中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030411

巢狀切割對內部子圖的探討

學校名稱：高雄市立英明國民中學

作者：	指導老師：
國二 施承佑	洪東瑩 蘇俊吉

關鍵詞：多邊形、任意切割、子母面積比

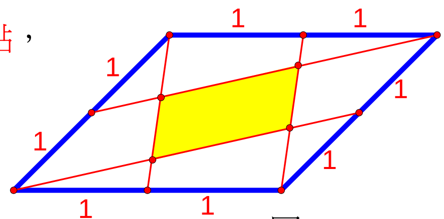
巢狀切割對內部子圖的探討

摘要

本研究是從數學講義上的一個考題出發，恰巧擴展了前年全國科展最佳教材獎「正多邊形母子面積比」，他們只研究正多邊形且每邊切割的比例相同，我們採取截然不同的研究方法，而且更進一步探索任意多邊形每邊切割的比例任意不同時，其子母面積比值的發展。而隨著邊數的增加，所得圖形儼然一個鳥巢狀，故名「巢狀切割」。我們從三角形做起，經歷四、六、八邊形，一直到五邊形、七邊形，並藉助 GSP 繪圖軟體幫忙檢驗，最後得到了通用於任意邊數且任意比例切割的子母面積比值公式，並設計 Microsoft Excel 運算表，只要輸入邊數與比例，可立即算出子母面積的比值！

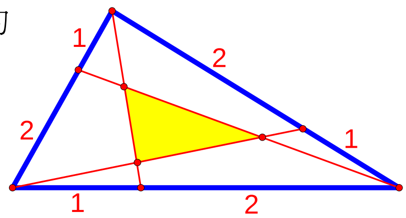
壹、 研究動機

一、在數學講義上，有一個題目：「平行四邊形四邊各取中點，各與一頂點連接(如圖一)，求內部塗色平行四邊形面積占原平行四邊形面積的幾分之幾？」(答：$\frac{1}{5}$)



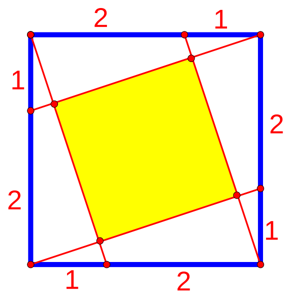
圖一

二、另有一題：「三角形三邊各取 1：2 的分點，各與其所對的頂點連接(如圖二)，求內部塗色三角形面積占原三角形面積的幾分之幾？」(答：$\frac{1}{7}$)



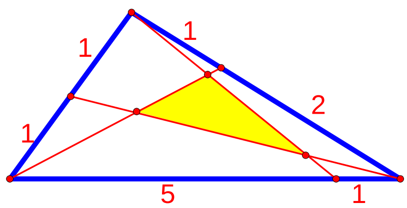
圖二

三、在國立台灣科學教育館的網站上，看到了前年全國科展得獎作品「正多邊形母子面積比」，其研究內容爲「正多邊形，各邊取相同比例的分點，各與一頂點連接(如圖三)，求內部正多邊形面積占原正多邊形面積的幾分之幾？」

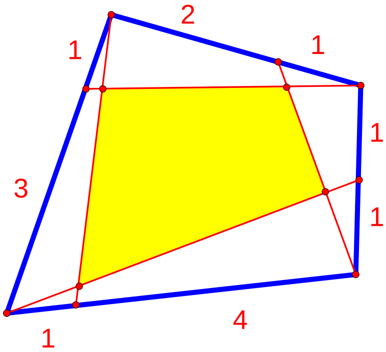


圖三

四、我們對這類題目深感興趣，不過正多邊形各邊均取相同的比例過於狹隘，我們想探索：「任意多邊形，各邊取不同比例，各與一頂點連接(如圖四、圖五)，求內部塗色多邊形面積占原多邊形面積的幾分之幾？」，是否有規則公式可以依循？

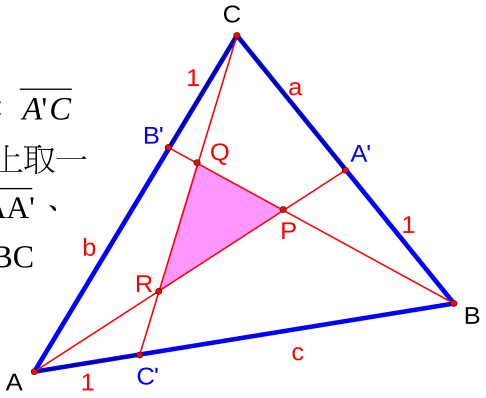


圖四



圖五

貳、研究目的



圖六

一、三角形：如圖六，△ABC，在 $\overline{BC}$ 上取一點 A'，使 $\overline{BA'}:\overline{A'C}=1:a$；在 $\overline{AC}$ 取一點 B'，使 $\overline{CB'}:\overline{B'A}=1:b$；在 $\overline{AB}$ 上取一點 C'，使 $\overline{AC'}:\overline{C'B}=1:c$；a、b、c 爲任意正實數，$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 相交於三點 P、Q、R，則△PQR 面積：△ABC 面積的比值爲何？

二、四邊形：如圖七，四邊形 ABCD，四邊依序取 $1:a$、$1:b$、$1:c$、$1:d$ 的分點，則四邊形 PQRS 面積：四邊形 ABCD 面積的比值是否也有公式？

三、六邊形：如圖八，擴展到六邊形，子母面積的比值是否也有公式？

(由於六、八邊形較五邊形易表達，也較簡便，因此安排於五邊形之前)

