中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030414

變「形」金剛，好「正」！

學校名稱：嘉義市立南興國民中學

作者：	指導老師：
國二 謝雅雯	魏世和
國二 陳昭榮	朱偉誠
國二 魏文韜	
國二 賴立衡	

關鍵詞：外角平面線、變「形」、「正」多邊形

作品名稱：變「形」金剛，好「正」！

摘要：

在作三角形的三個外角平分線時，發現會形成新的三角形，而且若持續地一直作下去，新的三角形會逐漸趨近於正三角形。我們在想：對於四邊形或任意的多邊形，這個現象是否也是如此呢？

本研究包含以下的內容：

一、 證出：持續地做「任意三角形」的三個外角平分線所形成的新三角形，最後一定極接近於「正三角形」。

二、 證出：持續地做「特殊四邊形」(如：矩形、菱形、平行四邊形、等腰梯形、箏形、一般梯形）的四個外角平分線所形成的新四邊形，最後一定變成「正方形」或極接近於「正方形」。

三、 證出：持續地做「一般四邊形」的四個外角平分線所形成的新四邊形，最後一定極接近於「正方形」。

四、 推廣到：持續地做「一般凸 m 邊形」的所有外角平分線所形成的新 m 邊形，到最後新 m 邊形的形狀如何，將提出我們的觀點和圖表來「說明」。

文獻探討：

一、網路上有查到：任意三角形的三個外角平分線所形成的新三角形必為銳角三角形。

二、在翻閱科教館出版的中華民國第一屆至第三十五屆中小學科學展覽會作品目錄時，查到在第三十四屆高中組有一件佳作的作品「任意凸多邊形外角平分線所成多邊形之極限圖形」，但因時隔十五年，科教館在網路上也沒有作品說明書；連學校圖書室中的科展優良作品專輯中也只有前三名的作品，所以我們在研究時也無從得知其研究方法及研究結果。

壹、 研究動機:

在學習到「尺規作圖」時，我們知道:「任意三角形三個內角的角平分線必定交於一點(內心)」及「任意三角形兩角的外角平分線及第三內角的平分線亦必交於一點（旁心)」，我們覺得好奇的是：不知道任意三角形的三個外角的角平分線又會如何？畫完後我們發現：任意三角形的三個外角平分線不會交於一點，而是兩兩相交形成一個新的三角形，若再畫新三角形的三個外角的角平分線又會形成一個新的三角形，但是不知道如果一直地畫下去圖形會怎樣？趁著科展的機會，我們何不來研究一番呢？

貳、 研究目的:

一、 若持續地作任意三角形的三個外角平分線所形成的新三角形，結果會如何?

二、 若持續地作任意凸四邊形的四個外角平分線所形成的新四邊形，結果會如何?

三、 若持續地作任意凸 m 邊形的所有外角平分線所形成的新 m 邊形，結果會如何?

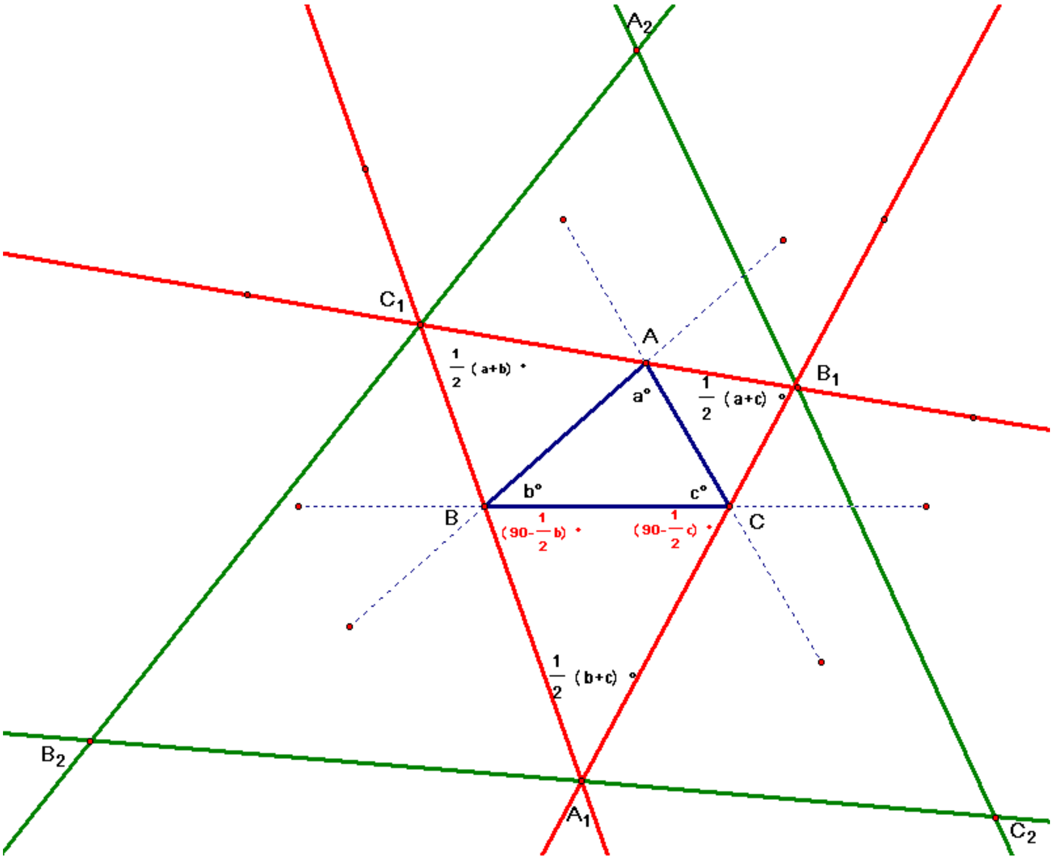
參、 研究設備及器材:

一、 文具：筆、計算紙、計算機，直尺、圓規、量角器；及一顆勇於挑戰的心。

二、 電腦及電腦軟體：Excel 試算表軟體、GSP 動態幾何繪圖軟體、matlab 軟體。

肆、 研究過程或方法:

爲了方便研究及說明，原來三角形以 ΔABC 表示，作第一次外角平分線所形成的新三角形以三角形 $\Delta A_1B_1C_1$ 表示，作第二次外角平分線所形成的新三角形以 $\Delta A_2B_2C_2$ 表示，……以此類推，如下圖所示。另假設 ΔABC 中，$\angle A = a°$，$\angle B = b°$，$\angle C = c°$



一、 探討：持續地作任意三角形的外角平分線所形成的新三角形形狀變化：

（一） 先利用代數運算找出 $\Delta A_1B_1C_1$ 的三內角: 由上圖可得

$$\angle A_1 = 180° - (90 - \frac{1}{2}b)° - (90 - \frac{1}{2}c)° = \frac{1}{2}(b+c)° = \frac{1}{2}(180-a)° = (90 - \frac{1}{2}a)°，$$

同理可得 $\angle B_1 = \frac{1}{2}(a+c)° = (90 - \frac{1}{2}b)°$，$\angle C_1 = \frac{1}{2}(a+b)° = (90 - \frac{1}{2}c)°$

[說明]:這個公式對往後的研究非常的有用，因爲它告訴我們：如何利用前一個圖形的內角求出下一個圖形的內角，有了這個公式，就可以很容易由△ABC 的內角找出 $\Delta A_1B_1C_1$ 的三內角，再由 $\Delta A_1B_1C_1$ 的三內角找出 $\Delta A_2B_2C_2$ 的三內角，…（多邊形亦然）。（由此公式可以很容易得到文獻探討一的結果）

（二） 任意找幾個三角形，設定其三個內角的度數，實際計算看看：可以利用前面推出的式子，但因爲要計算的次數相當多，因此我們設計 Excel 的表格來幫忙計算。下表中，下一列的三個內角都是上一列的三個內角所計算出來的。

下一列的內角 1＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 1＋內角 2）；下一列的內角 2＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 2＋

內角 3)；下一列的內角 3＝$\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 3＋內角 1）

我們試了很多個三角形，結果到最後每個內角都極接近 $60°$，下表是其中一個結果：

外角平分線次數（n）	內角 1	內角 2	內角 3
0	96.00	48.00	36.00
1	72.0000000000	42.0000000000	66.0000000000
2	57.0000000000	54.0000000000	69.0000000000
3	55.5000000000	61.5000000000	63.0000000000
…	………	………	………
10	59.9765625000	60.0351562500	59.9882812500
…	………	………	………
20	59.9999885559	59.9999771118	60.0000343323
…	………	………	………
30	60.0000000335	59.9999999888	59.9999999776

[說明]:從上面的計算結果，似乎發現：三角形的三個外角平分線如果一直做下去所形成的新三角形的三個內角都有慢慢變成 $60°$ 的現象；如果這個結果是對的，那最後不就變成正三角形了嗎?可是有什麼理論或證據呢?於是我們再繼續研究：持續地作任意三角形的外角平分線所形成的新三角形三個內角的一般式。

（三） 研究 $\Delta A_nB_nC_n$ 的三內角 $\angle A_n$ 、$\angle B_n$ 、$\angle C_n$ 的表示法：

由(一)之結果：若在 ΔABC 中，$\angle A = a°$，$\angle B = b°$，$\angle C = c°$，

則在 $\Delta A_1B_1C_1$ 中，$\angle A_1 = \frac{1}{2}(b + c)° = (90 - \frac{1}{2}a)°$

