中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030413

數學與遊戲

學校名稱：國立政治大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
國二 葉茂淳	吳孝仁

關鍵詞：威氏遊戲、有利的位置

作品名稱：數學與遊戲

摘　　要

<u>張鎮華</u>教授在文章[4]中介紹威氏遊戲(Wythott's Game)：文章中提到安全殘局所成的集合 S_w 為 $\{(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),(9,15),(11,18),(12,20),(14,23),(16,26),\ldots\}$。將這個集合中元素第一個座標的數所成的集合命名為 A，而將第二個座標的數所成的集合命名為 B，設其為 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$，可以發現集合 A 和 B 滿足性質(1) $A\cup B=N$；性質(2) $A\cap B=\phi$；性質(3) 數列 $<b_k-a_k \mid k=1,2,3,...>$ 是等差數列 $(b_k-a_k=k$，$k=1,2,3,\ldots)$。

在這個研究計劃中，可以分成數學與遊戲兩部份：

(一)數學部份：我們從不同的角度來介紹下列四個集合，並證明它們都相等。

1. 令 $\{\alpha_s \mid \text{集合} S(\alpha_s)T(\alpha_s)=N-S(\alpha)=\{[k(\alpha_s+s)] \mid k=1,2,3,\ldots\} \text{滿足性質}(1),(2),(3)\}$，其中 $S(\alpha_s)=\{[k\alpha_s] \mid k=1,2,3,\ldots\}, T(\alpha_s)=N-S(\alpha)=\{[k(\alpha_s+s)] \mid k=1,2,3,\ldots\}$。

2. $\{\alpha_s \mid ([k\alpha_s]-[(k-1)\alpha_s]=2 \Leftrightarrow k=1+(s-1)n+[n\alpha]), s=1,2,3,\ldots\}$。

3. $\{\alpha_s \mid 1/\alpha_s+1/(\alpha_s+s)=1, s=1,2,3,...\}$。

4. $\{(2-s+\sqrt{s^2+4})/2 \mid s=1,2,3,...\}$。

(二)遊戲部份：研究變型(第二型)威氏遊戲和推廣的三排威氏遊戲，利用我們學會的方法來找及證明這兩個遊戲的所有有利位置。

下列三個集合都相等，同時它們都和上面的集合有密切的關係

5. $\{X \mid X-1/X=[X]\}$。

6. $\{X_s \mid X_s-1/X_s=s,\ s=1,2,3,...\}$。

7. $\{(s+\sqrt{s^2+4})/2 \mid s=1,2,3,...\}$。

壹、研究動機

有一次我看到張鎮華教授的文章“拈及其各種變形遊戲”裡頭介紹的威式遊戲，在文章中提到的安全殘局所成的集合 S_W 爲 $\{(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),.......\}$。將這個集合中第一個座標的數所成的集合命名爲 A，而將第二個座標的數所成的集合命名爲 B，我們發現集合 A 和 B 滿足性質(1) $A\cup B=N$；性質(2) $A\cap B=\phi$；性質(3)數列 $<b_k-a_k \mid k=1,2,3,...>$ 是等差數列 ($b_k-a_k=k$， $k=1,2,3,\ldots$)。

學無理數時，我喜歡用計算器來計算它們的一倍、兩倍、三倍、…再取高斯符號的值，並記錄下來，意外地發現集合 $\{[n((1+\sqrt{5})/2)] \mid n=1,2,3,\cdots\}$ 和集合 $\{[n((3+\sqrt{5})/2)] \mid n=1,2,3,\cdots\}$ 恰好就是集合 A 和集合 B，這意外的發現，點燃了我們好奇心和研究的興趣。

貳、研究目的

數學部份：主要是討論下列集合和它們之間的關係

(1)威氏遊戲的所有有利的位置所成的集合；

(2)集合 $\{[n\alpha] \mid n=1,2,3\ldots\}$，其中 α 是正無理數；

(3)集合 $\{n \mid [n\alpha]-[(n-1)\alpha]=2, n=1,2,3\ldots\}$，其中 α 是正無理數；

(4)方程式 $1/\alpha+1/\beta=1$ 的正無理數解;

(5)方程式 $X-1/X=[X]$ 的正根。

遊戲部份：先研究威氏遊戲的必勝策略，弄清楚了威氏遊戲所有的有利位置，設法重新設定變型第二型威氏遊戲(第二型威氏遊戲和推廣的三排威氏遊戲)，再利用學會的方法來找尋證明第二型威氏遊戲和推廣的三排威氏遊戲所有的有利位置，這樣我們就非常清楚這兩個遊戲的必勝策略。

參、研究設備及器材

紙、筆、圍棋、圍棋板、電腦。

肆、研究過程或方法

威氏遊戲(Wythott's Game)

張鎭華教授的文章“拈及其各種變型遊戲”中介紹威氏遊戲：

在桌上有兩排棋子，甲、乙二個人按照下列規則輪流拿棋子

(一)甲先拿，

(二)甲、乙兩個人每次只能

(1)拿走某一排中若干個棋子，或者

(2)在兩排中拿走同樣數目的棋子。

則拿走最後一個棋子的人就是贏家。

假設桌上有兩排棋子，第一排的個數爲 a，第二排的個數爲 b。我們用(a,b)來表示。由於討論威氏遊戲的必勝策略時，兩排的順序對調，討論的情形也是相同的。所以(a,b)和(a,b)兩種情形，只要討論一種就可以了。

某次我們玩這個威氏遊戲的過程如下：

$(10,12) \xrightarrow{\text{甲}(2,0)} (8,12) \xrightarrow{\text{乙}(0,3)} (8,9) \xrightarrow{\text{甲}(1,1)} (7,8) \xrightarrow{\text{乙}(0,3)} (7,5) \xrightarrow{\text{甲}(3,3)} (4,2) \xrightarrow{\text{乙}(3,0)}$

