

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第二名

030415

多邊形的旋心之推廣與應用

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 王鈺涵	洪駿源
國二 張喻凱	鄭釗鋒
國二 詹媛安	
國二 楊筱萱	

關鍵詞：相似形、尺規作圖、旋轉中心

多邊形的旋心之推廣與應用

摘要

文獻上，要尋找任意多邊形的內接母子相似圖形，尚未有好的辦法可解決此問題，本研究藉由多邊形的旋轉與伸縮觀念產生相似形的定理，發展出「內接母子相似作圖」的好方法，即利用本研究命名的「旋心」，透過旋轉可輕易得到過邊上一點、形內一點作出內接母子相似圖形。

並研究出「旋心」的相關性質，利用此相關性質，我們得到特殊四邊形，何者圖形必無內接母子相似？何者圖形在什麼條件下，才會有內接母子相似？

壹、研究動機

在國中課程裏，將任意三角形三邊中點連接，可得此三角形與原三角形相似。經過相關文獻資料的查詢，我們查到「過三角形邊上一點，作原三角形的內接相似」已解決，但卻不能擴展到 n 邊形一般化的結果。因此，我們試著尋找一個方法，能夠推廣到 n 邊形的形內相似作圖。

貳、研究目的

- 1、試著尋找一個方法，可以推廣到 n 邊形的形內相似作圖。
- 2、並求得過 n 邊形邊上一點、內部一點及形內最小的內接母子相似圖形。
- 3、特殊四邊形形內相似的相關探討。

參、研究器材：

電腦、GSP 軟體、圓規、尺

肆、研究過程

一、前言

1. 在本研究中

(1) 多邊形 $A_1A_2\cdots A_n \cong$ 多邊形 $B_1B_2\cdots B_n$

(2) 多邊形 $A_1A_2\cdots A_n \sim$ 多邊形 $B_1B_2\cdots B_n$

表示各頂點的對應順序為 A_1 對應 B_1 、 A_2 對應 B_2 、 $\cdots$ 、 A_n 對應 B_n

2. 名詞定義：

(1) 廣義內接母子相似 n 邊形：

分別在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 個邊上各取一點 B_1 、 B_2 、 $\cdots$ 、 B_n ，使得 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n \sim n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ ，我們稱 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的「廣義內接母子相似 n 邊形」。

(2) 狹義內接母子相似 n 邊形：

若 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的「廣義內接母子相似 n 邊形」，且當 B_1 、 B_2 、 $\cdots$ 、 B_n 分別在 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\cdots$ 、 $\overline{A_nA_1}$ 上，或 B_1 、 B_2 、 $\cdots$ 、 B_n 分別在 $\overline{A_nA_1}$ 、 $\overline{A_nA_{n-1}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overline{A_2A_1}$ 上，則我們稱 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的「狹義內接母子相似 n 邊形」。

※特別注意：

為了方便說明，本研究將「狹義內接母子相似 n 邊形」簡稱為「內接母子相似 n 邊形」。以 $\triangle ABC$ 為例，其「廣義內接母子相似三角形」，共有下面六種不同對應接法的圖形，如圖 1-1～圖 1-6。

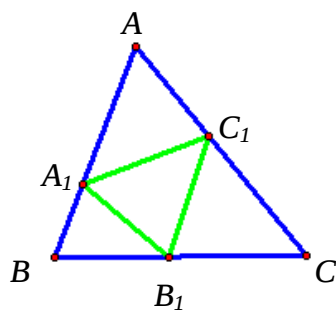


圖 1-1

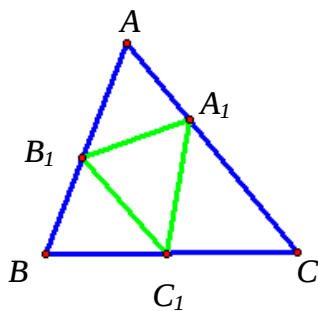


圖 1-2

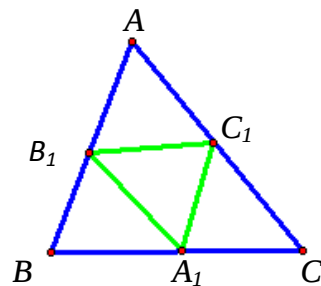


圖 1-3

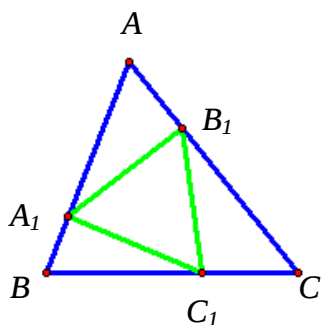


圖 1-4

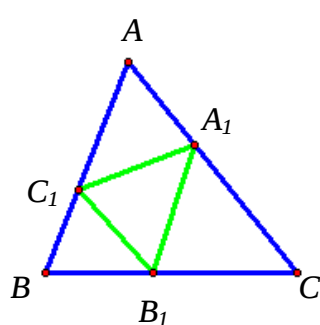


圖 1-5

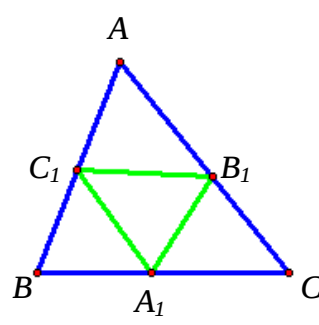


圖 1-6

其中，圖 1-1、圖 1-2 為「狹義內接母子相似三角形」，簡稱「內接母子相似三角形」。

根據本研究的名詞定義，可知一多邊形的內接母子相似多邊形其種類很多，研究不易。因此，我們探討內容以「狹義內接母子相似多邊形」做出發。以下內容，皆使用簡稱：「內接母子相似多邊形」。

二、內接母子相似三角形的旋轉、伸縮中心

在圖 1-1 與圖 1-2 中，我們

- 1.發現：內接母子相似三角形，像是將原三角形，分別作逆時針或順時針旋轉並伸縮得到。
- 2.猜測：如果上述發現結果是成立的，應有旋轉與伸縮中心，且兩圖形各自的旋轉與伸縮中心應為同一點。

至於任意一個平面圖形，同時利用一個點，當旋轉中心與伸縮中心，在旋轉定角與伸縮 k 倍所得的圖形，與原圖形之間到底會有什麼關聯性呢？我們證明下面定理：

【定理 1】：對於 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ，於其所在平面上取一點 S ，若透過

〔步驟 1〕：以 S 為旋轉中心，將 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 旋轉 θ ，得 n 邊形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$

〔步驟 2〕：以 S 為伸縮中心，將 n 邊形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 伸縮 k 倍，得 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$

則 (I) n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n \sim n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$

(II) $\angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2 = \cdots = \angle SA_nB_n$

【證明】 (I) (1)由〔步驟 1〕，可得 n 邊形 $A'_1A'_2\cdots A'_n \cong n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$

(2)由〔步驟 2〕，可得 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n \sim n$ 邊形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$

綜合(1)(2)可得 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n \sim n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$

(II) 由〔步驟 2〕，可得 $\frac{\overline{SB_1}}{\overline{SA'_1}} = \frac{\overline{SB_2}}{\overline{SA'_2}} = k$ ， $\frac{\overline{SB_2}}{\overline{SA'_2}} = \frac{\overline{SB_2}}{\overline{SA_2}} = k$ ，如圖 2-1

由〔步驟 1〕可得 $\angle A_1SB_1 = \theta = \angle A_2SB_2$

所以 $\triangle A_1SB_1 \sim \triangle A_2SB_2$ (SAS 相似性質) $\Rightarrow \angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2$

同理，可得 $\angle SA_2B_2 = \angle SA_3B_3 = \cdots = \angle SA_{n-1}B_{n-1} = \angle SA_nB_n$

即 $\angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2 = \cdots = \angle SA_nB_n$ #

回到我們前面的猜測，根據【定理 1】，可得圖 1-1 中：若 $\triangle A_1B_1C_1$ 是由【定理 1】的兩步驟所得，那麼 $\angle SAA_1 = \angle SBB_1 = \angle SCC_1$ (其中 S 為旋轉、伸縮中心，如圖 2-2) 可得：

