中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030412

刻骨銘＜心＞

學校名稱：臺北市立石牌國民中學

作者：	指導老師：
國三 徐琬庭 國三 吳千圳 國三 高尉庭 國三 洪研竣	蘇進發

關鍵詞：三心、軌跡圖形、尤拉線

摘要

本次作品主要研究三角形垂心、重心、外心、內心之相關軌跡變化，以及四心在不同情況時的排列組合。

我們發現三角形頂點水平移動時，垂心的軌跡為一拋物線圖形，重心為一水平直線，外心為一鉛直射線，內心則是一弧形。我們又觀察鉛直移動的情形，發現，內心為一弧線，另外三心則為鉛直線。之後把討論擴展到圓上，我們發現垂心的軌跡是此單位圓的對稱圖形，重心的軌跡是此單位圓內的圓，外心的軌跡即此圓的圓心，內心的軌跡即由兩個圓弧構成。

接下來，在三角形中同時觀察四心，我們發現在等腰三角形時才會四心共線，且共線的次數會隨著底與高的比例變動。最後，我們在等腰三角形中發現：當等腰三角形底角的cos值為 1/4 時，四心會等距排列。

壹、 研究動機

剛學會 GSP 的我們，非常興奮，於是想到要做剛學到的重心、外心、內心、垂心，移動了一下頂點，發現軌跡為特殊的圖形，在第五冊數學的學習中，我們對數學家發現的三角形性質十分感興趣，因為他們的發現，敞開了關於三角形內心、外心、重心、垂心的大門，所以，志同道合的我們，便想藉著研究，來充實內涵，窺探三角形不為人知的祕密。

貳、 研究目的

本研究所要探討的問題如下：

一、 探討三角形垂心之軌跡變化以及相關公式
二、 探討三角形外心之軌跡變化以及相關公式
三、 探討三角形重心之軌跡變化以及相關公式
四、 探討三角形內心之軌跡變化以及相關公式
五、 探討用幾何找出三角形四心繞圓的軌跡變化以及相關公式
六、 延伸四心共線的探討
七、 探討等腰三角形當四心等距(不等於零)時，底角的度數

參、 研究設備及器材

部編版第五冊數學課本、電腦、GSP 軟體

肆、 研究過程與方法

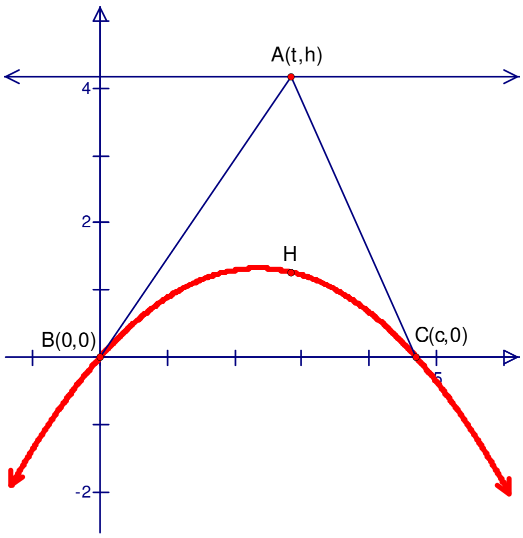
為了方便討論且不失一般性，我們所討論的三角形，都令底邊在 X 軸上，做為相關探討與研究。

伍、　研究結果

一、垂心：

發現：

1.若通過 A 點，做出與 x 軸平行的直線，讓 A 點在直線上左右移動，其中*三角形的高固定，底邊固定*，則三角形垂心點坐標會有一個方程式，且其變化軌跡爲一二次函數圖形，推理過程如下：



(1) 求 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式：(設 y=ax+b)

$$x=0, y=0 \text{代入}$$
$$0=0\times a+b$$
$$0=b$$
$$x=t, y=h \text{代入}$$
$$h=a\times t+0$$
$$a=\frac{h}{t}$$
$$\Rightarrow y=\frac{h}{t}x$$

(2) 求過 c 且和 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直的方程式：

$$\frac{h}{t}\times\frac{-t}{h}=-1(\text{垂直線斜率相乘}=-1)$$
$$\Rightarrow y=\frac{-t}{h}x+b$$
$$x=c, y=0 \text{代入}$$
$$0=\frac{-ct}{h}+b$$
$$b=\frac{ct}{h}$$
$$\Rightarrow y=\frac{-t}{h}x+\frac{ct}{h}$$

(3) 求 x=t 與 y=$\frac{-t}{h}x+\frac{ct}{h}$ 的交點(即爲垂心之坐標)：

$$x=t \text{代入：}$$
$$y=\frac{-t^2}{h}+\frac{ct}{h}=\frac{ct-t^2}{h}=\frac{t(c-t)}{h}$$

垂心坐標：$(x,y)\Rightarrow(t,\frac{t(c-t)}{h})$

(4)求垂心的軌跡方程式：

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t(c-t)}{h} \end{cases}$$

y=$\dfrac{x(c-x)}{h}$

$y = \dfrac{-x^2}{h} + \dfrac{c}{h}x$

y=$-\dfrac{1}{h}(x^2 - cx + \dfrac{c^2}{4}) + \dfrac{c^2}{4h}$

$= -\dfrac{1}{h}(x - \dfrac{c}{2})^2 + \dfrac{c^2}{4h}$

垂心方程式：

y=$-\dfrac{1}{h}(x - \dfrac{c}{2})^2 + \dfrac{c^2}{4h}$

所以頂點 A 水平移動時，垂心軌跡爲有最高點($\dfrac{c}{2}, \dfrac{c^2}{4h}$)的二次函數圖形。

【結論】
當三角形底邊固定，且底邊和 X 軸重合時，頂點在水平方向移動，垂心的軌跡爲拋物線 y=$-\dfrac{1}{h}(x - \dfrac{c}{2})^2 + \dfrac{c^2}{4h}$，且當 x=$\dfrac{1}{2}c$時 y 有最大值$\dfrac{c^2}{4h}$。

2.若通過 A 點，做出與 x 軸垂直的直線，讓 A 在直線中上下移動，其中*三角形的底邊固定*，則三角形垂心點坐標會有一個方程式，且其變化軌跡爲一鉛直直線，推理過程如下：
不妨假設 B(0,0)、C(c,0)、A(t,h)，其中 c 爲定值(c>0)，h 爲變數。

(1)先求$\overleftrightarrow{AM}$ 方程式：$x = t$

(2)再求$\overleftrightarrow{AB}$的方程式：(設$\overleftrightarrow{AB}$爲 y=ax+b)

$x = 0$，$y = 0$代入

$0 = 0 \times a + b$

$b = 0$

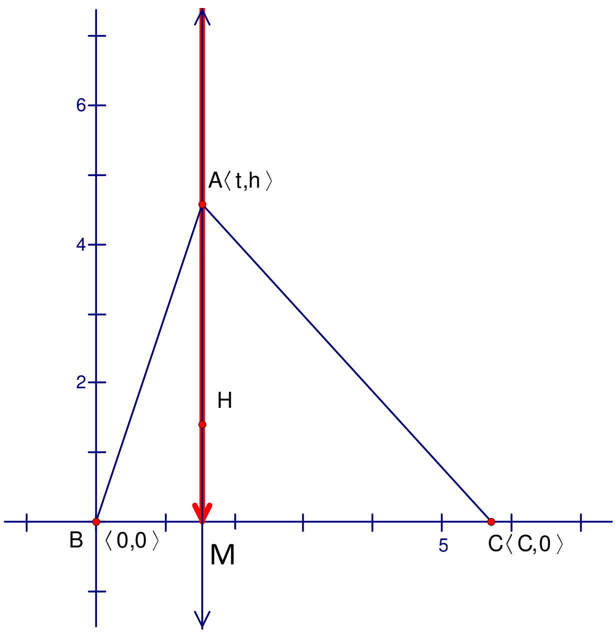
$x = t$，$y = h$ 代入

$h = t \times a + 0$

$h = t \times a$

$a = \dfrac{h}{t}$

$\Rightarrow y = \dfrac{h}{t}x$



(3)求過 c 點和 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直的直線

斜率爲：$-1\div\frac{h}{t}=\frac{-t}{h}$

$$y=\frac{-t}{h}x+b$$

$x=c$，y = 0(代入)

$$0=\frac{-\,tc}{h}+b$$

$$b=\frac{tc}{h}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-\,t}{h}x+\frac{tc}{h}$$

(4)求 $y=\frac{-t}{h}x+\frac{tc}{h}$ 和 $x=t$ 的交點(即爲垂心之坐標)：

$$y=\frac{-t}{h}\times t+\frac{tc}{h}$$

$$=\frac{-t^2}{h}+\frac{tc}{h}$$

$$=\frac{t(c-t)}{h}$$

$$(x,y)=(t,\frac{t(c-t)}{2h})$$

因爲 t 爲定値，所以垂心在 x=t 上

(當 h 趨近於 0 時，y 値會趨近無窮大與無窮小，當 h 趨近無窮大時，y 値會趨近爲 0)