$(1,2) \xrightarrow{\text{甲}(1,0)} (0,2) \xrightarrow{\text{乙}(0,2)} (0,0)$

乙拿走最後一個棋子，所以乙就是贏家。

安全殘局及其應用

遊戲中的安全殘局就是遊戲時有利位置，遊戲時有利位置有下面的兩個性質：

(1)由任何一個有利的位置拿棋子，不管如何拿，都不會成爲另一個有利的位置 ;

(2)由任一個不是有利的位置拿棋子，一定可以適當拿棋子後成爲某一個有利的位置。

也就是說一旦拿完棋子後到達有利的位置，一定有必勝策略可以成爲贏家(遊戲剛開始時，甲先拿可以視爲乙拿完棋子)。

張鎮華教授的文章中提到有利位置所成的集合S_w爲

$\{(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),(9,15), (11,18),(12,20),(14,23),(16,26), (17,28),(18,30),\ldots\}$。

如果我們有安全殘局的概念，由上述的遊戲過程，可以發現 (8,12),(8,9),(7,8),(7,5),(4,2)都不是安全殘局，正確的走法是：

1. 第一步甲應該讓(10,12) $\rightarrow$ (3,5)才對，
2. 第二步乙應該讓(8,12) $\rightarrow$ (6,10)才對，
3. 第三步甲應該讓(8,9) $\rightarrow$ (1,2)才對，
4. 第四步乙應該讓(7,8) $\rightarrow$ (1,2)才對，
5. 第五步甲應該讓(7,5) $\rightarrow$ (5,3)才對。

也就是說雖然乙是贏家，但是有犯錯誤，只是犯的錯誤較少而已。

威氏遊戲的數學

首先令集合S_w中每個元素的第一個座標所成的集合爲A，第二個座標所成的集合爲B。將集合A,B由小到大排列，設其爲$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$和$\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$ (見表格一.) 。

A	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22
B	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36

表格一.

可以觀察到集合A,B滿足下列三個性質：

(1) $A\cup B=N$； (2) $A\cap B=\phi$； (3)數列$<b_k-a_k \mid k=1,2,3,\ldots>$是等差數列且公差$s=1$。

學無理數時，我喜歡用計算器來計算某些無理數α的一倍、兩倍、三倍、…之後再取高斯符號的值，並記錄下來，所有這些自然數所組成的集合$\{[n\alpha]\mid n=1,2,3\ldots\}$命名爲$S(\alpha)$。然後我也記錄所有不在集合$S(\alpha)$中的自然數所組成的集合命名爲$T(\alpha)$。也就是說集合$T(\alpha)=N-S(\alpha)$集合，顯然集合$S(\alpha)$和$T(\alpha)$滿足 (1) $S(\alpha)\cup T(\alpha)=\mathrm{N}$，(2) $S(\alpha)\cap T(\alpha)=\phi$。將集合$S(\alpha)$與$T(\alpha)$由小到大排列，設其爲$S(\alpha)=\{s_1,s_2,s_3,\cdots\}$, $T(\alpha)=\{t_1,t_2,t_3,\cdots\}$，我們將數列$<t_k-s_k \mid k=1,2,3,\ldots>$命名爲數列$M(\alpha)$。當$\alpha$的值爲$\sqrt{2}$時，集合$S(\sqrt{2})$與$T(\sqrt{2})$滿足性質(3) 數列$M(\alpha)$是等差數列($t_k-s_k=2k$, $k=1,2,3,\ldots$, 見表格二)，但是當α的值爲

$\sqrt{3}$, $(1+\sqrt{3})/2$, $\sqrt{5}$,…時，集合$S(\alpha)$與$T(\alpha)$都不滿足性質(3)(數列$M(\alpha)$不是等差數列) (見表格三)。

k	$\sqrt{2}$	$S(\sqrt{2})$	$T(\sqrt{2})$	$M(\sqrt{2})$	$H(\sqrt{2})$	$1+k+p_k$	$2+\sqrt{2}$	$S(2+\sqrt{2})$
1	1.41421	1	3	2	1	3	3.414159	3
2	2.82842	2	6	4	1	5	6.828318	6
3	4.24263	4	10	6	2	8	10.24248	10
4	5.65684	5	13	8	1	10	13.65664	13
5	7.07105	7	17	10	2	13	17.0708	17
6	8.48526	8	20	12	1	15	20.48495	20
7	9.89947	9	23	14	1	17	23.89911	23
8	11.31368	11	27	16	2	20	27.31327	27
9	12.72789	12	30	18	1	22	30.72743	30
10	14.1421	14	34	20	2	25	34.14159	34
11	15.55631	15	37	22	1	27	37.55575	37
12	16.97052	16	40	24	1	29	40.96991	40
13	18.38473	18	44	26	2	32	44.38407	44
14	19.79894	19	47	28	1	34	47.79823	47
15	21.21315	21	51	30	2	37	51.21239	51
16	22.62736	22	54	32	1	39	54.62654	54
17	24.04157	24	58	34	2	42	58.0407	58
18	25.45578	25	61	36	1	44	61.45486	61
19	26.86999	26	64	38	1	46	64.86902	64
20	28.2842	28	68	40	2	49	68.28318	68

表格二.

k	$\sqrt{3}$	$S(\sqrt{3})$	$T(\sqrt{2})$	$M(\sqrt{2})$
1	1.73205	1	2	1
2	3.4641	3	4	1
3	5.19615	5	7	2
4	6.9282	6	9	3
5	8.66025	8	11	3
6	10.3923	10	14	4
7	12.12435	12	16	4
8	13.8564	13	18	5
9	15.58845	15	21	6
10	17.3205	17	23	6
11	19.05255	19	26	7
12	20.7846	20	28	8
13	22.51665	22	30	8
14	24.2487	24	33	9
15	25.98075	25	35	10
16	27.7128	27	37	10
17	29.44485	29		
18	31.1769	31		
19	32.90895	32		
20	34.641	34		

表格三.