所以可以利用 $\angle A$ 的度數求 $\angle A_1$ 的度數，再利用 $\angle A_1$ 的度數求 $\angle A_2$ 的度數，再利用 $\angle A_2$ 的度數求 $\angle A_3$ 的度數……….以此類推，說明如下：

$$\angle A_2 = 90° - \frac{1}{2}(90 - \frac{1}{2}a)° = 90° - \frac{1}{2}\times 90° + (\frac{1}{2})^2 a°$$

$$\angle A_3 = 90° - \frac{1}{2}[90 - \frac{1}{2}\times 90 + (\frac{1}{2})^2 a]° = 90° - \frac{1}{2}\times 90° + (\frac{1}{2})^2\times 90° - (\frac{1}{2})^3\times a°$$

$$\angle A_4 = 90° - \frac{1}{2}\times[90 - \frac{1}{2}\times 90 + (\frac{1}{2})^2\times 90 - (\frac{1}{2})^3\times a]°$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\times 90° + (\frac{1}{2})^2\times 90° - (\frac{1}{2})^3\times 90° + (\frac{1}{2})^4 a°$$ …依此類推可得

$$\angle A_n = 90° - \frac{1}{2}\times 90° + (\frac{1}{2})^2\times 90° - (\frac{1}{2})^3\times 90° + ... + (-\frac{1}{2})^{n-1}\times 90° + (-1)^n(\frac{1}{2})^n\times a°$$

$$= 90°\times[1 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^3 + ... + (-\frac{1}{2})^{n-1}] + (-1)^n(\frac{1}{2})^n\times a°$$

$$=90°\times[1+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3+\dots+(-\frac{1}{2})^{n-1}]+(-1)^n\times(\frac{1}{2})^n\times a°$$

$$=90°\times\frac{1\times[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}+(-\frac{1}{2})^n\times a°=90°\times\frac{2}{3}\times[1-(-\frac{1}{2})^n]+(-\frac{1}{2})^n\times a°$$

$$=60°-60°\times(-\frac{1}{2})^n+(-\frac{1}{2})^n\times a°=60°+(a-60)°\times(-\frac{1}{2})^n$$

同理可得

$$\angle B_n=60°+(b-60)°\times(-\frac{1}{2})^n\ ;\ \angle C_n=60°+(c-60)°\times(-\frac{1}{2})^n$$

從上面的式子可以看出：當 $n\to\infty$ 時，$\angle A_n\to 60°$、$\angle B_n\to 60°$、$\angle C_n\to 60°$，

所以 $\Delta A_nB_nC_n\to$ 正Δ 。(所以我們前面的猜想是對的)

疑問：從上面的推論可知：當 $n\to\infty$ 時，$\Delta A_nB_nC_n\to$ 正Δ，但也就是說，必須對ΔABC 一直作外角平分線非常非常多次(無限多次)之後，$\Delta A_nB_nC_n$ 才會變成正Δ嗎？

（四） 探討：是否存在著某種特殊的Δ，在經過「有限次」作外角平分線後，所形成的新Δ就提早達陣變成正Δ呢？

我們討論後所得到的答案是：「impossible！」。推論如下：

因爲若存在一個自然數 n 使得

$$\angle A_n=60°+(a-60)°\times(-\frac{1}{2})^n=60°\Rightarrow(a-60)°\times(-\frac{1}{2})^n=0$$

因爲 n 爲自然數，所以 $(-\frac{1}{2})^n\neq 0\Rightarrow a-60=0\Rightarrow a=60$

同理，若要 $\angle B_n=60°$ ，則必須 b＝60；若要 $\angle C_n=60°$ ，則必須 c＝60 。

因此，除非ΔABC 本身爲正Δ，否則不存在某種特殊的Δ，在經過「有限次」作外角平分線後，所形成的新Δ就提早達陣變成正Δ。

由下表可知，若只有一個角爲 60°的Δ，還是不足以在經過「有限次」作外角平分線後，所形成的新Δ就提早達陣變成正Δ。

外角平分線次數（n）	內角 1	內角 2	內角 3
0	60.00	78.00	42.00
1	69.0000000000	60.0000000000	51.0000000000
2	64.5000000000	55.5000000000	60.0000000000
3	60.0000000000	57.7500000000	62.2500000000
…	………	………	………
28	59.9999999329	60.0000000000	60.0000000671
29	59.9999999665	60.0000000335	60.0000000000
30	60.0000000000	60.0000000168	59.9999999832

[小結]：

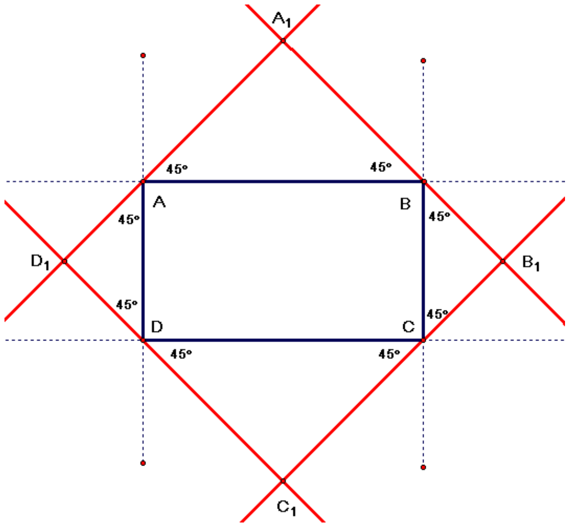
1. 持續地做「任意Δ」的三個外角平分線所形成的新Δ，最後一定極接近於「正Δ」。
2. 除非Δ本身爲正Δ，否則不存在某種特殊的Δ，在經過「有限次」作外角平分線後，所形成的新Δ就提早達陣變成正Δ。

二、探討：持續地作任意凸四邊形的四個外角的平分線所形成的新四邊形的形狀變化：

因爲在研究Δ時，我們已經得到了一個有用的公式，即：若$\angle A$ 、$\angle B$ 爲兩鄰角，則$\angle A$ 和$\angle B$ 的外角平分線的夾角爲$\frac{1}{2}\times(\angle A+\angle B)$，此公式對四邊形亦適用。

所以一開始，也想要直接將四邊形的角度一般化，可是四邊形的四個角的關係不像Δ那麼單純，所以我們馬上就踢到鐵板（見 P11 的說明）；因此我們將從特殊四邊形出發，逐步探討其最後的結果會不會變成正方形：

（一） 探討：持續地作矩形（長≠寬）的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？



[說明]：設四邊形$A_1B_1C_1D_1$爲作矩形 ABCD 的四個外角平分線一次所得的新四邊形

（1）$\because$四邊形 ABCD 爲矩形，$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$

$\therefore \angle A$ 、$\angle B$的外角平分線的夾角$\angle A_1=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$

同理可證$\angle B_1=\angle C_1=\angle D_1=90°$

（2）由圖中可知ΔA_1AB 、ΔB_1BC 、ΔC_1CD 、ΔD_1AD都是等腰直角三角形

且因爲$\overline{AB}=\overline{CD}$ 、$\overline{BC}=\overline{AD}$

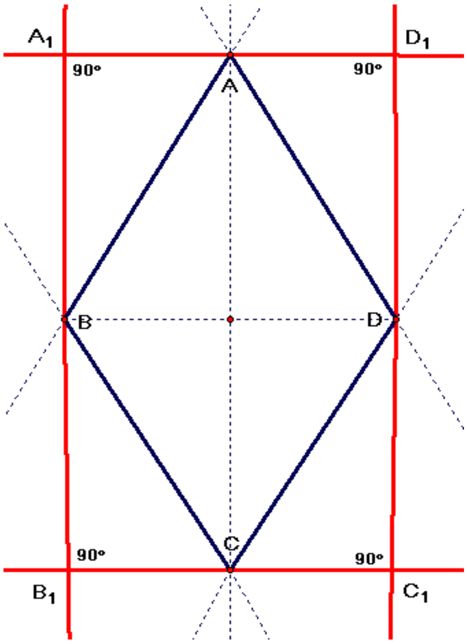
所以$\Delta A_1AB\cong\Delta C_1CD$ ；$\Delta B_1BC\cong\Delta D_1AD\Rightarrow\overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}$

（3）由（1）、（2）可得四邊形$A_1B_1C_1D_1$爲正方形

（4）故任意矩形（長≠寬）在作四個外角平分線「一次」，就可以形成正方形。

（5）這麼快就得到答案，讓我們非常驚訝，也非常高興。

（二） 探討：持續地作菱形（內角都不是直角）的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？



[說明]：設四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲作菱形 ABCD 的四個外角平分線一次所得的新四邊形

（1）∵四邊形 ABCD 爲菱形，$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ$（鄰角互補）

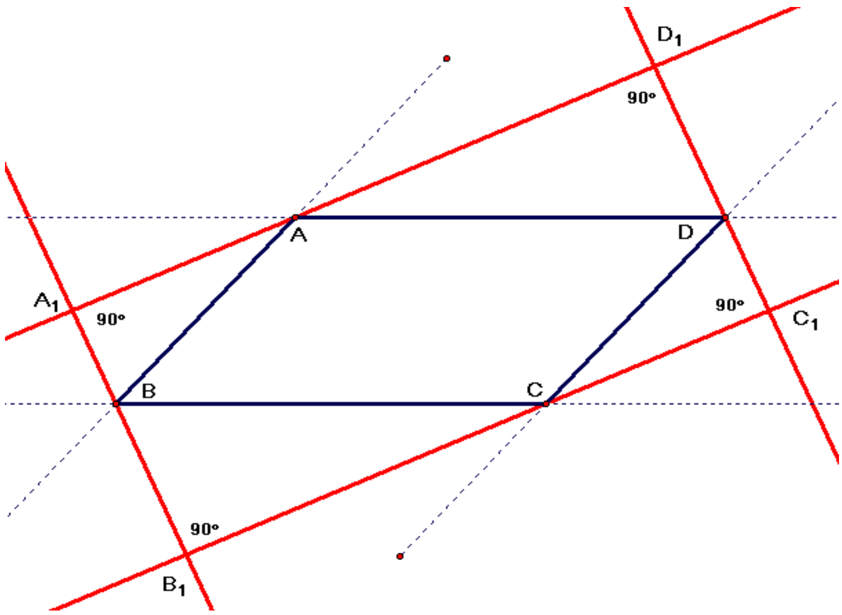
$\Rightarrow \angle A$、$\angle B$ 的外角平分線的夾角 $\angle A_1=\frac{1}{2}\times(\angle A+\angle B)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$