【結論】
三角形底邊固定，頂點 A 上下移動時，垂心的軌跡爲鉛直直線，方程式爲 x=t。

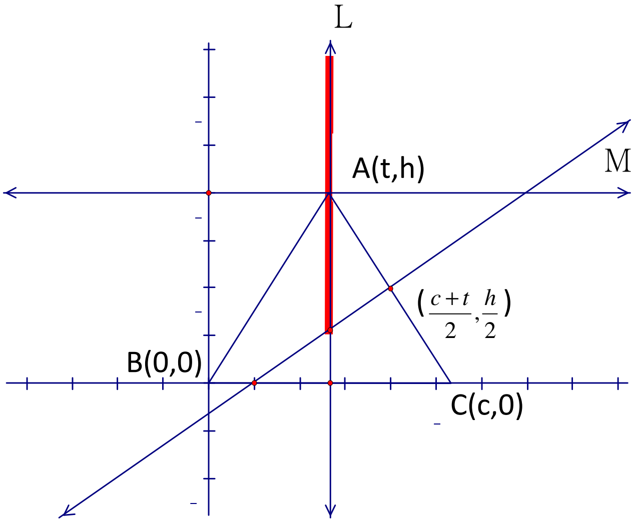
二、外心：

發現：

1.若通過 A 點，做出與 x 軸平行的直線，讓 A 點在水平直線上左右移動時，其中*三角形的底邊固定*，則三角形外心坐標會有一個方程式，且其變化軌跡爲一有端點的鉛直射線，其推理過程如下：

不妨假設 B(0,0)、C(c,0)、A(t,h)，其中 c、h 爲定值(c>0、h>0)，t 爲變數。

可得直線 L：$x=\dfrac{c}{2}$



設直線 M：y=ax+b

$a=-1\div\left(\dfrac{h}{t-c}\right)=\dfrac{c-t}{h}$

$\Rightarrow$ M：$y=\dfrac{c-t}{h}x+b$

代入（$\dfrac{c+t}{2},\dfrac{h}{2}$）

$\Rightarrow \dfrac{h}{2}=\dfrac{c-t}{h}\cdot\dfrac{c+t}{2}+b$

$b=\dfrac{h^2-c^2+t^2}{2h}$

∴M：$y=\dfrac{c-t}{h}x+\dfrac{h^2-c^2+t^2}{2h}$

求直線 L 與 M 的交點坐標，即爲外心。

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{2} \\ y=\dfrac{c-t}{h}x+\dfrac{h^2-c^2+t^2}{2h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c}{2} \\ y=\dfrac{c^2-ct+h^2-c^2+t^2}{2h} \end{cases} \Rightarrow \text{外心}\left(\dfrac{c}{2},\ \dfrac{h^2-ct+t^2}{2h}\right)$$

故外心移動軌跡的方程式爲：$x=\dfrac{c}{2}$，

且當頂點 A 移動，使三角形爲等腰三角形時，外心有最低點：（$\dfrac{c}{2},\dfrac{4h^2-c^2}{8h}$）

說明:

$$\frac{h^2-ct+t^2}{2h}=\frac{1}{2h}(t^2-ct+\frac{1}{4}c^2)+\frac{h}{2}-\frac{1}{2h}\times\frac{1}{4}c^2$$

$$=\frac{1}{2h}(t-\frac{1}{2}c)^2+\frac{4h^2-c^2}{8h}$$

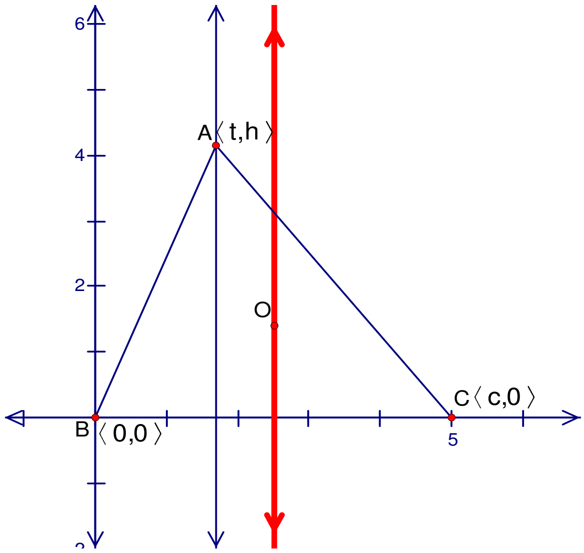
故當 $t=\dfrac{1}{2}c$，有最小值$\dfrac{4h^2-c^2}{8h}$。

【結論】
若 A 點在水平直線上左右移動時，其中*三角形的底邊固定*，則三角形外心的坐標，爲方程式 $x=\dfrac{c}{2}$，有最低點（$\dfrac{c}{2},\dfrac{4h^2-c^2}{8h}$），且其變化軌跡爲一有端點的鉛直射線。

2.若通過 A 點，做出與 y 軸平行的直線，讓 A 點在鉛直直線上下移動時，其中*三角形的底邊固定*，則三角形外心坐標會有一個方程式，且其變化軌跡爲有兩種情形，一種爲有端點的鉛直射線，另一種爲鉛直直線，其推理過程如下：

不妨假設 B(0,0)、C(c,0)、A(t,h)，其中 c、t 爲定值(c>0、t>0)，h 爲變數。

若 t<c 時，當 A 點在鉛直直線上移動，外心移動軌跡的方程式爲 $x=t$，推導過程如上(二)外心之(1)可得：



外心爲（$\dfrac{c}{2}$, $\dfrac{h^2-ct+t^2}{2h}$）

=（$\dfrac{c}{2}$, $\dfrac{h}{2}+\dfrac{t^2-ct}{2h}$）

=（$\dfrac{c}{2}$, $\dfrac{h}{2}+\dfrac{t(t-c)}{2h}$）

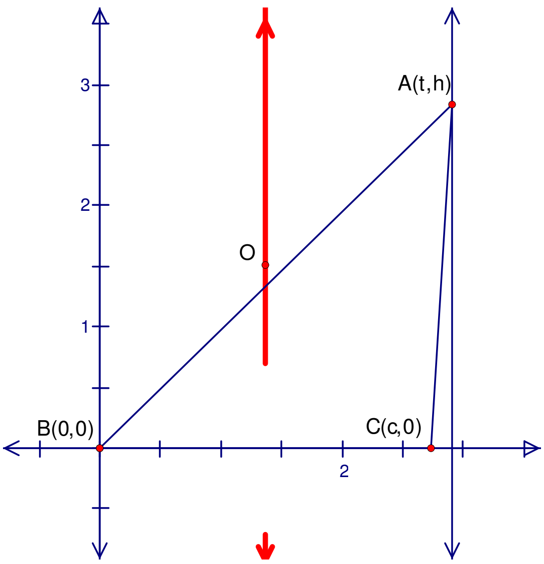
當 h 趨近無窮大時，$\dfrac{h}{2}$ 爲正無窮大，$\dfrac{t(t-c)}{2h}$ 爲趨近於 0，所以外心之 y 坐標值也趨近正無窮大。

當 h 趨近 0 時，$\dfrac{h}{2}$ 趨近 0，$\dfrac{t(t-c)}{2h}$ 爲負無窮大，

所以外心之 y 坐標值亦趨近負無窮大。

所以無端點、無最大最小値。

若 t≧c 時，當 A 點在鉛直直線上移動，外心移動軌跡的方程式爲：$x=t$，且外心爲有最低點，故爲有端點的鉛直射線。



說明：

外心之 y 坐標值

$=\dfrac{h^2-ct+t^2}{2h}=\dfrac{h}{2}+\dfrac{t^2-ct}{2h}=\dfrac{h}{2}+\dfrac{t(t-c)}{2h}$

當 h 趨近無窮大時，同上，外心之 y 坐標值也趨近正無窮大。

當 h 趨近 0 時，$\dfrac{h}{2}$ 趨近 0，$\dfrac{t(t-c)}{2h}$ 爲正無窮大，

所以外心之 y 坐標值亦趨近正無窮大。

當 $h=\sqrt{t^2-ct}$ 時，外心之 y 坐標值有最小值 $\sqrt{t^2-ct}$ 。

說明：

y=$\frac{h^2-ct+t^2}{2h}=\frac{h}{2}+\frac{t^2-ct}{2h}\geq 2\sqrt{\frac{h}{2}\times\frac{t^2-ct}{2h}}=\sqrt{t^2-ct}$ (算術平均數≧幾何平均數)

當 y 最小值=$\sqrt{t^2-ct}$ 時，則$\frac{h}{2}=\frac{t^2-ct}{2h}$ (當兩數相等，算術平均數=幾何平均數)

$\Rightarrow \frac{h}{2}=\frac{t^2-ct}{2h}$ $\Rightarrow h^2=t^2-ct$ $\Rightarrow h=\sqrt{t^2-ct}$

(若 h 為負數時，為反向的有端點鉛直射線)

【結論】

若頂點 A 在鉛直直線上下移動時，其中*三角形的底邊固定*，則三角形的外心坐標，為方程式 $x=\frac{c}{2}$ ，且其變化軌跡為下列兩種情形：

若 t<c 時，外心的軌跡為鉛直線($x=\frac{c}{2}$)

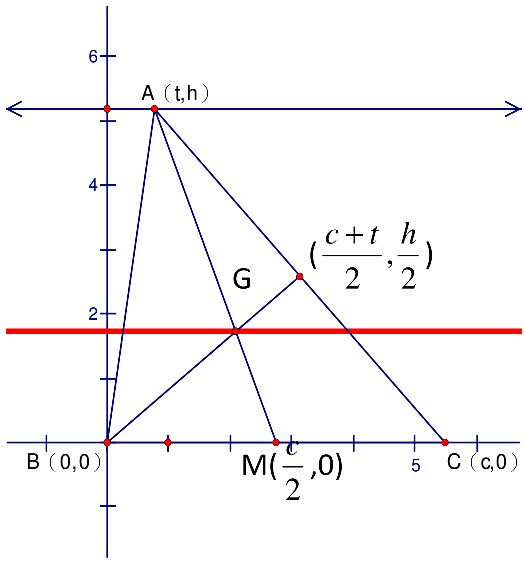
若 t≧c 時，外心的軌跡為有端點的鉛直射線 $x=\frac{c}{2}$ 且 y≧ $\sqrt{t^2-ct}$ 或 y≦-$\sqrt{t^2-ct}$