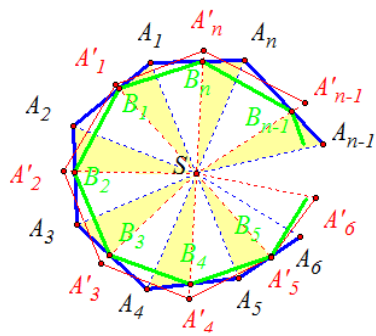


圖 2-1

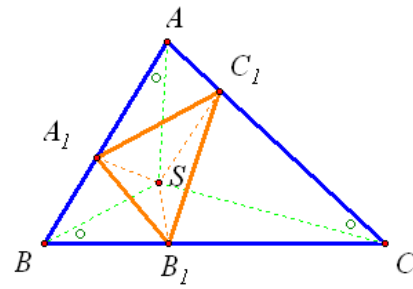


圖 2-2

$\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$ 。但是，是否真的存在一點 S ，使得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$ 呢？

分析：根據上述結論，若 S 存在，則

$$\begin{aligned}\angle ASB &= 180^\circ - (\angle ABS + \angle SAB) \\ &= 180^\circ - (\angle ABS + \angle SBC) \\ &= 180^\circ - \angle ABC \\ &= \angle ABC \text{ 的外角}\end{aligned}$$

同理可證 $\angle BSC$ 為 $\angle BCA$ 的外角、 $\angle CSA$ 為 $\angle CAB$ 的外角

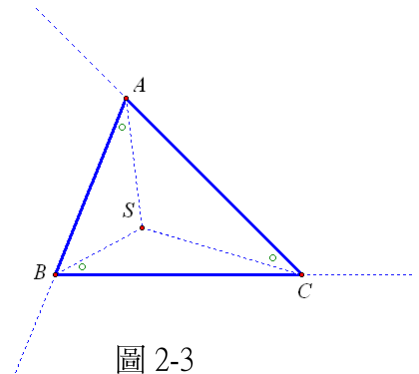


圖 2-3

#

據上述分析，我們作出可產生內接母子相似圖形的旋轉、伸縮中心：

內接母子相似三角形的旋轉、伸縮中心作圖

【已知】 $\triangle ABC$

【求作】一點 S ，使得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

- 【作法】(1) 過 A 、 B 作圓 O_1 ，使得 $\angle APB = \angle ABC$ 的外角。
 (2) 過 B 、 C 作圓 O_2 ，使得 $\angle BQC = \angle BCA$ 的外角。
 (3) 令圓 O_1 、圓 O_2 第二交點為 S (註)，則 S 即為所求。

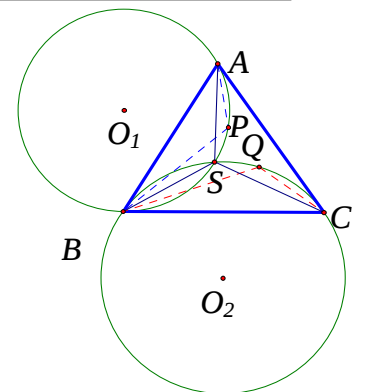


圖 2-4

※ 註：因為圓 O_1 、圓 O_2 皆過 B 點，且兩圓不是外切圓，所以必有第二交點。

【證明】 $\because \angle ASB = \angle APB$ (對等弧) $= \angle ABC$ 的外角

$\angle BSC = \angle BQC$ (對等弧) $= \angle BCA$ 的外角

又 $\triangle ABC$ 的外角和 $= 360^\circ =$ 周角

$\therefore \angle ASC = \angle CAB$ 的外角，

可推得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

#

由上述作圖，可得知：

1. 圓 O_1 與圓 O_2 必存在。
2. ∵ 圓 O_1 與圓 O_2 皆過同一點 B ，又兩圓不相切。

∴ 兩圓必有另一交點 S 。

即對於任意 $\triangle ABC$ ，使得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$ 的 S 點必存在。 #

利用上述的推導與證明，我們可簡單的作出三角形的內接母子相似圖形。

過三角形邊上一點作內接母子相似圖形

【已知】 $\triangle ABC$ ， $\overline{AB}$ 上一點 P

【求作】過 P 點，作 $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ ，使得 Q 、 R 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上

【作法】(1) 作 $\triangle ABC$ 的旋轉、伸縮中心 S ，使得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

(2) 連 $\overline{SA}$ 、 $\overline{SB}$ 、 $\overline{SC}$ 、 $\overline{SP}$

(3) 分別作 $\angle BSQ = \angle ASP$

$\angle CSR = \angle ASP$

交 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 於 Q 、 R

(4) 連 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{QR}$ 、 $\overline{RP}$ ，則 $\triangle PQR$ 為所求。

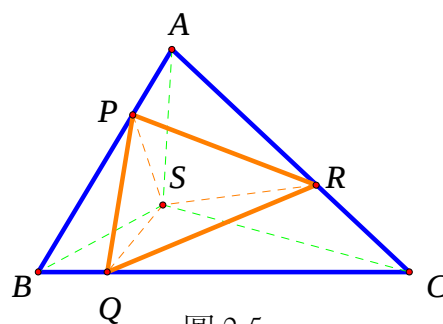


圖 2-5

從上面的推論，顯然產生內接相似三角形的旋轉、伸縮中心對於本研究相當重要。因此，我們特別給此旋轉、伸縮中心定義名稱：

「旋心」定義：

凸 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ ，若形內存在一點 S ，使得 $\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 \cdots = \angle SA_{n-1}A_n = \angle SA_nA_1$ 則 S 點稱為凸 n 邊形的「旋心」，且：

(1) 當 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 為逆時針排列，則我們稱 S 點為「左旋心」。

(2) 當 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 為順時針排列，則我們稱 S 點為「右旋心」。

在此特別說明，「旋心」的探討事實上是包含「左旋心」及「右旋心」，只是任意多邊形向左旋轉及向右旋轉的作圖與證明觀念是同理可得的，僅是旋轉方向的差異，因此本研究接續內容所提及到的「旋心」，皆是以「左旋心」為探討基礎。

有了旋心的定義，我們想瞭解三角形的旋心是否能像國中幾何課程中三角形的內心、外心、重心一樣，具有一些特別的性質？甚至能推廣應用。以下是我們的相關研究：

三、三角形旋心的性質與應用

【性質 1】三角形必存在旋心 S

【性質 2】外角性質：

$\angle ASB$ 為 $\angle ABC$ 的外角、 $\angle BSC$ 為 $\angle ACB$ 的外角、 $\angle CSA$ 為 $\angle BAC$ 的外角。

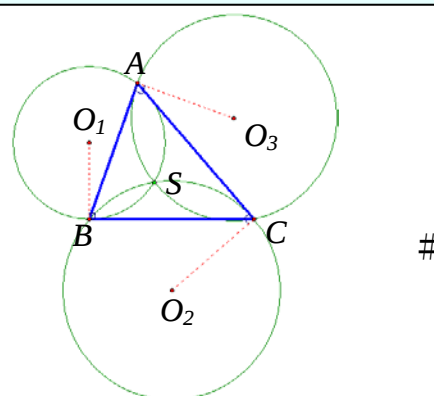
【性質 3】切線性質： $\overline{BC}$ 為 $\triangle ABS$ 外接圓的切線、 $\overline{AC}$ 為 $\triangle BCS$ 外接圓的切線、 $\overline{AB}$ 為 $\triangle ACS$ 外接圓的切線。

【證明】根據旋心定義，可得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

所以 $\overline{BC}$ 為 $\triangle ABS$ 外接圓的切線

$\overline{CA}$ 為 $\triangle BCS$ 外接圓的切線

$\overline{AB}$ 為 $\triangle ACS$ 外接圓的切線



【性質 4】內接母子相似三角形性質：以旋心 S 為旋轉中心，將 $\overline{SA}$ 、 $\overline{SB}$ 及 $\overline{SC}$ 依逆時針等角度旋轉，分別與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 交於 A_1 、 B_1 、 C_1 ，則 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ 。

【證明】 $\because S$ 為 $\triangle ABC$ 的旋心， $\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle CSC_1 = \angle SCA$ ，

又 $\angle ASA_1 = \angle BSB_1 = \angle CSC_1$ ，可得 $\triangle ASA_1 \sim \triangle BSB_1 \sim \triangle CSC_1$ (AA 相似)

利用【性質 4】，我們作出以下應用：

【應用一】過三角形內部一點，作內接母子相似三角形。

【已知】 $\triangle ABC$ 內部一點 P

【求作】過 P 點，作 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ ，使得 A_1 、 B_1 、 C_1 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上。