同理可證 $\angle B_1=\angle C_1=\angle D_1=90^\circ \Rightarrow$ 四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲矩形

（2）再根據（一）的結論，只要再作矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 的四個外角平分線一次，就可得到正方形

（3）所以任意菱形（內角都不是直角的）只要連續作四個外角的平分線「兩次」就可得到正方形。

（三） 探討：持續地作任意平行四邊形的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？



[說明]：設四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲作平行四邊形 ABCD 的四個外角平分線一次所得的新四邊形

（1）$\because$ 四邊形 ABCD 爲平行四邊形，$\therefore \angle A + \angle B = 180°$（鄰角互補）

$\Rightarrow \angle A$ 、$\angle B$ 的外角平分線的夾角 $\angle A_1 = \frac{1}{2} \times (\angle A + \angle B) = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

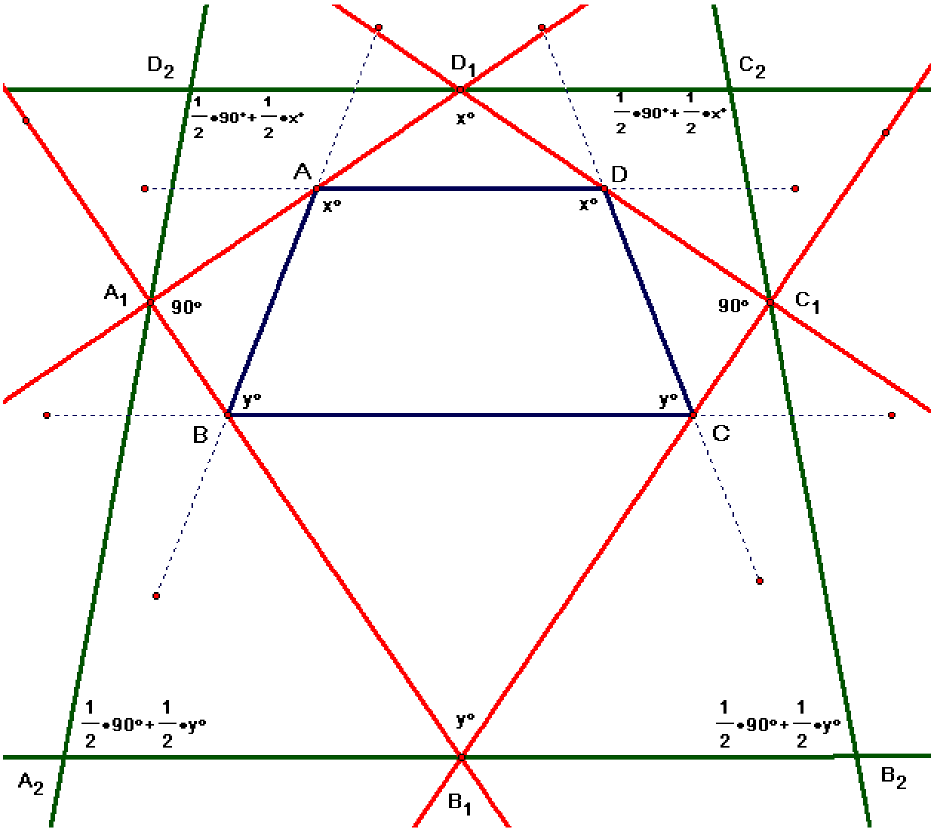
同理可證 $\angle B_1 = \angle C_1 = \angle D_1 = 90° \Rightarrow$ 四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲矩形

（2）再根據（一）的結論，只要再作矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 的四個外角平分線一次，就可得到正方形。

（3）所以**任意平行四邊形（內角都不是直角的且鄰邊不等長）只要作四個外角平分線「兩次」就可得到正方形。**

（4）這個結果比矩形的結果更令我們高興，因爲平行四邊形並不像矩形那麼特殊。

（四） 探討：持續地作等腰梯形的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？



[說明]：設四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲作等腰梯形 ABCD 的四個外角平分線一次所得的新四邊形；四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 爲再作四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 的四個外角平分線一次所得的新四邊形，………………

（1） 因爲 ABCD 是等腰梯形（等腰梯形具有一組對邊平行且底角相等的性質）所以可假設等腰梯形 ABCD 的四個內角

$\angle A = x°$ 、$\angle B = y°$ 、$\angle C = y°$ 、$\angle D = x°$（其中 $x + y = 180$ ）

推得 $\angle A_1 = \frac{1}{2} \times (x + y)° = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ 、$\angle B_1 = \frac{1}{2} \times (y + y)° = y°$ 、

$$\angle C_1=\frac{1}{2}\times(x+y)^\circ=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ \text{ 、 } \angle D_1=\frac{1}{2}\times(x+x)^\circ=x^\circ$$

（2）再推得 $\angle A_2=\frac{1}{2}\times(90+y)^\circ$ 、 $\angle B_2=\frac{1}{2}\times(90+y)^\circ$

$\angle C_2=\frac{1}{2}\times(90+x)^\circ$ 、 $\angle D_2=\frac{1}{2}\times(90+x)^\circ$ ，又計算

$$\angle A_2+\angle D_2=\frac{1}{2}\times(90+y)^\circ+\frac{1}{2}\times(90+x)^\circ=\frac{1}{2}\times(180+x+y)^\circ=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$$

因爲 $\angle A_2+\angle D_2=180^\circ$，所以 $\overline{A_2B_2}\,//\,\overline{C_2D_2}$ ，又因爲 $\angle A_2=\angle B_2$ 、 $\angle C_2=\angle D_2$

所以四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 爲等腰梯形。

（3）初步觀察，**四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲箏形而四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 爲等腰梯形，所以如果持續做下去，圖形會在等腰梯形→箏形→等腰梯形→箏形→…一直循環下去。**

（4）**但由圖中可感覺到等腰梯形 $A_2B_2C_2D_2$ 的兩腰比等腰梯形 ABCD 的兩腰和底邊會更接近垂直，所以我們覺得如果繼續做下去，應該會更接近矩形**，我們繼續研究如下：

（5）由等腰梯形 ABCD 的四個內角 x° 、 x° 、 y° 、 y°

可推得等腰梯形 $A_2B_2C_2D_2$ 的四個內角爲

$$(\frac{1}{2}\times 90+\frac{1}{2}\times x)^\circ \text{ 、 } (\frac{1}{2}\times 90+\frac{1}{2}\times x)^\circ \text{ 、 } (\frac{1}{2}\times 90+\frac{1}{2}\times y)^\circ \text{ 、 } (\frac{1}{2}\times 90+\frac{1}{2}\times y)^\circ$$

因此可再推得等腰梯形 $A_4B_4C_4D_4$ 的四個內角爲：

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times x^\circ]=\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times x^\circ$$

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times x^\circ]=\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times x^\circ$$

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times y^\circ]=\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times y^\circ$$

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times y^\circ]=\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times y^\circ$$

繼續再推得等腰梯形 $A_6B_6C_6D_6$ 的四個內角爲：

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times x^\circ]$$
$$=90^\circ\times[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3]+(\frac{1}{2})^3\times x^\circ$$

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times x^\circ]$$
$$=90^\circ\times[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3]+(\frac{1}{2})^3\times x^\circ$$

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times y^\circ]$$
$$=90^\circ\times[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3]+(\frac{1}{2})^3\times y^\circ$$

$$\frac{1}{2}\times 90^\circ+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times 90^\circ+(\frac{1}{2})^2\times y^\circ]$$
$$=90^\circ\times[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3]+(\frac{1}{2})^3\times y^\circ$$

依此類推……

等腰梯形 $A_{2k}B_{2k}C_{2k}D_{2k}$ 四個內角的化簡過程：

$$90^\circ\times[(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\dots\dots\dots+(\frac{1}{2})^k]+(\frac{1}{2})^k\times x^\circ\text{（或}y^\circ\text{）}$$

$$=90^\circ\times\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^k]}{1-\frac{1}{2}}+(\frac{1}{2})^k\times x^\circ\text{（或}y^\circ\text{）}$$

$$=90^\circ-90^\circ\times(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k\times x^\circ\text{（或}y^\circ\text{）}$$

所以等腰梯形 $A_{2k}B_{2k}C_{2k}D_{2k}$ 的四個內角為

$$90^\circ-90^\circ\times(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k\times x^\circ\ ;\ 90^\circ-90^\circ\times(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k\times x^\circ$$

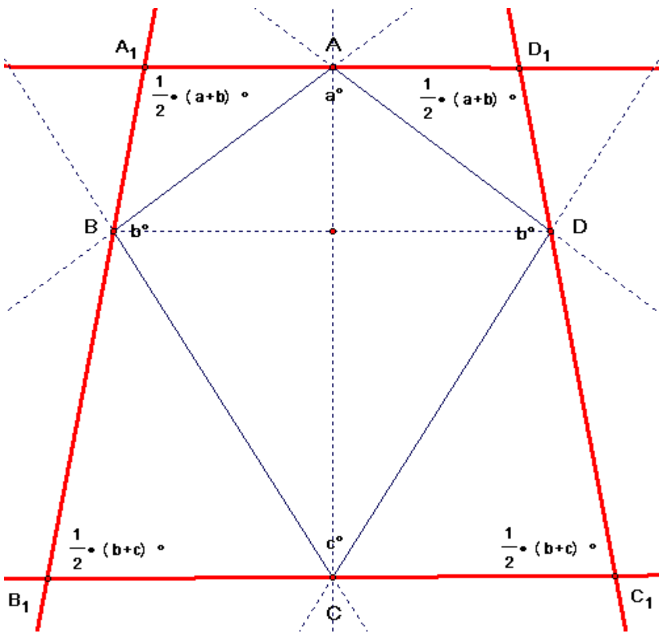
$$90^\circ-90^\circ\times(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k\times y^\circ\ ;\ 90^\circ-90^\circ\times(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k\times y^\circ$$