三、重心

發現：

1.平行移動

若通過 A 點，做出與 x 軸平行的直線，讓 A 在水平直線上左右移動時，其中*三角形的底邊固定*，重心變化軌跡為一水平線，其推理過程如下：



〈解 1〉與 x 軸平行的直線，讓 A 在直線上左右移動，其中三角形的高固定，底邊固定，則三角形重心的軌跡成一直線，其方程式為：y=$\frac{1}{3}$h

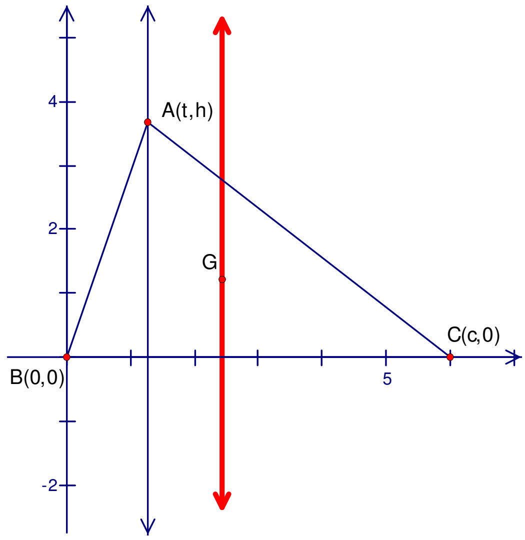
∵重心 G($\frac{\frac{c}{2}\times 2+t\times 1}{2+1}$,$\frac{h}{3}$)

=G（$\frac{c+t}{3}$,$\frac{h}{3}$）………其中 t 為變數，c、h 為定值。

∴重心的軌跡方程式為：y=$\frac{1}{3}$h

〈解 2〉$\because \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GM}}$ 恆等於 2 ， $\overline{GM}=\dfrac{1}{3}\cdot\overline{AM}$

$\therefore$重心至底邊之距離恆為 A 點至底邊之距離的$\dfrac{1}{3}$



重心的軌跡方程式：y=$\dfrac{1}{3}$h

重心$\left(\dfrac{c+t}{3},\dfrac{h}{3}\right)$

若 t→∞，則$\dfrac{c+t}{3}$亦→∞ $\therefore$重心無最大、最小值

2.鉛直移動

若通過 A 點，做出與 y 軸平行的直線，讓 A 在鉛直直線上下移動時，其中*三角形的底邊固定*，重心變化軌跡為一鉛直線，其推理過程如下：

重心 G($\dfrac{\frac{c}{2}\times2+t\times1}{2+1}$,$\dfrac{h}{3}$)=G（$\dfrac{c+t}{3}$,$\dfrac{h}{3}$）

(其中 h 為變數，c、t 為定值。)

重心的軌跡方程式：x=$\dfrac{c+t}{3}$ 。 若 h→∞，則$\dfrac{h}{3}$亦→∞ $\therefore$重心無最大、最小值

【結論】

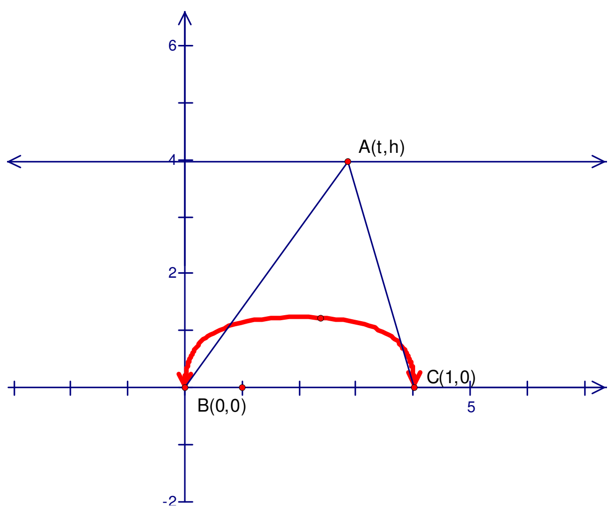
當動點 A 水平移動時，重心的軌跡為水平直線(y=$\dfrac{h}{3}$)

當動點 A 垂直移動時，重心的軌跡為鉛直直線($x=\dfrac{c+t}{3}$)。

四、內心

發現：

1.若通過 A 點，做出與 x 軸平行的直線，讓 A 在水平直線上左右移動時，其中*三角形的底邊固定*，則內心變化軌跡為曲線，其推理過程如下：



利用內分比性質與平行線截成比例線段，我們可以導出內心坐標:

內心 I(x,y)

$$=\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$$

其中

$A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ 爲三角形的三頂點，

$\overline{BC}=a$ 、 $\overline{AC}=b$ 、 $\overline{AB}=c$ 爲三角形的三邊。

內心坐標（ $\dfrac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$ ， $\dfrac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$ ）

$$x=\frac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$$

$$y=\frac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{h}$$

$$\frac{hx}{y}=t+\sqrt{h^2+t^2}$$

$$\left(\frac{hx}{y}-t\right)^2=h^2+t^2$$

$$\left(\frac{hx}{y}\right)^2-2\times\frac{hx}{y}\times t+t^2=h^2+t^2$$

$$\frac{h^2x^2}{y^2}-\frac{2hxt}{y}=h^2$$

$$\frac{h^2x^2}{y^2}-h^2=\frac{2hxt}{y}$$

$$h^2\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)=\frac{2hxt}{y}$$

$$h^2\left(\frac{x^2-y^2}{y^2}\right)\times\frac{y}{2hx}=t$$

$$h\left(\frac{x^2-y^2}{2xy}\right)=t$$

$t=\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}$ 代回 y=$\frac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$

y=$\frac{h}{1+\sqrt{h^2+\left[\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}\right]^2}+\sqrt{h^2+\left[\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}-1\right]^2}}$

設$\sqrt{h^2+\left[\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}\right]^2}$ =a，$\sqrt{h^2+\left[\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}-1\right]^2}$ =b

a=$\sqrt{h^2+\left[\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}\right]^2}$

=$\sqrt{h^2+\frac{h^2(x^4-2x^2y^2+y^4)}{4x^2y^2}}$

=$\sqrt{\frac{h^2(4x^2y^2+x^4-2x^2y^2+y^4)}{4x^2y^2}}$

=$\sqrt{\frac{h^2(x^2+y^2)^2}{(2xy)^2}}$

=$\left|\frac{h(x^2+y^2)}{2xy}\right|$

=$\frac{h(x^2+y^2)}{2xy}$ （∵h、x、y 皆爲正數）

b=$\sqrt{h^2+\left[\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}-1\right]^2}$

=$\sqrt{h^2+\frac{h^2(x^2-y^2)^2}{4x^2y^2}-2\times\frac{h(x^2-y^2)}{2xy}+1}$

=$\sqrt{\frac{h^2(x^2+y^2)^2}{4x^2y^2}-\frac{h(x^2-y^2)}{xy}+1}$

=$\sqrt{\frac{h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2}{4x^2y^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2}}{2xy}$ （∵x、y 皆爲正數）

故 $y=\dfrac{h}{1+\dfrac{h(x^2+y^2)}{2xy}+\dfrac{\sqrt{h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2}}{2xy}}$

$$y+\frac{h(x^2+y^2)}{2x}+\frac{\sqrt{h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2}}{2x}=h$$

$$2xy+h(x^2+y^2)+\sqrt{h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2}=2hx$$

$$\sqrt{h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2}=2hx-2xy-h(x^2+y^2)$$

$$h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2=[2x(h-y)-h(x^2+y^2)]^2$$

$$h^2(x^2+y^2)^2-4xyh(x^2-y^2)+4x^2y^2=[2x(h-y)]^2+[h(x^2+y^2)]^2-2\times2x(h-y)\times h(x^2+y^2)$$

$$-4hx^3y+4hxy^3+4x^2y^2=4x^2(h^2-2hy+y^2)-4hx(h-y)(x^2+y^2)$$

$$hx^3y-hxy^3-x^2y^2=-h^2x^2+2hx^2y-x^2y^2+hx(hx^2+hy^2-x^2y-y^3)$$

$$hx^3y-hxy^3-x^2y^2=-h^2x^2+2hx^2y-x^2y^2+h^2x^3+h^2xy^2-hx^3y-hxy^3$$

同除 hx(∵h>0、x>0),並移項化簡

$$hy^2-2x^2y+2xy+hx^2-hx=0$$

A 點水平移動時，內心的軌跡方程式爲 $hy^2-2x^2y+2xy+hx^2-xh=0$ (h 爲定值)，

且由內心（$\dfrac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$ ，$\dfrac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$）知：

t 趨近無限大時，內心趨近(1,0)；t 趨近無限小時，內心趨近(0,0)。

所以 0<x<1

當 x=$\dfrac{1}{2}$時，y 有最大値，所以

代 x=$\dfrac{1}{2}$： $hy^2-\dfrac{1}{2}y+y+\dfrac{1}{4}h-\dfrac{1}{2}h=0$

$$\Rightarrow 4hy^2+2y-h=0$$

$\Rightarrow y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+16h^2}}{8h}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4h^2}}{4h}$(負不合)