經過多次的操作後，仔細地觀察、比較，出乎意料之外，我們得到集合$T(\sqrt{2})$就是$S(2+\sqrt{2})=\{[\,n(2+\sqrt{2})]\mid n=1,2,3\ldots\}$; 更令人興奮的是：計算黃金比例($(1+\sqrt{5})/2$)的情形時，竟然發現集合$S((1+\sqrt{5})/2)$和$T((1+\sqrt{5})/2)$就是威氏遊戲安全殘局的集合$A$和$B$ (見表格四)，而且$S((3+\sqrt{5})/2)=T((1+\sqrt{5})/2)$ 。

k	$\alpha=(1+\sqrt{5})/2$	$S(\alpha)$	$T(\alpha)$	$M(\alpha)$	$H(\alpha)$	$1+a_k$	$S((3+\sqrt{5})/2)$
1	1.61803	1	2	1	1	2	2
2	3.23606	3	5	2	2	4	5
3	4.85409	4	7	3	1	5	7
4	6.47212	6	10	4	2	7	10
5	8.09015	8	13	5	2	9	13
6	9.70818	9	15	6	1	10	15
7	11.32621	11	18	7	2	12	18
8	12.94424	12	20	8	1	13	20
9	14.56227	14	23	9	2	15	23
10	16.1803	16	26	10	2	17	26
11	17.79833	17	28	11	1	18	28
12	19.41636	19	31	12	2	20	31
13	21.03439	21	34	13	2	22	34
14	22.65242	22	36	14	1	23	36
15	24.27045	24	39	15	2	25	39
16	25.88848	25	41	16	1	26	41
17	27.50651	27	44	17	2	28	44
18	29.12454	29	47	18	2	30	47
19	30.74257	30	49	19	1	31	49
20	32.3606	32	52	20	2	33	52

表格四.

方程式$1/\alpha+1/\beta=1$的正無理數解

經過一些資料搜索之後，我們發現到一個已知結果：

定理一：已知α,β爲兩個正無理數，而且$1/\alpha+1/\beta=1$，令集合$S=\{[n\alpha]\mid n=1,2,3\ldots\}$，$T=\{[n\beta]\mid n=1,2,3\ldots\}$，則 $(1)\ S\cup T=\mathrm{N}$，$(2)\ S\cap T=\phi$ 。

證　明：主要證明

$\#\{k\in N\mid [k\alpha]\le n\}+\#\{k\in N\mid [k\beta]\le n\}=\ [(n+1)/\alpha]\ +\ [(n+1)/\beta]\ =\ (n+1)-1=n$

這樣我們就得到，對所有自然數n且$n\ge 2$，

$\#\{k\in N\mid [k\alpha]=n\}+\#\{k\in N\mid [k\beta]=n\}=1$ 。

$\#\{k\in N\mid [k\alpha]=n\}=0$就是說$n$不屬於集合$S$，$\#\{k\in N\mid [k\alpha]=n\}=1$就是說$n$屬於集合$S$；

$\#\{k\in N\mid [k\beta]=n\}=0$就是說$n$不屬於集合$T$，$\#\{k\in N\mid [k\beta]=n\}=1$就是說$n$屬於集合$T$ 。

$\#\{k\in N\mid [k\alpha]=n\}+\#\{k\in N\mid [k\beta]=n\}=1$就是說，對所有自然數$n$，$n$恰好屬於集合$S$或集合$T$中一個。因此集合$S$和$T$滿足$(1)\ S\cup T=\mathrm{N}$，$(2)\ S\cap T=\phi$ 。

爲了證明

$\#\{k\in N\mid [k\alpha]\le n\}+\#\{k\in N\mid [k\beta]\le n\}=\ [(n+1)/\alpha]\ +\ [(n+1)/\beta]\ =\ (n+1)-1=n$

首先我們計算$\#\{k\in N\mid [k\alpha]\le n\}$就是說有幾個自然數$k$會使得$[k\alpha]\le n$，

$\#\{k\in N\mid k\alpha<n+1\}\ =\ \#\{k\in N\mid k<(n+1)/\alpha\}\ =\ [(n+1)/\alpha]$

接下來，我們計算 $\#\{k\in N\mid [k\alpha]\le n\}$和 $\#\{k\in N\mid [k\beta]\le n\}$之和。

因爲 $n+1=(n+1)/\alpha+(n+1)/\beta$，而且$(n+1)/\alpha$和$(n+1)/\beta$都不是整數，

$[(n+1)/\alpha]$是$(n+1)/\alpha$扣除小數的部份,所以$[(n+1)/\alpha]+[(n+1)/\beta]$比$(n+1)/\alpha+(n+1)/\beta$少1。

也就是說$\#\{k\in N\mid [k\alpha]\le n\}$和 $\#\{k\in N\mid [k\beta]\le n\}$之和等於 $(n+1)-1=n$ 。

因此集合S和T滿足 $(1)\ S\cup T=\mathrm{N}$，$(2)\ S\cap T=\phi$ 。

這個已知定理印證了我們前面的觀察現象，集合$S(\beta)=$ 集合$T(\alpha)$ 。集合$S(\alpha)$和集合$T(\alpha)$產生的數列$<t_k-s_k\mid k=1,2,3,\ldots>$不能夠保證是等差數列。我們有興趣的是想找出所有的兩個實數α與β之後，建構兩個集合$S(\alpha)$和集合$S(\beta)$滿足上面提到的三個性質，也就是說$S(\beta)=\ T(\alpha)$，而且產生的數列$M(\alpha)=<t_k-s_k\mid k=1,2,3,\ldots>$是等差數列。