【作法】(1) 作 $\triangle ABC$ 的旋心 S ，並連接 $\overline{SP}$ 、 $\overline{SB}$ 。

(2) 作 $\triangle PSD$ 的外接圓，使得 $\angle PDS = \angle SBC$ 。

(3) 令 $\triangle PSD$ 的外接圓交 $\overline{AB}$ 於 A_1 。

(實際上， $\triangle PSD$ 的外接圓與三角形的周界可能產生 0~6 個交點)

I. 若無交點，則表示無法找到過 P 點的內接形內相似三角形，如圖 3-3；

II. 若只有一交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形只有 1 個，如圖 3-4；

- III. 若有兩交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形有 2 個，如圖 3-5；
 IV. 若有三交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形有 3 個，如圖 3-6；
 V. 若有四交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形有 4 個，如圖 3-7；
 VI. 若有五、六交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形最多只有 4 個；

(4) 作 $\overline{A_1P}$ 交 $\overline{BC}$ 於 B_1 。

(5) 作 $\angle CSC_1 = \angle ASA_1$ ， C_1 在 $\overline{AC}$ 上。

(6) 連接 $\Delta A_1B_1C_1$ 即為所求。

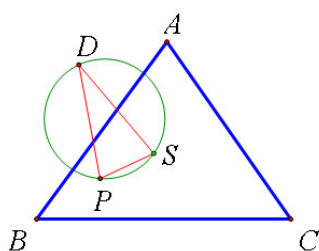


圖 3-2

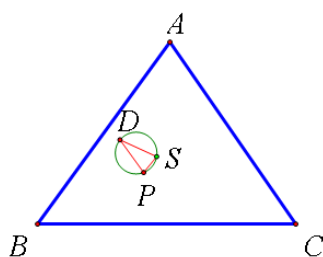


圖 3-3—沒有交點

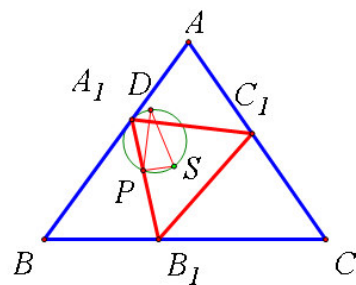


圖 3-4—1 個交點

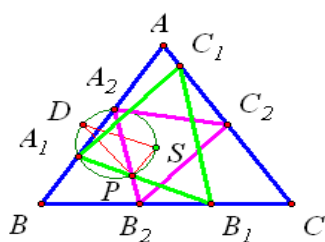


圖 3-5—2 個交點

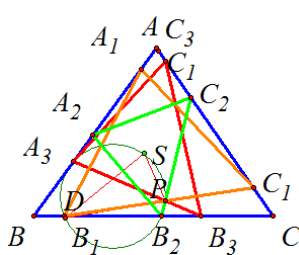


圖 3-6—3 個交點

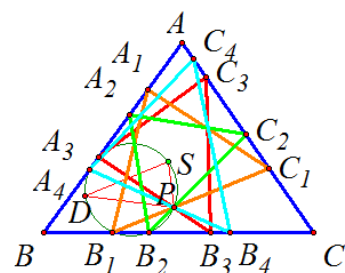


圖 3-7—總共 4 個交點

【證明】 (1) $\because \angle PA_1S = \angle PDS = \angle SBC$

$$\therefore \angle A_1BS = \angle B_1BS$$

可得 A_1 、 B 、 B_1 、 S 四點共圓

$$\Rightarrow AA_1S = BB_1S$$

$$\text{又 } \angle SAA_1 = \angle SBB_1$$

$$\therefore \angle ASA_1 = \angle BSB_1$$

(2) 且 $\angle CSC_1 = \angle ASA_1$

$$\therefore \angle ASA_1 = \angle BSB_1 = \angle CSC_1$$

根據【性質 4】可得 $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

【應用二】尋找 $\triangle ABC$ 最小的內接母子相似三角形

【已知】 $\triangle ABC$

【求作】 $\triangle ABC$ 的最小內接母子相似圖形

【作法】 (1) 作 $\triangle ABC$ 的旋心 S

(2) 分別作 $\overline{SD} \perp \overline{AB}$ 、 $\overline{SE} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{SF} \perp \overline{CA}$
於 D 、 E 、 F (註)

(3) 連接 $\triangle DEF$ 為所求。

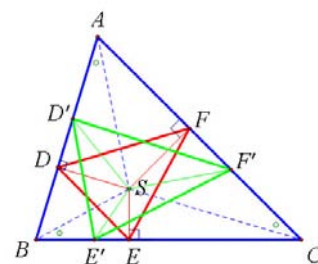


圖 3-8

【證明】 (1) $\because S$ 為 $\triangle ABC$ 的旋心， $\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

又 $\angle SDA = \angle SEB = \angle SFC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle ASD = \angle BSE = \angle CSF$

由【性質 4】可得到 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ 。

(2) 如圖 3-8，在 $\overline{AB}$ 上取一點 D' 異於 D
且過 D 點，可作出內接母子相似

$\triangle D'E'F' \sim \triangle ABC \sim \triangle DEF$

(3) $\because \triangle SD'E' \sim \triangle SAB \sim \triangle SDE$

又 $\overline{SD'} > \overline{SD}$

可得 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 最小內接相似三角形

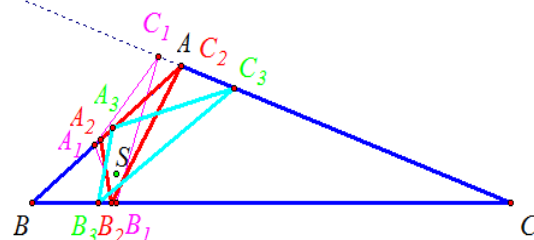


圖 3-9

※註：若【作法 2】圖形不存在，如圖 3-9，即存在一角度(假設為 $\angle CAS$)使得 $\angle CAS > 90^\circ$ ，此時 $\angle CAB > 90^\circ$ ，即 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形。(反之若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，其中 $\angle A > 90^\circ$ ，若 $\angle CAS \leq 90^\circ$ ，則仍可作出上述的最小內接母子相似三角形)。針對此種情況，我們作圖如下：

【作法】 (1) 作 $\triangle ABC$ 的旋心 S

(2) 作 $\angle ASD = \angle CSA$ ， D 在 $\overline{AB}$ 上

作 $\angle BSE = \angle CSA$ ， E 在 $\overline{BC}$ 上

(3) 連接 $\triangle ADE$ ，即為所求。

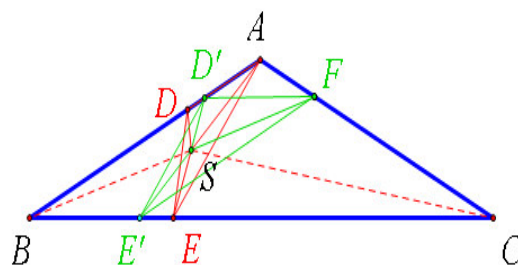


圖 3-10

【證明】(1) 在 $\overline{AC}$ 上任取一點 F 異於 A

(2) 過 F 作 $\triangle ABC$ 的內接母子相似 $\triangle FDE$ 若存在，即 $\triangle FDE \sim \triangle ADE$

(3) 在 $\triangle AFS$ 中， $\because \angle FAS = \angle CAS > 90^\circ$

$$\therefore \angle AFS < 90^\circ, \Rightarrow \angle CAS > \angle AFS \Rightarrow \overline{SF} > \overline{SA}$$

可得 $\triangle ADE$ 為 $\triangle ABC$ 內的最小內接母子相似圖形。

【應用三】廣義內接母子相似三角形的應用與推廣

至於，廣義的內接母子相似三角形，是否存在旋轉與伸縮中心？我們推導如下：

選擇圖 1-3 的對應接法。顯然，我們不能直接找到一個點，並利用此點直接將 $\triangle ABC$ 作旋轉、伸縮而得到 $\triangle A_1B_1C_1$ 。因此，我們想若存在可利用旋轉、伸縮中心作圖，必須先找出一個可旋轉的 $\triangle A'B'C'$ ，其中 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ 且 A' 、 B' 、 C' 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上。利用這個推論，分析如下：

若 $\angle A \geq \angle B$ ，作 $\triangle A'AC \sim \triangle ABC$ ，其中 A' 在 $\overline{BC}$ 上，如圖 3-11。