$$\therefore y=\frac{-1+\sqrt{1+4h^2}}{4h}$$

【結論】

當動點 A 水平移動時，內心軌跡方程式爲一曲線。

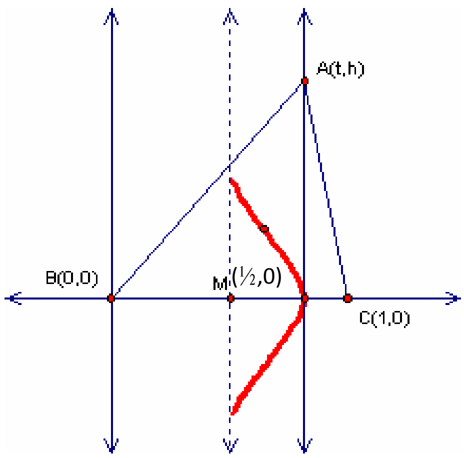
方程式：$hy^2-2x^2y+2xy+hx^2-xh=0$ 且 0<x<1

當 x=$\frac{1}{2}$時，有最大值 $y=\frac{-1+\sqrt{1+4h^2}}{4h}$

2.若通過 A 點，做出與 y 軸平行的直線，讓 A 點在鉛直線上移動時，其中*三角形的底邊固定*，則內心變化軌跡爲曲線，其推理過程如下：

內心坐標（$\frac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$，$\frac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$）

x=$\frac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$

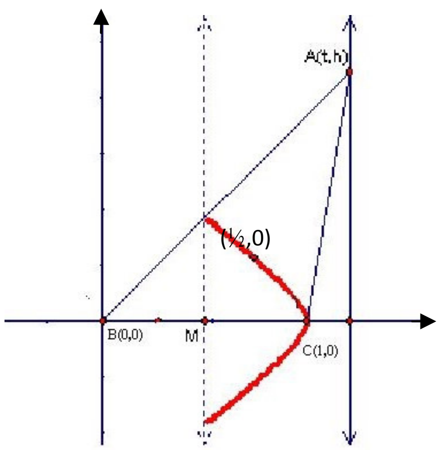


y=$\frac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$

$$\frac{x}{y}=\frac{t+\sqrt{h^2+t^2}}{h}$$

$$\frac{hx}{y}=t+\sqrt{h^2+t^2}$$

$$\left(\frac{hx}{y}-t\right)^2=h^2+t^2$$



$$\left(\frac{hx}{y}\right)^2-2\times\frac{hx}{y}\times t+t^2=h^2+t^2$$

$$\frac{h^2x^2}{y^2}-\frac{2hxt}{y}=h^2$$

$$\frac{h^2x^2}{y^2}-h^2=\frac{2hxt}{y}$$

$$h^2\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)=\frac{2hxt}{y}$$

$$h^2\left(\frac{x^2-y^2}{y^2}\right)\times\frac{y}{2hx}=t$$

$$h\left(\frac{x^2-y^2}{2xy}\right)=t$$

$h=\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}$ 代回 y= $\dfrac{h}{1+\sqrt{h^2+t^2}+\sqrt{h^2+(t-1)^2}}$

$$y=\frac{\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}}{1+\sqrt{t^2+\left(\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}\right)^2+(t-1)^2}}$$

設 $\sqrt{t^2+\left(\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}\right)^2}$ =a， $\sqrt{\left(\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}\right)^2+(t-1)^2}$ =b

a= $\sqrt{t^2+\left(\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}\right)^2}$

= $\sqrt{t^2+\dfrac{4x^2y^2t^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}}$

= $\sqrt{\dfrac{t^2\left(x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2\right)}{x^4-2x^2y^2+y^4}}$

= $\sqrt{\dfrac{t^2\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}}$

= $\left|\dfrac{t\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}\right|$

= $\dfrac{t\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}$ ……(∵x>y)

b= $\sqrt{\left(\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}\right)^2+(t-1)^2}$

= $\sqrt{\dfrac{4x^2y^2t^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}+t^2-2t+1}$

$$=\sqrt{\frac{4x^2y^2t^2+x^4t^2-2x^2y^2t^2+y^4t^2-2t\left(x^4-2x^2y^2+y^4\right)+x^4-2x^2y^2+y^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}}{x^2-y^2}$$ ......(∵x>y)

故 $y=\dfrac{\dfrac{2xyt}{x^2-y^2}}{1+\dfrac{t\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}+\dfrac{\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}}{x^2-y^2}}$

$$\frac{2xyt}{x^2-y^2}=y+\frac{yt\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}+\frac{y\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}}{x^2-y^2}$$

$$y=\frac{2xyt-yt\left(x^2+y^2\right)-y\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}}{x^2-y^2}$$

$$x^2-y^2=2xt-x^2t-y^2t-\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}$$

$$\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}=x^2-y^2-2xt+x^2t+y^2t$$

$$t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2=\left(x^2-y^2-2xt+x^2t+y^2t\right)^2$$

$$t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2=\left((x^2-y^2)+t(x^2+y^2-2x)\right)^2$$

$$t^2\left(x^2+y^2\right)^2-2t\left(x^2-y^2\right)^2=2t(x^2-y^2)(x^2+y^2-2x)+t^2(x^2+y^2-2x)^2$$

$$-2t\left(x^2-y^2\right)^2=2t(x^2-y^2)(x^2+y^2)-4tx(x^2-y^2)+4t^2x^2-4t^2x(x^2+y^2)$$

$-\left(x^2-y^2\right)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)+2tx^2-2tx(x^2+y^2)$ ...(同除 2t)

$2x^4-2x^2y^2-2x^3+2xy^2+2tx^2-2tx^3-2txy^2=0$ ...(同除 2x)

$x^3-xy^2-x^2+y^2+tx-tx^2-ty^2=0$

若 t>$\dfrac{1}{2}$，則$\overline{AB}>\overline{AC}$，反之，則$\overline{AB}<\overline{AC}$所以內心 x 的坐標不可能過$\dfrac{1}{2}$，所以

把 x=$\dfrac{1}{2}$代入:$\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{4}+y^2+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}t-ty^2=0$

$\Rightarrow (8t-4)y^2 = 2t-1$

$\Rightarrow y^2 = \dfrac{2t-1}{8t-4}$

$\Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow y = \pm\dfrac{1}{2}$

所以 y 的範圍是$-\dfrac{1}{2} < y < \dfrac{1}{2}$

由 P.12 圖可知，當 y=0 時，x 會有極值，而且會因 A(t,h)的 t 變化而有所變化------

$x^3 - xy^2 - x^2 + y^2 + tx - tx^2 - ty^2 = 0$

y 代 0$\rightarrow x^3 - x^2 + tx - tx^2 = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - x - tx + t) = 0$

$\Rightarrow x(x-t)(x-1) = 0$

因爲 x≠0

又因爲 I 是內心，所以 0<x≤1

(1) 若 0<t<½，當 y=0，則 x 有最小值 t

(2) 若 t=½，當 y=0，則 x 無最大值最小值

(3) 若½<t<1，當 y=0,則 x 有最大值 t

(4) 若 t≧1，當 y=0，則 x 有最大值 1

【結論】

當動點 A 鉛直方向移動時，內心軌跡方程式爲一曲線。

方程式：$x^3 - xy^2 - x^2 + y^2 + tx - tx^2 - ty^2 = 0$ 且$-\dfrac{1}{2} < y < \dfrac{1}{2}$

(1) 若 0<t<½，當 y=0，則 x 有最小值 t

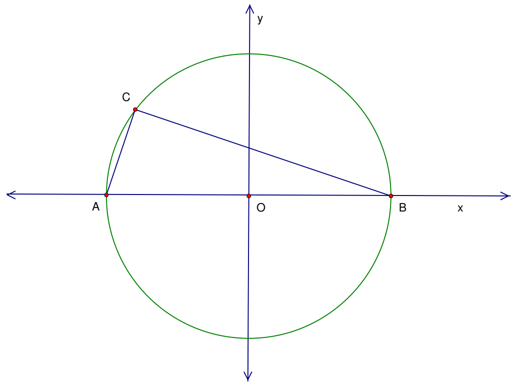
(2) 若 t=½，當 y=0，則 x 無最大值最小值

(3) 若½<t<1，當 y=0,則 x 有最大值 t

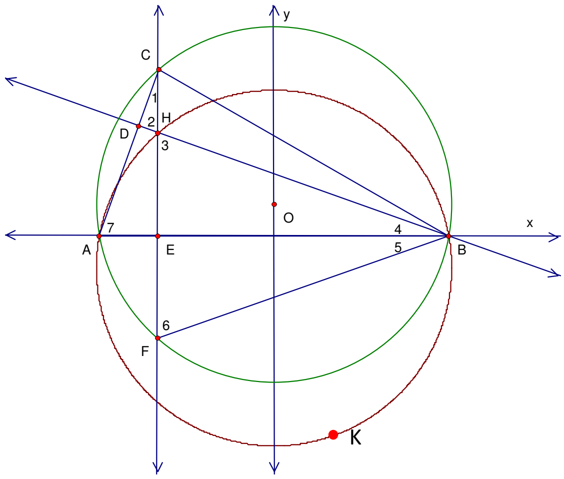
(4) 若 t≧1，當 y=0，則 x 有最大值 1

五、繞圓運動

1.垂心：



（1）當底邊$\overline{AB}$爲直徑時，底邊所對的頂點在單位圓上作圓周運動，其軌跡變化如右圖：
因爲垂心爲三角形 3 高交點，又因爲底邊爲直徑，所以當頂點移動時，∠C 恆爲 90 度，故 C 點的移動軌跡跟圓 O 是同圓的關係。
（2）當底邊$\overline{AB}$不爲直徑時，底邊所對的頂點在單位圓上作圓周運動，其軌跡變化如右圖：
當底邊不是直徑時，我們發現，垂心的軌跡像是圓 O 的水平鏡射圖，再平移幾個單位，爲了驗證，所以我們試著證明：



