也就是如果 aA＝25 , 則 $25^2=625$，625 就是下一個 aA

⑦同理尾數 6 的無限解的規律也可仿照此方法證明。

設 A 爲 n 位正整數 令 b＝10-a

$A^2=\ YaA\ =Y\times 10^{n+1}+a\times 10^n+A$

$(bA)^2$

$=(b\times 10^n+A)^2$

$=b^2\times 10^{2n}+2\times b\times 10^n\times A+A^2$

$=b^2\times 10^{2n}+2(10-a)10^n\times A+A^2$

$=b^2\times 10^{2n}+2\times 10^{n+1}\times A-2\times a\times 10^n\times A+A^2$

$=b^2\times 10^{2n}+2\times 10^{n+1}\times A-2\times a\times 10^n\times\ [(A-6)+6]+Y\times 10^{n+1}+a\times 10^n+A$

$=b^2\times 10^{2n}+2\times 10^{n+1}\times A-2\times a\times 10^n\times(A-6)-12\times a\times 10^n+(Y-1)\times 10^{n+1}+(10+a)\times 10^n+A$

$=b^2\times 10^{2n}+2\times 10^{n+1}\times A-2\times a\times 10^n\times\ (A-6)-a\times 10^{n+1}+(Y-1)\times 10^{n+1}-2a\times 10^n+(10+a)\times 10^n+A$

$=b^2\times 10^{2n}+2\times 10^{n+1}\times A-2\times a\times 10^n\times\ (A-6)-a\times 10^{n+1}+(Y-1)\times 10^{n+1}+(10-a)\times 10^n+A$

$=Y(10-a)A=YbA$

另證：設 A 是一個 n 位正整數，且爲 $X^2=X$ 的一個 n 位數解，即滿足 $X^2\equiv X \bmod 10^n$

令 $A^2=Y\beta A\equiv\beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$, $\beta=0$~9 的整數

又令αA 爲一(n+1)位正整數，且爲 $X^2=X$ 的一個(n+1)位數解，其中$\alpha=0\sim9$ 的整數

$\Rightarrow$ $(\alpha A)^2=(\alpha\times10^n+A)^2=\alpha^2\times10^{2n}+2\times\alpha\times10^n\times A+A^2$

$\equiv2\alpha\times10^n\times A+\beta\times10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\because$A 的個位數必爲 1 或 5 或 6(其中個位爲 1 者，其解即爲有限解-------000000000001)

$\therefore$(1)若 A 的個位數爲 5，則$\alpha\equiv\beta \pmod{10}$ $\Rightarrow$ $\alpha=\beta$

(2)若 A 的個位數爲 6，則$\alpha\equiv2\alpha+\beta \pmod{10}$

$\Rightarrow$ $0\equiv\alpha+\beta \pmod{10}$ $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=10$

因此當我們在求尾數 5 的無限解時，符合的解其平方後所對應的數的前一位，就是我們求的解的下一位；而在求尾數 6 的無限解時,符合的解其平方後所對應的數的前一位用 10 減去的差取個位，就是我們求的解的下一位。總之，當 n→∞時，二次無限解共有兩個，即----8212890625，----1787109376。有了找尋 $X^2=X$ 無限解的經驗，我們運用相同的策略(藉由次方後前一位數β推無限解的下一位數α)，一一克服了困難，順利求出各方程式的無限解。

（三）有關 $x^3=x$ 的無限解之探討:

首先我們先找出個位數符合的數，當然因爲現在是比個位數，所以平方後所得的數也要取個位。我們可發現個位數代入後只有 1,4,5,6,9 符合我們要的條件，接著考慮二位數解可發現 01,51,24,25,75,76,49,99 符合我們的條件有鑑於這樣下去沒完沒了，因此我們利用乘法公式及同餘的觀念，推導其一般的情況

證明：設 A 是一個 n 位正整數，且爲 $X^3=X$ 的一個 n 位數解，即滿足 $X^3\equiv X \bmod 10^n$

令 $A^3=Y\beta A\equiv\beta\times10^n+A \pmod{10^{n+1}}$, $\beta=0\sim9$ 的整數

又令αA 爲一(n+1)位正整數，且爲 $X^3=X$ 的一個(n+1)位數解，即滿足 $X^3\equiv X \bmod 10^{n+1}$，其中$\alpha=0\sim9$ 的整數

$(\alpha A)^3=(\alpha\cdot10^n+A)^3$

$=\alpha^3\cdot10^{3n}+3\alpha^2\cdot10^{2n}A+3\alpha\cdot10^n\cdot A^2+A^3$

$\equiv3\alpha A^2\cdot10^n+\beta\cdot10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

A尾數1,9 A^2的個位數字爲1

$(\alpha\cdot10^n+A)^3$

$\equiv3\alpha A^2\cdot10^n+\beta\cdot10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv3\alpha\cdot10^n+\beta\cdot10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(3\alpha+\beta)\cdot10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv\alpha\cdot10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\Rightarrow$ $(3\alpha+\beta)\equiv\alpha \pmod{10}$