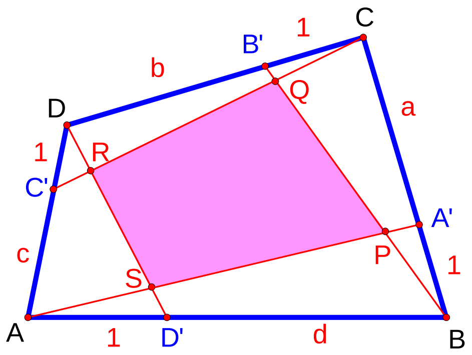
四、八邊形：八邊形，子母面積的比值是否也有公式？

五、五邊形：如圖九，五邊形，子母面積的比值是否也有公式？

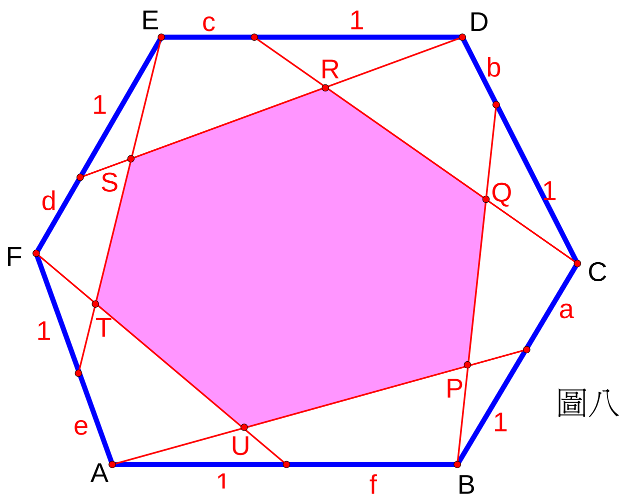
六、七邊形：七邊形，子母面積的比值是否也有公式？

七、n 邊形：是否存在 n 邊形子母面積比值的公式？

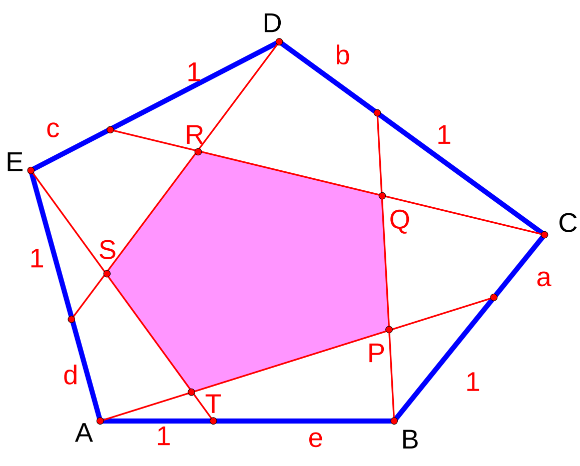
八、以上連接方式我們定義爲「頂點到分點爲逆時針方向連接」，若存在著公式，則當分點不變，「順時針方向連接」時(如圖十)，子母面積比值的公式又如何？



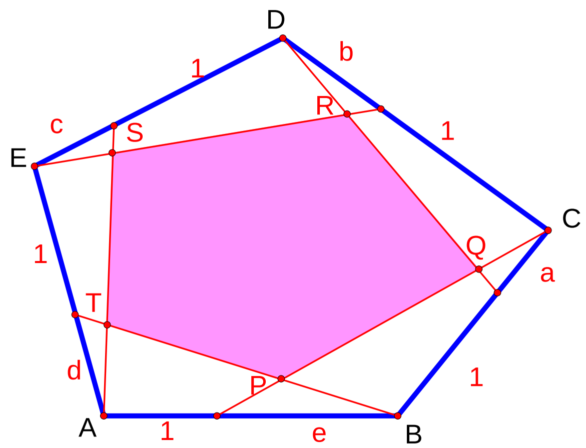
圖七



圖八



圖九



圖十

叁、研究設備及器材

一、電腦與網路設備
二、電腦繪圖軟體 GSP 與 Microsoft Excel

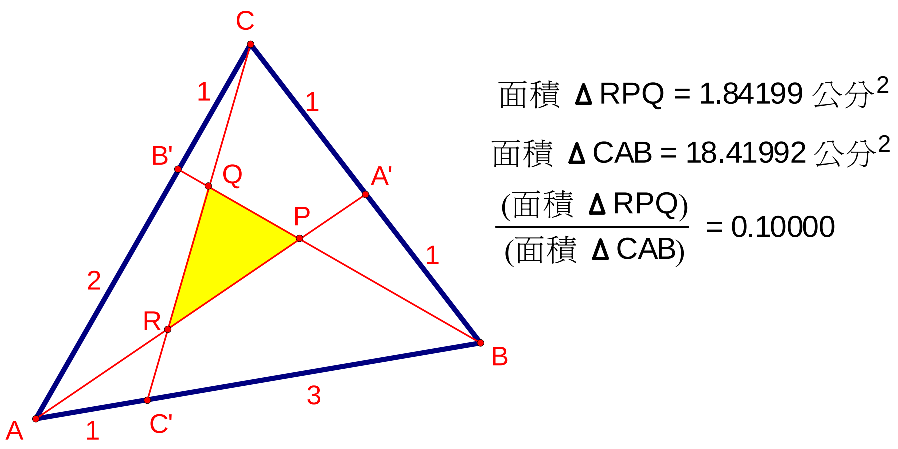
肆、研究過程與方法

一、三角形：

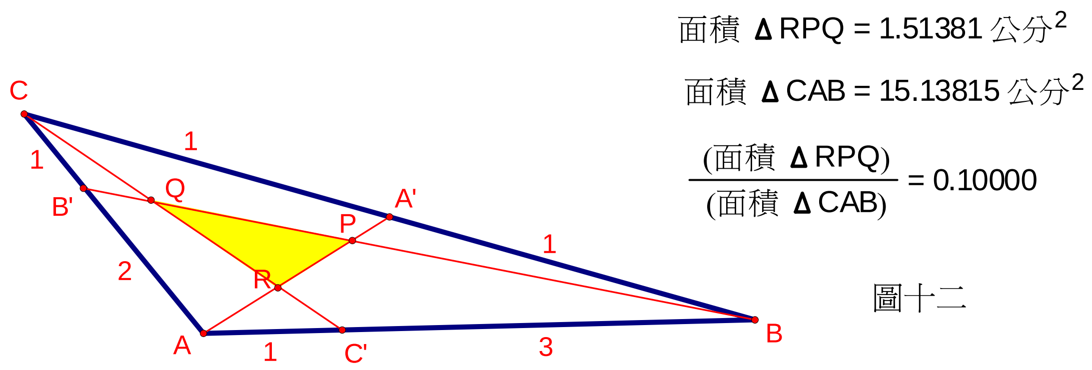
當三邊依序取 1:1、1:2、1:3，不同的三角形，子母面積的比值會不同嗎？利用 GSP 作圖並度量面積，將一頂點隨意拖曳形成許多不同的三角形，發現子母面積比值相等！

所有三角形在依序取 1:1、1:2、1:3 的分點時，所得到的子母面積比值均爲 $\frac{1}{10}$。以圖十一與圖十二顯示其中的兩個。

＜註＞：GSP 軟體的「度量」功能，能得到準確值，當數值爲除不盡的分數或無理數時，它是以近似值來呈現，最多可取到小數第五位，但內建的值仍爲實際值(分數或無理數)。



圖十一



圖十二

(一) 正面求值，在坐標平面求公式

將任意△ABC 放在坐標平面上，令 $\overline{AB}=1$ 單位，A(0,0)，B(1,0)，C(s,t)，可代表任意三角形，

＜註＞：若設 B(m,0)，計算較複雜，但仍得下列相同公式。

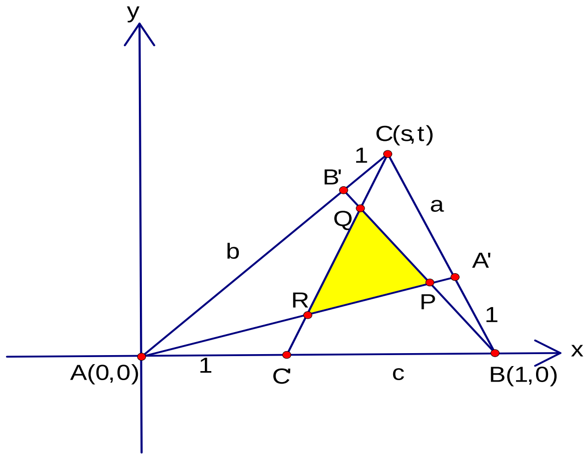
在$\overline{BC}$上取一點A'使$\overline{BA'}:\overline{A'C}=1:a$，

在$\overline{AC}$上取一點B'使$\overline{CB'}:\overline{B'A}=1:b$，

在$\overline{AB}$上取一點C'使$\overline{AC'}:\overline{C'B}=1:c$，

a、b、c 為任意正實數，

※因篇幅限制在三十頁內，故本說明書將部份計算過程簡化，詳細過程請參考展覽會場中的附本。



圖十三

1.先求 A'、B'、C'坐標。

$$A'\left(\frac{s+a}{1+a},\frac{t}{1+a}\right)\qquad B'\left(\frac{bs}{1+b},\frac{bt}{1+b}\right)\qquad C'\left(\frac{1}{1+c},0\right)$$