若圖 1-3 存在產生廣義內接母子相似三角形的旋轉、伸縮中心，

由【定理 1】可得 $\angle SCA = \angle SAB = \angle SA'C$ 。

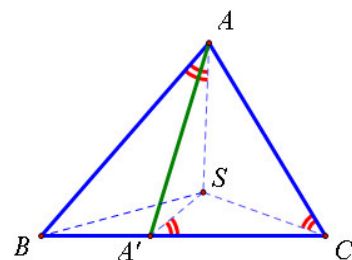


圖 3-11

此點 S 是否存在呢？若 S 點存在，則必 $\angle ASC = \angle BAC$ 的外角、 $\angle A'SC = \angle ACB$ 的外角
利用此結果，我們作圖如下：

廣義內接母子相似三角形的作圖

【已知】 $\triangle ABC$ ， $\overline{BC}$ 上一點 P

【求作】過 P 點，作 $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ ，使得 Q 、 R 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上

【作法】(1) 作 $\angle CAA' = \angle B$ ， A' 在 $\overline{BC}$ 上

(2) 過 A 、 C 作圓 O_1 ，使得 $\angle ADC = \angle BAC$ 的外角

(3) 過 A' 、 C 作圓 O_2 ，使得 $\angle A'EC = \angle ACB$ 的外角

(4) 令圓 O_1 、圓 O_2 第二交點為 S

(5) 連 $\overline{SA}$ 、 $\overline{SA'}$ 、 $\overline{SC}$ 、 $\overline{SP}$

(6) 分別作 $\angle ASQ = \angle A'SP$ 、 $\angle CSR = \angle A'SP$

交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 Q 、 R

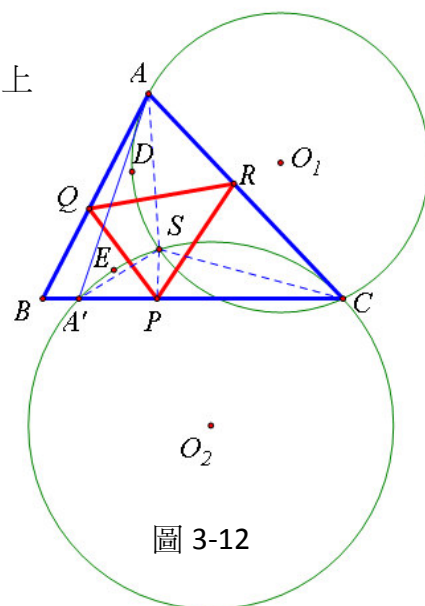


圖 3-12

(7) 連 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{QR}$ 、 $\overline{RP}$ ，則 ΔPQR 為所求

其中上述作法(1)~(4)實際上，即是圖 1-3，廣義內接母子相似的旋轉、伸縮中心作圖，從上面的作圖，可得知：圖 1-3 產生廣義的內接母子相似接法之旋轉、伸縮中心必存在。同樣的方式，我們也可得到如圖 1-4、圖 1-5、圖 1-6 相同接法的旋轉、伸縮中心及其作圖，如圖 3-13、3-14、3-15。

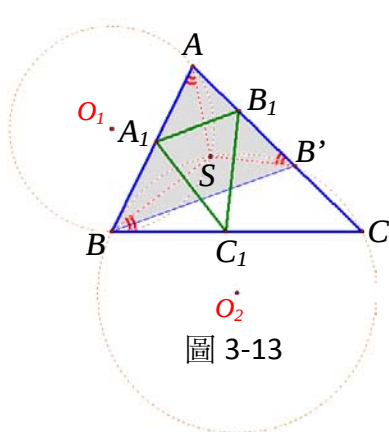


圖 3-13

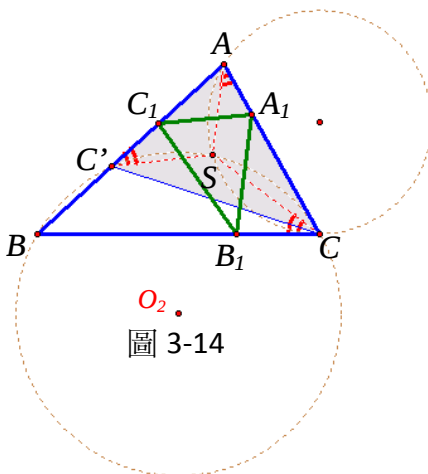


圖 3-14

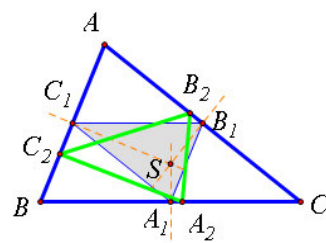


圖 3-15

另外，我們有一個疑問：

過邊上一點，作相同對應接法的內接母子相似三角形是否唯一呢？

【討論】1. ΔABC 中，若過 $\overline{BC}$ 上一點 D ，存在兩個相同對應接法的廣義內接母子相似

ΔDE_1F_1 、 ΔDE_2F_2 ，如圖 3-16，可得 $\Delta DE_1E_2 \sim \Delta DF_1F_2$ (SAS 相似)

$\Rightarrow \angle DE_1E_2 = \angle DF_1F_2$ ，可得 A 、 E_1 、 D 、 F_1 四點共圓

$\Rightarrow \angle A + \angle E_1DF_1 = 180^\circ$

(1) 若 $\angle E_1DF_1 \neq \angle A$ ，則 $\angle E_1DF_1 + \angle A < 180^\circ$ ，與上述結論不合。即此條件下，過邊上一點不存在兩個以上相同對應接法的內接母子相似三角形，即當 ΔABC 不為直角三角形，則對應接法所形成的內接相似三角形必唯一。

(2) 若 $\angle E_1DF_1 = \angle A = 90^\circ$ ，且當：

① $\angle DE_1F_1 = \angle C$ ，則 $\angle C = \angle DE_1F_1 = \angle DAF_1$

$\therefore \angle C + \angle CAD = 90^\circ = \angle ADC$

即 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

② $\angle DE_1F_1 = \angle B$ ，則 $\angle B = \angle DE_1F_1 = \angle DAF_1$

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BD}$

同理 $\overline{DA} = \overline{DC}$

可得 D 為直角 ΔABC 的外心。

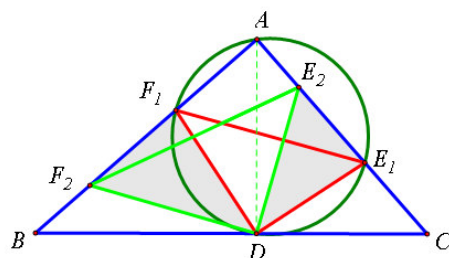


圖 3-16

由上可知型如圖 1-3、圖 1-6 且 $\angle A = 90^\circ$ 時，此時過 D 點所形成的內接母子相似三角形並不唯一。

2. 實際上在討論(2)之①②兩種情形， D 點可視為 $\triangle DEF_1$ 在原 $\triangle ABC$ 的三邊所在直線作旋轉、伸縮的中心點。

3. 由上述的討論可得結論：對於任意三角形的廣義內接母子相似三角形，皆可以旋心的作圖方式作出。

四、多邊形旋心性質一般化的探討：

討論在三角形旋心的性質中，可知三角形必存在旋心，那麼凸 n 邊形 ($n \geq 4$) 是否也存在旋心呢？由旋心的定義我們可得可知凸 n 邊形 ($n \geq 4$) 不一定存在旋心。

理由：對於凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ ，依據下列作圖步驟

- (1) 作 $\triangle A_1P_1A_2$ 外接圓 O_1 ，使得 $\angle A_1P_1A_2 = \angle A_1A_2A_3$ 之外角
- (2) 作 $\triangle A_2P_2A_3$ 外接圓 O_2 ，使得 $\angle A_2P_2A_3 = \angle A_2A_3A_4$ 之外角
- (3) 令圓 O_1 、圓 O_2 第二交點為 S 可得 $\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3$
- (4) 作 $\triangle A_3P_3A_4$ 外接圓 O_3 ，使得 $\angle A_3P_3A_4 = \angle A_3A_4A_5$ 之外角

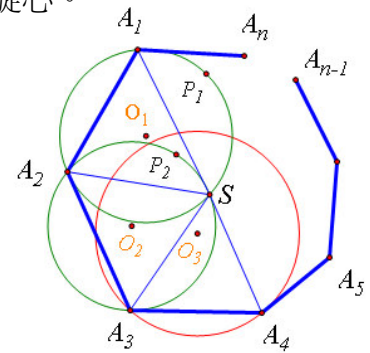


圖 4-1

① 當 $\angle SA_3A_4 \neq \angle SA_1A_2$ ，則 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 不存在旋心。