當 k→∞，四邊形 $A_{2k}B_{2k}C_{2k}D_{2k}$ 的四個內角 $\angle A_{2k}$ 、$\angle B_{2k}$ 、$\angle C_{2k}$ 、$\angle D_{2k}\to 90^\circ$

所以四邊形 $A_nB_nC_nD_n$ 會極接近矩形，再根據（一）的結論

若四邊形 $A_nB_nC_nD_n$ 極接近矩形，則繼續作四邊形 $A_nB_nC_nD_n$ 的四個外角平分線應該會極接近正方形才對。

（五） 探討：持續地作一般箏形的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？



[說明]：設四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲作一般箏形 ABCD 的四個外角平分線一次所得的新四邊形（如上圖）

（1）因爲箏形有一條對稱軸，軸的兩側有一組對角相等，

所以可假設其四個內角分別爲 $a°$ ，$b°$ ，$c°$ ，$b°$ ，其中 $a+2b+c=360$

經計算得知四外角的分角線所形成的新四邊形，其內角分別爲

$\frac{1}{2}(a+b)°$ ，$\frac{1}{2}(b+c)°$ ，$\frac{1}{2}(b+c)°$ ， $\frac{1}{2}(a+b)°$

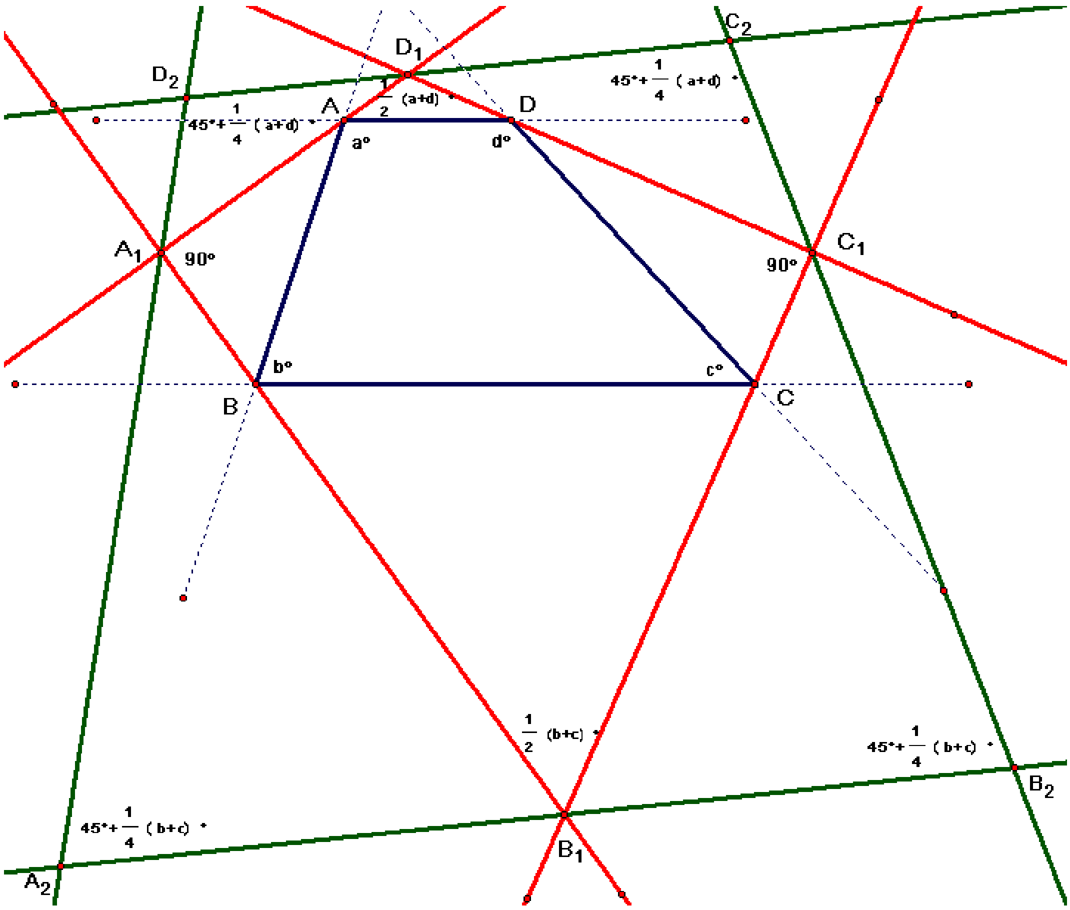
因爲 $\frac{1}{2}(a+b)°+\frac{1}{2}(b+c)°=\frac{1}{2}(a+2b+c)°=\frac{1}{2}\times 360°=180°$

鄰角互補，所以有一組平行邊可推得四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲梯形

且其底角兩兩相等，故爲等腰梯形。

（2）根據（四）關於等腰梯形的推論過程，可知若繼續做下去，可推測出最後必極接近於正方形。

（六）　探討：持續地作一般梯形的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？



[說明]：設四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 爲作一般梯形 ABCD 的四個外角平分線一次所得的新四邊形；四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 爲再作四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 的四個外角平分線一次所得的新四邊形

（1）（如上圖）假設梯形 ABCD 的四個內角分別爲 $a°$ ，$b°$ ，$c°$ ，$d°$

（其中 $a+b=180$ 、 $c+d=180$ ），經計算得知：

作「兩次」外角平分線所形成的新四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 的四個內角分別爲

$45°+\frac{1}{4}(a+d)°$ 、$45°+\frac{1}{4}(b+c)°$、$45°+\frac{1}{4}(b+c)°$ 、$45°+\frac{1}{4}(a+d)°$

（2）因為 $\left[45°+\frac{1}{4}(a+d)°\right]+\left[45°+\frac{1}{4}(b+c)°\right]$

$$=45°+45°+\frac{1}{4}\times(a+b+c+d)=90°+\frac{1}{4}\times 360°=180°$$

鄰角互補，故有一組平行邊可推得四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 為梯形

且其底角兩兩相等，所以為「等腰梯形」。

（3）根據（四）關於「等腰梯形」的推論過程，可知若繼續做下去，可推測出最後必極接近於正方形。

（七） 探討：持續地作一般凸四邊形的外角平分線所形成的新四邊形是何種形狀？

一開始我們想到將四邊形 ABCD 的四個內角度數設為 a、b、c、d（其中 $0<a,b,c,d<180$ 且 $a+b+c+d=360$），然後找出作一次四個外角平分線所得的新四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 的四個內角度數；再找出作二次四個外角平分線所得的新四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 的四個內角度數；….依此類推，看看有沒有規律，以下是我們的想法：

外角平分線次數（n）	內角 1	內角 2	內角 3	內角 4
0	a	b	c	d
1	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b+c}{2}$	$\frac{c+d}{2}$	$\frac{a+d}{2}$
2	$\frac{a+2b+c}{4}$	$\frac{b+2c+d}{4}$	$\frac{a+c+2d}{4}$	$\frac{2a+b+d}{4}$
3	$\frac{a+3b+3c+d}{8}$	$\frac{a+b+3c+3d}{8}$	$\frac{3a+b+c+3d}{8}$	$\frac{3a+3b+c+d}{8}$
4	$\frac{2a+4b+6c+4d}{16}$	$\frac{4a+2b+4c+6d}{16}$	$\frac{6a+4b+2c+4d}{16}$	$\frac{4a+6b+4c+2d}{16}$
5	$\frac{6a+6b+10c+10d}{32}$	$\frac{10a+6b+6c+10d}{32}$	$\frac{10a+10b+6c+6d}{32}$	$\frac{6a+10b+10c+6d}{32}$

……………………可是看了半天，實在看不出有什麼規律，只好想別的作法：

1.先用 Excel 試算表算算看：任意假設四邊形的四個內角度數，我們試了好幾個四邊形，結果到最後，每個四邊形的各內角都接近 $90°$，下表就是其中一個：

下表中，下一列的四個內角都是上一列的四個內角所計算出來的。

下一列的內角 1＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 1＋內角 2）；下一列的內角 2＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 2＋內角 3）

下一列的內角 3＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 3＋內角 4）；下一列的內角 4＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 4＋內角 1）

外角平分線次數（n）	內角 1	內角 2	內角 3	內角 4
0	128.00	64.00	88.00	80.00
1	96.0000000000	76.0000000000	84.0000000000	104.0000000000
2	86.0000000000	80.0000000000	94.0000000000	100.0000000000
3	83.0000000000	87.0000000000	97.0000000000	93.0000000000
…	………	………	………	………
10	89.7500000000	89.3750000000	90.2500000000	90.6250000000
…	………	………	………	………
20	89.9804687500	90.0078125000	90.0195312500	89.9921875000
…	………	………	………	………
30	90.0002441406	90.0006103516	89.9997558594	89.9993896484

但是有 Excel 試算表的結果並不代表「每個四邊形」的結果都是這樣，我們需要有「更直接」的證據。

2.我們先提出這樣的想法：

假設原四邊形 ABCD 的四個內角度數爲 a、b、c、d（其中$0<a,b,c,d<180$且$a+b+c+d=360$），在求四邊形$A_1B_1C_1D_1$的四個內角度數時，必須將每個內角與其鄰角取平均值，得到四個內角度數分別爲$\frac{a+b}{2}$、$\frac{b+c}{2}$、$\frac{c+d}{2}$、$\frac{a+d}{2}$；接著求四邊形$A_2B_2C_2D_2$的四個內角度數又必須將四邊形$A_1B_1C_1D_1$每個內角與其鄰角取平均值，………如果「重複的」步驟一直做下去，到最後是不是原四邊形 ABCD 的四個內角度數 a、b、c、d 都會「均勻地」分布在每個內角中呢？如此一來，是不是最後每個內角都相等了呢？如果每個內角都相等，那最後每個內角是不是都變成「$360°\div 4=90°$」了呢？正當我們不知如何證明時，又找到另一個希望————