因爲$\overline{CF}$爲$\overline{AB}$的垂線，所以不管 C 怎麼在圓上移動，垂心一定在$\overline{CF}$上，故 C、H、F 一定共線，我們只要證明△BFE≅△BHE，就知道$\overline{EF}=\overline{HE}$，H 就是 F 水平鏡射的點，又 F 爲弧 AFB 的一部分，故弧 AFB=弧 AHB。

在△CDH、△BEH 中
$\angle 3=\angle 2$……①
又在△CDH、△CEA 中
$\because \angle 1=\angle 1$、$\angle CDH=\angle CEA$
∴△CDH～△CEA（AA）
$\Rightarrow \angle 2=\angle 7$…..②
又∠7 跟∠6 皆對弧 CB，所以∠7=∠6……③

根據上述推理∵∠3=∠6 ∠BEF=∠BEH=90^0 $\overline{BE}=\overline{BE}$

$\therefore \Delta BEH=\Delta BEF$（AAS）
$\because \Delta BEH=\Delta BEF$

$\therefore \overline{EF}=\overline{HE}$，則 H 就是 F 水平鏡射的點，又 F 爲弧 AFB 的一部分，故弧 AFB=弧 AHB。

同理可證，弧 ACB=弧 AKB

圓 O 方程式：

$x^2+y^2=1$

不妨假設 C（a,-$\sqrt{1-a^2}$ ）

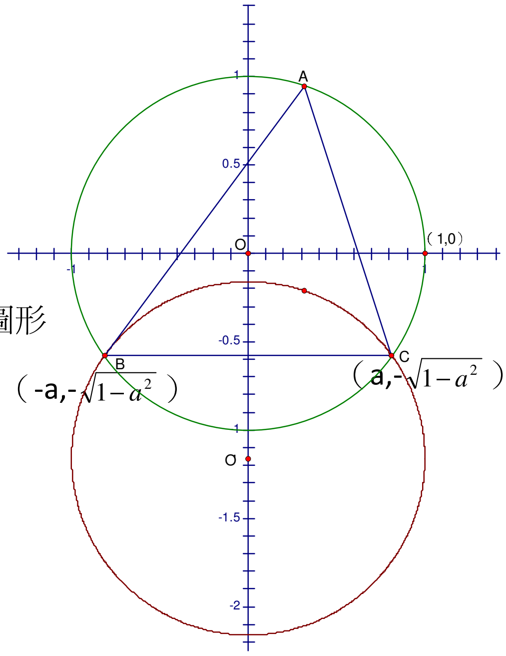
B（-a,-$\sqrt{1-a^2}$ ）

由上述證明可知：

垂心移動軌跡（O’）爲圓 O 以 $\overline{BC}$ 爲對稱軸之對稱圖形

所以 O’的圓心爲（0,-2$\sqrt{1-a^2}$ ）

方程式爲：$x^2+\left(y+2\sqrt{1-a^2}\right)^2=1$



2.外心

因爲三角形恆繞著他的外接圓移動，所以外心的軌跡就是外接圓的圓心。

3.重心：

$\because$ G爲重心，$\therefore \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GE}}=2$

當 A 點與 B 點重合時，G 點也與 D 點重合，

$\therefore \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$=2

又∠AEB=∠GED

∴△GDE～△ABE

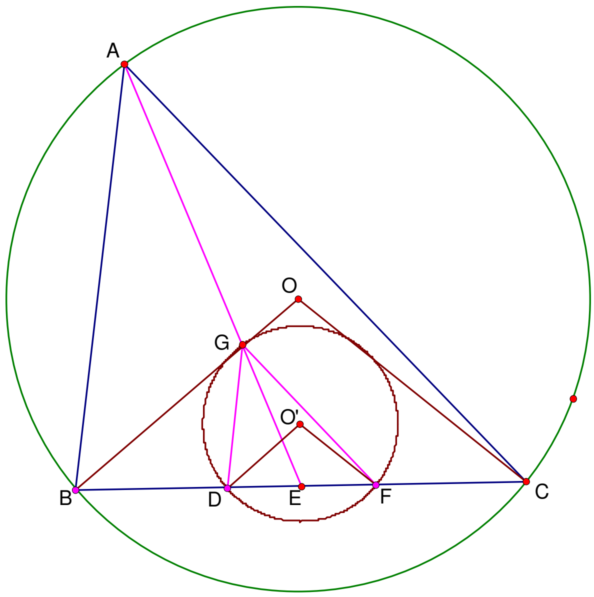
⇒∠DGE=∠BAE

同理可證，$\Delta AEC\sim\Delta GEF$

⇒∠FGE=∠CAE

故∠DGF=∠BAC

⇒重心的軌跡爲一圓



$\because \Delta ABC$ 是 ΔGDF 的 3 倍縮放圖

$\therefore \Delta ABC$ 的外心半徑：ΔGDF 的外心半徑=3：1

$\because \dfrac{\overline{OB}}{\overline{O'D}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{O'F}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DF}}=3$

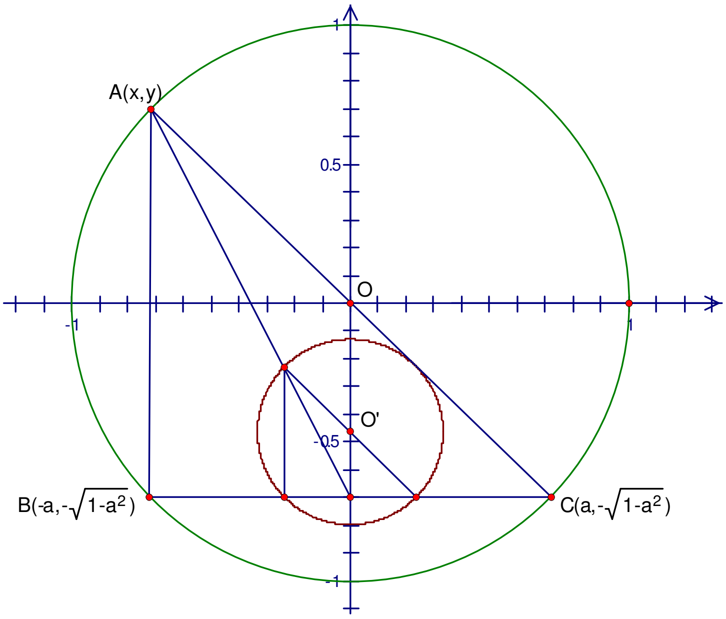
∴ΔOBC～ΔO’DF

$\Rightarrow \overline{OE}:\overline{O'E}=3:1$

圓 O 的方程式：$x^2+y^2=1$

不妨假設 C（a,-$\sqrt{1-a^2}$），

B（-a,-$\sqrt{1-a^2}$）



由上述證明可知：

$\because \overline{OD}:\overline{O'D}=3:1$

$\therefore$O'（0, $\frac{-2}{3}\sqrt{1-a^2}$）

又$\because \Delta ABC$的外心半徑：ΔGDF的外心半徑=3：1

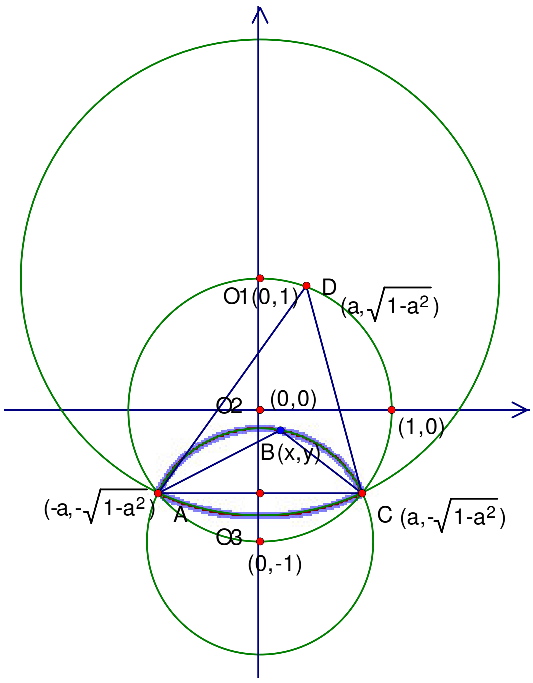
$\therefore$圓 O'的半徑爲$\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{2}{3}\sqrt{1-a^2}\right)^2=\frac{1}{9}$$