② 當 $\angle SA_3A_4 = \angle SA_1A_2$ ，則繼續作出 $\triangle A_iP_iA_{i+1}$ 外接圓 O_i ，使得 $\angle A_iP_iA_{i+1} = \angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 之外角。如此下去，顯然，對於任意 n 邊形 ($n \geq 4$) 並不一定皆具有旋心。

至於凸 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 若存在旋心 S ，則是否仍具有三角形旋心的相關性質？操作如下：

【性質 1】外角性質： $\angle A_1SA_2 = \angle A_1A_2A_3$ 的外角、 $\angle A_2SA_3 = \angle A_2A_3A_4$ 的外角、 $\dots$ 、
 $\angle A_nSA_1 = \angle A_nA_1A_2$ 的外角

$\because S$ 為凸 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 的旋心

$\therefore \angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 = \dots = \angle SA_nA_1$

可得 $\angle A_1SA_2 = 180^\circ - \angle SA_1A_2 - \angle SA_2A_1$

$$= 180^\circ - \angle SA_2A_3 - \angle SA_2A_1$$

$$= \angle A_1A_2A_3 \text{ 的外角}$$

同理可證： $\angle A_2SA_3 = \angle A_2A_3A_4$ 的外角、 $\dots$ 、 $\angle A_nSA_1 = \angle A_nA_1A_2$ 的外角

【性質 2】切線性質： $\overline{A_2A_3}$ 為 ΔA_1SA_2 的外接圓的切線、 $\overline{A_3A_4}$ 為 ΔA_2SA_3 的外接圓的切線
 $\dots$ 、 $\overline{A_nA_1}$ 為 $\Delta A_{n-1}SA_n$ 的外接圓的切線

由旋心的定義，同三角形【性質 3】切線性質可類推得證。

【性質 3】內接母子性質：以 S 為旋轉中心，將 $\overline{SA_1}$ 、 $\overline{SA_2}$ 、 $\dots$ 、 $\overline{SA_n}$ 同方向等角度旋轉，且分別與 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\dots$ 、 $\overline{A_nA_1}$ 交於 B_1 、 B_2 、 $\dots$ 、 B_n ，則凸 n 邊形 $B_1B_2 \dots B_n \sim$ 凸 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。

【性質 4】：若 n 邊形存在內接母子相似圖形，則此 n 邊形必有旋心。

【證明】(1)我們以四邊形為例，如圖 4-2、圖 4-3：

①令四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 為四邊形 $ABCD$ 的內接母子相似四邊形，

作 ΔAD_1A_1 的外接圓 O_1 與 ΔA_1BB_1 的外接圓 O_2 ，假設圓 O_1 、圓 O_2 第二交點 S ，

可得 A 、 A_1 、 S 、 D_1 及 A_1 、 B 、 B_1 、 S 四點共圓

$$\therefore \angle D_1AS = \angle D_1A_1S = \angle 1$$

$$\text{即 } \angle SAB = \angle SA_1B_1 = \angle 2 = \angle SBC$$

$$\text{又 } \angle A_1SB = \frac{1}{2} \widehat{A_1S} = \angle A_1B_1S$$

$$\therefore \Delta ASB \sim \Delta A_1SB_1 \text{ (AA 相似)}$$

$$\text{故 } \frac{\overline{AS}}{\overline{A_1S}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{B_1S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$$

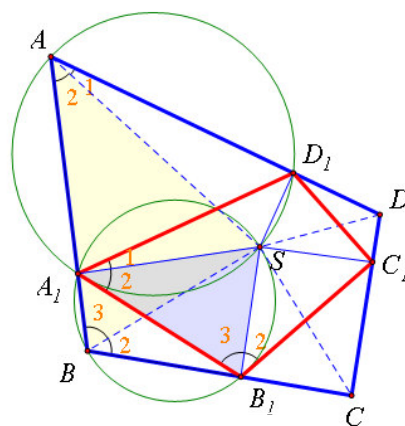


圖 4-2

② 在 ΔBSC 與 ΔB_1SC_1 中(圖 4-3)

$$\therefore \frac{\overline{BS}}{\overline{B_1S}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}, \angle SBC = \angle SB_1C_1 = \angle 2$$

$$\therefore \Delta BSC \sim \Delta B_1SC_1 \text{ (SAS 相似)}$$

$$\text{故 } \angle SCB = \angle SC_1B_1 = \angle 4,$$

即 S 、 B_1 、 C 、 C_1 四點共圓

$$\angle SB_1C_1 = \angle SCD = \angle 2 = \angle SC_1D_1$$

③同理可證 S 、 D 、 D_1 、 C_1 四點共圓

$$\text{可得 } \angle SDA = \angle 2$$

$$\Rightarrow \angle SAB = \angle SBC = \angle SDA = \angle 2$$

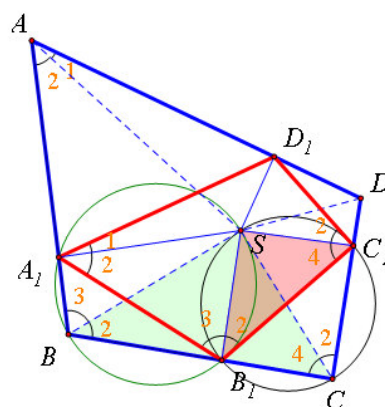


圖 4-3

即 S 為四邊形 $ABCD$ 的旋心。

- (2) 若將上述證明推廣至 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 中，若其存在內接母子相似 n 邊形 $B_1B_2...B_n$ ，則可由上述證明①與證明②得到 $\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 = \angle SB_1B_2 = \angle SB_2B_3$ 。

又由證明③可類推 $\angle SA_3A_4 = ... = \angle SA_nA_1 = \angle SB_3B_4 = ... = \angle SB_nB_1 = \angle 2$

故若 n 邊形存在內接母子相似圖形，則此 n 邊形必有旋心。

五、特殊四邊形內接母子相似圖形之探討

由於凸 $n(n \geq 4)$ 邊形不一定存在旋心。因此，要利用旋心作內接母子相似圖形，就先要確定何種圖形才具有旋心？但因為凸 n 邊形的變數太多，研究困難度太高，所以我們就將研究範圍縮小為課本所提的特殊四邊形，以下是我們的研究：

(一)、平行四邊形旋心之探討：

【定理 2-1】若平行四邊形 $ABCD$ 存在旋心 S ，則此平行四邊形 $ABCD$ 必滿足：

- (1) S 落在平行四邊形 $ABCD$ 的對角線交點上。

$$(2) \frac{\overline{BA}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \sqrt{2}$$

反之亦成立。

【證明】(1) $\because S$ 為平行四邊形 $ABCD$ 的旋心，根據旋心的定義

$$\angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$$

可得 $\angle ASB = \angle 1$ ， $\angle BSC = \angle 2$ ， $\angle CSD = \angle 3$ ， $\angle ASD = \angle 4$

又 $\angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ， $\therefore \angle ASB = \angle CSD$

且 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ = \angle 3 + \angle 4$ ， $\therefore A、S、C$ 共線， $B、S、D$ 共線

即平行四邊形的旋心在對角線的交點上。 #

- (2) $\because S$ 為平行四邊形 $ABCD$ 的旋心

$\therefore \overline{BA}$ 切 $\triangle SAD$ 外接圓於 A 點

由圓的切割線性質可得

$$\overline{BA}^2 = \overline{BD} \times \overline{BS} = 2\overline{BS} \times \overline{BS} = 2\overline{BS}^2$$

$$\overline{BA} = \sqrt{2}\overline{BS}$$

$$\text{同理可證 } \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \sqrt{2}。$$

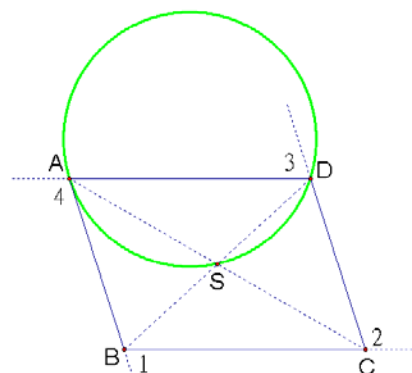


圖 5-1

#

【逆敘述證明】：

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle SBA$ 中

$$\therefore \frac{\overline{BA}}{\overline{BS}} = \sqrt{2}, \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \sqrt{2}, \frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{2\overline{BS}}{\overline{BA}} = \sqrt{2}$$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle SBA$ (SSS 比例相似)