2.再求 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$的直線方程式

$$\overline{AA'}: y=\frac{t}{s+a}x\qquad \overline{BB'}: y=\frac{bt}{bs-b-1}(x-1)$$

$$\overline{CC'}: y=\frac{(c+1)t}{sc+s-1}x-\frac{t}{sc+s-1}$$

3.解聯立方程式，求 P、Q、R 坐標

$$P\left(\frac{b(s+a)}{ab+b+1},\frac{bt}{ab+b+1}\right)\qquad Q\left(\frac{bsc+1}{bc+c+1},\frac{bct}{bc+c+1}\right)$$

$$R\left(\frac{s+a}{ca+a+1},\frac{t}{ca+a+1}\right)$$

4.求△PQR 面積

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{b(s+a)}{ab+b+1} & \frac{bsc+1}{bc+c+1} & \frac{s+a}{ca+a+1} & \frac{b(s+a)}{ab+b+1}\\ \frac{bt}{ab+b+1} & \frac{bct}{bc+c+1} & \frac{t}{ca+a+1} & \frac{bt}{ab+b+1}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{t(abc-1)^2}{2(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}$$

5.求$\dfrac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$

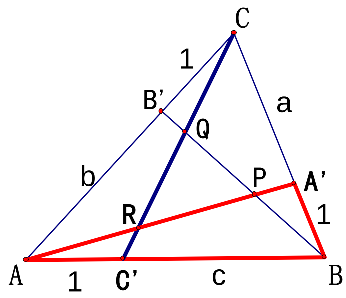
$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{t(abc-1)^2}{2(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}\div\frac{t}{2}$$

$$=\boxed{\frac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}}$$

公式有對稱性，但不易推廣。

(二) 側面求值，以幾何觀念求公式

1.依孟式定理，求△ABP、△QBC、△ARC



圖十四

$$\because \overline{CC'}\text{交}\Delta ABA'\text{三邊(延長線)於}R,C,C',$$

$$\therefore \frac{\overline{AR}}{\overline{RA'}}\cdot\frac{\overline{A'C}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}=1$$

$$\therefore \frac{\overline{AR}}{\overline{RA'}}\cdot\frac{a}{a+1}\cdot\frac{c}{1}=1\Rightarrow\frac{\overline{AR}}{\overline{RA'}}=\frac{a+1}{ac}$$

$$\therefore \frac{\overline{AR}}{\overline{AA'}}=\frac{a+1}{ac+a+1}$$

$$\therefore \triangle ARC=\Delta ABC\cdot\frac{a}{a+1}\cdot\frac{a+1}{ac+a+1}$$

$$=\Delta ABC\cdot\frac{a}{ac+a+1}$$

2.$\therefore$ 同理，$\triangle ABP=\Delta ABC\cdot\dfrac{b}{ab+b+1}$

$$\triangle QBC=\Delta ABC\cdot\frac{c}{bc+c+1}$$

$$\therefore \triangle PQR=\Delta ABC\cdot\left(1-\frac{a}{ac+a+1}-\frac{b}{ab+b+1}-\frac{c}{bc+c+1}\right)$$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=1-\frac{a}{ac+a+1}-\frac{b}{ab+b+1}-\frac{c}{bc+c+1}=1-\sum{}'\frac{b}{ab+b+1}$$

較容易擴展到 **n** 邊形，以後將 $\boxed{\sum{}' \text{ 指 } a\to b\to c\to\ldots\to a}$

(三) 以上兩式經整理後是相等的。

$$\frac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}=1-\Sigma'\frac{b}{ab+b+1}$$

(四) 驗證圖十一與圖十二：a＝1，b＝2，c＝3，

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}$$

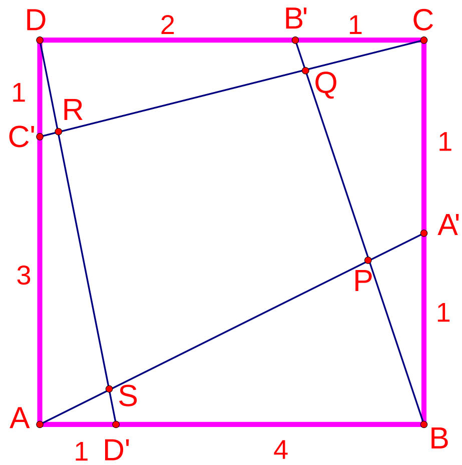
$$=\frac{(1\times2\times3-1)^2}{(1\times2+2+1)(2\times3+3+1)(3\times1+1+1)}=\frac{1}{10}$$