推導α與β的過程

如果 α 與 β 的小數部份不同，則它們進位的時候不會全部一樣，這樣 $[k\beta]-[k\alpha]\neq k[\beta]-[\alpha]$ 不會恆成立。由於 $t_k - s_k = sk$ ，$k = 1,2,3,\ldots$，所以α與β的小數部份必須相同，即$\beta-\alpha=s$;

因為$1/\alpha+1/\beta=1$，所以$(1/\alpha)+(1/(\alpha+s))=1$;通分整理之後得到$\alpha^2+(s-2)\alpha-s=0$ 。

由於α是正無理數，所以α為方程式 $X^2+(s-2)X-s=0$的正根。

於是$\alpha =(2-s+\sqrt{s^2+4})/2$ ，$s=1,2,3\ldots$，這就是我們想要找的所有正無理數α。這種正無理數α有無限多個，但是固定s值時，α只有一個答案。

當$s=1$時，則$\alpha=(1+\sqrt{5})/2$; 當$s=2$時，則$\alpha=\sqrt{2}$; 當$s=3$時，則$\alpha=(-1+\sqrt{13})/2$ ，⋯

蜂王出現的位置數所成的數列

既然黃金比例和費氏數列有密切關係，這個結果告訴我們由威氏遊戲得到的集合A和數學裡的費氏數列會有關係。圖五是我們熟悉費氏數列理論的蜂王與雄蜂排列方式，1 代表雄蜂，而 2 代表蜂王，1 → 2 ; 2→1，2 即代表雄蜂上一代為蜂王，而蜂王上一代為蜂王和雄蜂。大家都熟悉每一代蜜蜂的個數形成的數列是費氏數列。如果圖五中從左而右，從下而上排下去記錄雄蜂或者蜂王所得到的數列 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... 命名為數列$C = \ < c_k \mid k=1,2,3,\ldots>$。在圖五中，除了看到每一代蜜蜂的個數是費氏數列 (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)之外，我們也記錄蜂王出現的位置是第二個、第四個、第五個、第七個、第九個、第十個、…，這些所有蜂王出現的位置數所成的數列命名為 $D=<2,4,5,7,9,10,\ldots>$ 。我們將數列$<[k\alpha]-[(k-1)\alpha] \mid k=1,2,3,\ldots>$命名為數列$H(\alpha)$。我們觀察發現數列$C=<c_k \mid k=1,2,3,\ldots>$就是$H((1+\sqrt{5})/2)$ ，而且數列$<1+a_k \mid a_k\in A, k=1,2,3,\ldots>$竟然就是數列$D$ (見表格四.)。

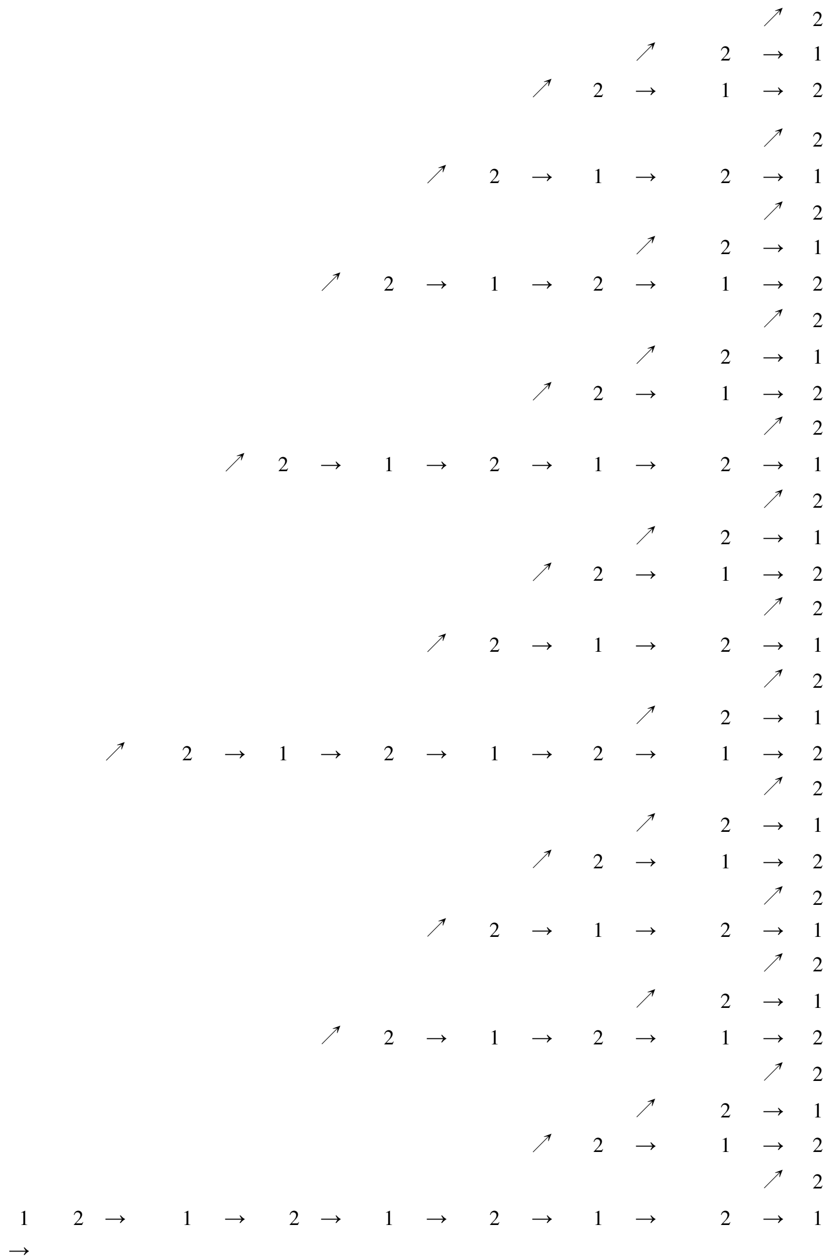


圖 五.