3.利用「矩陣的乘法」來處理不斷重複的步驟：

因爲在由原四邊形找其外角平分線所形成的新四邊形的四個內角度數時，經常做的一件事是求出「相鄰內角的平均值」；求出後再繼續做重複的動作，一直一直地做下去。在老師的指導下，發現可以用「矩陣的乘法」來處理，說明如下：

（1）設作 n 次外角平分線所得四邊形$A_nB_nC_nD_n$的四個內角度數分別爲a_n、b_n、c_n、d_n，

根據我們的需要設計了一個如下的矩陣：$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

則 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{bmatrix}$ ……………

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$，根據矩陣乘法結合律，上面的乘法可以寫成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$，可是當 $n \to \infty$ 時，$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \to ?$

（2）令 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，將 $\frac{1}{2}$ 用 r 代替

$$A = \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & r & 0 \\ 0 & 0 & r & r \\ r & 0 & 0 & r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r^2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = r^2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r^3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = r^3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r^4\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \times A = r^4\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r^5\begin{bmatrix} 6 & 6 & 10 & 10 \\ 10 & 6 & 6 & 10 \\ 10 & 10 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 10 & 6 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..$$

我們觀察到 A^n 有以下的一些規律：

（Ⅰ）任一列所出現的元與其它的任一列的元都相同，只有順序不同。

（Ⅱ）第二列所出現的各元分別是將第一列的第 4 個元寫在最前面，而將第一列的

前三元依序寫到第二列的後三元；第三列可以用第二列來排而第四列可以用第三列來排（排法仿照第二列）；所以我們可以只求第一列。

（Ⅲ）在由 A^n 的第一列求 A^{n+1} 的第一列時，我們暫時將 r 的部分略去只考慮數字的部份，若 A^n 的第一列爲矩陣[x　y　z　w]，則 A^{n+1} 的第一列爲

$$=\begin{bmatrix}x & y & z & w\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+w & x+y & y+z & z+w\end{bmatrix}$$

，因爲有此規律

所以我們可以設計 Excel 的表格幫忙計算 A^n 的第一列的數字部份：下表中

下一列的數字 1＝上一列的數字 1＋數字 4；下一列的數字 2＝上一列的數字 1＋數字 2；

下一列的數字 3＝上一列的數字 2＋數字 3；下一列的數字 4＝上一列的數字 3＋數字 4：

1	1	0	0	A^1的第一列數字部分
1	2	1	0	A^2的第一列數字部分
1	3	3	1	A^3的第一列數字部分
2	4	6	4	…
6	6	10	10	…
16	12	16	20	…
36	28	28	36	…
72	64	56	64	A^8的第一列數字部分
136	136	120	120	A^9的第一列數字部分
256	272	256	240	…
496	528	528	496	…
992	1024	1056	1024	…
2016	2016	2080	2080	…
4096	4032	4096	4160	…
8256	8128	8128	8256	…
16512	16384	16256	16384	A^{16}的第一列數字部分
32896	32896	32640	32640	A^{17}的第一列數字部分
65536	65792	65536	65280	…
130816	131328	131328	130816	…
261632	262144	262656	262144	…
523776	523776	524800	524800	…
1048576	1047552	1048576	1049600	…
2098176	2096128	2096128	2098176	…
4196352	4194304	4192256	4194304	A^{24}的第一列數字部分
8390656	8390656	8386560	8386560	A^{25}的第一列數字部分

（Ⅳ）將 A^n 的**任一列的數字部份加起來的和正好等於** 2^n **，**
於是我們想到將每個元用「2 進位」的式子表示。

（Ⅴ）我們在觀察 Excel 的表格時發現每乘 8 次方所得到的數字結構很類似，我們覺

得 A^8 、 A^{16} 、 $A^{24}\cdots$ 、 A^{8k} （k 爲自然數）可能有某種規律，詳述如下：先算出

$$A^8=r^8\begin{bmatrix}72&64&56&64\\64&72&64&56\\56&64&72&64\\64&56&64&72\end{bmatrix}=r^8\begin{bmatrix}2^6+2^3&2^6&2^6-2^3&2^6\\2^6&2^6+2^3&2^6&2^6-2^3\\2^6-2^3&2^6&2^6+2^3&2^6\\2^6&2^6-2^3&2^6&2^6+2^3\end{bmatrix}$$ ，再推出

A^{16} 的第一列＝ A^8 的第一列 $\times A^8$ ：

$$r^8\begin{bmatrix}2^6+2^3&2^6&2^6-2^3&2^6\end{bmatrix}\times r^8\begin{bmatrix}2^6+2^3&2^6&2^6-2^3&2^6\\2^6&2^6+2^3&2^6&2^6-2^3\\2^6-2^3&2^6&2^6+2^3&2^6\\2^6&2^6-2^3&2^6&2^6+2^3\end{bmatrix}$$

$$=r^{16}\begin{bmatrix}2^{14}+2^7&2^{14}&2^{14}-2^7&2^{14}\end{bmatrix}$$ ，再繼續推出

A^{24} 的第一列＝ A^{16} 的第一列 $\times A^8$ ：

$$r^{16}\begin{bmatrix}2^{14}+2^7&2^{14}&2^{14}-2^7&2^{14}\end{bmatrix}\times r^8\begin{bmatrix}2^6+2^3&2^6&2^6-2^3&2^6\\2^6&2^6+2^3&2^6&2^6-2^3\\2^6-2^3&2^6&2^6+2^3&2^6\\2^6&2^6-2^3&2^6&2^6+2^3\end{bmatrix}$$

$$=r^{24}\begin{bmatrix}2^{22}+2^{11}&2^{22}&2^{22}-2^{11}&2^{22}\end{bmatrix}$$ ………以此類推

最後歸納出當 k 爲正整數時， A^{8k} 的第一列：

$$=r^{8k}\begin{bmatrix}2^{8k-2}+2^{4k-1}&2^{8k-2}&2^{8k-2}-2^{4k-1}&2^{8k-2}\end{bmatrix}$$

命題：若 $A=\begin{bmatrix}r&r&0&0\\0&r&r&0\\0&0&r&r\\r&0&0&r\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$ ，則對於任意自然數 k

$$A^{8k}=r^{8k}\times\begin{bmatrix}2^{8k-2}+2^{4k-1}&2^{8k-2}&2^{8k-2}-2^{4k-1}&2^{8k-2}\\2^{8k-2}&2^{8k-2}+2^{4k-1}&2^{8k-2}&2^{8k-2}-2^{4k-1}\\2^{8k-2}-2^{4k-1}&2^{8k-2}&2^{8k-2}+2^{4k-1}&2^{8k-2}\\2^{8k-2}&2^{8k-2}-2^{4k-1}&2^{8k-2}&2^{8k-2}+2^{4k-1}\end{bmatrix}$$ 恆成立

證明：1° 令 k=1 代入，得 $A^8=r^8\begin{bmatrix}2^6+2^3&2^6&2^6-2^3&2^6\\2^6&2^6+2^3&2^6&2^6-2^3\\2^6-2^3&2^6&2^6+2^3&2^6\\2^6&2^6-2^3&2^6&2^6+2^3\end{bmatrix}$ 與上面運算結果相同

所以 k=1 時，上式成立。

2° 假設 k＝n 時成立，即

$$A^{8n}=r^{8n}\times\begin{bmatrix}2^{8n-2}+2^{4n-1}&2^{8n-2}&2^{8n-2}-2^{4n-1}&2^{8n-2}\\2^{8n-2}&2^{8n-2}+2^{4n-1}&2^{8n-2}&2^{8n-2}-2^{4n-1}\\2^{8n-2}-2^{4n-1}&2^{8n-2}&2^{8n-2}+2^{4n-1}&2^{8n-2}\\2^{8n-2}&2^{8n-2}-2^{4n-1}&2^{8n-2}&2^{8n-2}+2^{4n-1}\end{bmatrix}$$

3°當 k＝（n＋1）時

$$A^{8k}=A^{8(n+1)}=A^{8n+8}=A^{8n}\times A^{8}$$

$$=r^{8n}\times\begin{bmatrix}2^{8n-2}+2^{4n-1} & 2^{8n-2} & 2^{8n-2}-2^{4n-1} & 2^{8n-2}\\ 2^{8n-2} & 2^{8n-2}+2^{4n-1} & 2^{8n-2} & 2^{8n-2}-2^{4n-1}\\ 2^{8n-2}-2^{4n-1} & 2^{8n-2} & 2^{8n-2}+2^{4n-1} & 2^{8n-2}\\ 2^{8n-2} & 2^{8n-2}-2^{4n-1} & 2^{8n-2} & 2^{8n-2}+2^{4n-1}\end{bmatrix}\times$$

$$r^{8}\begin{bmatrix}2^6+2^3 & 2^6 & 2^6-2^3 & 2^6\\ 2^6 & 2^6+2^3 & 2^6 & 2^6-2^3\\ 2^6-2^3 & 2^6 & 2^6+2^3 & 2^6\\ 2^6 & 2^6-2^3 & 2^6 & 2^6+2^3\end{bmatrix}$$ 化簡………後得到

$$=r^{8n+8}\times\begin{bmatrix}2^{8n+6}+2^{4n+3} & 2^{8n+6} & 2^{8n+6}-2^{4n+3} & 2^{8n+6}\\ 2^{8n+6} & 2^{8n+6}+2^{4n+3} & 2^{8n+6} & 2^{8n+6}-2^{4n+3}\\ 2^{8n+6}-2^{4n+3} & 2^{8n+6} & 2^{8n+6}+2^{4n+3} & 2^{8n+6}\\ 2^{8n+6} & 2^{8n+6}-2^{4n+3} & 2^{8n+6} & 2^{8n+6}+2^{4n+3}\end{bmatrix}$$

$$=r^{8(n+1)}\times\begin{bmatrix}2^{8(n+1)-2}+2^{4(n+1)-1} & 2^{8(n+1)-2} & 2^{8(n+1)-2}-2^{4(n+1)-1} & 2^{8(n+1)-2}\\ 2^{8(n+1)-2} & 2^{8(n+1)-2}+2^{4(n+1)-1} & 2^{8(n+1)-2} & 2^{8(n+1)-2}-2^{4(n+1)-1}\\ 2^{8(n+1)-2}-2^{4(n+1)-1} & 2^{8(n+1)-2} & 2^{8(n+1)-2}+2^{4(n+1)-1} & 2^{8(n+1)-2}\\ 2^{8(n+1)-2} & 2^{8(n+1)-2}-2^{4(n+1)-1} & 2^{8(n+1)-2} & 2^{8(n+1)-2}+2^{4(n+1)-1}\end{bmatrix}$$