二、四邊形：

(一) 當$\boxed{\text{四邊依序取 1:1、1:2、1:3、1:4}}$，子母面積的比值如何？

試利用 GSP 繪製正方形並度量面積：

1.正方形



面積 RQPS = 15.18881 公分^2

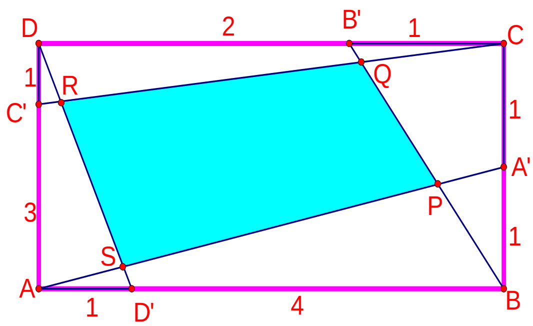
面積 DABC = 36.00000 公分^2

$$\frac{(\text{面積 RQPS})}{(\text{面積 DABC})} = 0.42191$$

圖十五

由相似形觀念可知：邊長不同的正方形，子母面積比值相等。

2.長方形：



圖十六

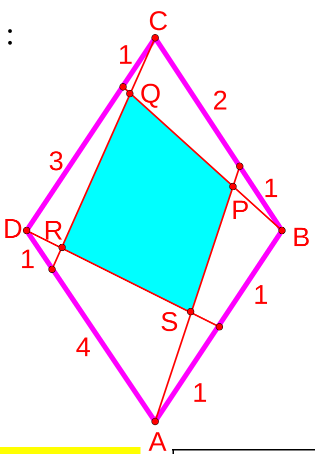
面積 SPQR = 13.27627 公分^2

面積 DABC = 31.46695 公分^2

$$\frac{(\text{面積 SPQR})}{(\text{面積 DABC})} = 0.42191$$

$\overline{AB}:\overline{AD}$的比值與正方形不同，但子母面積比值與正方形相等。

3. 菱形：



面積 RQPS = 5.06 公分^2

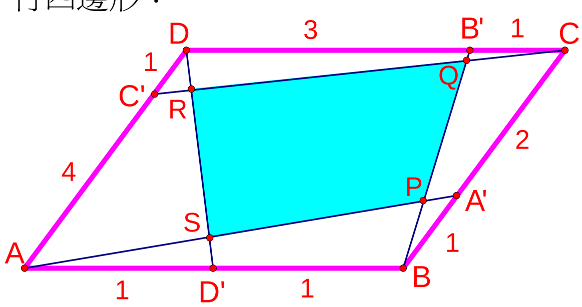
面積 CBAD = 12.00 公分^2

$$\frac{(\text{面積 RQPS})}{(\text{面積 CBAD})} = 0.42191$$

圖十七

內角與正方形不同，但子母面積比值與正方形相等。

4.平行四邊形：



面積 SRQP = 8.64022 公分^2

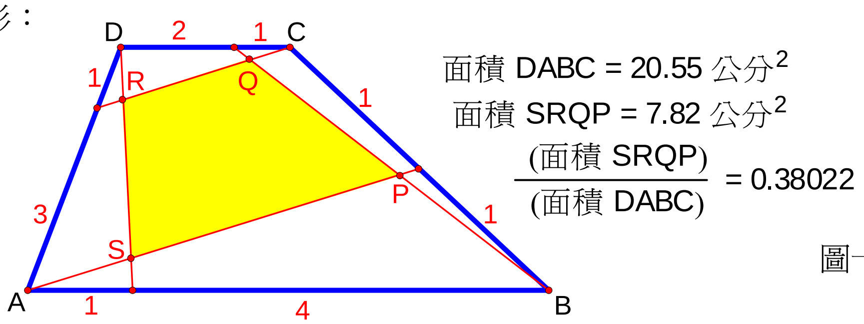
面積 DABC = 20.47875 公分^2

$$\frac{(\text{面積 SRQP})}{(\text{面積 DABC})} = 0.42191$$

圖十八

將一頂點隨意拖曳形成許多內角不同或鄰邊比不同的平行四邊形，發現子母面積比值與正方形相等。

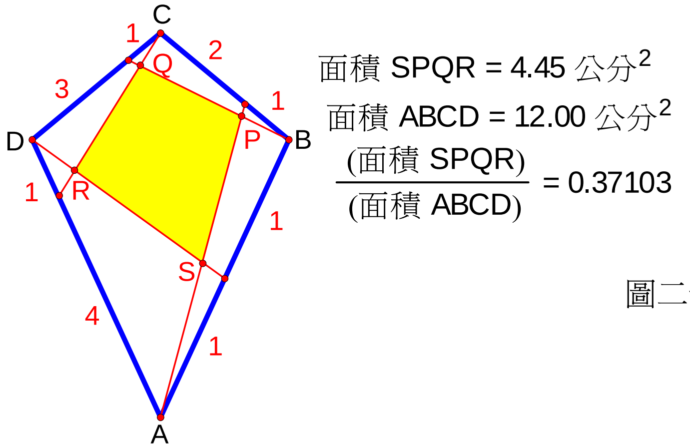
5.梯形：



圖十九

將一頂點設為動畫點造成許多不同梯形，發現子母面積比值不相等。

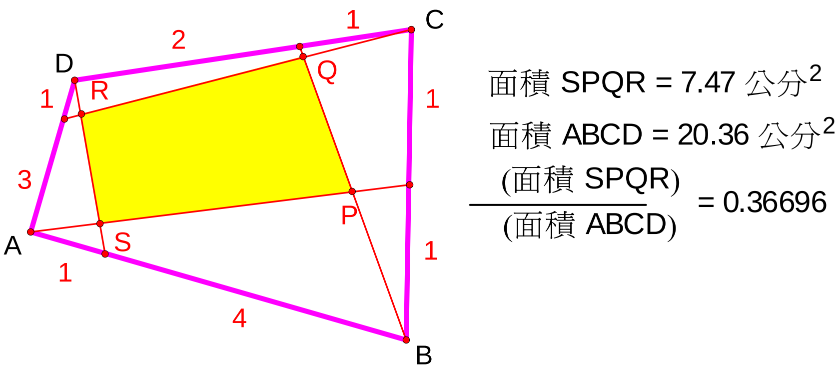
6.鳶形：



圖二十

將一頂點隨意拖曳形成許多不同鳶形，發現子母面積比值不相等。

7.普通四邊形：



圖二十一

將一頂點隨意拖曳形成許多不同四邊形，發現子母面積比值不相等。

8.我們發現只有平行四邊形系列，在 a、b、c、d 的值固定時，子母面積的比值是相同的(存在著公式)，其他四邊形由以上例子得知公式不存在。

(二)利用坐標平面求平行四邊形公式：

將任意平行四邊形 ABCD 放在坐標平面上

令 $\overline{AB}=1$ 單位，A(0,0)，B(1,0)，C(s, t)，則 D(s−1, t)，代表任意四邊形

1.先求 A'、B'、C'、D'坐標

$$A'\left(\frac{s+a}{1+a},\frac{t}{1+a}\right)\quad B'\left(\frac{s-1+bs}{1+b},t\right)\quad C'\left(\frac{sc-c}{1+c},\frac{ct}{1+c}\right)\quad D'\left(\frac{1}{1+d},0\right)$$

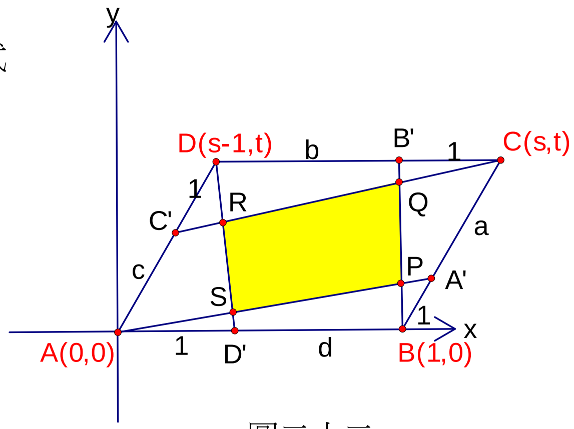
2.再求 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 、 $\overline{DD'}$ 的直線方程式

$\overline{AA'}$ ： $\mathrm{y}=\dfrac{t}{s+a}x$

$\overline{BB'}$ ： $\mathrm{y}=\dfrac{t(b+1)}{bs+s-b-2}(x-1)$

$\overline{CC'}$ ： $\mathrm{y}-\mathrm{t}=\dfrac{t}{s+c}(x-s)$

$\overline{DD'}$ ： $\mathrm{y}=\dfrac{t(1+d)}{sd+s-d-2}x-\dfrac{t}{sd+s-d-2}$



圖二十二

3.再求 P、Q、R、S 坐標

P： $\begin{cases} y=\dfrac{t}{s+a}x \\ y=\dfrac{t(1+b)}{s+bs-b-2}(x-1) \end{cases}$ 　得 P（ $\dfrac{(s+a)(b+1)}{ab+a+b+2}$ ， $\dfrac{t(b+1)}{ab+a+b+2}$ ）

Q： $\begin{cases} y=\dfrac{t(1+b)}{s+bs-b-2}(x-1) \\ y=\dfrac{t(x+c)}{s+c} \end{cases}$ 　得 Q（ $\dfrac{cbs+cs+bs+s-c}{bc+b+c+2}$ ， $\dfrac{t(b+1)(c+1)}{bc+b+c+2}$ ）

R： $\begin{cases} y=\dfrac{t(x+c)}{s+c} \\ y=\dfrac{t[x(d+1)-1]}{sd+s-d-2} \end{cases}$ 　得 R（ $\dfrac{cds+sc-dc+s-c}{dc+d+c+2}$ ， $\dfrac{t(dc+c+1)}{dc+d+c+2}$ ）