仿照上面的作法，將集合$S(\sqrt{2})$ $=\{[n(\sqrt{2})] \mid n=1,2,3\ldots\}$中的元素由小到大排列，設其爲$\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$ = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16,…}。令 $c_k = p_{k+1} - p_k$ ，$k=1,2,3,\ldots$ ($p_k=0$)，數列$H(\sqrt{2}) = <c_k \mid k=1,2,3,\ldots>$也是由自然數 1, 2 所組成的，將數列$<c_k \mid k=1,2,3,\ldots>$照類似蜂王與雄蜂排列方式 (1 → 1, 2; 2→1,1,2)，可以看到每一列的個數是 Pell 數，同樣地我們觀察所有 $p_{k+1} - p_k = 2$ 的位置數所成的數列。也發現數列$<k \mid k \in N, c_k = 2>$就是數列$<1+k+p_k \mid p_k \in S(\sqrt{2}), k=1,2,3,\ldots>$ 。

考慮一般情形時，我們得到下面定理。

定理二：令 s 爲正整數且 α 滿足 $(1/\alpha)+(1/(\alpha+s))=1$ ， $c_k = [k\alpha]-[(k-1)\alpha]$ ，則集合 $\{k \mid k\in N, c_k=2\}$ 等於集合$\{1+(s-1)+[n\alpha] \mid n=1,2,3\ldots\}$。

證　明：顯然α爲介於 1 和 2 之間的正無理數。令γ是α的小數部份，則$\gamma=\alpha-1$。

因爲 $c_k-1=[k\alpha]-[(k-1)\alpha]-1=[k+k\gamma]-[k-1+(k-1)\gamma]-1=[k\gamma]-[(k-1)\gamma]$

問什麼時候$c_k=2$ ，就是問什麼時候 $[k\gamma]-[(k-1)\gamma]=1$，也就是說

問什麼時候$[k\gamma]=n$,$[(k-1)\gamma]=n-1$ 。

第一個 $c_k=2$ 就是 $[k\gamma]=1$,$[(k-1)\gamma]=0$ ；

第二個 $c_k=2$ 就是 $[k\gamma]=2$,$[(k-1)\gamma]=1$ ；⋯

第 n 個 $c_k=2$ 就是 $[k\gamma]=n$,$[(k-1)\gamma]=n-1$ ；

因爲$(1/\alpha)+(1/(\alpha+s))=1$;

通分整理之後得到$\alpha^2+(s-2)\alpha-(-1)s=1\Leftrightarrow(\alpha+s-1)(\alpha-1)=1\Leftrightarrow\alpha+s-1=1/(\alpha-1)$

所以我們計算

$k\gamma<n\Leftrightarrow k<n/\gamma=n/(\alpha-1)\Leftrightarrow k<n(\alpha+s-1)\Leftrightarrow k=[n(\alpha+s-1)]$ (因爲$n(\alpha+s-1)$是無理數)。

所以 $[((s-1)n+[n\alpha])\gamma]=n-1$ 且 $[(1+(s-1)n+[n\alpha])\gamma]=n$ 。

這告訴我們第 n 個 $c_k=2$的位置就是 $1+(s-1)n+[n\alpha]$ 。

方程式$X-1/X=[X]$

由於在學無理數時，經常需要利用共軛無理數來化簡，所以我們想知道怎樣的無理數X可以使得$X-1/X$ 爲一個整數。當然經過一些簡單的推導：

$$X-1/X=s\Rightarrow X^2-sX-1=0\Rightarrow \text{它的正根是}\quad X_s=(s+\sqrt{s^2+4})/2$$

由於 $s<(s+\sqrt{s^2+4})/2<s+1$ ，所以 $[X_s]=[(s+\sqrt{s^2+4})/2]=s$ 。這恰好告訴我們 $X_s-1/X_s=[X_s]$。$X-\frac{1}{X}=[X]$的正根是由所有$X-\frac{1}{X}=s, s\in \mathrm{N}$的正根組成。我們也發現到方程式$X-1/X=[X]$的正根和方程式 $(1/\alpha)+(1/\alpha+s)=1$的正根有密切的關係。我們得到

(1)假設X 是方程式$X-1/X=[X]$的正根，令$\alpha=1+1/X$ ， $s=[X]$，那麼α一定是方程式 $(1/\alpha)+(1/\alpha+s)=1$的正根；

(2)假設α是方程式 $(1/\alpha)+(1/\alpha+s)=1$的正根，令$X=1/(\alpha-1)$ ，那麼X 一定是方程式 $X-1/X=[X]$的正根，並且$[X]=s$。

又是一個很棒的巧合! 這個結果使我更相信我們現在所學的數學是很實用的。

第二型威氏遊戲

接下來我們繼續研究變型的威氏遊戲：規則如同威氏遊戲，但是輸贏結果的規定改為拿走最後一個棋子的人就是輸家，我們稱這樣遊戲為第二型威氏遊戲。

某次我們玩這個遊戲的過程如下：

$(10,12) \to (8,12) \to (8,9) \to (7,8) \to (7,5) \to (4,2) \to (1,2) \to (0,1) \to (0,0)$

乙拿走最後一個棋子的人就是輸家。

在玩遊戲時，如果想要研究必勝策略的話，一般來說，就必須要找出所有有利的位置所成的集合。如果想要找出所有有利的位置所成的集合，就必須藉著重覆玩遊戲所得到的心得，一個一個的往下找，等到累積到一定的數目後，觀察它們的規律，猜測出所有有利的位置所成的集合，再證明猜測是對的，如果證明猜測是錯的，那就要修改猜測，來來回回，反反覆覆地去找到對的答案才結束。