所以 k＝（n＋1）時，上式亦成立，依「數學歸納法」可知此命題爲真。

（3）當 n 不是 8 的倍數時：對於 n＝8k＋i，A^{8k+i} 的計算方法

（k 爲正整數且 i=1、2、3、4、5、6、7 其中之一）：以 i=5 爲例

$A^{8k+5}=A^{8k}\times A^{5}$（將 A^5 的數字部份的各元以 2 進位的式子表示）

$$=r^{8k}\times\begin{bmatrix}2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2}\\ 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1}\\ 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2}\\ 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1}\end{bmatrix}\times r^{5}\begin{bmatrix}2^2+2^1 & 2^2+2^1 & 2^3+2^1 & 2^3+2^1\\ 2^3+2^1 & 2^2+2^1 & 2^2+2^1 & 2^3+2^1\\ 2^3+2^1 & 2^3+2^1 & 2^2+2^1 & 2^2+2^1\\ 2^2+2^1 & 2^3+2^1 & 2^3+2^1 & 2^2+2^1\end{bmatrix}$$

$$=r^{8k+5}\times\begin{bmatrix}2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1}\\ 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1}\\ 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1}\\ 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1}\end{bmatrix}$$

其餘的 A^{8k+i}（k 爲正整數且 i=1、2、3、4、6、7 其中之一）的計算方法都可以仿照 A^{8k+5} 的方法來求出。

（4）將 $r=\dfrac{1}{2}$ 代回來：則

$$A^{8k}=(\frac{1}{2})^{8k}\times\begin{bmatrix}2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2}\\ 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1}\\ 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2}\\ 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1}\end{bmatrix}$$

$$=2^{-8k}\times\begin{bmatrix}2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2}\\ 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1}\\ 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1} & 2^{8k-2}\\ 2^{8k-2} & 2^{8k-2}-2^{4k-1} & 2^{8k-2} & 2^{8k-2}+2^{4k-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^{-2}+2^{-(4k+1)} & 2^{-2} & 2^{-2}-2^{-(4k+1)} & 2^{-2}\\ 2^{-2} & 2^{-2}+2^{-(4k+1)} & 2^{-2} & 2^{-2}-2^{-(4k+1)}\\ 2^{-2}-2^{-(4k+1)} & 2^{-2} & 2^{-2}+2^{-(4k+1)} & 2^{-2}\\ 2^{-2} & 2^{-2}-2^{-(4k+1)} & 2^{-2} & 2^{-2}+2^{-(4k+1)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{4k+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{2^{4k+1}} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2^{4k+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{2^{4k+1}}\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2^{4k+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2^{4k+1}} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{2^{4k+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2^{4k+1}}\end{bmatrix}$$

所以，當$k\to\infty$時，$A^{8k}\to\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

另外，$A^{8k+5}=2^{-(8k+5)}\times\begin{bmatrix}2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1}\\ 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1}\\ 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1}\\ 2^{8k+3}-2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}+2^{4k+1} & 2^{8k+3}-2^{4k+1}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2^{-2}-2^{-(4k+4)} & 2^{-2}-2^{-(4k+4)} & 2^{-2}+2^{-(4k+4)} & 2^{-2}+2^{-(4k+4)}\\ 2^{-2}+2^{-(4k+4)} & 2^{-2}-2^{-(4k+4)} & 2^{-2}-2^{-(4k+4)} & 2^{-2}+2^{-(4k+4)}\\ 2^{-2}+2^{-(4k+4)} & 2^{-2}+2^{-(4k+4)} & 2^{-2}-2^{-(4k+4)} & 2^{-2}-2^{-(4k+4)}\\ 2^{-2}-2^{-(4k+4)} & 2^{-2}+2^{-(4k+4)} & 2^{-2}+2^{-(4k+4)} & 2^{-2}-2^{-(4k+4)}\end{bmatrix}$$

同理，當$k \to \infty$時，$A^{8k+5} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

仿照A^{8k+5}的求法，可得：當$k \to \infty$時，

A^{8k+i}（k 爲正整數且 i＝1、2、3、4、6、7 其中之一）$\to \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

總結前面的說明，可知當$n \to \infty$時，$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \to \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

（5）所以當$n \to \infty$時，

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ \frac{1}{4}(a+b+c+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 360 \\ \frac{1}{4} \times 360 \\ \frac{1}{4} \times 360 \\ \frac{1}{4} \times 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 90 \\ 90 \\ 90 \end{bmatrix}$$

也就是$a_n \to 90$、$b_n \to 90$、$c_n \to 90$、$d_n \to 90$，四邊形$A_nB_nC_nD_n \to$矩形。

（6）再由上面（一）的推論可知：持續地作一般凸四邊形的外角平分線所形成的新四邊形必極接近於「正方形」。

（7）另外，根據高中數學課本，矩陣$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$符合馬可夫鏈推移矩陣的定義

(即矩陣中的每個元都大於或等於 0，且每行的和都等於 1。)

其**推移矩陣與其最後的收斂值的乘積會等於最後的收斂值本身**。

所以，若假設當 $n \to \infty$ 時，$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

（因爲穩定不再變動，所以再算一次所得到的答案應該等於本身）

則 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = y \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w = z \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}w = w \end{cases} \Rightarrow x = y = z = w$

所以 $x = y = z = w = \dfrac{360}{4} = 90$

三、探討：持續地作任意凸 m 邊形的所有外角平分線所形成的新 m 邊形的形狀變化如何?

（一）我們認爲各內角會趨於相等：仿二之（七）的作法，可知：持續地作一般凸 m 邊形的外角平分線所形成的新 m 邊形到每個內角都會趨近於正 m 邊形每個內角。

1.以五邊形爲例：

（1）（利用 Excel 試算表）下表中，下一列的五個內角都是上一列的五個內角所計算出來的：

下一列的內角 1＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 1＋內角 2）；下一列的內角 2＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 2＋內角 3）

下一列的內角 3＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 3＋內角 4）；下一列的內角 4＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 4＋內角 5）

下一列的內角 5＝$\frac{1}{2}$×（上一列的內角 5＋內角 1）。　可以發現：

當 n 越大時，新五邊形的各內角會越接近於正五邊形的一內角$108°$。

外角平分線次數（n）	內角 1	內角 2	內角 3	內角 4	內角 5
0	72.00	144.00	100.00	66.00	158
1	108.00000000	122.00000000	83.00000000	112.00000000	115.00000000
2	115.00000000	102.50000000	97.50000000	113.50000000	111.50000000
3	108.75000000	100.00000000	105.50000000	112.50000000	113.25000000
…	………	………	………	………	………
10	109.49023438	108.76562500	106.98242188	106.60546875	108.15625000
…	………	………	………	………	………
20	108.17903709	108.09193039	107.87777901	107.83253288	108.01872063

…	………	………	………	………	………
30	108.02150401	108.01104169	107.98532013	107.97988565	108.00224852

（2）以矩陣說明：

原本我們想試著將$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$找出來，可是在做數字的化簡過程中還是有問題；不過，若參考（P12）的敘述，雖然我們不能夠像四邊形那樣地證明，但是我們還是相信，當$n \to \infty$時，

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \to \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

所以若原五邊形的五個內角度數分別為 a、b、c、d、e，則當$n \to \infty$時，

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \\ \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \\ \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \\ \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \\ \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \times 540 \\ \frac{1}{5} \times 540 \\ \frac{1}{5} \times 540 \\ \frac{1}{5} \times 540 \\ \frac{1}{5} \times 540 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 \\ 108 \\ 108 \\ 108 \\ 108 \end{bmatrix}$$

（3）以 matlab 軟體驗證：可以發現當 n 越大時，$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$的每個元都會越接近於$\frac{1}{5}$（＝0.2）。

（Ⅰ）定義一個 5x5 階的矩陣 A：

```
A =

    0.5000    0.5000         0         0         0
         0    0.5000    0.5000         0         0
         0         0    0.5000    0.5000         0
         0         0         0    0.5000    0.5000
    0.5000         0         0         0    0.5000
```

（Ⅱ）以 matlab 軟體計算 A^{30} 到小數第 12 位 ：

```
?vpa(A^30,12)

ans =

[ .200693089515, .200214176439, .199439278804, .199439278804, .200214176439]
[ .200214176439, .200693089515, .200214176439, .199439278804, .199439278804]
[ .199439278804, .200214176439, .200693089515, .200214176439, .199439278804]
[ .199439278804, .199439278804, .200214176439, .200693089515, .200214176439]
[ .200214176439, .199439278804, .199439278804, .200214176439, .200693089515]
```

（Ⅲ）以 matlab 軟體計算 A^{60} 到小數第 12 位：

```
?vpa(A^60,12)

ans =

[ .200001200933, .200000371109, .199999028425, .199999028425, .200000371109]
[ .200000371109, .200001200933, .200000371109, .199999028425, .199999028425]
[ .199999028425, .200000371109, .200001200933, .200000371109, .199999028425]
[ .199999028425, .199999028425, .200000371109, .200001200933, .200000371109]
[ .200000371109, .199999028425, .199999028425, .200000371109, .200001200933]
```