4.內心：

當動點 D 在單位圓上移動時，三角形 ACD 的內心 B 也跟著移動，發現弧 ABC 是圓弧的一部分

說明：



$\because \angle ABC$=90°+$\frac{1}{2}\angle D$

$\therefore \angle ABC$角度爲定值

故弧 ABC 是圓弧的一部份

$\because \angle ADC$的角平分線平分弧 AC

$\therefore$弧 AO_3=弧 CO_3

$\because \overline{AC}$做通過 O_2 的垂直線也會平分弧 AC

$\therefore$在$\overline{AC}$做通過 O_2 的垂直線可以得到圓心 O_3

同理 也可以得到圓心 O_1

(1)弧 AC 的方程式（$|x|<a$、$y>-\sqrt{1-a^2}$）：

$$x^2+(y+1)^2=a^2+\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^2$$

$$x^2+(y+1)^2=a^2+1-2\sqrt{1-a^2}+1-a^2$$

$$x^2+(y+1)^2=2-2\sqrt{1-a^2}$$

(2)弧 AC 的方程式（$|x|<$a、y＜$-\sqrt{1-a^2}$）：

$$x^2+(y-1)^2=a^2+\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)^2$$

$$x^2+(y-1)^2=a^2+1+2\sqrt{1-a^2}+1-a^2$$

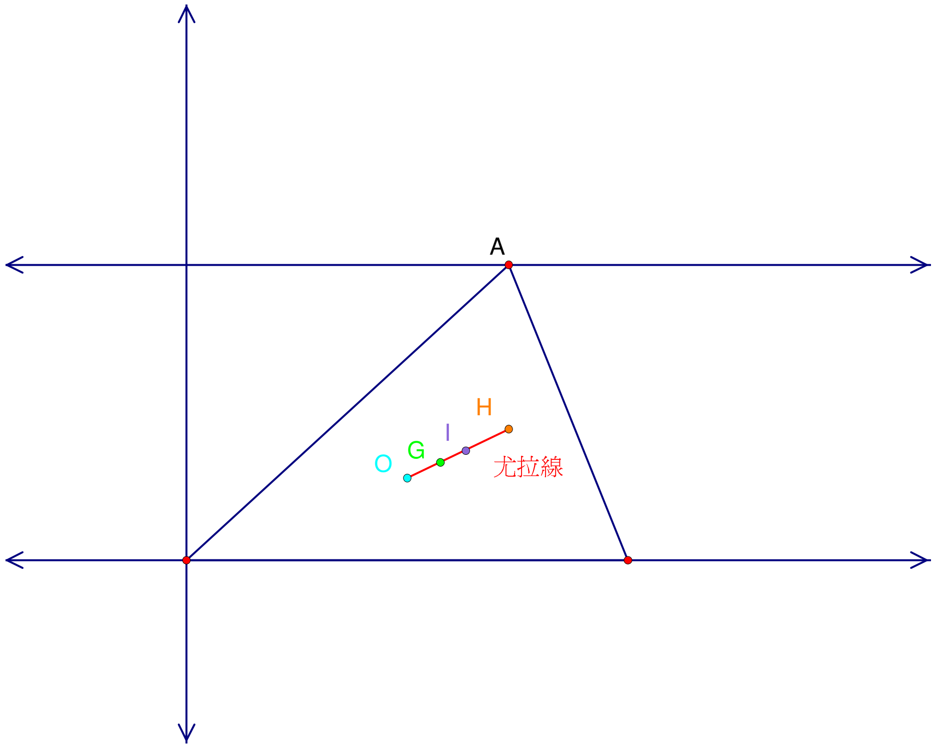
$$x^2+(y-1)^2=2+2\sqrt{1-a^2}$$

統整

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2=2-2\sqrt{1-a^2}\left(|x|<\text{a、y}>-\sqrt{1-a^2}\right) \\ x^2+(y-1)^2=2+2\sqrt{1-a^2}\left(|x|<\text{a、y}<-\sqrt{1-a^2}\right) \end{cases}$$

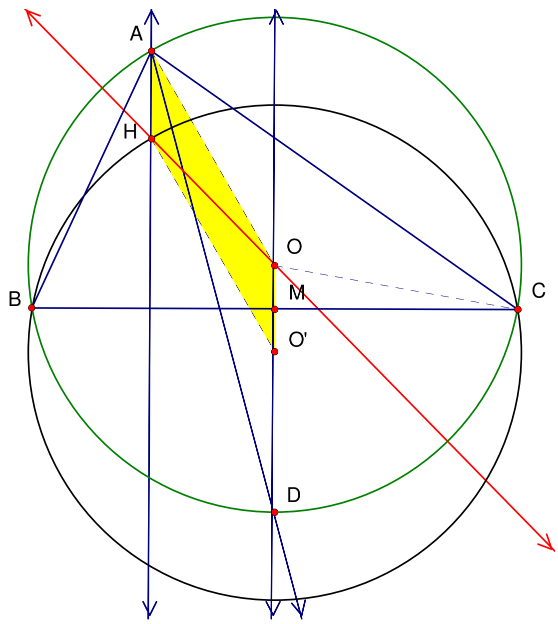
六、四心共線：

當我們水平移動頂點 A 時，發現 O、G、H 恆在同一條線上，這條線就是尤拉線，但 I 只有在特殊時候才會在尤拉線上，我們若把 A 點從最左邊移動到最右邊，I 點會因爲底邊與高的比值不同而有 1、3、5 次在尤拉線上，不過 3 次的比例最少，於是我們開始討論：
底邊比高的比值是多少時，A 點從最左邊移動到最右邊，I 點會有幾次在尤拉線上？



首先我們探討哪些三角形會四心共線，結果只有等腰三角形符合此性質。說明如下：

根據垂心繞圓運動的結論，垂心的軌跡必在三角形外接圓以$\overline{BC}$爲對稱軸的圓周上(即圓O'上)，由於圓O與圓O'全等，所以$\overline{OO'}=\overline{AH}$，又$\overline{OO'}//\overline{AH}$，所以AHO'O爲平行四邊形，其中$\overline{OH}$爲尤拉線。



$\overline{AD}$爲∠BAC的角平分線，也是∠HAO的角平分線。

說明:

$\because \angle OAC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOC)$

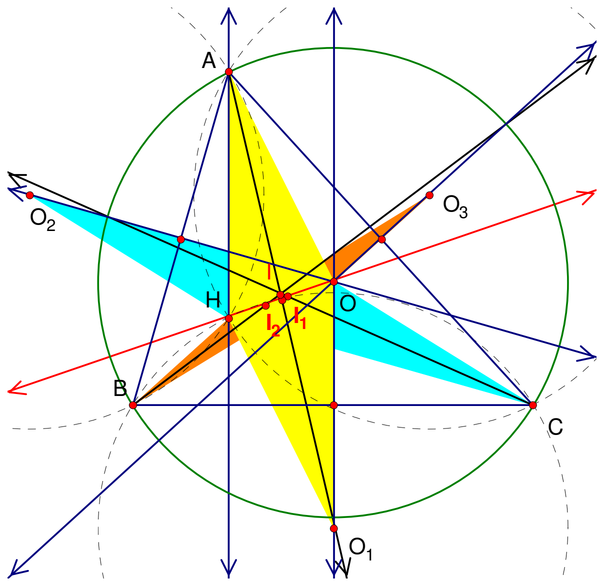
$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle AOC=90^\circ-\angle ABC=\angle BAH$

又$\because \angle HAD=\angle BAD-\angle BAH=\angle CAD-\angle OAC$

$=\angle OAD$

所以$\overline{AD}$爲∠HAO的角平分線。

由上可知，AHO_1O、BHO_3O、CHO_2O爲平行四邊形，∠ACB的角平分線交$\overline{HO}$於I_1，∠ABC的角平分線交$\overline{HO}$於I_2，$\overline{OB}=\overline{OC}$(皆是外接圓的半徑)，若$\Delta ABC$不爲等腰三角形，則H點必不在$\overline{BC}$的中垂線上，



$\overline{BH}\neq\overline{HC}$，

又根據內分比性質，得：

$\overline{BH}:\overline{BO}=\overline{HI_2}:\overline{I_2O}$

$\overline{CH}:\overline{CO}=\overline{HI_1}:\overline{I_1O}$

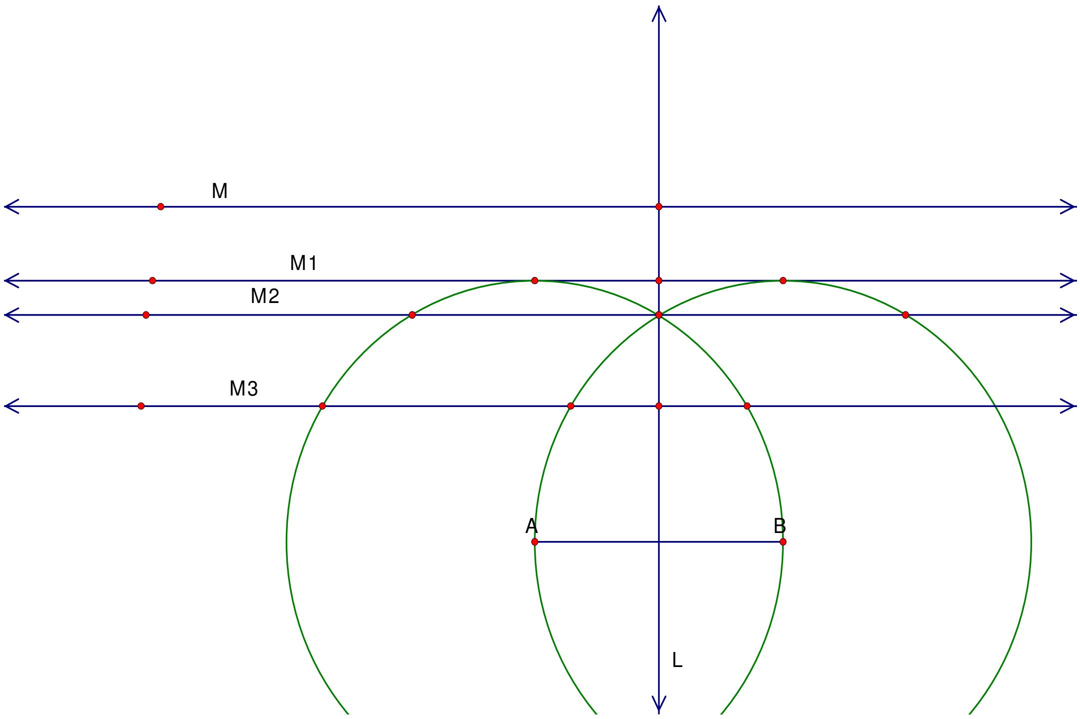
因爲$\overline{BH}:\overline{BO}\neq\overline{CH}:\overline{CO}$，