故 $\angle SAB = \angle SDA$ ，又 $\angle SBC = \angle SDA$ ， $\angle SCD = \angle SAB$

$\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$

即 S 為平行四邊形 $ABCD$ 的旋心

#

由【定理 2-1】可知，具有旋心的平行四邊形 $ABCD$ 必滿足 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \sqrt{2}$ 。

所以現在我們可以利用上述的條件，試著作出具有旋心的平行四邊形 $ABCD$ 。

【作法】1、作 $\triangle SBC$ 使得 $\overline{BC} = \sqrt{2}\overline{SC}$

2、分別在 $\overline{BS}$ 上取 $\overline{SD} = \overline{SB}$ 、 $\overline{CS}$ 上取 $\overline{SA} = \overline{SC}$

3、連平行四邊形 $ABCD$ 即為所求。

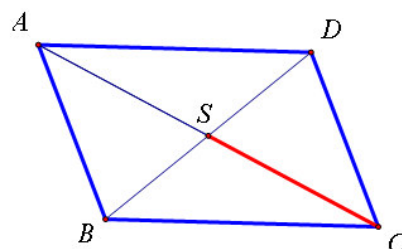


圖 5-2

接著探討長方形、正方形與菱形是否具有旋心？

【定理 2-2】若長方形 $ABCD$ 具有旋心，則此長方形必為正方形。

【證明】 若 S 為長方形 $ABCD$ 的旋心

$\therefore ABCD$ 為平行四邊形

$\therefore$ 由【定理 2-1】可知 $\overline{AB} = \sqrt{2}\overline{BS}$ 、 $\overline{AD} = \sqrt{2}\overline{AS}$

又四邊形 $ABCD$ 為長方形

$\therefore \overline{BS} = \overline{AS}$ (對角線互相平分且等長)

可推得 $\overline{AB} = \overline{AD}$

即此時的長方形 $ABCD$ 必為正方形

#

因此我們可以得知：鄰邊不等長的長方形無旋心，即無內接母子相似圖形。

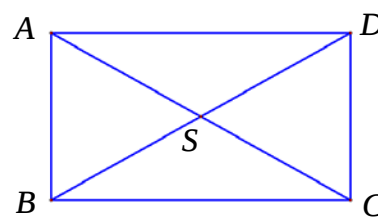


圖 5-3

【定理 2-3】若菱形 $ABCD$ 具有旋心，則此菱形必為正方形。

【證明】 若 S 為菱形 $ABCD$ 的旋心

(1) $\therefore ABCD$ 是平行四邊形

$\therefore$ 由【定理 2-1】可知 $\overline{AB} = \sqrt{2}\overline{BS}$ 及 $\overline{AD} = \sqrt{2}\overline{AS}$

又四邊形 $ABCD$ 為菱形， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$

得 $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{DS} = \overline{CS}$

$\therefore \overline{AC} = \overline{BD}$

即此時菱形 $ABCD$ 為正方形

因此我們可以得知：鄰角不等的菱形無旋心，即無內接母子相似圖形。

(二)、梯形旋心之探討：

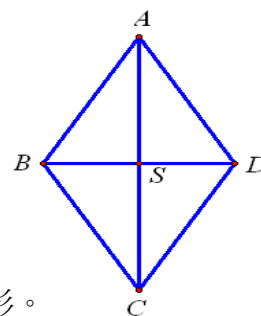


圖 5-4

【定理 3-1】梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若具有旋心 S ，則 S 落在 $\overline{BD}$ 上。

【證明】(1) $\because S$ 為梯形的 $ABCD$ 旋心， $\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$

(2) $\because \angle ASB + \angle ASD$ ，(如圖 6-1)

$$= 180^\circ - (\angle SAB + \angle SBA) + 180^\circ - (\angle SDA + \angle SAD)$$

$$= 360^\circ - (\angle SAB + \angle SAD + \angle SBA + \angle SDA)$$

$$= 360^\circ - (\angle SAB + \angle SAD + \angle SBA + \angle SBC)$$

$$= 360^\circ - 180^\circ (\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}) = 180^\circ$$

$\therefore B, S, D$ 則三點共線，即 S 落在 $\overline{BD}$ 上。

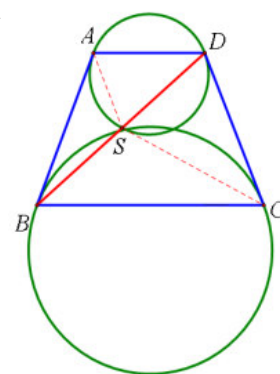


圖 6-1

【定理 3-2】等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，若具有旋心 S ，則 S 在對角線的中點上。

【證明】(1) 由【定理 3-1】可得 S 落在 $\overline{BD}$ 上

(2) 根據旋心的切線性質可得 $\overline{AB}^2 = \overline{BS} \times \overline{BD}$ 、 $\overline{CD}^2 = \overline{DS} \times \overline{BD}$

又 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\therefore \overline{BS} = \overline{DS}$

即 S 在對角線的中點上

#

(實際上，在上述條件下，左旋心、右旋心分別在 $\overline{BD} \cdot \overline{AC}$ 中點上)

【定理 3-3】梯形 $ABCD$ 中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若具有旋心 S 及 $\triangle ABS$ 、 $\triangle CDS$ 的外接圓分別為圓 O_1 、圓 O_3 ，則 O_1 、 S 、 O_3 共線

【證明】(1) 連接 $\overline{O_1A}$ 、 $\overline{O_1S}$ 、 $\overline{O_3S}$

(2) $\because \angle SBA = \angle 1 = \frac{\widehat{AS}}{2}$ ，又 $\angle AO_1S = \widehat{AS} = 2\angle 1$ ，

$$\therefore \angle ASO_1 = \angle SAO_1 = \frac{180^\circ - 2\angle 1}{2} = 90^\circ - \angle 1 \quad , \quad \text{同理 } \angle DSO_3 = 90^\circ - \angle 2$$

由【定理 3-1】可得 S 在 $\overline{BD}$ 上， $\therefore \angle ASD = \angle 1 + \angle 2$

(3) 故 $\angle ASO_1 + \angle ASD + \angle DSO_3 = (90^\circ - \angle 1) + (\angle 1 + \angle 2) + (90^\circ - \angle 2) = 180^\circ$

即 O_1 、 S 、 O_3 共線

#

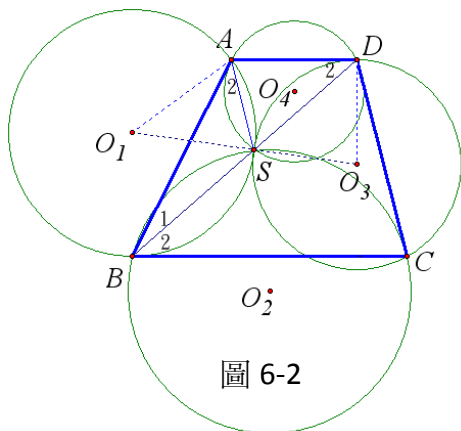


圖 6-2

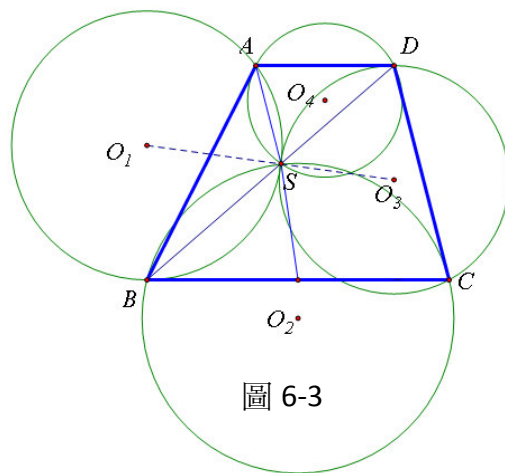


圖 6-3

【定理 3-4】 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若具有旋心 S ，則 $\triangle ABS$ 與 $\triangle CDS$ 的外接圓 O_1 、 O_3 形成外切。

【證明】由【定理 3-3】可得證。

#

【定理 3-5】 若梯形 $ABCD$ 具有旋心，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$

【證明】已知 S 為梯形 $ABCD$ 的旋心，(如圖 6-4)