很顯然地(0,1)是第二型威氏遊戲有利的位置，因為甲一定讓$(0,1) \to (0,0)$，甲拿走最後一個棋子的人就是輸家。意外地(2,2)也是第二型威氏遊戲有利的位置，因為如果甲讓$(2,2) \to (0,0)$，甲是輸家；如果甲讓$(2,2) \to (1,1),(1,2)$,或(0,2)，乙一定讓桌上棋子$\to (0,1)$，甲拿走最後一個棋子的人是輸家。經過一些樹狀圖的推導，我們得到了一些有利的位置$\{(0,1),(2,2),(3,5),(4,7), (6,10),(8,13),(9,15),\ldots\}$，而且發現除了前二組之外，後面的有利的位置都和威氏遊戲的有利的位置一樣。令集合S_L就是把集合S_w中的一個元素 (1,2)換成另外二個元素(0,1),(2,2)。

為了方便證明，我們令$a_1 = 0$，$b_1 = 1$，對於所有$n \ge 2$，a_n, b_n就是集合S_w(威氏遊戲所有有利的位置所成的集合)中的a_n, b_n，所以集合$S_L = \{(2,2)\} \cup S_w$。令集合 A 為$\{a_n \mid n = 1,2,3,\cdots\}$，集合$B$為$\{a_n \mid n = 1,2,3,\cdots\}$。我們可以看到集合$S_L$中的元素都會滿足下面的敘述：

(1) $A \cup B = (N \cup \{0\}) - \{2\}$;

(2) $A \cap B = \phi$;

(3)如果$m > k$，則$a_m > a_k$，且$b_m > b_k$;

(4)假設(a_n, b_n)和(a_m, b_m)是集合S_L中的元素，如果$a_n = a_m$，則($b_n = b_m$)，反之亦然；

(5)固定m值($m \ge 1$)，如果$b_n - a_n = m$，則$a_n = a_m$且$b_n = b_m$。也就是說只有一組集合S_L中的元素(a_m, b_m)滿足$b_m - a_m = m$。

定理三：集合S_L中的元素(a_n, b_n)或(2,2)是第二型威氏遊戲的安全殘局，其餘的組合(x, y)都不是安全殘局。

證 明：令$0 \le x \le y$。如果$(x, y) \notin S_L$

1. $y \le 2$，則$(x, y) = (,2), (0,2), (1,1)$它們都可以到達(0,1)
2. $y > 2$，考慮

 (1) $x = 2$， 則 $(2, y) \to (2,2)$。

 (2) $x = b_m$，則 $(b_m, y) \to (b_m, a_m)$。

 (3) $x = a_m$， 考慮

  (i) $y > b_m$，則 $(a_m, y) \to (a_m, b_m)$。

  (ii) $y > b_m$，令$y - x = k$，由於$k = y - x < b_m - a_m = m$，所以$a_m > a_k$，則$(x, y) \to (a_k, b_k)$。

如果$(x, y) \in S_L$

1. (2,2)只能到達(1,2),(0,2),(2,1),(2,0),(1,1)及(0,0)這些都不屬於S_L。
2. (a_k, b_k)只能到達$(a_k - t, b_k), (a_k, b_k - t)$或$(a_k - t, b_k - t)$三種狀態。

 (i) $(a_k - t, b_k) \notin S_L$因爲$S_L$中第二座標是$b_k$，則第一座標一定是 a_k。

 (ii) $(a_k, b_k - t) \notin S_L$因爲$S_L$中第一座標是$a_k$，則第二座標一定是 b_k。

 (iii) $(a_k - t, b_k - t) \notin S_L$因爲 $(b_k - t) - (a_k - t) = b_k - a_k = k$，則$\therefore (a_k - t, b_k - t) = (a_k, b_k) *$(矛盾)。

證明定理之後，我們試驗一些例子：

(2, 5) → (2,2) 因爲 2，且 5 > 2;

(10,12) → (10,6) 因爲 10 爲 b_4，且 12 > a_4 = 6;

(3, 8) → (3, 5) 因爲 3 爲 a_2，且 8 > b_2 = 5;

(8, 9) → (0, 1) 因爲 8 爲 a_5，且 12 < b_5 = 13; 又 9 - 8=1;

(2, 8) → (2, 2) 因爲 2，且 8 > 2;

(7,12) → (7, 4) 因爲 7 爲 b_3，且 12 > a_3 = 4;

(4, 8) → (4, 7) 因爲 4 爲 a_3，且 8 > b_3 = 7;

(4, 6) → (3, 5) 因爲 3 爲 a_3，且 6 < b_3 = 7; 又 6 − 4 =1。

推廣的三排威氏遊戲

另外我們也研究一個推廣的三排威氏遊戲：在桌上分別放有a個、b個或c個三排棋子，甲、乙二個人按照下列：

(一)甲先拿棋子；

(二)甲、乙兩個人每次只能

(1)拿走某一排中若干個棋子; 或者

(2)拿走二排中同樣數目的棋子; 或者

(3)拿走三排中若干個棋子，但是必須有二排同樣數目的棋子被拿走。

拿走最後一個棋子的人就是贏家。

經過許多樹狀圖的推導，我們始終都找不出有利的位置。原因我們找到的例子(x,y,z)，我們都可以適當拿棋子使成某一組$(0,a_m,b_m)$，其中(a_m,b_m)是威氏遊戲的安全殘局，但是我們卻無法證明。經過很長的時間之後，終於找出方法來證明所有(x,y,z)，$z \ge y \ge x \ge 1$的位置都不是有利的位置。甲保證有必勝策略，成爲贏家 !! 也就是說桌上有三排棋子的情形都不是有利的位置。

定理四：假設$z \ge y \ge x \ge 1$，由任一組(x,y,z)，可以適當拿棋子使成某一個$(0,a_m,b_m)$，其中(a_m,b_m)是威氏遊戲的安全殘局。