S： $\begin{cases} y=\dfrac{tx}{s+a} \\ y=\dfrac{t[x(d+1)-1]}{sd+s-d-2} \end{cases}$ 　得 S（ $\dfrac{a+s}{ad+a+d+2}$ ， $\dfrac{t}{ad+a+d+2}$ ）

4.四邊形 PQRS 面積＝

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{(b+1)(s+a)}{ab+a+b+2} & \dfrac{cbs+cs+bs+s-c}{bc+b+c+2} & \dfrac{cds+sc-dc+s-c}{dc+d+c+2} & \dfrac{s+a}{ad+a+d+2} & \dfrac{(b+1)(s+a)}{ab+a+b+2} \\ \dfrac{t(b+1)}{ab+a+b+2} & \dfrac{t(b+1)(c+1)}{bc+b+c+2} & \dfrac{t(dc+c+1)}{dc+d+c+2} & \dfrac{t}{ad+a+d+2} & \dfrac{t(b+1)}{ab+a+b+2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{t(b+1)(abc+ac+ab+a+c)}{(ab+a+b+2)(bc+b+c+2)}+\frac{tc(bcd+bc+db+b+d)}{(bc+b+c+2)(dc+d+c+2)}-\frac{t(acd+dc+ac+a+c)}{(dc+d+c+2)(ad+a+d+2)}\right|$$

$$\therefore \frac{\text{四邊形PQRS}}{\text{平行四邊形ABCD}}=$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{(b+1)(abc+ac+ab+a+c)}{(ab+a+b+2)(bc+b+c+2)}+\frac{c(bcd+bc+db+b+d)}{(bc+b+c+2)(dc+d+c+2)}-\frac{acd+dc+ac+a+c}{(dc+d+c+2)(ad+a+d+2)}\right|$$

5.驗證圖十八：$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$

$$\frac{\text{四邊形PQRS}}{\text{平行四邊形ABCD}}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(2+1)(6+3+2+1+3)}{(2+1+2+2)(6+2+3+2)}+\frac{3(24+6+8+2+4)}{(6+2+3+2)(12+4+3+2)}-\frac{12+12+3+1+3}{(12+4+3+2)(4+1+4+2)}\right|$$

$$=\frac{181}{429}\fallingdotseq 0.42191$$

這結果經由上例驗證無誤，但過於冗長，且對稱性似乎消失了。

(三)改變策略，尋求更佳的解答

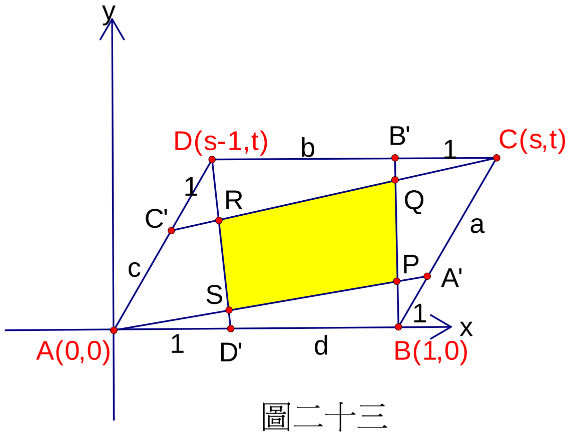
1.只須求 A'、B'坐標

$A'(\frac{s+a}{1+a},\frac{t}{1+a})$ $B'(\frac{s-1+bs}{1+b},t)$

2.再求 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$ 的直線方程式

$\overline{AA'}$： $y=\frac{t}{s+a}x$

$\overline{BB'}$： $y=\frac{t(b+1)}{bs+s-b-2}(x-1)$



圖二十三

3.只須求 P 點的 y 坐標＝△ABP 的高

$$P：\begin{cases} y=\frac{t}{s+a}x \Rightarrow x=\frac{s+a}{t}y \\ y=\frac{t(1+b)}{s+bs-b-2}(x-1)\Rightarrow x=\frac{bs+s-b-2}{t(b+1)}y+1 \end{cases}$$

$$\frac{s+a}{t}y=\frac{bs+s-b-2}{t(b+1)}y+1\ ,\quad \frac{s+a}{t}y-\frac{bs+s-b-2}{t(b+1)}y=1\ ,\quad y=\frac{t(b+1)}{ab+a+b+2}$$

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot y=\frac{t(b+1)}{2(ab+a+b+2)}$$

同理可求得△CDR 面積。

4.求△BCQ 面積：(因為 $\overline{BC}\neq 1$，不能用上述方法類推。)

$$\overline{CC'}：\ y-t=\frac{\frac{ct}{1+c}-t}{\frac{sc-c}{1+c}-s}(x-s)=\frac{t}{s+c}(x-s)$$

$$Q：\begin{cases} y=\frac{t(1+b)}{s+bs-b-2}(x-1) \\ y=\frac{t(x+c)}{s+c} \end{cases}\qquad 得\ Q\left(\frac{cbs+cs+bs+s-c}{bc+b+c+2}\ ,\ \frac{t(b+1)(c+1)}{bc+b+c+2}\right)$$

$$\Delta BCQ=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & s & \dfrac{cbs+cs+bs+s-c}{bc+b+c+2} & 1\\ 0 & t & \dfrac{t(b+1)(c+1)}{bc+b+c+2} & 0\end{vmatrix}=\frac{t(c+1)}{2(bc+b+c+2)}$$

同理可求得△DAS 面積。

5. $\text{四邊形}ABCD\text{面積}=\overline{AB}\cdot t=t$

$$\text{四邊形}PQRS\text{面積}=\text{四邊形}ABCD\text{面積}-\Delta ABP-\Delta BCQ-\Delta CDR-\Delta DAS$$

$$=\mathrm{t}-\frac{t(b+1)}{2(ab+a+b+2)}-\frac{t(c+1)}{2(bc+b+c+2)}-\frac{t(d+1)}{2(cd+c+d+2)}-\frac{t(a+1)}{2(da+d+a+2)}$$

$$=\mathrm{t}\left(1-\frac{1}{2}\sum{}'\frac{b+1}{(a+1)(b+1)+1}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{四邊形PQRS}}{\text{平行四邊形ABCD}}=1-\frac{1}{2}\sum{}'\frac{b+1}{(a+1)(b+1)+1}$$

(四)製作 Excel 表格，作爲快速運算器：

以上結果用 Microsoft Excel 來計算是很方便的，因爲有對稱性，所以製作運算表時，只要用「複製」功能就可很快完成。驗證第 6 頁的圖十八：

a	b	c	d	a
1	2	3	4	1
(b+1)/[(a+1)(b+1)+1]				
3/7	4/13	5/21	2/11	
子母面積比值=	181/429	≒	0.42191	

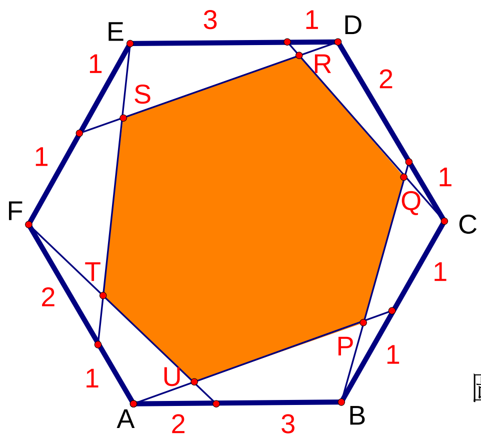
表一

本作品中的 Microsoft Excel 表格，均可在電腦上，於本說明書(Word 檔)中點兩下進入 Excel 狀態，更改各邊比值，就可馬上得到新的子母面積比值。