$3\alpha+0\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=0,5$
$3\alpha+1\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$3\alpha+2\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=4,9$
$3\alpha+3\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$3\alpha+4\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=3,8$
$3\alpha+5\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$3\alpha+6\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=2,7$
$3\alpha+7\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$3\alpha+8\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=1,6$
$3\alpha+9\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$

A尾數4,6　A^2的個位數字爲6

$(\alpha\cdot 10^n+A)^3$

$\equiv 3\alpha A^2\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv 8\alpha\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv (8\alpha+\beta)\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv \alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\Rightarrow (8\alpha+\beta)\equiv\alpha \pmod{10}$

$8\alpha+0\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=0$
$8\alpha+1\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=7$
$8\alpha+2\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=4$
$8\alpha+3\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=1$
$8\alpha+4\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=8$
$8\alpha+5\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=5$
$8\alpha+6\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=2$
$8\alpha+7\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=9$
$8\alpha+8\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=6$
$8\alpha+9\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=3$

A尾數5　A^2的個位數字爲5

$(\alpha\cdot 10^n+A)^3$

$\equiv 3\alpha A^2\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv 5\alpha\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv (5\alpha+\beta)\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv \alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\Rightarrow (5\alpha+\beta)\equiv\alpha \pmod{10}$

$5\alpha+0\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=0,5$
$5\alpha+1\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=\times$
$5\alpha+2\equiv\alpha$ (mod10)	$\alpha=2,7$
$5\alpha+3\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=\times$
$5\alpha+4\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=4,9$
$5\alpha+5\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=\times$
$5\alpha+6\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=1,6$
$5\alpha+7\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=\times$
$5\alpha+8\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=3,8$
$5\alpha+9\equiv\alpha$ (mod 10)	$\alpha=\times$

依據以上的推論，我們得到以下的結果：

(1)當$n\to\infty$時，$x^3=x$的無限解共有七個，其中包含$X^2=X$ 的兩個無限解，即

……7867600452154874801635742187 51　………106619977392256259918212890624
……106619977392256259918212890625　………893380022607743740081787109375
……893380022607743740081787109376　………213239954784512519836425781249
……999999999999999999999999999999

(2) $x^3=x$的無限解共有七個，加上1共八個，其中兩兩配對，其和皆爲10^n，詳列如下:

(表二)

	尾數51+尾數49	尾數24+尾數76	尾數25+尾數75	1+尾數99	總和
一位	1+9	4+6	5+5	1+9	10^1
二位	51+49	24+76	25+75	1+99	10^2
三位	751+249	624+376	625+375	1+999	10^3
四位	8751+1249	0624+9376	0625+9375	1+9999	10^4
五位	18751+81249	90624+09376	90625+09375	1+99999	10^5
六位	218751+781249	890624+109376	890625+109375	1+999999	10^6
七位	4218751+5781249	2890624+7109376	2890625+7109375	1+9999999	10^7

八位	74218751+25781249	12890624+87109376	12890625+87109375	1+99999999	10^8
:	:	:	:	:	:
m位	……8751+……1249	……0624+……9376	……0625+……9375	1+……99999	10^m

（四）有關 $x^4=x$ 的無限解之探討:

仿照前面的推論，設 A 是一個 n 位正整數，且爲 $X^4=X$ 的一個 n 位數解，即滿足 $X^4\equiv X \bmod 10^n$。令 $A^4=Y$ $\beta A\equiv \beta\times10^n+A \pmod{10^{n+1}}$，$\beta=0\sim9$ 的整數，又令 αA 爲一(n+1)位正整數，且爲 $X^4=X$ 的一個(n＋1)位數解，即滿足 $X^4\equiv X \bmod 10^{n+1}$，其中 $\alpha=0\sim9$ 的整數

$$\Rightarrow(\alpha A)^4=(\alpha\times10^n+A)^4$$
$$=\alpha^4\times10^{4n}+4\alpha^3\times10^{3n}\times A+6\alpha^2\times10^{2n}\times A^2+4\alpha\times10^n\times A^3+A^4$$
$$\equiv4\alpha\times10^n\times A^3+\beta\times10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

∵滿足 $X^4\equiv X \bmod 10^n$ 的數其個位數必爲 1，5 或 6

∴(1)若 A 的個位數爲 5，則 $\alpha\equiv\beta \pmod{10}\Rightarrow\ \alpha=\beta$

(2)若 A 的個位數爲 6，則 $\alpha\equiv4\alpha+\beta \pmod{10}\Rightarrow0\equiv3\alpha+\beta \pmod{10}$

(3)若 A 的個位數爲 1，則 $\alpha\equiv4\alpha+\beta \pmod{10}\Rightarrow0\equiv3\alpha+\beta \pmod{10}$

則 $\beta=0\ \Rightarrow\ \alpha=0$
$\beta=1\ \Rightarrow\ \alpha=3$
$\beta=2\ \Rightarrow\ \alpha=6$
$\beta=3\ \Rightarrow\ \alpha=9$
$\beta=4\ \Rightarrow\ \alpha=2$
$\beta=5\ \Rightarrow\ \alpha=5$
$\beta=6\ \Rightarrow\ \alpha=8$
$\beta=7\ \Rightarrow\ \alpha=1$
$\beta=8\ \Rightarrow\ \alpha=4$
$\beta=9\ \Rightarrow\ \alpha=7$