證　明：

1. $x = y$，則$(x,y,z) \to (0,0,0)$。
2. $x < y$，考慮

   (1) $y - x = b_m$，則$(x,y,z) \to (0,b_m,a_m)$。

   (2) $y - x = a_m$，考慮

   (i) $z \ge b_m$，則$(x,y,z) \to (0,a_m,b_m)$。

   (ii) $z < b_m$，考慮

   (a) $y = z$，則$(x,y,z) \to (0,0,0)$。

   (b) $z - y = k > 0$，由於$k = z - y < b_m - a_m = m$，所以$y > a_m > a_k$，則$(x,y,z) \to (0,a_k,b_k)$。

證明定理之後，我們試驗一些例子：

(5, 5,12) $\rightarrow$ (0,0,0) 因爲第一排，第二排都拿 5 個 ；

(3,10,12) $\rightarrow$ (0,4,7) 因爲 10 - 3 爲 b_3 ，且 12 > $a_3 = 4$;

(6,10,12) $\rightarrow$ (0,4,7) 因爲 10 - 6 爲 a_3 ，且 12 > $b_3 = 7$;

(2, 8, 8) $\rightarrow$ (0,0,0) 因爲第二排，第三排都拿 8 個 ；

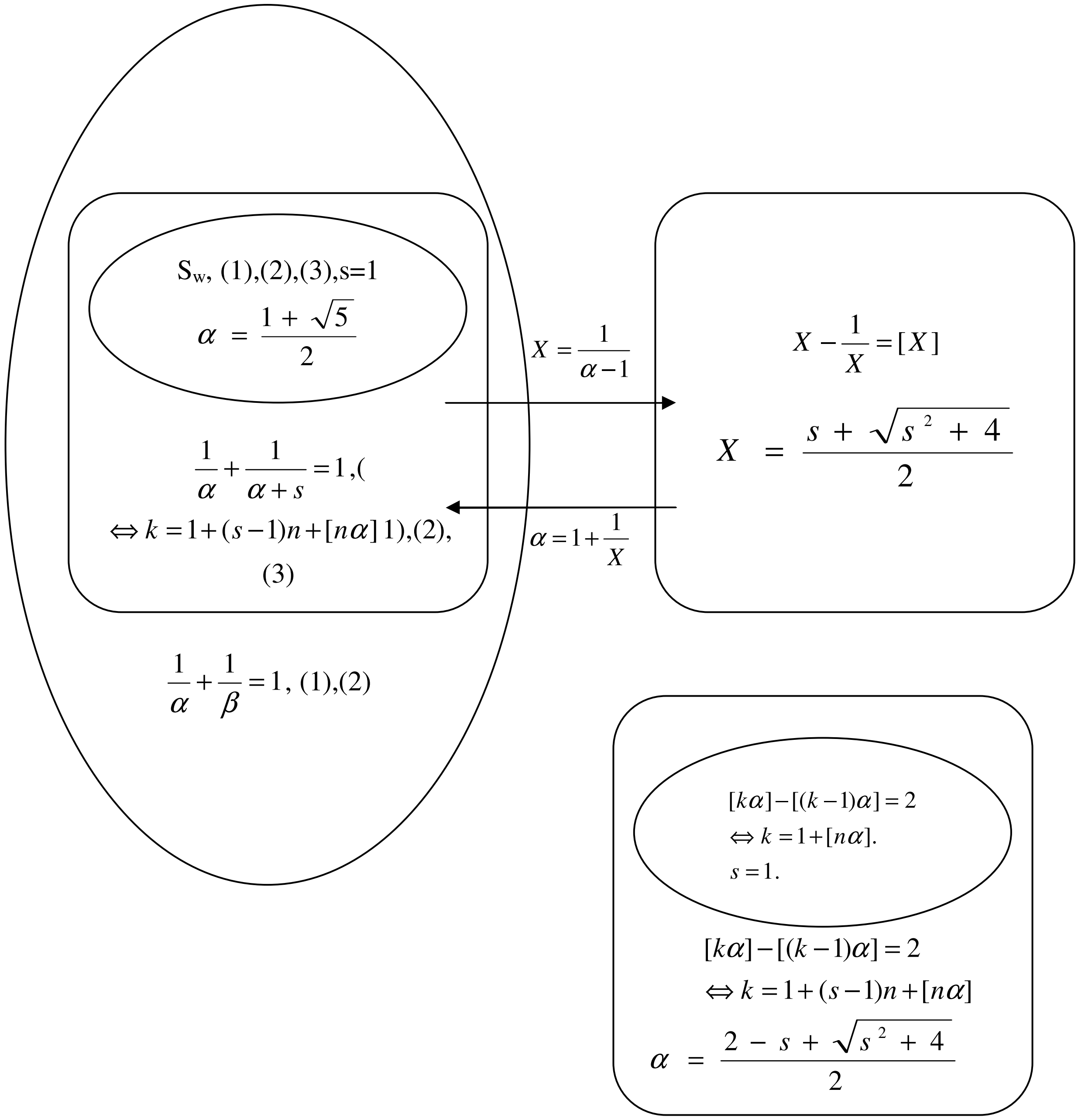
(2, 8, 9) $\rightarrow$ (0,1,2) 因爲 8 - 2 爲 a_4 ，且 9 < $b_4 = 10$; 又 9 - 8=1。

伍、研究結果

α 爲正無理數，令 $S(\alpha) = \{[k\alpha] \mid k = 1,2,3,\ldots\}, T(\alpha) = N - S(\alpha)$ 。