（Ⅳ）以 matlab 軟體計算 A^{100} 到小數第 12 位：

```
?vpa(A^100,12)

ans =

[ .200000000250, .200000000077, .199999999798, .199999999798, .200000000077]
[ .200000000077, .200000000250, .200000000077, .199999999798, .199999999798]
[ .199999999798, .200000000077, .200000000250, .200000000077, .199999999798]
[ .199999999798, .199999999798, .200000000077, .200000000250, .200000000077]
[ .200000000077, .199999999798, .199999999798, .200000000077, .200000000250]
```

2.以六邊形爲例：

（1）（利用 Excel 試算表）下表中，下一列的六個內角都是上一列的六個內角所計算出來的：

下一列的內角 1 $=\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 1＋內角 2）；下一列的內角 2 $=\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 2＋內角 3）

下一列的內角 3 $=\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 3＋內角 4）；下一列的內角 4 $=\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 4＋內角 5）

下一列的內角 5 $=\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 5＋內角 6）；下一列的內角 6 $=\frac{1}{2}\times$（上一列的內角 6＋內角 1）

可以發現：當 n 越大時，新六邊形的各內角會越接近於正六邊形的一內角120°。

外角平分線次數（n）	內角 1	內角 2	內角 3	內角 4	內角 5	內角 6
0	126.00	72.00	104.00	88.00	170.00	160.00
1	99.000000	88.000000	96.000000	129.000000	165.000000	143.000000
2	93.500000	92.000000	112.500000	147.000000	154.000000	121.000000
3	92.750000	102.250000	129.750000	150.500000	137.500000	107.250000
…	………	………	………	………	………	………
10	129.820313	121.332031	111.537109	110.203125	118.642578	128.464844
…	………	………	………	………	………	………
20	122.008516	122.327637	120.319098	117.991486	117.672386	119.680878
…	………	………	………	………	………	………
30	119.924274	120.476630	120.552356	120.075726	119.523370	119.447644

（2）以矩陣說明：雖然我們目前還找不到 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$ 的表示法，

不過，我們還是相信，當 $n\to\infty$時，

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \to \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

所以若原六邊形的六個內角度數分別爲 a、b、c、d、e、f，則當 $n\to\infty$時，

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f) \\ \frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f) \\ \frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f) \\ \frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f) \\ \frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f) \\ \frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\times 720 \\ \frac{1}{6}\times 720 \\ \frac{1}{6}\times 720 \\ \frac{1}{6}\times 720 \\ \frac{1}{6}\times 720 \\ \frac{1}{6}\times 720 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \end{bmatrix}$$

（3）以 matlab 軟體驗證：可以發現當 n 越大時，$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$ 的每個元都會越接近於$\frac{1}{6}$（$=0.1\overline{6}$）。

（Ⅰ）定義一個 6x6 階的矩陣 A：

```
A =

    0.5000    0.5000         0         0         0         0
         0    0.5000    0.5000         0         0         0
         0         0    0.5000    0.5000         0         0
         0         0         0    0.5000    0.5000         0
         0         0         0         0    0.5000    0.5000
    0.5000         0         0         0         0    0.5000
```

（Ⅱ）以 matlab 軟體計算 A^{30} 到小數第 12 位 ：

```
?vpa(A^30,12)

ans =

[ .162212179974, .164439423010, .168893910013, .171121153980, .168893910013, .164439423010]
[ .164439423010, .162212179974, .164439423010, .168893910013, .171121153980, .168893910013]
[ .168893910013, .164439423010, .162212179974, .164439423010, .168893910013, .171121153980]
[ .171121153980, .168893910013, .164439423010, .162212179974, .164439423010, .168893910013]
[ .168893910013, .171121153980, .168893910013, .164439423010, .162212179974, .164439423010]
[ .164439423010, .168893910013, .171121153980, .168893910013, .164439423010, .162212179974]
```

（Ⅲ）以 matlab 軟體計算 A^{60} 到小數第 12 位：

```
?vpa(A^60,12)

ans =

[ .166726194030, .166696430348, .166636902985, .166607139303, .166636902985, .166696430348]
[ .166696430348, .166726194030, .166696430348, .166636902985, .166607139303, .166636902985]
[ .166636902985, .166696430348, .166726194030, .166696430348, .166636902985, .166607139303]
[ .166607139303, .166636902985, .166696430348, .166726194030, .166696430348, .166636902985]
[ .166636902985, .166607139303, .166636902985, .166696430348, .166726194030, .166696430348]
[ .166696430348, .166636902985, .166607139303, .166636902985, .166696430348, .166726194030]
```

（Ⅳ）以 matlab 軟體計算 A^{100} 到小數第 12 位：

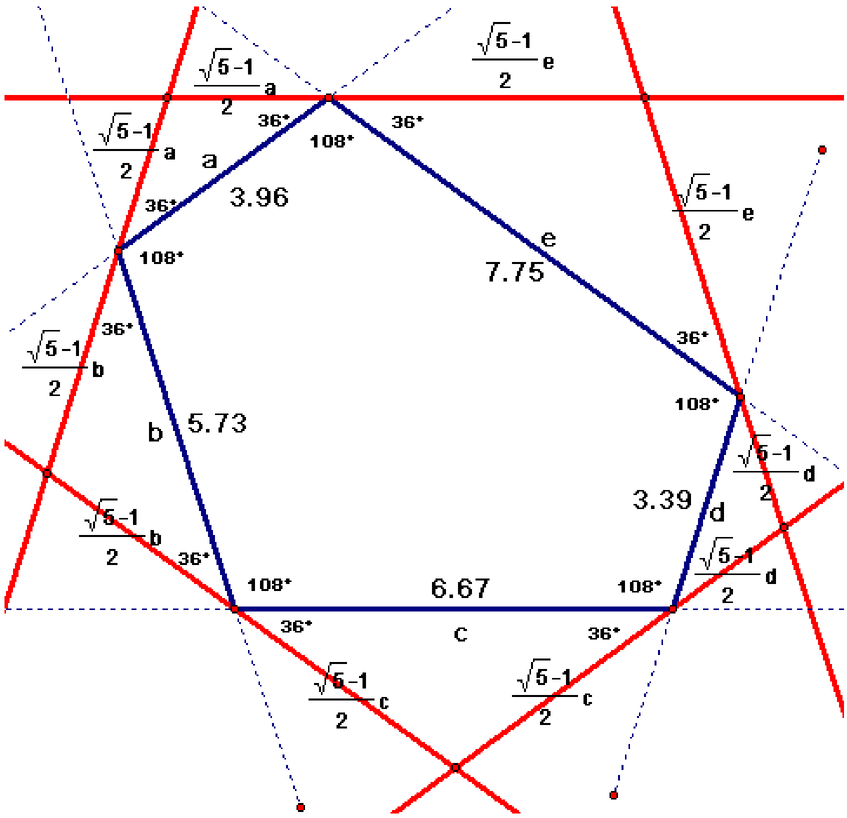
```
?vpa(A^100,12)

ans =

[ .166666572280, .166666761054, .166666855441, .166666761054, .166666572280, .166666477893]
[ .166666477893, .166666572280, .166666761054, .166666855441, .166666761054, .166666572280]
[ .166666572280, .166666477893, .166666572280, .166666761054, .166666855441, .166666761054]
[ .166666761054, .166666572280, .166666477893, .166666572280, .166666761054, .166666855441]
[ .166666855441, .166666761054, .166666572280, .166666477893, .166666572280, .166666761054]
[ .166666761054, .166666855441, .166666761054, .166666572280, .166666477893, .166666572280]
```

（二）但是：各「邊」也會趨於等長嗎？

1. 先以凸五邊形試試看：



[說明]：根據前（一）的結果，當我們做了極多次的外角平分線所得的新五邊形，其各內角會極接近108°，所以我們姑且將每個角都當作是108°，（如上圖）一個各內角都是108°的非「正五邊形」，假設其各邊的長爲 a、b、 c、d、e，利用$36^\circ-36^\circ-108^\circ$的邊角關係可以求出其外角平分線所形成的新五邊形的各邊長分別爲$\frac{\sqrt{5}-1}{2}(a+b)$、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b+c)$、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}(c+d)$、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}(d+e)$、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}(e+a)$，這個情況和前面的情況很像，只不過係數從$\frac{1}{2}$變成$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$而已（參考 P12 的敘述），如果一直做下去，是不是每個邊最後也會趨於相等呢？

利用 Excel 試算表幫忙做計算，先用 GSP 繪圖軟體任意畫一個各內角都是108°的非「正五邊形」，再利用 GSP 繪圖軟體的測量功能量出 a＝3.96、b＝5.73、c＝6.67、d＝3.39、e＝7.75，取$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618034$，