我們利用Mathematica 這套軟體，不斷地嘗試發現其有兩個無限解，茲將其結果列表如下：

尾數 5：

位數	輸入數	答數
1.	5^4	625
2.	25^4	390625
3.	625^4	152587890625
4.	0625^4	152587890625
5.	90625^4	67451572418212890625
6.	890625^4	629186689853668212890625
7.	2890625^4	69817937910556793212890625
8.	12890625^4	27611874975264072418212890625
9.	212890625^4	2054121592664159834384918212890625
10.	8212890625^4	4549714621689417981542646884918212890625
11.	18212890625^4	110031116042819121503271162509918212890625
12.	918212890625^4	710842755696607042636969708837568759918212890625

尾數 6：

位數	輸入數	答數
1.	6^4	1296
2.	76^4	33362176
3.	376^4	19987173376

4. $9376^4 = 7728058388709376$

5. $09376^4 = 7728058388709376$

6. $109376^4 = 143115985942139109376$

7. $7109376^4 = 2554617806629961004667109376$

8. $87109376^4 = 57578402444654331436004987109376$

9. $787109376^4 = 383831261061179887495342257787109376$

10. $1787109376^4 = 10200102438013602998643779761787109376$

結果：我們可以發現，其無限解和X^2＝X的無限解相同，於是我們大膽做了一個假設：『方程式X^m＝X ，當m為偶數時，僅有兩個無限解即…890625和…109376。』

證明：首先我們將任意個位數任意次方後，其個位的情況表列如下:(表三)

次方 次方後個位	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	…
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6	…
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1	…
4	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	…
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	…
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	…
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	3	1	…
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	4	2	6	…
9	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	…

設A為一n位正整數，且為X^m＝X的一個n位數解，即滿足$X^m \equiv X \mod 10^n$

令 $A^m = Y\beta A \equiv \beta \times 10^n + A \pmod{10^{n+1}}$ ， β＝0~9 的整數，又令αA 為一(n+1)位正整數，且為 X^m＝X 的一個(n＋1)位數解，即滿足 $X^m \equiv X \mod 10^{n+1}$，其中$\alpha$＝0~9 的整數

$$\Rightarrow (\alpha A)^m = (\alpha \times 10^n + A)^m$$

$$= \alpha^m \times 10^{mn} + m \times \alpha^{m-1} \times 10^{n(m-1)} \times A + \ldots\ldots + m \times \alpha \times 10^n \times A^{m-1} + A^m$$

$$\equiv m \times \alpha \times 10^n \times A^{m-1} + \beta \times 10^n + A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv (m\alpha \times A^{m-1} + \beta) \times 10^n + A \pmod{10^{n+1}}$$

若 m 為 4k-2 或 4k(即 m 為偶數)，則由(表一)中發現 A 的尾數必為 1 或 5 或 6，且 A^{m-1} 尾數必為 1 或 5 或 6（參考表三中綠色部分，其中尾數是 1 推到最後其解必為……0001）推得α和β的關係有如下幾種情況：

(1) 尾 5: $\alpha \equiv \beta \pmod{10} \Rightarrow \alpha = \beta$

(2) 尾 6: $\alpha \equiv \beta \pmod{10} \Rightarrow \alpha = \beta$

$\alpha \equiv 2\alpha + \beta \pmod{10} \Rightarrow 0 \equiv \alpha + \beta \pmod{10}$

$\alpha \equiv 4\alpha + \beta \pmod{10} \Rightarrow 0 \equiv 3\alpha + \beta \pmod{10}$

$\alpha \equiv 6\alpha + \beta \pmod{10} \Rightarrow 0 \equiv 5\alpha + \beta \pmod{10}$

$\alpha \equiv 8\alpha + \beta \pmod{10} \Rightarrow 0 \equiv 7\alpha + \beta \pmod{10}$

仿照 X^4＝X 的求解過程，經過我們分組實際的嘗試發現，當尾數是 6 時，僅$\alpha \equiv 2\alpha + \beta \pmod{10}$ $\Rightarrow 0 \equiv \alpha + \beta \pmod{10}$ $\Rightarrow 10 = \alpha + \beta$有解，故最後滿足其條件的無限解必定只有…890625和…109376 兩組。惟因其敘述繁雜，在此我們就不再贅述。

（五）有關 $x^5=x$ 的無限解之探討:

依照前面的推論，設A是一個n位正整數，且爲 $X^5=X$ 的一個n位數解，即滿足 $X^5\equiv X \bmod 10^n$ ，令 $A^5=Y\beta A\equiv \beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$，$\beta=0\sim9$ 的整數，又令 αA 爲一(n+1)位正整數，且爲 $X^5=X$ 的一個(n+1)位數解，其中 $\alpha=0\sim9$ 的整數。

$$\Rightarrow (\alpha A)^5=(\alpha\times 10^n+A)^5$$
$$\equiv 5\times 10^n\times\alpha\times A^4+A^5 \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv 5\times 10^n\times\alpha\times A^4+\beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