三、六邊形：

(一) 取一定比例切割，觀察是否有特殊情形的通用公式

1.正六邊形



面積 ABCDEF = 27.52 公分^2

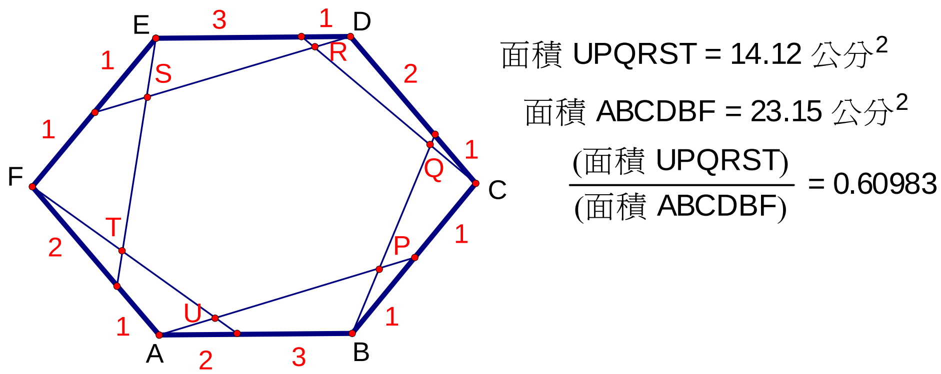
面積 PQRSTU = 16.89 公分^2

$$\frac{(\text{面積 PQRSTU})}{(\text{面積 ABCDEF})}=0.61378$$

圖二十四

由相似形觀念可知：邊長不同的正六邊形，$\boxed{\text{子母面積比值相等}}$。

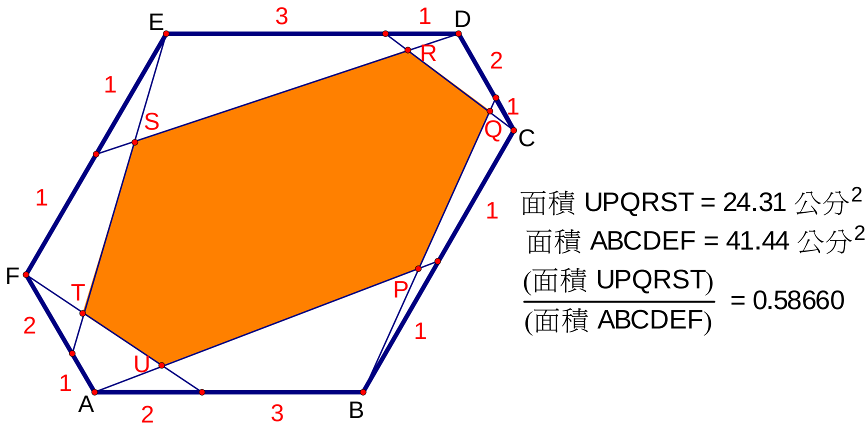
2.等邊六邊形



圖二十五

將一頂點隨意拖曳形成許多不同等邊六邊形，發現子母面積比值不相等。

3.等角六邊形



圖二十六

將一頂點隨意拖曳形成許多不同等角六邊形，發現子母面積比值不相等。

發現六邊形僅有正六邊形才有公式，五邊形檢驗時，亦同。(圖略)

推論五邊以上只有正多邊形才有公式。

(二)利用坐標平面求公式：將正六邊形 ABCDEF 的中心放在原點，

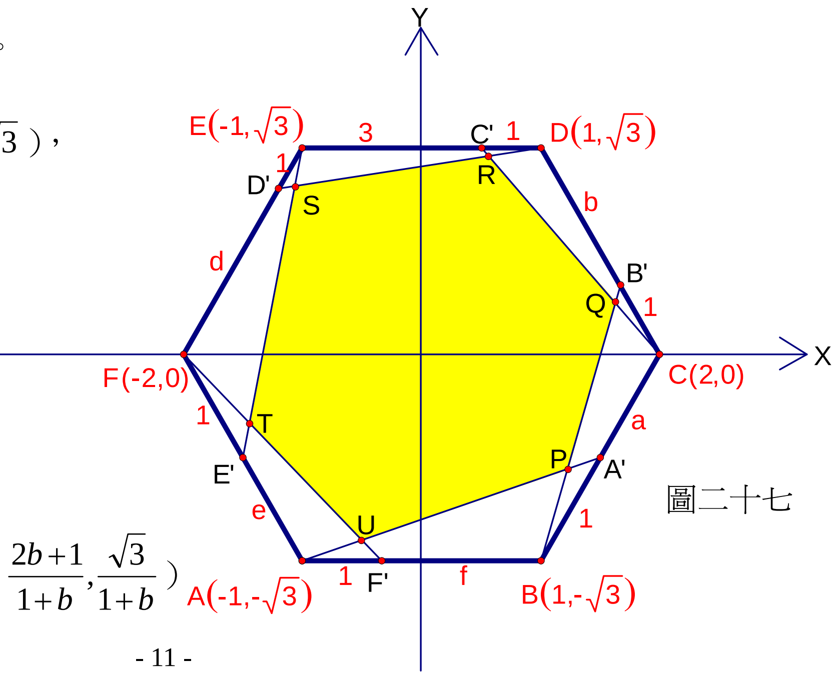
令 $\overline{AB}$ =2 單位，較易計算。

A $(-1,-\sqrt{3})$，B $(1,-\sqrt{3})$，

C $(2,0)$，D $(1,\sqrt{3})$，

E $(-1,\sqrt{3})$，F $(-2,0)$，

各邊分點的比例依序為 1:a，1:b，1:c，1:d，1:e，1:f。



圖二十七

1.只須求 A'、B'坐標

A' $\left(\dfrac{a+2}{1+a},\dfrac{-\sqrt{3}a}{1+a}\right)$ B' $\left(\dfrac{2b+1}{1+b},\dfrac{\sqrt{3}}{1+b}\right)$

2.只須求$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$的直線方程式。

$$\overline{AA'}: y=\frac{\sqrt{3}}{2a+3}(x+1)-\sqrt{3} \qquad \overline{BB'}: y=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}b}{b}(x-1)-\sqrt{3}$$

3.再求ΔABP中$\overline{AB}$的高＝P 點的縱坐標＋$\sqrt{3}$，再求△ABP 面積。

$$x+1=\frac{3+2a}{\sqrt{3}}\left(y+\sqrt{3}\right)\ldots\ldots(1)，\qquad x-1=\frac{b}{2\sqrt{3}+\sqrt{3}b}\left(y+\sqrt{3}\right)\ldots\ldots(2)$$

$$(1)-(2)：\quad 2=\left(\frac{3+2a}{\sqrt{3}}-\frac{b}{2\sqrt{3}+\sqrt{3}b}\right)\left(y+\sqrt{3}\right) \quad\rightarrow\quad 2=\left[\frac{(3+2a)(2+b)-b}{\sqrt{3}(2+b)}\right]\left(y+\sqrt{3}\right)$$

$$y+\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}(2+b)}{6+3b+4a+2ab-b}=\frac{2\sqrt{3}(2+b)}{2ab+4a+2b+6}=\frac{\sqrt{3}(b+2)}{(a+1)(b+2)+1}=\Delta ABP\text{中}\overline{AB}\text{的高}$$

$$\therefore\ \Delta ABP\text{的面積}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}(b+2)}{(a+1)(b+2)+1}=\frac{\sqrt{3}(b+2)}{(a+1)(b+2)+1}$$