$\therefore \overline{BC}$ 為圓 O_1 的切線、 $\overline{CD}$ 為圓 O_2 的切線、 $\overline{DA}$ 為圓 O_3 的切線、 $\overline{AB}$ 為圓 O_4 的切線。

(1) 令梯形四邊分別 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{CD} = c$ 、 $\overline{AD} = d$ ，

延長 $\overline{DA}$ 至 H ，使得 $DFBH$ 為長方形，作 $\overline{O_1G} \perp \overline{DF}$ 於 G

令梯形高 $\overline{DF} = \overline{BH} = h$ ，

$$\overline{CF} = s = \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$\overline{O_1G} = \overline{BC} - \overline{FC} = b - s$$

(2) 令 I 為 $\overline{AB}$ 的中點，作 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 於 E

$$\therefore \overline{AI} = \overline{IB} = \frac{a}{2}$$

在 $\triangle O_1IB$ 與 $\triangle BEA$ 中

$$\therefore \angle O_1IB = \angle BEA = 90^\circ，$$

$$\angle EAB = \angle IBO_1 (\because \overline{AE} \parallel \overline{BH}，\therefore \text{內錯角相等})$$

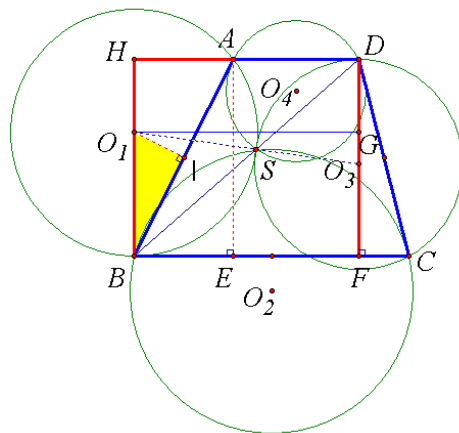


圖 6-4

$\therefore \Delta O_1IB \sim \Delta BEA$ (AA相似)

因此可得 $\overline{O_1B} : \overline{BA} = \overline{IB} : \overline{EA}$

$$\text{即 } r_1 : a = \frac{a}{2} : h$$

$$\therefore r_1 = \frac{a^2}{2h}, \text{ 同理可得 } r_3 = \frac{c^2}{2h}$$

$$(3) \because \text{圓 } O_1 \text{ 與圓 } O_3 \text{ 相切 } \therefore \overline{O_1O_3} = r_1 + r_3 = \frac{1}{2h}(a^2 + c^2)$$

$$(4) \text{ 在直角 } \Delta O_1O_3G \text{ 中, } \overline{O_1O_3} = \frac{1}{2h}(a^2 + c^2), \overline{O_3G} = r_1 + r_3 - h$$

$$\text{則 } (r_1 + r_3)^2 = (r_1 + r_3 - h)^2 + (b - s)^2$$

$$\Rightarrow 0 = -2h(r_1 + r_3) + h^2 + b^2 - 2bs + s^2$$

$$-2h(r_1 + r_3) + b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 = 0$$

$$b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 - 2h \cdot \frac{1}{2h}(a^2 + c^2) = 0 (\because s^2 + h^2 = c^2)$$

$$b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} - a^2 = 0$$

利用配方法

$$b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + (\sqrt{c^2 - h^2})^2 = a^2 + (c^2 - h^2)$$

$$(b - \sqrt{c^2 - h^2})^2 = a^2 + c^2 - h^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - h^2} \pm \sqrt{a^2 + c^2 - h^2} \text{ (其中 } b = \sqrt{c^2 - h^2} - \sqrt{a^2 + c^2 - h^2} \text{ 不合)}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \overline{BF} = b - s &= (\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{a^2 + c^2 - h^2}) - \sqrt{c^2 - h^2} \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 - h^2} \end{aligned}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DF}^2$$

$$= c^2 - h^2 + a^2 + h^2 = c^2 + a^2$$

$$\text{故 } \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$$

#

【定理 3-6】 若等腰梯形 $ABCD$ 具有旋心，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{BD} = \sqrt{2} \overline{AB}$

【證明】 由【定理 3-5】具有旋心的梯形滿足 $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$ ，若梯形 $ABCD$ 為等腰梯形

時($\overline{AB} = \overline{CD}$)，因此可得 $\overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2$ ，也就是對角線 $\overline{BD} = \sqrt{2} \overline{AB}$

#

(三)、鳶形的旋心之探討：

【定理 4-1】 若鳶形 $ABCD$ 具有旋心，則 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$

【證明】 (1) $\because S$ 為鳶形 $ABCD$ 的旋心， $\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$

$$\text{又 } \angle ABC = \angle ADC$$

$$\Rightarrow \angle ABC \text{ 的外角} = \angle ADC \text{ 的外角}$$

$$\Rightarrow \angle ASB = \angle CSD$$

$$\therefore \triangle ABS \sim \triangle CDS \quad (\text{AA 相似})$$

$$\text{可推得 } a : c = b : d \quad (\text{令 } \overline{AS} = a, \overline{BS} = b, \overline{CS} = c, \overline{DS} = d)$$

(2) 又在 $\triangle ASC$ 和 $\triangle BSD$ 中

$$\because a : c = b : d, \angle DSB = \angle DSA + \angle ASB = \angle DSA + \angle CSD = \angle CSA$$

$$\therefore \triangle ASC \sim \triangle BSD \quad (\text{SAS 相似})$$

$$\Rightarrow \angle CAS = \angle DBS$$

(3) 在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle BSP$ 中

$$\because \angle EAP = \angle SBP, \angle APE = \angle BPS$$

$$\therefore \angle PSB = \angle AEP = 90^\circ$$

$$\text{可得 } \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

故鳶形 $ABCD$ 只有在 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ 時，才具有旋心。

#

由上述分析，當 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ = 其對角線的夾角度數，則此鳶形必有旋心。

我們很好奇的想 “若四邊形 $ABCD$ 及其對角線交於 E ，當 $\angle ABC = \angle ADC = \angle AEB$ ” 則此四邊形是否具有旋心呢？以下是我們的探討：

【定理 4-2】 四邊形 $ABCD$ 其對角線交於 E ，若 $\angle ABC = \angle ADC = \angle BEC$ ，則此四邊形必有旋心。

【證明】 (1) 作 $\triangle ABE$ 外接圓圓 O_1 ， $\because \angle BEC = \angle ABC$

$$\therefore \angle BEA = \angle ABC \text{ 的外角}$$

$$\Rightarrow \angle BAE = \angle CBE$$

可得 $\overline{BC}$ 為 $\triangle ABE$ 外接圓的切線。

(2) 同理作 $\triangle CDE$ 外接圓圓 O_2 ，可得 $\overline{AD}$ 為 $\triangle CDE$ 外接圓的切線。

(3) 若圓 O_1 與圓 O_2 第二交點 S ，

$$\text{連 } \overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}, \text{ 可得 } \angle SAE = \angle SBE, \angle SCE = \angle SDE$$

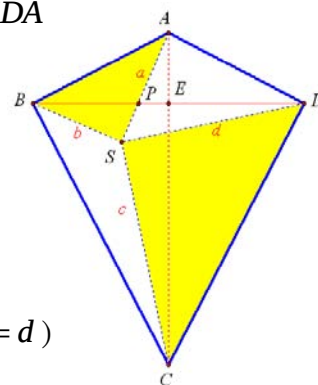


圖 7-1

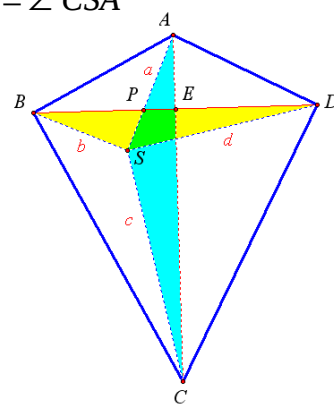


圖 7-2

$\Rightarrow \triangle ACS \sim \triangle BDS$ (AA 相似)

$\Rightarrow \overline{AS} : \overline{BS} = \overline{CS} : \overline{DS}$

(4) 在 $\triangle ABS$ 與 $\triangle CDS$ 中，

$\therefore \overline{AS} : \overline{BS} = \overline{CS} : \overline{DS}$, $\angle ASB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \angle AEB = \angle CED = \frac{1}{2} \widehat{CD} = \angle CSD$

$\therefore \triangle ABS \sim \triangle CDS$ (SAS 相似)