∵由(表三)中我們發現A的尾數可爲1，2，3，4，5，6，7，8，9(可參考表中綠色部分)

(1).若A尾數爲1，9，3，7，則 A^4 的個位數字爲1

$$(\alpha\times 10^n+A)^5\equiv 5\alpha\times 10^n+\beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv(5\alpha+\beta)\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$
$$\Rightarrow (5\alpha+\beta)\equiv\alpha \pmod{10}$$

$5\alpha+0\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=0,5$
$5\alpha+1\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$5\alpha+2\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=2,7$
$5\alpha+3\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$5\alpha+4\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=4,9$
$5\alpha+5\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$5\alpha+6\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=1,6$
$5\alpha+7\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$
$5\alpha+8\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=3,8$
$5\alpha+9\equiv\alpha \pmod{10}$	$\alpha=\times$

(2).若A尾數爲4，6，2，8，則 A^4 的個位數字爲6

$$(\alpha\times 10^n+A)^5\equiv 30\alpha\times 10^n+\beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv\beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$
$$\Rightarrow \alpha\equiv\beta \pmod{10}$$

(3).若A尾數5，則 A^4 的個位數字爲5

$$(\alpha\times 10^n+A)^5\equiv 5\alpha\times 10^n+\beta\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv(5\alpha+\beta)\times 10^n+A \pmod{10^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad (5\alpha+\beta)\equiv\alpha \pmod{10}$$

我們利用Mathematica 這套軟體，不斷地嘗試發現其有十三個無限解(其中包含 $X^3=X$ 的七個無限解)，茲將其結果列表如下：

……6004521548748016357421875 1	……0783980410326349987918643 2
……7218280364047658190792294 3	……1213758815299641833370419 3
……1997739225625991821289062 4	……1997739225625991821289062 5
……8002260774374008178710937 5	……8002260774374008178710937 6
……8786241184700358166629580 7	……2781719635952341809207705 7
……9216019589673650012081356 8	……3995478451251983642578124 9
……9999999999999999999999999	

研究結果：

將 $X^5=X$ 的13個無限解及1，兩兩配對，其和爲 10^m (表四)

	尾數51+尾數49	尾數24+尾數76	尾數25+尾數75	1+尾數99	總和
一位	1+9	4+6	5+5	1+9	10^1
二位	51+49	24+76	25+75	1+99	10^2
三位	751+249	624+376	625+375	1+999	10^3
四位	8751+1249	0624+9376	0625+9375	1+9999	10^4
五位	18751+81249	90624+09376	90625+09375	1+99999	10^5
六位	218751+781249	890624+109376	890625+109375	1+999999	10^6
七位	4218751+5781249	2890624+7109376	2890625+7109375	1+9999999	10^7

八位	74218751+25781249	12890624+87109376	12890625+87109375	1+99999999	10^8
:	:	:	:	:	:
m位	……8751+……1249	……0624+……9376	……0625+……9375	1+……99999	10^m

	尾數32+尾數68	尾數43+尾數57	尾數93+尾數07	總和
一位	2+8	3+7	3+7	10^1
二位	32+68	43+57	93+07	10^2
三位	432+568	943+057	193+807	10^3
四位	6432+3568	2943+7057	4193+5807	10^4
五位	86432+13568	22943+77057	04193+95807	10^5
六位	186432+813568	922943+077057	704193+295807	10^6
七位	9186432+0813568	7922943+2077057	3704193+6295807	10^7
八位	79186432+20813568	07922943+92077057	33704193+66295807	10^8
:	:	:	:	:
m位	……6432+……3568	……2943+……7057	……4193+……5807	10^m

（六）有關 $x^m=x$ 的無限解之探討:

令 $A^m=Y$ $\beta A\equiv\beta\times10^n+A$ (mod 10^{n+1})，$\beta=0$~9 的整數，又令 αA 爲一(n+1)位正整數，且爲 $X^m=X$ 的一個 n＋1 位數解，即 $X^m\equiv X \bmod 10^{n+1}$，其中 $\alpha=0$~9 的整數

$$\Rightarrow(\alpha A)^m=(\alpha\times10^n+A)^m \equiv m\times\alpha\times10^n\times A^{m-1}+\beta\times10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv(m\alpha\times A^{m-1}+\beta)\times10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

1.若 m＝4k-1，k∈N，則由(表三)中發現 A 的尾數必爲 1 或 4 或 5 或 6 或 9（參考表中綠色部分），據此，根據我們的經驗:尾數爲 1 或 5 或 9，它會發生分歧的情況，各有兩組解(含 0001)，再加上當尾數爲 4、6 時，各有一組解，因此必僅有七個無限解，但是由後面的討論(2)(詳見 P18)我們知道: $X^3=X$ 的七個解，必爲 $X^m=X$ 的其中七個解，其中 m 爲任意正奇數。因此我們大膽預測：若 m＝4k-1，k∈N，則 $X^m=X$ 的無限解必爲 $X^3=X$ 的七個解。

以下是我們的分析:

(1)若A尾數爲1或9，則 A^{4k-2}的個位數字爲1

$$(\alpha\cdot 10^n+A)^m\equiv m\alpha A^{m-1}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv(4k-1)\cdot \alpha A^{4k-2}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv【(4k-1)\alpha A^{4k-2}+\beta】\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv\alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}\Rightarrow (4k-2)\alpha+\beta\equiv0 \pmod{10}$$

其中 α、β 的對應情形類似 $X^3=X$ 的無限解

(2)若A尾數爲4或6，則A^{4k-2}的個位數字爲6

$$(\alpha\cdot 10^n+A)^m\equiv m\alpha A^{m-1}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv(4k-1)\cdot \alpha A^{4k-2}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv【6(4k-1)\alpha+\beta】\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$$

$$\equiv\alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}} \Rightarrow (4k-6)\alpha+\beta\equiv\alpha \pmod{10}$$

其中 α、β 的對應情形類似 $X^3=X$ 的無限解

(3)若 A 尾數爲 5，則 A^{4k-2} 的個位數字爲 5

$(\alpha\cdot 10^n+A)^m \equiv m\alpha A^{m-1}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(4k-1)\cdot \alpha A^{4k-2}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(5\alpha+\beta)\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv \alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}} \Rightarrow 5\alpha+\beta\equiv\alpha \pmod{10}$

其中α、β的對應情形類似 $X^3=X$ 的無限解

2.若 $m=4k+1$，$k\in N$，則由(表三)中發現 A 的尾數必爲 1、2、3、4、5、6、7、8、9（參考表中綠色部分），據此，根據我們的經驗:尾數爲 1 或 3 或 5 或 7 或 9，它會發生分歧的情況，各有兩組解(含 0001)，再加上當尾數爲 2、4、6、8 時，各有一組解，因此必僅有十三個無限解，但是由後面的討論(3) (詳見 P18)我們知道: $X^5=X$ 的十三個無限解，必爲 $X^m=X$ 的其中十三個解，其中 $m=4k+1$，$k\in N$。因此我們大膽預測：若 $m=4k+1$，$k\in N$，則 $X^m=X$ 的無限解必爲 $X^5=X$ 的十三個解。

以下是我們的分析:

(1)若 A尾數爲1或3或7或9 ，則 A^{4k}的個位數字爲1

$(\alpha\cdot 10^n+A)^m\equiv m\alpha A^{m-1}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(4k+1)\cdot \alpha A^{4k}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv【(4k+1)\alpha A^{4k}+\beta】\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv \alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}} \Rightarrow 4k\cdot \alpha+\beta\equiv 0 \pmod{10}$

其中α、β的對應情形類似 $X^5=X$ 的無限解

(2)若 A尾數爲2或4或6或8 ， 則A^{4k}的個位數字爲6

$(\alpha\cdot 10^n+A)^m\equiv m\alpha A^{m-1}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(4k+1)\cdot \alpha A^{4k}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv【6(4k+1)\alpha+\beta】\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv \alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}} \Rightarrow (4k+6)\alpha+\beta\equiv\alpha \pmod{10}$

其中α、β的對應情形類似 $X^5=X$ 的無限解

(3)若 A尾數爲5 ，則 A^{4k}的個位數字爲5

$(\alpha\cdot 10^n+A)^m \equiv m\alpha A^{m-1}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(4k+1)\cdot \alpha A^{4k}\cdot 10^n+\beta\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv(5\alpha+\beta)\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}}$

$\equiv \alpha\cdot 10^n+A \pmod{10^{n+1}} \Rightarrow 5\alpha+\beta\equiv\alpha \pmod{10}$

其中α、β的對應情形類似$X^5=X$ 的無限解。經過我們日以繼夜不斷地驗證，終於皇天不負苦心 人我們發現以下令人振奮的結果：

①. 若m爲4k-2或4k(即m爲偶數)，$k\in N$，則其必僅有兩個無限解，且其解和$X^2=X$ 的解相同，詳列如下：(詳見P.12證明)

……106619977392256259918212890625　　……893380022607743740081787109376

②. 若m爲4k-1，$k\in N$，由上表發現，滿足其個位的解僅有1，4，5，6，9，又經過我們利用mathematica工具不斷地嘗試發現:當尾數爲1、5、9時，它會發生分歧的情況，各有兩組解(含0001)，再加上當尾數爲4、6時，各有一組解，因此必僅有七個無限解(參考***附件一*** :三次方無限解關係圖)，且其解和$X^3=X$ 的解相同，詳列如下：(其推導方式和$X^3=X$的求解過程相同)

……786760045215487480163574218751　　………106619977392256259918212890624

……106619977392256259918212890625　　………893380022607743740081787109375

……893380022607743740081787109376　　………213239954784512519836425781249

……9999999999999999999999999999999

③.若m為4k+1，k∈N，由上表發現，滿足其個位的解僅有1，2，3，4，5，6，7，8，9，又經過我們利用mathematica工具不斷地嘗試發現: 當尾數為1、3、5、7、9時，它會發生分歧的情況，各有兩組解(含0001)，再加上當尾數為2、4、6、8時，各有一組解，因此其必僅有十三個無限解(參考***附件一*** :五次方無限解關係圖)，且其解和$X^5=X$ 的解相同，詳列如下：(其推導方式和$X^5=X$ 的求解過程相同)