所以$\overline{HI_2}:\overline{I_2O}\neq\overline{HI_1}:\overline{I_1O}$

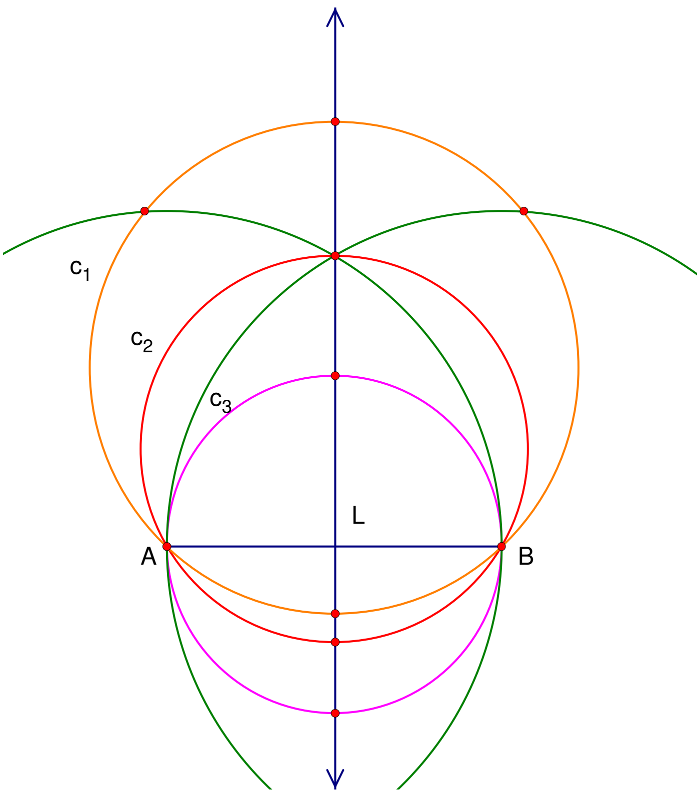
兩條角平分線交尤拉線於兩點，代表內心必不在尤拉線上。

由上可知，只有等腰三角形才會四心共線。

所以內心在等腰三角形的時候，會和尤拉線構成四心共線。我們做一段$\overline{AB}$，然後以A爲圓心，$\overline{AB}$爲半徑作圓，以B爲圓心，$\overline{AB}$爲半徑作圓，並在$\overline{AB}$上作中垂線。頂點水平移動的線M，交這兩圓與$\overline{AB}$的中垂線有幾個點，I點就會有幾次四心共線，因此我們由下圖發現，M_1以上(不包含M_1)都只交於一點，M_1是交於三個點，M_1以下(不包含M_1)除了M_2是交於三個點，其他都是交於五個點。

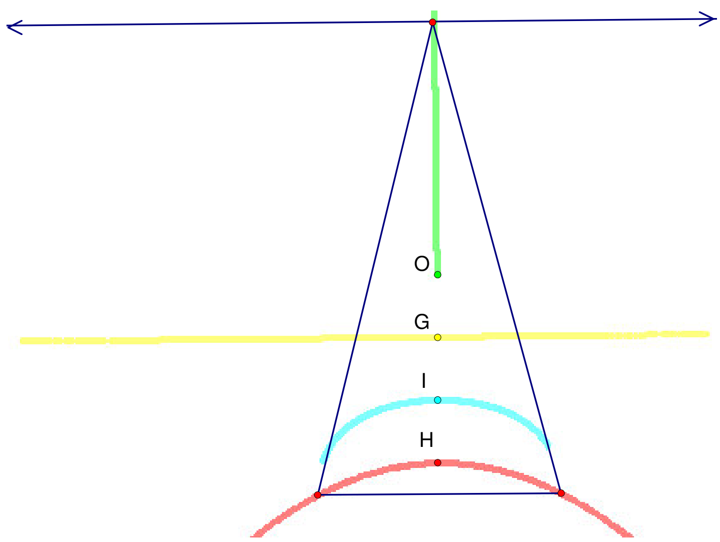


我們做一段$\overline{AB}$ ，然後以 A 爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑作圓，B 爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑作圓，並在$\overline{AB}$上作中垂線 L。頂點繞圓移動的線 c，交這兩圓與$\overline{AB}$的中垂線有幾個點，I 點就會有幾次四心共線，因此我們由下圖發現，只有半徑等於$\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$或$\frac{1}{2}\overline{AB}$ (如 C_2 和 C_3)交於兩點，半徑大於 C_1，其他都是交於四個點，因此，我們得到一個結論.......



結論：
當底邊和 x 軸重合時，頂點在水平方向移動，從最左邊到最右邊，若設三角形底邊爲 a，高度爲 h，則：
（1）h>a 時，會有 1 次四心共線
（2）h＝a 或 h=$\frac{\sqrt{3}}{2}$a 時，會有 3 次四心共線
（3）h<a(但 h≠$\frac{\sqrt{3}}{2}$a)時，會有 5 次四心共線
當底邊和 x 軸重合時，頂點在繞圓移動一圈，若設三角形底邊爲 a，則：
(1) 半徑等於$\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$或$\frac{1}{2}\overline{AB}$時，會有 2 次四心共線
(2) 其他都是 4 次四心共線

七、偶然的發現

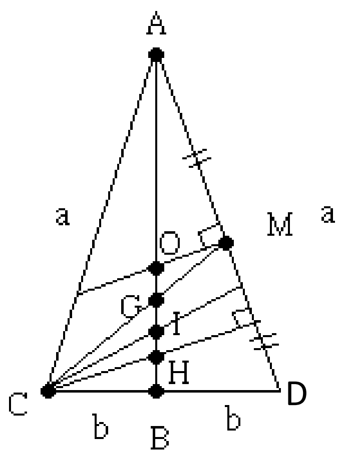


當我們把水平線移到某個高度，讓上面的頂點水平移動時，發現這四條線的間隔差不多，中間好像等距(不等於零)，然後我們又把上面的頂點移到底邊的中垂線上，發現 O、G、I、H 會以等距排列(如右圖)，我們有嘗試其他種類的三角形，可是都沒有這種情況，所以以我們判斷，只有在某些特殊三角形時，才會發生這種四心等距，於是我們想到：等腰三角形當四心等距(不等於零)時，底角會是幾度？討論如下：

設$\overline{AC}=\overline{AD}=a$ 、 $\overline{BC}=\overline{BD}=b$ ，並設$\overline{AB}=\sqrt{a^2-b^2}=c$

1.求$\overline{OB}$

$$\overline{OA}^2=\overline{OD}^2=\overline{BD}^2+\overline{OB}^2$$
$$\Rightarrow (c-\overline{OB})^2=b^2+\overline{OB}^2$$
$$\Rightarrow c^2-2c\overline{OB}+\overline{OB}^2=b^2+\overline{OB}^2$$
$$\Rightarrow c^2-b^2=2c\overline{OB}$$
$$\Rightarrow \overline{OB}=\frac{c^2-b^2}{2c}$$



2.求$\overline{GB}$

$$\because \overline{AG}:\overline{BG}=2:1$$
$$\therefore \overline{GB}=\frac{c}{3}$$

3.求 $\overline{IB}$

$\because \overline{AI}:\overline{BI}=a:b$

$\therefore \overline{IB}=c\times\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{bc}{a+b}$

4.求 $\overline{HB}$

$\because \angle HCB=90^\circ-\angle D=\angle BAD$ 又$\angle D=\angle D$

$\therefore \Delta HCB\approx\Delta DAB(AA)$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{HB}}{b}=\dfrac{b}{c}\Rightarrow \overline{HB}=\dfrac{b^2}{c}$

5.因爲四心等距

所以$\overline{OG}=\overline{GI}=\overline{IH}=\dfrac{c^2-b^2}{2c}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{c}{3}-\dfrac{bc}{a+b}=\dfrac{bc}{a+b}-\dfrac{b^2}{c}$

$$\begin{cases}\dfrac{c^2-b^2}{2c}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{c}{3}-\dfrac{bc}{a+b}\text{.......(1)}\\ \dfrac{c}{3}-\dfrac{bc}{a+b}=\dfrac{bc}{a+b}-\dfrac{b^2}{c}\text{.......(2)}\end{cases}$$

由$(1):\dfrac{c^2-b^2}{2c}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{c}{3}-\dfrac{bc}{a+b}$

$\Rightarrow \dfrac{c^2-b^2}{2c}+\dfrac{bc}{a+b}=\dfrac{2c}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{c^3-b^2c}{2c^2}+\dfrac{bc}{a+b}=\dfrac{2c}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{c^3-b^2c}{2(a^2-b^2)}+\dfrac{bc}{a+b}=\dfrac{2c}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{c^3-b^2c+2bc(a-b)}{2(a^2-b^2)}=\dfrac{2c}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{c^2-b^2+2b(a-b)}{2(a^2-b^2)}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2-b^2-b^2+2ab-2b^2}{2(a^2-b^2)}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2+2ab-4b^2}{2(a^2-b^2)}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow 3a^2+6ab-12b^2=4a^2-4b^2$