主要結果有：

1. 令 (α, β) 爲方程式 $1/\alpha + 1/\beta = 1$ 的正無理數解，則集合 $S(\beta) = T(\alpha) = N - S(\alpha)$ 。集合 $S(\beta)$ 與 $T(\alpha)$ 產生的數列 $M(\alpha) = < t_k - s_k \mid k = 1,2,3,\ldots >$ 不能夠保證是等差數列。
2. 令 s 爲正整數，且令 (α_s, β_s) 爲方程式 $1/\alpha + 1/\beta = 1$ 及 $\beta - \alpha = s$ 的解，則 $(\alpha_s, \beta_s) = ((2 - s + \sqrt{s^2 + 4})/2,\ (2 + s + \sqrt{s^2 + 4})/2)$ ，則集合 $S(\beta_s)$ 與 $T(\alpha_s)$ 產生的數列 $M(\alpha) = < t_k - s_k \mid\ k = 1,2,3,\ldots >$ 保證是等差數列。令 $c_k = [k\alpha] - [(k-1)\alpha]$ ， $k = 1,2,3,\ldots$ ，則集合 $\{k \mid k \in N, c_k = 2\}$ 等於集合 $\{1 + (s-1) + [n\alpha] \mid n = 1,2,3\ldots\}$ 。
3. 令威氏遊戲的所有有利的位置所成的集合是 $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \cdots\}$ 。則集合 A=$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ = $S((1+\sqrt{5})/2)$ 且 B=$\{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ = $S((3+\sqrt{5})/2)$ = $T((1+\sqrt{5})/2)$ ， 這是上述結過果 $s = 1$ 的情形。費氏數列理論的蜂王與雄蜂排列方式，1 代表雄蜂，而 2 代表蜂王，從左而右，從下而上排下去記錄雄蜂或者蜂王所得到的數列就是數列 $H(\alpha) = < [k\alpha] - [(k-1)\alpha] \mid \alpha = (1+\sqrt{5})/2,\ k = 1,2,3,\ldots >$ 。
4. 方程式 $X - 1/X = [X]$ 的正根 $X = (s + \sqrt{s^2 + 4})/2$ ， $s = 1,2,3\ldots$ 。我們得到
   (1)假設 X_s 是方程式 $X - 1/X = [X]$ 的正根，$[X_s] = s$ ，令 $\alpha_s = 1 + 1/X_s$ ，那麼 α_s 一定是方程式 $(1/\alpha) + (1/\alpha + s) = 1$ 的正根；
   (2)假設 α_s 是方程式 $(1/\alpha) + (1/\alpha + s) = 1$ 的正根，令 $X_s = 1/(\alpha_s - 1)$，那麼 X_s 一定是方程式 $X - 1/X = [X]$ 的正根，並且 $[X] = s$ 。
5. 第二型威氏遊戲 ： 所有有利的位置所成的集合 $S_L = (S_W - \{(1,2)\}) \cup \{(0,1), (2,2)\}$ 。
6. 推廣的三排威氏遊戲：桌上有三排棋子的情形都不是有利的位置，甲保證有必勝策略成爲贏家 !!



陸、討論

當我們用計算器來計算某些無理數的一倍、兩倍、三倍、…之後再取高斯符號的值，並記錄下來，所有這些自然數組成的集合命名爲 P。集合 Q 是由不在集合 P 中的自然數組成的。

我們意外地發現集合 Q 也會是某個無理數的一倍、兩倍、三倍、…之後再取高斯符號的值所組成的集合，我相信這麼巧合的事情一定有一些數學在裏面。尤其當我計算黃金比例 $((1+\sqrt{5})/2)$的一倍、兩倍、三倍、…之後再取高斯符號的值所組成的集合時，竟然發現它就

是威氏遊戲安全殘局所成的集合中元素第一個座標的數所成的集合 A 。既然黃金比例和費氏數列有密切關係，我馬上聯想與費氏數列會有關係的蜂王與雄蜂圖形，果不其然，我找到了它們的數學關係。

“研究”的英文字爲“Research”，也就是告訴我們必須要先搜尋之後再搜尋，一個好的研究結果，必須要有長時間的觀察、分析、推導及歸納。一件事情常常有一些不同的解釋，用不同的角度來觀察，會得到一些意外的驚奇結果。一個意外的火花，點燃了我們研究的興趣。尋找相關的數學問題，導致於得到更多驚奇的結果，這段研究過程令我十分珍惜與難忘。

柒、結論

推廣的威氏三排遊戲時，拿棋子的規則可以更改，例如拿走三排中若干個棋子，必須三排的棋子中有同樣數目的棋子被拿走。這樣變型遊戲的必勝策略就完全不同了，必須重新再來。討論推廣的威氏遊戲，桌上的棋子也可以四排、五排、…。首先拿棋子的規則必須重新設定，當然棋子的排數愈多，討論的情形就更複雜。

在這個研究計劃中，除了探討遊戲的必勝策略，更重要的是藉由好玩又有趣的遊戲來研究相關數學問題。

捌、參考資料及其他

1. 王芳夫、王登傳. 數學遊戲大觀。 *前程出版社*。
2. 葉均承. 移動棋子問題的致勝策略。*台灣二○○二年國際科學展覽會第一名作品*。
3. 趙文敏. 寓數學於遊戲第一輯。 *臺北九章出版社*，1981。
4. 張鎮華. 拈及其各種變型遊戲。*中央研究院數學傳播*，第 3 卷 第 2 期。
5. 張遠南. 使人聰明的智力遊戲。*九章出版社*。

【評語】030413

藉由對無理數的倍數的整數部分的觀察，作者發現了這些數字和 nim 這個遊戲的變形問題-----威氏遊戲的致勝點所成的數列間的關聯性，由此得出致勝點所成的數列的通式。雖然這個問題的結果早為人知，但作者能利用數論的一些性質，給這個結果一個清楚的論證，以國中生而言，實屬不易。如能推廣後的問題（三排、四排…的威氏遊戲，取子方式的改變），做更多的討論，嘗試給出一般化的結果，將會更好。