……60045215487480163574218751	……07839804103263499879186432
……72182803640476581907922943	……12137588152996418333704193
……19977392256259918212890624	……19977392256259918212890625
……80022607743740081787109375	……80022607743740081787109376
……87862411847003581666295807	……27817196359523418092077057
……92160195896736500120813568	……39954784512519836425781249
……99999999999999999999999999	

（七）有關 $x^m=x^p$ 的無限解之探討(其中 m＞p＞1):

1.首先我們從 $x^3=x^2$ 的無限解開始討論起:

設 A 是一個 n 位正整數，且為 $X^3=X^2$ 的一個 n 位數解，即滿足 $X^3\equiv X^2\equiv p \bmod 10^n$，其中 p 亦是一個 n 位正整數。令 $A^3=Yap\equiv a\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$，a＝0~9 的整數、$A^2=Zbp\equiv b\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$，又令 αA 為一(n+1)位正整數，且為 $X^3=X^2$ 的一個(n＋1)位數解，即滿足 $X^3\equiv X^2 \bmod 10^{n+1}$，其中 α＝0~9 的整數

$$\Rightarrow(\alpha A)^3=(\alpha\times10^n+A)^3$$
$$=\alpha^3\times10^{3n}+3\alpha^2\times10^{2n}A+3\alpha\times10^nA^2+A^3$$
$$\equiv3\alpha\times10^nA^2+A^3 \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv3\alpha\times10^nA^2+a\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$$
$$(\alpha A)^2=(\alpha\times10^n+A)^2$$
$$=\alpha^2\times10^{2n}+2\alpha\times10^nA+A^2$$
$$\equiv2\alpha\times10^nA+A^2 \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv2\alpha\times10^nA+b\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$$
$$\Rightarrow(\alpha A)^3\equiv(\alpha A)^2\equiv3\alpha\times10^nA^2+a\times10^n+p\equiv2\alpha\times10^nA+b\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$$

①尾數 1:　$3\alpha+a\equiv2\alpha+b\Rightarrow b-a\equiv\alpha \pmod{10}$

$\Rightarrow b-a=0$，$\alpha=0$　、　$b-a=1$ 或 -9，$\alpha=1$、　$b-a=2$ 或 -8，$\alpha=2$

$b-a=3$ 或 -7，$\alpha=3$　、　$b-a=4$ 或 -6，$\alpha=4$、　$b-a=5$ 或 -5，$\alpha=5$

$b-a=6$ 或 -4，$\alpha=6$　、　$b-a=7$ 或 -3，$\alpha=7$、　$b-a=8$ 或 -2，$\alpha=8$

$b-a=9$ 或 -1，$\alpha=9$

②尾數 5:　$5\alpha+a\equiv b\Rightarrow b-a\equiv5\alpha \pmod{10}$

$\Rightarrow b-a=0$，$\alpha=0$、2、4、6、8

$b-a=5$ 或 -5，$\alpha=1$、3、5、7、9

③尾數 6:　$8\alpha+a\equiv2\alpha+b\Rightarrow b-a\equiv6\alpha \pmod{10}$

$\Rightarrow b-a=0$，$\alpha=0$ 或 5、　$b-a=2$ 或 -8，$\alpha=2$ 或 7、　$b-a=4$ 或 -6，$\alpha=4$ 或 9

$b-a=6$ 或 -4，$\alpha=1$ 或 6、 $b-a=8$ 或 -2，$\alpha=3$ 或 8

利用以上導出的a、b、α 三者之關係，我們利用mathematica工具不斷地嘗試發現，$x^3=x^2$，僅有兩個無限解，且其解和$X^2=X$ 的解相同，即

……………10661997739225625991821289062５

……………89338002260774374008178710937６

2. $x^4=x^2$的無限解之探討:

設 A 是一個 n 位正整數，且爲 $X^4=X^2$的一個 n 位數解，即滿足 $X^4\equiv X^2\equiv p \bmod 10^n$，其中 p 亦是一個 n 位正整數。令 $A^4=Yap\equiv a\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$，a＝0~9 的整數、$A^2=Zbp\equiv b\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$，又令$\alpha$A 爲一(n+1)位正整數，且爲 $X^4=X^2$的一個(n＋1)位數解，滿足 $X^4\equiv X^2 \bmod 10^{n+1}$，其中$\alpha$＝0~9 的整數

$$\Rightarrow(\alpha A)^4=(\alpha\times10^n+A)^4$$
$$=\alpha^4\times10^{4n}+4\alpha^3\times10^{3n}A+6\alpha^2\times10^{2n}A^2+4\alpha\times10^nA^3+A^4$$
$$\equiv4\alpha\times10^nA^3+A^4 \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv4\alpha\times10^nA^3+a\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$$
$$(\alpha A)^2=(\alpha\times10^n+A)^2$$
$$=\alpha^2\times10^{2n}+2\alpha\times10^nA+A^2$$
$$\equiv2\alpha\times10^nA+A^2 \pmod{10^{n+1}}$$
$$\equiv2\alpha\times10^nA+b\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$$
$$\Rightarrow(\alpha A)^4\equiv(\alpha A)^2\equiv4\alpha\times10^nA^3+a\times10^n+p\equiv2\alpha\times10^nA+b\times10^n+p \pmod{10^{n+1}}$$