$\Rightarrow a^2-6ab+8b^2=0$

$\Rightarrow (a-2b)(a-4b)=0$

$\Rightarrow a=2b$ 或 $4b$

由$(2):\dfrac{c}{3}-\dfrac{bc}{a+b}=\dfrac{bc}{a+b}-\dfrac{b^2}{c}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{3}=2\times\dfrac{bc}{a+b}-\dfrac{b^2}{c}\Rightarrow \dfrac{c}{3}=2\times\dfrac{bc}{a+b}-\dfrac{b^2c}{c^2}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{3}=2\times\dfrac{bc}{a+b}-\dfrac{b^2c}{a^2-b^2}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{3}=\dfrac{2bc(a-b)-b^2c}{a^2-b^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}=\dfrac{2ab-3b^2}{a^2-b^2}$

$\Rightarrow a^2-b^2=6ab-9b^2$

$\Rightarrow a^2-6ab+8b^2=0$

$\Rightarrow (a-2b)(a-4b)=0$

$\Rightarrow a=2b$ 或 $4b$

從(1)、(2)兩個方程式的解皆爲 a=2b 或 a=4b，所以我們分別探討。

① 若 a=2b

則此Δ爲正三角形

$\overline{OG}=\overline{GI}=\overline{IH}=0$(不符)

② 若 a=4b

則 $c=\sqrt{(4b)^2-b^2}=\sqrt{15b^2}$

$\overline{OB}=\dfrac{15b^2-b^2}{2\sqrt{15b^2}}=\dfrac{14b^2\sqrt{15b^2}}{2\times15b^2}=\dfrac{7\sqrt{15b^2}}{15}=\dfrac{7c}{15}$

$\overline{GB}=\dfrac{\sqrt{15b^2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{15b^2}}{15}=\dfrac{5c}{15}$

$\overline{IB}=\dfrac{b\sqrt{15b^2}}{4b+b}=\dfrac{\sqrt{15b^2}}{5}=\dfrac{3\sqrt{15b^2}}{15}=\dfrac{3c}{15}$

$\overline{HB}=\dfrac{b^2}{\sqrt{15b^2}}=\dfrac{b^2\sqrt{15b^2}}{15b^2}=\dfrac{\sqrt{15b^2}}{15}=\dfrac{c}{15}$

$\therefore \overline{OG}=\overline{GI}=\overline{IH}=\dfrac{2c}{15}$(符合)

此三角形的三邊比爲 4:4:2$\therefore COS(\angle ACB)=\dfrac{1}{4}$

且$\overline{AO}:\overline{OG}:\overline{GI}:\overline{IH}:\overline{HB}=\dfrac{8c}{15}:\dfrac{2c}{15}:\dfrac{2c}{15}:\dfrac{2c}{15}:\dfrac{c}{15}=8:2:2:2:1$

結論:

等腰三角形若底角的 cos 值爲$\dfrac{1}{4}$時，四心(由上而下 O、G、I、H)會等距排列，

且$\overline{AO}:\overline{OG}:\overline{GI}:\overline{IH}:\overline{HB}=8:2:2:2:1$

陸、 結論

1. 當三角形底邊固定，且底邊和 x 軸重合時，頂點 A(t,h)在水平方向移動，各心的方程式與最大最小值

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">方程式</td><td colspan="2">最大值</td><td colspan="2">最小值</td></tr>
<tr><td>當…時</td><td>=…</td><td>當…時</td><td>=…</td></tr>
<tr><td>垂心</td><td>y=$-\frac{1}{h}(x-\frac{c}{2})^2+\frac{c^2}{4h}$</td><td>x=$\frac{1}{2}c$</td><td>y=$\frac{c^2}{4h}$</td><td colspan="2">無</td></tr>
<tr><td>外心</td><td>x=$\frac{c}{2}$</td><td colspan="2">無</td><td>t=$\frac{1}{2}c$</td><td>y=$\frac{4h^2-c^2}{8h}$</td></tr>
<tr><td>重心</td><td>y=$\frac{h}{3}$</td><td colspan="4">無</td></tr>
<tr><td>內心</td><td>如 L</td><td>X=$\frac{1}{2}$</td><td>$y=\frac{-1+\sqrt{1+4h^2}}{4h}$</td><td colspan="2">無</td></tr>
</table>

L： $hy^2-2x^2y+2xy+hx^2-xh=0$ 且 0＜x＜1

2. 當三角形底邊固定，且底邊和 x 軸重合時，頂點在鉛直方向移動，各心的方程式與最大最小值

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">方程式</td><td colspan="2">最大值</td><td colspan="2">最小值</td></tr>
<tr><td>當…時</td><td>=…</td><td>當…時</td><td>=…</td></tr>
<tr><td colspan="2">垂心</td><td>x=t</td><td colspan="4">無</td></tr>
<tr><td rowspan="2">外心</td><td>t＜c</td><td rowspan="2">x=$\frac{c}{2}$</td><td colspan="2">無</td><td colspan="2">無</td></tr>
<tr><td>t≧c
(其中 h>0)</td><td colspan="2">無</td><td>h=$\sqrt{t^2-ct}$</td><td>y=$\sqrt{t^2-ct}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">重心</td><td>$x=\frac{c+t}{3}$</td><td colspan="4">無</td></tr>
<tr><td rowspan="4">內心</td><td>0<t＜$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="4">如 M</td><td colspan="2">無</td><td>y=0</td><td>x=t</td></tr>
<tr><td>t=$\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">無</td><td colspan="2">無</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$＜t＜1</td><td>y=0</td><td>x=t</td><td colspan="2" rowspan="2">無</td></tr>
<tr><td>t≧1</td><td>y=0</td><td>x=1</td></tr>
</table>

M： $x^3-xy^2-x^2+y^2+tx-tx^2-ty^2=0$ 且 $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$

3. 當三角形一頂點沿半徑爲一的圓繞(是此三角形的外接圓)，則各心的方程式爲：

垂心： $x^2+\left(y+2\sqrt{1-a^2}\right)^2=1$

外心：圓心(0,0)

重心：$x^2+\left(y+\frac{2}{3}\sqrt{1-a^2}\right)^2=\frac{1}{9}$

內心：$\begin{cases} x^2+(y+1)^2=2-2\sqrt{1-a^2}\ (\ |x|<\text{a}、\text{y}>-\sqrt{1-a^2}\ ) \\ x^2+(y-1)^2=2+2\sqrt{1-a^2}\ (\ |x|<\text{a}、\text{y}<-\sqrt{1-a^2}\ ) \end{cases}$

4. (1)當底邊和 x 軸重合時，頂點在水平方向移動，從最左邊到最右邊，若設三角形底邊爲 a，高度爲 h，則：

① h>a 時，會有 1 次四心共線

② h＝a 或 h=$\frac{\sqrt{3}}{2}$a 時，會有 3 次四心共線

③ h<a(但 h≠$\frac{\sqrt{3}}{2}$a)時，會有 5 次四心共線

(2)當底邊和 x 軸重合時，頂點在繞圓移動一圈，若設三角形底邊爲 a，則：

① 半徑等於$\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$或$\frac{1}{2}\overline{AB}$時，會有 2 次四心共線

② 其他都是 4 次四心共線

5. 等腰三角形若底角的 cos 值爲$\frac{1}{4}$，四心(由上而下 O、G、I、H)會等距排列，且 $\overline{AO}:\overline{OG}:\overline{GI}:\overline{IH}:\overline{HB}=8:2:2:2:1$

柒、 未來展望

1. 用平移、旋轉、縮放的方式找出更廣義的公式。
2. 或許可以設定一些條件，讓三角形在橢圓形上移動。
3. 試著讓三角形在其他的外接多邊形移動，也許會有許多不同的發現。
4. 找出垂直移動、平行移動和繞圓移動的共通點。
5. 也用幾何推演的方式找到垂直移動、平行移動的公式。
6. 可以找找看這些移動軌跡和天文科學軌跡的相關性。

捌、 參考資料

1. 證明尤拉線的方法-財團法人台北市九章數學教育基金會。取自：
http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=3047&forum=7
2. 平面座標上的內心公式-Yahoo！奇摩知識+。取自：
http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=140511051
3. 任意四邊形內接正方形-台北市第 41 屆中小學科學展覽優等。

玖、　心得感想

非常感謝老師給我們這個機會能夠一起討論數學、增進知識，從一開始決定題目，到今天的大功告成，雖然十分辛苦，但是也甘之如飴；雖然時間緊湊，但是也成長了不少，在研究過程中，固然發現了許多可以延伸之處，但是礙於研究的時間，無法再繼續討論，像是在橢圓上移動、費瑪點.........等，都很值得我們研究。作科展，讓我們學習到的，不只是數學方面的知識，還有小隊如何分工的智慧，有瓶頸，一起解決；有困難，一起突破，不管結果如何，都要爲支持、協助我們的老師獻上無比的感激。

【評語】030412

1. 有系統、有條理地探討三角形垂心、外心、重心與內心之軌跡變化及相關公式，惟僅以〝平行〞與〝鉛直〞移動來討論軌跡的變化有點可惜。可嘗試增加〝斜線〞移動此一面向的討論，將可獲得更豐富的研究結果。

2. 以幾何的方式尋找三角形四心繞圓的軌跡變化、及相關公式，並延伸四心共線的探討等，內容豐富有趣，值得嘉許。