$\Rightarrow \angle SAB = \angle SCD$

又 $\angle SBC = \frac{1}{2} \widehat{BS} = \angle SAB$ 、 $\angle SDA = \frac{1}{2} \widehat{DS} = \angle SCD$

$\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$

即 S 為四邊形 $ABCD$ 的旋心。

(5) 若圓 O_1 、圓 O_2 外切，則 E 為切點(如圖 7-3-2)

作兩園內公切線 L ，可得 $\angle EBC = \angle 1 = \angle 2 = \angle EDA$

又 $\angle EAB = \angle EBC$ ， $\angle ECD = \frac{1}{2} \widehat{DE} = \angle EDA$

$\therefore \angle EAB = \angle EBC = \angle EDA$ ，即 E 為四邊形 $ABCD$ 的旋心。

綜合上述的證。

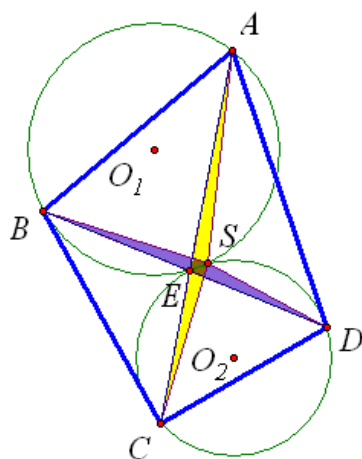


圖 7-3-1

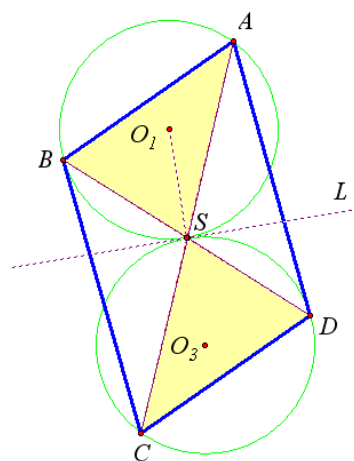


圖 7-3-2

(四)、旋心之應用—特殊四邊形內接母子相似作圖

利用上述結論與三角形的作圖方法，我們作出具有旋心的平行四邊形、梯形及鳶形之最小與過內部一點的內接母子相似圖形：

【應用一】特殊四邊形之最小內接母子相似圖形

【作法】同 $\triangle ABC$ 的最小內接母子相似圖形作法，見 P_8 。

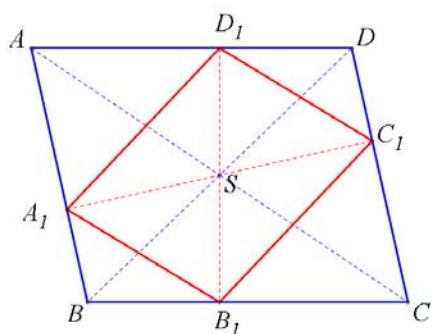


圖 8-1

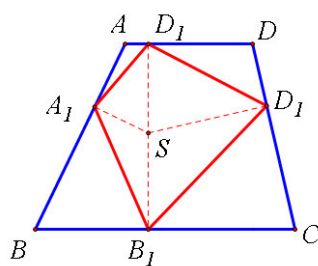


圖 8-2

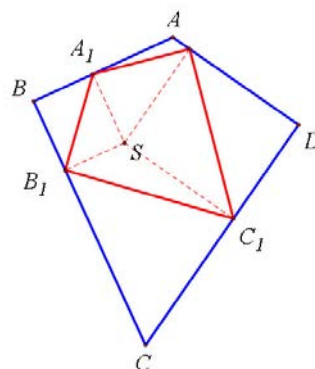


圖 8-3

【應用二】特殊四邊形過內部一點的內接母子相似圖形

【作法】同 $\triangle ABC$ 的過內部一點內接母子相似圖形作法，見 P_7 。

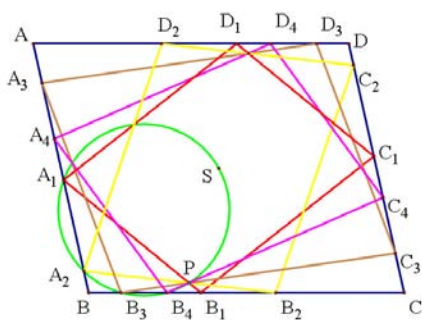


圖 8-4

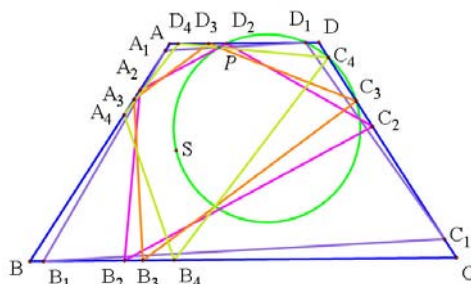


圖 8-5

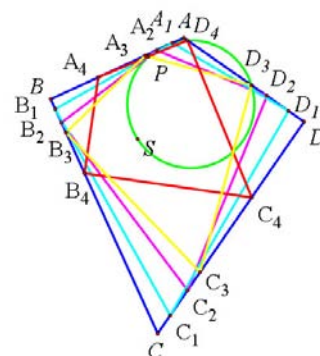


圖 8-6

伍、結論

一、凸 n 邊形旋心的性質

1、三角形必有旋心，邊數 4 以上的多邊形則不一定存在旋心。

2、正 n 邊形的旋心，落在其中心位置。

3、任意凸 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 的旋心具有以下性質：

(1) 外角性質： $\angle A_1SA_2 = \angle A_2$ 的外角、 $\angle A_2SA_3 = \angle A_3$ 的外角、... $\angle A_nSA_1 = \angle A_1$ 的外角。

(2) 切線性質： $\overline{A_2A_3}$ 為 $\triangle A_1SA_2$ 的外接圓切線、 $\overline{A_3A_4}$ 為 $\triangle A_2SA_3$ 的外接圓的切線、...、 $\overline{A_nA_1}$ 為 $\triangle A_{n-1}SA_n$ 的外接圓的切線。

- (3) 內接母子相似性質：以 S 為旋轉中心，將 $\overline{SA_1}, \overline{SA_2}, \dots, \overline{SA_n}$ 逆時針等角度旋轉，且分別與 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$ 交於 $B_1, B_2, \dots, B_n$ ，則 n 邊形 $B_1B_2 \dots B_n \sim n$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。
- (4) n 邊形 $B_1B_2 \dots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的內接母子相似圖形，則兩 n 邊形具有相同旋心。
- (5) 若 n 邊形存在內接母子相似圖形，則此 n 邊形必有旋心。

二、旋心的推廣與應用

1、任意凸 n 邊形若存在旋心，則可利用旋心作出

- (1) 過邊上一點的內接母子相似圖形。
- (2) 過內部一點的內接母子相似圖形。
- (3) 最小內接母子相似圖形。

2、特殊四邊形存在旋心的要件與相關結果：

- (1)、平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \sqrt{2}$ ，則必有旋心。
- (2)、非正方形的長方形與菱形無旋心，即無內接母子相似圖形。
- (3)、梯形 $ABCD$ (其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) 若存在旋心，則：
 - ① S 落在其中一條對角線上。
 - ② 兩腰與旋心所形成的外接圓圓 O_1 、圓 O_3 ，兩圓外切。
 - ③ $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$ 。
- (4)、等腰梯形若滿足對角線的長度等於腰長的 $\sqrt{2}$ 倍，則必有旋心且旋心在對角線中點上。
- (5)、鳶形 $ABCD$ ，當 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ，則鳶形必有旋心。
- (6)、四邊形 $ABCD$ 對角線交於 E ，若 $\angle ABC = \angle BCD = \angle AEB$ ，則此四邊形必有旋心。

陸、參考資料

- 1、陳冒海，國中數學第五冊，南一書局
- 2、郭志中、秦睿謙、詹逸傑、郭名旗，內接相似三角形的尺規作圖，中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
- 3、黃胤勛、李易哲、劉奕辰、王昱翔，形中有形，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會

【評語】 030415

1. 本作品頗具創意，論述詳實嚴謹，兼顧學術性及實用性價值。
2. 對主題中，操作 GSP 詮釋概念，操作熟練、清晰，誠實可貴。
3. 團隊合作頗有默契，表達能力佳。
4. 對三角形四邊形的旋心有深入探討，但對五邊形以上的多邊形未及討論，建議修正題目。