①尾數 1 或 6： $4\alpha+a\equiv2\alpha+b\Rightarrow b-a\equiv2\alpha \pmod{10}$

$\Rightarrow b-a=0$，$\alpha=0$ 或 5 、 $b-a=2$ 或 -8，$\alpha=1$ 或 6 、 $b-a=4$ 或 -6，$\alpha=2$ 或 7、 $b-a=6$ 或 -4，$\alpha=3$ 或 8 、 $b-a=8$ 或 -2，$\alpha=4$ 或 9

②尾數 4 或 9： $6\alpha+a\equiv8\alpha+b \Rightarrow b-a\equiv-2\alpha \pmod{10}$

$\Rightarrow$ $b-a=0$，$\alpha=0$ 或 5 、 $b-a=2$ 或 -8，$\alpha=4$ 或 9 、 $b-a=4$ 或 -6，$\alpha=3$ 或 8、 $b-a=6$ 或 -4，$\alpha=2$ 或 7 、 $b-a=8$ 或 -2，$\alpha=1$ 或 6

③尾數 5: $a\equiv b \pmod{10}$

$\Rightarrow b-a=0$，$\alpha=0$~9

利用以上導出的 a、b、α 三者之關係，我們利用 mathematica 工具不斷地嘗試發現，$x^4=x^2$，僅有七個無限解，且其解和 $X^3=X$ 的解相同，即

……786760045215487480163574218751　………106619977392256259918212890624

……106619977392256259918212890625　………893380022607743740081787109375

……893380022607743740081787109376　………213239954784512519836425781249

……999999999999999999999999999999

3. 接下來我們想要推廣到一般的情況，由(表三)中綠色部分不難發現其存在著某種規律性，即次方後的個位數***每四個重複一次***。而且在找尋$x^3=x^2$及$x^4=x^2$的無限解的過程中，我們發現其一位數解(即只考慮其個位數)，分別和$x^2=x$及$x^3=x$的一位數解相同，縱使後續二位數解、三位數解、、、有增多的現象，但不斷地檢驗下去，最終其無限解仍分別和$x^2=x$及$x^3=x$的無限解相同。因此，我們大膽假設：『方程式$X^m=X^p$ ，$m>p>1$，其無限解和方程式$X^{m-p+1}=X$的解相同』，亦即

(1)當 $m-p+1=4k-2$ 或 4k 時，$X^m=X^p$有兩個無限解 ：

……………106619977392256259918212890625

……………893380022607743740081787109376

(2)當 $m-p+1=4k-1$ 時，$X^m=X^p$ 有七個無限解：

……786760045215487480163574218751

……106619977392256259918212890625

……893380022607743740081787109376

……999999999999999999999999999999

………106619977392256259918212890624

………893380022607743740081787109375

………213239954784512519836425781249

(3)當 $m-p+1=4k+1$ 時，$X^m=X^p$ 有十三個無限解：

……60045215487480163574218751

……72182803640476581907922943

……19977392256259918212890624

……80022607743740081787109375

……87862411847003581666295807

……92160195896736500120813568

……99999999999999999999999999

……07839804103263499879186432

……12137588152996418333704193

……19977392256259918212890625

……80022607743740081787109376

……27817196359523418092077057

……39954784512519836425781249

4.證明:

若A為一個n位正整數，滿足 $x^{m-p+1}\equiv x \pmod{10^n}$

$\Rightarrow \quad A^{m-p+1}\equiv A \pmod{10^n}$

$\Rightarrow \quad A^{p-1}(A^{m-p+1})\equiv A^{p-1}\times A \pmod{10^n}$

$\Rightarrow \quad A^m\equiv A^p \pmod{10^n}$

(1)當 $m-p+1=4k-2$ 或 $4k$ 時，$x^m=x^p$ 至少有兩個無限解，又因為滿足條件的個位數為1、5、6，

根據先前的經驗，則方程式有兩個無限解。

(2)當 $m-p+1=4k-1$ 時，$x^m=x^p$ 至少有七個無限解，又因為滿足條件的個位數為1、4、5、6、9，

根據先前的經驗，則方程式有七個無限解。

(3)當 $m-p+1=4k+1$ 時，$x^m=x^p$ 至少有十三個無限解，又因為滿足條件的個位數為1、2、3、4、

5、6、7、8、9，根據先前的經驗，則方程式有十三個無限解。

五.討論:

(1) $X^2=X$ 的兩個無限解，必為 $X^m=X$ 的其中兩個無限解(m為任意正整數)。

證明：

若A為一個n位正整數，滿足 $x^2\equiv x \pmod{10^n}$

$\Rightarrow \quad A^2\equiv A \pmod{10^n} \Rightarrow \quad A^3\equiv A^2 \pmod{10^n}$