4. 內部六邊形 PQRSTU 面積＝

$$\text{正六邊形}ABCDEF\text{面積}-\Delta ABP-\Delta BCQ-\Delta CDR-\Delta DES-\Delta EFT-\Delta FAU$$

$$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\frac{\sqrt{3}(b+2)}{(a+1)(b+2)+1}-\frac{\sqrt{3}(c+2)}{(b+1)(c+2)+1}-\frac{\sqrt{3}(d+2)}{(c+1)(d+2)+1}-\frac{\sqrt{3}(e+2)}{(d+1)(e+2)+1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}(f+2)}{(e+1)(f+2)+1}-\frac{\sqrt{3}(a+2)}{(f+1)(a+2)+1}$$

$$=6\sqrt{3}-\sqrt{3}\sum{}'\frac{b+2}{(a+1)(b+2)+1}$$

5. 再求六邊形 PQRSTU 面積：正六邊形 ABCDEF 面積的比值。

$$\frac{\text{六邊形PQRSTU}}{\text{正六邊形ABCDEF}}=\left[6\sqrt{3}-\sqrt{3}\sum{}'\frac{b+2}{(a+1)(b+2)+1}\right]\div 6\sqrt{3}$$

$$=1-\frac{1}{6}\sum{}'\frac{b+2}{(a+1)(b+2)+1}$$

6. 驗證第十頁圖二十四的運算表：

a	b	c	d	e	f	a
1	2	3	1	0.5	1.5	1
(b+2)/[(a+1)(b+2)+1]						
4/9	5/16	3/13	5/12	14/25	6/17	
子母面積比值=2929939/477360		≒		0.61378		

表二

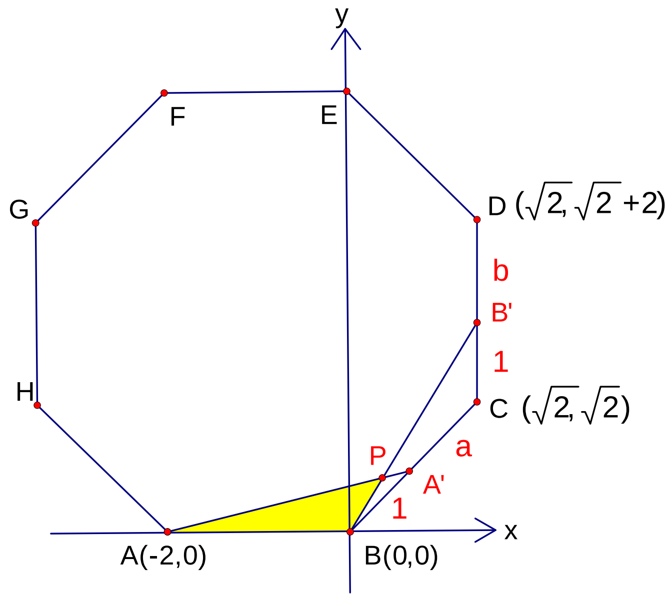
四、八邊形：

(一)將正八邊形 ABCDEFGH 的 B 點放在原點，令$\overline{AB}$=2 單位，計算較方便。

A（$-2,0$），B（$0,0$），C（$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$），

D（$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+2$），各邊分點的比例

依序爲 1:a，1:b，……



圖二十八

1.求 A'、B'坐標

A'（$\dfrac{\sqrt{2}}{1+a},\dfrac{\sqrt{2}}{1+a}$） B'（$\sqrt{2},\dfrac{b\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{1+b}$）

2.求 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 的直線方程式。

$$\overline{AA'}:\ y=\frac{\sqrt{2}}{2a+2+\sqrt{2}}(x+2)$$

$$\overline{BB'}:\ y=\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}b}x$$

3.只須求 P 點的縱坐標。

$$\overline{AA'}:\quad x+2=\frac{2+2a+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot y=(\sqrt{2}a+\sqrt{2}+1)y$$

$$\overline{BB'}:\quad x=\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{2}}{\sqrt{2}b+\sqrt{2}+2}\cdot y=\frac{b+1}{b+\sqrt{2}+1}\cdot y$$

$$2=\left((\sqrt{2}a+\sqrt{2}+1)-\frac{b+1}{b+\sqrt{2}+1}\right)\cdot y \qquad 2=\left[\frac{(\sqrt{2}a+\sqrt{2}+1)(b+\sqrt{2}+1)-(b+1)}{b+\sqrt{2}+1}\right]\cdot y$$

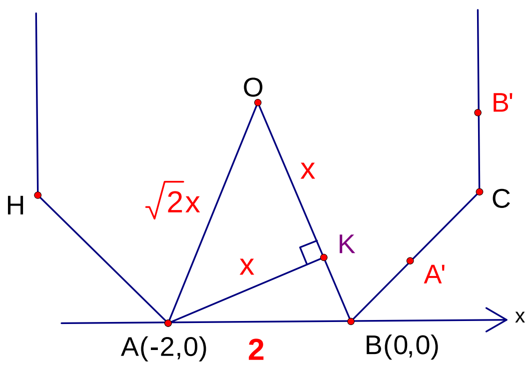
$$y=\frac{2(b+\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}ab+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(b+\sqrt{2}+1)}{(a+1)(b+\sqrt{2}+1)+1}=\Delta ABP\text{中}\overline{AB}\text{ 的高}$$

4. ΔABP 的面積 $=\dfrac{\sqrt{2}(b+\sqrt{2}+1)}{(a+1)(b+\sqrt{2}+1)+1}$

5.設正八邊形 ABCDEFGH 中心點爲 O，

作 $\overline{AK}\perp\overline{BO}$ ，設 $\overline{OK}=\overline{AK}=x$ ，



則 $\overline{AO}=\sqrt{2}x$ ， $\left[(\sqrt{2}-1)x\right]^2+x^2=2^2$ ，得 $x^2=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

圖二十九

$\therefore$正八邊形 $=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}x\cdot x=4\sqrt{2}\cdot x^2=\dfrac{8\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

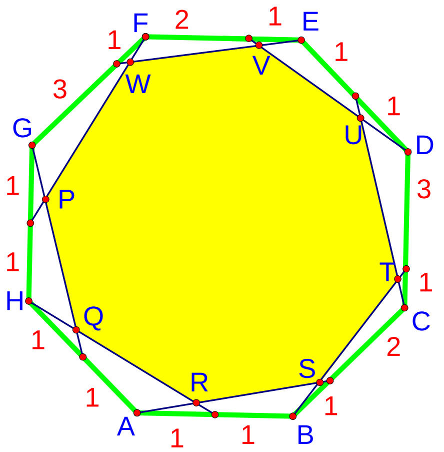
$$\frac{\text{八邊形PQRSTUVW}}{\text{八邊形ABCDEFGH}}$$

$$=\frac{\text{八邊形ABCDEFGH}-\Delta ABP-\Delta BCQ-\Delta CDR-\Delta DES-\Delta EFT-\Delta FGU-\Delta GHV-\Delta HAW}{\text{八邊形ABCDEFGH}}$$

$$=\frac{\frac{8\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\Sigma'\frac{\sqrt{2}(b+\sqrt{2}+1)}{(a+1)(b+\sqrt{2}+1)+1}}{\frac{8\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=1-\frac{2-\sqrt{2}}{8}\Sigma'\frac{b+\sqrt{2}+1}{(a+1)(b+\sqrt{2}+1)+1}$$