設計 Excel 試算表使：

下一列的邊長 1＝0.618034×（上一列的邊長 1＋邊長 2）

下一列的邊長 2＝0.618034×（上一列的邊長 2＋邊長 3）

下一列的邊長 3＝0.618034×（上一列的邊長 3＋邊長 4）

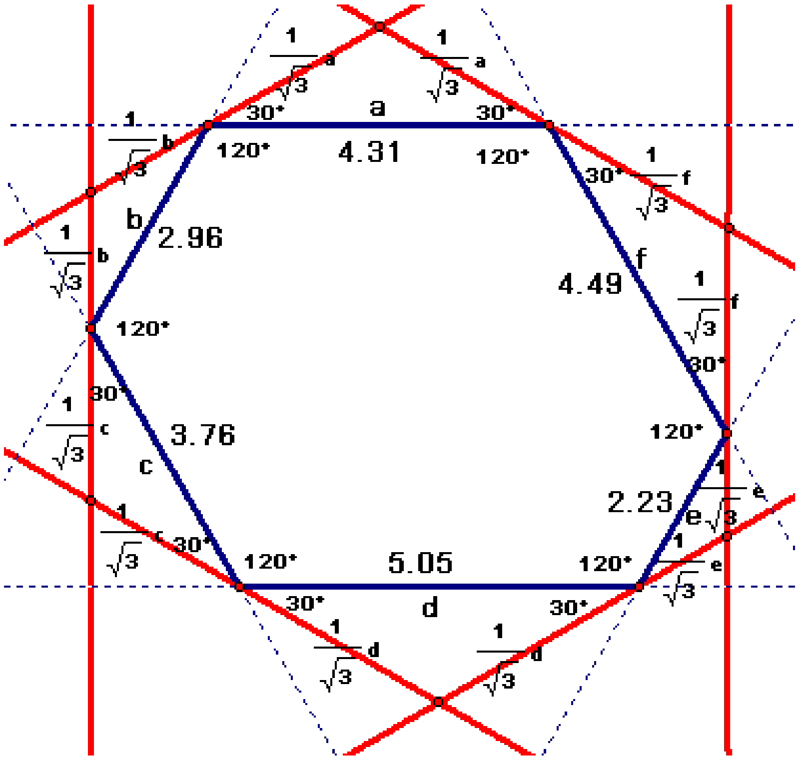
下一列的邊長 4＝0.618034×（上一列的邊長 4＋邊長 5）

下一列的邊長 5＝0.618034×（上一列的邊長 5＋邊長 1）

Excel 試算表算出來的結果：當 n 越大時，其各邊的長度越趨於等長。（可以用更多個五邊形試試）

外角平分線次數（n）	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5
0	3.96	5.73	6.67	3.39	7.75
1	5.988749	7.663622	6.217422	6.884899	7.237178
2	8.437629	8.578957	8.097680	8.727924	8.174073
3	10.516829	10.306728	10.398795	10.446009	10.266597
…	………	………	………	………	………
20	381.244826	381.251051	381.255949	381.252751	381.245877
…	………	………	………	………	………
40	26427.564153	26427.570379	26427.575276	26427.572078	26427.565204
…	………	………	………	………	………
60	1831911.493367	1831911.499592	1831911.504490	1831911.501292	1831911.494417
…	………	………	………	………	………
80	126984804.602923	126984804.609149	126984804.614047	126984804.610848	126984804.603974
…	………	………	………	………	………
100	8802357872.318490	8802357872.324720	8802357872.329620	8802357872.326420	8802357872.319550

2.再以凸六邊形爲例：



[說明]：根據前（一）的結果，當我們做了極多次的外角平分線所得的**新六邊形，其各內角會極接近**$120°$，所以我們姑且將每個角都當作是$120°$，（如上圖）一個各角都是$120°$的非「正六邊形」，假設其各邊的長為 a、b、c、d、e、f，利用$30°—30°—120°$的邊角關係可以求出其外角平分線所形成的新六邊形的各邊長分別為$\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(b+c)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(c+d)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(d+e)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(e+f)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(f+a)$，這個情況和前面的情況很像，只不過係數從$\frac{1}{2}$變成$\frac{1}{\sqrt{3}}$而已（參考 P12 的敘述），如果一直做下去，是不是每個邊最後也會趨於相等呢？

利用 Excel 試算表幫忙做計算，先用 GSP 繪圖軟體任意畫一個各內角都是$120°$的非「正六邊形」，再利用 GSP 繪圖軟體的測量功能量出 a＝4.31、b＝2.96、c＝3.76、d＝5.05、e＝2.23、f＝4.49，取$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.577350$，

設計 Excel 試算表使

下一列的邊長 1＝0.577350×（上一列的邊長 1＋邊長 2）

下一列的邊長 2＝0.577350×（上一列的邊長 2＋邊長 3）

下一列的邊長 3＝0.577350×（上一列的邊長 3＋邊長 4）

下一列的邊長 4＝0.577350×（上一列的邊長 4＋邊長 5）

下一列的邊長 5＝0.577350×（上一列的邊長 5＋邊長 6）

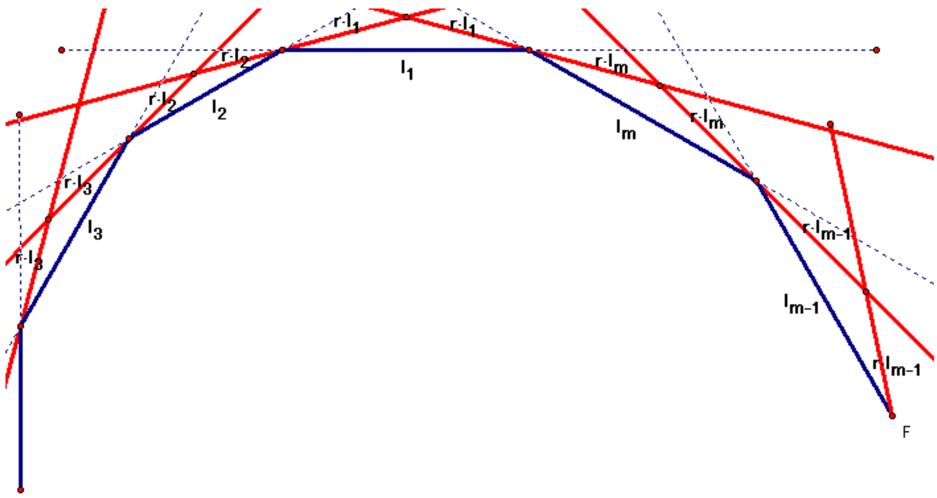
下一列的邊長 6＝0.577350×（上一列的邊長 6＋邊長 1）

Excel 試算表算出來的結果：當 n 越大時，其各邊的長度越趨於等長。

（可以用更多個六邊形試試）

外角平分線次數（n）	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6
0	4.31	2.96	3.76	5.05	2.23	4.49
1	4.197335	3.879792	5.086454	4.203108	3.879792	5.080680
2	4.663329	5.176662	5.363328	4.666662	5.173329	5.356662
3	5.681119	6.085263	5.790815	5.681119	6.079490	5.785042
…	………	………	………	………	………	………
20	67.480378	67.477071	67.475414	67.477045	67.480404	67.482080
…	………	………	………	………	………	………
40	1198.259369	1198.261035	1198.259369	1198.256035	1198.254369	1198.256035
…	………	………	………	………	………	………
60	21278.130957	21278.132623	21278.135957	21278.137623	21278.135957	21278.132623
…	………	………	………	………	………	………
80	377847.770219	377847.766885	377847.765219	377847.766885	377847.770219	377847.771885
…	………	………	………	………	………	………
100	6709654.816956	6709654.818623	6709654.816956	6709654.813623	6709654.811956	6709654.813623

3.對於其他的凸 m 邊形，說明如下：



[說明]:(如圖)任一個具有各角都相等的非正 m 邊形，設其各邊的長為l_1、l_2、l_3、……、l_m，利用邊角關係可以求出其外角平分線所形成的新 m 邊形的各邊長分別為$r(l_1+l_2)$、$r(l_2+l_3)$、……、$r(l_{m-1}+l_m)$、$r(l_m+l_1)$其中 0<r<1，也就是兩兩相鄰的邊相加再乘以 r，重複地一直做下去，到最後，是不是l_1、l_2、l_3、……、l_m都會「均勻地」分佈在每個邊當中呢？（參考 P12 的敘述）

伍、　研究結果:

一、　持續地作任意Δ的三個角的外角平分線所形成的新Δ，到最後會極接近於正Δ。

二、　持續地作任意四邊形的所有外角平分線所形成的新四邊形，最後會極接近於正方形。

三、　持續地作任意凸 m 邊形的所有外角平分線所形成的新 m 邊形，到最後新 m 邊形的每個內角會極接近於正 m 邊形的每個內角。

陸、　討論與未來展望:

一、三角形的部份也可以用矩陣來處理：只是我們在研究三角形時，是先用「等比級數」的概念找規律，結果就找到了，所以就沒有再想其他的方法。而在研究完四邊形後，覺得用矩陣來處理的方法蠻有趣的，就再回頭研究三角形的部份。(參考附錄)

二、我們原本想試著將 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$ 與 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$ 的一般式找出來，但發現不像三階和四階矩陣那麼簡單，雖然有掌握到一些數字的概念（如：出現的數字與巴斯卡三角形數字的排列有關等等），但目前還沒有辦法一般化，這是未來可以努力的地方。如果未來可以找到答案，那解釋任意凸五邊形和凸六邊形的各內角會趨於相等的現象就可以更直接了。

三、持續地作凸 m 邊形（$m \geq 5$）的各外角平分線，所形成的新 m 邊形的各邊長是否會趨於相等？本研究只根據我們所觀察到的部份來說明，問題是：在角度趨於相等前必須做非常多次外角平分線，而在這過程中，邊長會不會大到不可收拾，如果是這樣的話，邊長最後會趨於等長嗎？這個問題也有待日後再研究。

柒、　參考資料及其他：

＊參考資料：

一、尺規作圖及角平分線性質：參考國中數學課本第四冊、第五冊（南一書局出版）

二、等比數列和等比級數：參考國中數學課本第六冊（國立編譯館出版）

三、「$36° - 36° - 108°$」的邊角關係：參考嘉義市第 26 屆科展得獎作品光碟之「原」來如此第 14 頁。

四、矩陣的乘法與馬可夫鏈推移矩陣：參考高中理科數學下冊（國立編譯館出版）

五、無窮等比數列、級數的極限：參考極限與無窮等比級數（陸思明編著　建宏出版社）

＊其他：(我們的感想)

本來只是一個簡單的尺規作圖的題目，經過一番研究之後，卻挖出了不少東西，而且結果令我們大吃一驚，這是我們覺得數學最棒的地方；而且有很多地方還可以再繼續研究下去（比如前文討論及未來展望二、三的部份），真的是太棒了！

【評語】030414

1. 主題有趣，生動。與國中教材銜接。

2. 邏輯清楚，結論明確，態度認真。

3. 解說表達不夠流暢，且對引進矩陣及其計算不甚了解。

4. 內容與馬可夫鏈推移矩陣相關顯得生動有趣，但學術性及實用性價值不高。