即 $A^3\equiv A^2\equiv A \pmod{10^n}$ 推廣得 $A^m\equiv A \pmod{10^n}$

因此，若A為 $X^2=X$ ($x^2\equiv x \bmod 10^n$)的一個無限解

則A亦為 $X^m=X$($x^m\equiv x \bmod 10^n$)的一個無限解，其中m為任意正整數。

(2) $X^3=X$ 的七個解，必為 $X^m=X$ 的其中七個解，其中m為任意正奇數。

證明:若A為一個n位正整數，滿足方程式 $x^3\equiv x \pmod{10^n}$

$\Rightarrow \quad A^3\equiv A \pmod{10^n} \Rightarrow \quad A^5\equiv A^3 \pmod{10^n}$

(3) $X^5=X$的十三個解，必爲$X^m=X$的其中十三個解，其中m爲4k+1，k∈N。

證明:若A爲一個n位正整數，滿足方程式$x^5\equiv x \pmod{10^n}$

$\Rightarrow \quad A^5\equiv A \pmod{10^n} \quad \Rightarrow \quad A^9\equiv A^5 \pmod{10^n}$

即 $A^9\equiv A^5\equiv A \pmod{10^n}$ 推廣得$A^m\equiv A \pmod{10^n}$，其中m爲4k+1，k∈N。

因此，若A爲$X^5=X$($x^5\equiv x \bmod 10^n$)的一個無限解

則A亦爲$X^m=X$($x^m\equiv x \bmod 10^n$)的一個無限解，其中m爲4k+1，k∈N。

六.結論:

1. $X^2=X$ 有兩個無限解，且兩解對應的末 n 位數相加得和爲 10^n+1：

……1997739225625991821289062 5	……8002260774374008178710937 6

2. $X^2=X$ 有的兩個無限解中字尾是 5 的解前一位的求法是：把解平方，取對應數的前一位即爲其所求的解的下一位；字尾是 6 的解前一位求法是：把解平方，取對應數的前一位，用 10 減去後取個位即爲其所求的解的下一位。
3. $X^3=X$ 有七個無限解，詳列如下：

……786760045215487480163574218751	………106619977392256259918212890624
……106619977392256259918212890625	………893380022607743740081787109375
……893380022607743740081787109376	………213239954784512519836425781249
……999999999999999999999999999999	

4. 將 $X^3=X$ 的七個無限解和 1，兩兩配對，其和爲 10^m(詳見 P10 表二)
5. $X^4=X$有兩個無限解，其解與$X^2=X$的解相同。
6. $X^5=X$有十三個無限解，其解詳列如下：

……60045215487480163574218751	……07839804103263499879186432
……72182803640476581907922943	……12137588152996418333704193
……19977392256259918212890624	……19977392256259918212890625
……80022607743740081787109375	……80022607743740081787109376
……87862411847003581666295807	……27817196359523418092077057
……92160195896736500120813568	……39954784512519836425781249
……99999999999999999999999999	

7. 將 $X^5=X$ 的十三個無限解和 1，兩兩配對，其和爲 10^m(詳見 P13 表四)
8. 在$X^m=X$的無限解中：
   (1) 若m爲4k-2或4k(即m爲偶數)k∈N，則其必僅有兩個無限解(同結論1)
   (2) 若 m 爲 4k-1，k∈N，則其必僅有七個無限解(同結論 3)
   (3)若 m 爲 4k+1，k∈N，則其必僅有十三個無限解(同結論 6)
9. 在$X^m=X^p$的無限解中：
   (1) 若m－p＋1爲4k-2或4k(即m－p＋1爲偶數)k∈N，則其必僅有兩個無限解(同結論1)
   (2) 若 m－p＋1 爲 4k-1，k∈N，則其必僅有七個無限解(同結論 3)
   (3)若 m－p＋1 爲 4k+1，k∈N，則其必僅有十三個無限解(同結論 6)
   (4) 再者，因其次方後的個位數***<u>每四個重複一次</u>***，因此我們從個位數的方向著手，發現以下的結果:(分別先將 m、p 除以 4 得其餘數，再觀察其滿足條件的個位數)

①若 $x^m=x^p$滿足條件的個位數爲 1、5、6，則方程式有兩個無限解。

②若 $x^m=x^p$滿足條件的個位數爲 1、4、5、6、9，則方程式有七個無限解。

③若 $x^m=x^p$滿足條件的個位數爲1、2、3、4、5、6、7、8、9，則方程式有十三個無限解。

10.在求方程式$X^m=X$無限解的過程中，我們藉由次方後的前一位數β推無限解的下一位數α，運用這樣的策略，一一克服了困難，順利求出各方程式的無限解。而在求方程式$X^m=X^p$無限解的過程中，我們藉由次方後的前一位數a、b推無限解的下一位數α，運用這樣的策略，也順利找出各方程式的無限解。

七.參考資料:

1.寓數學於遊戲第一輯　　九章出版社　　趙文敏先生編著

2.無限中的有限　　凡異出版社　　張遠南先生編著

3.中華民國第四十四屆中小學科展專輯高中組作品---透視自守數

【評語】030416

1. 主題為生動有趣的數字遊戲。
2. 邏輯推理清楚，計算與結論正確。
3. 與國中教材有良好銜接。
4. 團隊合作良好，解說清楚。
5. 惟學術上、應用上，價值較低。