(二)舉一個正八邊形的實例：

八邊依序取 1:2、1:3、1:1、1:2、1:3、1:1、1:1、1:1



面積 p_5 = 28.62 公分^2

面積 p_6 = 22.62 公分^2

$$\frac{(\text{面積 } p_6)}{(\text{面積 } p_5)}=0.79026$$

圖三十

a	b	c	d	e	f	g	h	a
2	3	1	2	3	1	1	1	2
(b+1+√2)/[(a+1)(b+1+√2)+1]								
0.314	0.23294	0.449127	0.314	0.23294	0.43613	0.43613	0.44913	
子母面積比值=	0.79026							

表三

五、五邊形

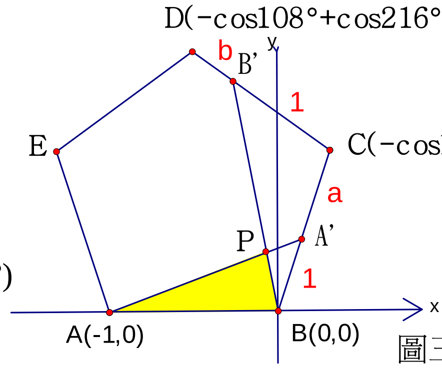
(一)以三角函數表達坐標，

發現將 B 點放在原點，

令 $\overline{AB}=1$ 單位，計算較方便。

$C(-\cos108°,\sin108°)$

$D(-\cos108°+\cos216°,\sin108°-\sin216°)$



圖三十一

1. $A'(\frac{-\cos108°}{1+a},\frac{\sin108°}{1+a})$

$$B'(\frac{-\cos108°+\cos216°-b\cos108°}{1+b},\frac{\sin108°-\sin216°+b\sin108°}{1+b})$$

2. $\overline{AA'}$ ： $y=\dfrac{\sin108^\circ}{1+a-\cos108^\circ}(x+1)$　　　　$\overline{BB'}$ ： $y=\dfrac{\sin108^\circ-\sin216^\circ+b\sin108^\circ}{-\cos108^\circ+\cos216^\circ-b\cos108^\circ}x$

3.P： $\begin{cases} y=\dfrac{\sin108^\circ}{1+a-\cos108^\circ}(x+1) \\ y=\dfrac{\sin108^\circ-\sin216^\circ+b\sin108^\circ}{-\cos108^\circ+\cos216^\circ-b\cos108^\circ}x \end{cases}$

$$\Rightarrow\left[\frac{1+a-\cos108^\circ}{\sin108^\circ}-\frac{-(b+1)\cos108^\circ+\cos216^\circ}{(b+1)\sin108^\circ-\sin216^\circ}\right]y=1$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sin108^\circ[(b+1)\sin108^\circ-\sin216^\circ]}{\sin216^\circ\cos108^\circ-\sin108^\circ\cos216^\circ+(a+1)[(b+1)\sin108^\circ-\sin216^\circ]}$$

$$=\frac{\sin108^\circ[(b+1)\sin108^\circ-2\sin108^\circ\cos108^\circ]}{\sin108^\circ+(a+1)[(b+1)\sin108^\circ-2\sin108^\circ\cos108^\circ]}$$

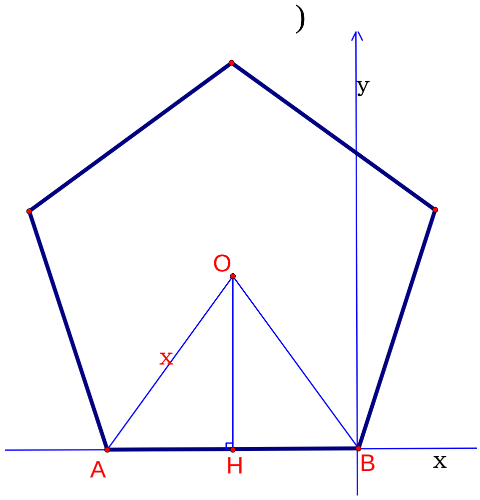
($\because \sin216^\circ\cos108^\circ-\sin108^\circ\cos216^\circ=\sin(216^\circ-108^\circ)=\sin108^\circ$

$\sin216^\circ=2\sin108^\circ\cos108^\circ$)

$$=\frac{\sin108^\circ[(b+1)-2\cos108^\circ]}{1+(a+1)[(b+1)-2\cos108^\circ]}$$

$=\Delta ABP$中$\overline{AB}$的高

$\therefore\ \Delta ABP$的面積$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin108^\circ[(b+1)-2\cos108^\circ]}{1+(a+1)[(b+1)-2\cos108^\circ]}$



圖三十二

4.正五邊形中心為 O，作$\overline{OH}\perp\overline{AB}$

設$\overline{OA}=x$，$\dfrac{\frac{1}{2}}{x}=\sin36^\circ$ $\therefore x=\dfrac{1}{2\sin36^\circ}$

$\therefore$ 正五邊形ABCDE$=5\cdot\Delta ABO=5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sin36^\circ}\cdot\dfrac{1}{2\sin36^\circ}\cdot\sin72^\circ$

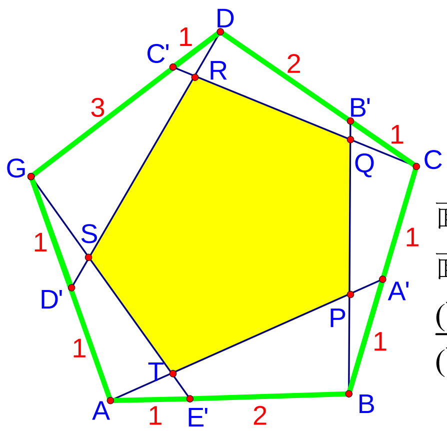
$$=\frac{5\sin72^\circ}{8\sin^2 36^\circ}=\frac{5\sin72^\circ}{4(1-\cos72^\circ)}=\frac{5\sin108^\circ}{4(1+\cos108^\circ)}$$

5. $\therefore\ \dfrac{\text{五邊形PQRST}}{\text{正五邊形ABCDE}}=1-\dfrac{4(1+\cos108^\circ)}{5\sin108^\circ}\left\{\dfrac{\sin108^\circ(b+1-2\cos108^\circ)}{2[(a+1)(b+1-2\cos108^\circ)+1]}+\ldots\right\}$

$$=1-\frac{2(1+\cos108^\circ)}{5}\left\{\frac{b+1-2\cos108^\circ}{(a+1)(b+1-2\cos108^\circ)+1}+\ldots\right\}$$

$$=1-\frac{2(1+\cos108^\circ)}{5}\Sigma'\frac{b+1-2\cos108^\circ}{(a+1)(b+1-2\cos108^\circ)+1}$$

(二)舉一個正五邊形的實例：五邊依序取 1:1、1:2、1:3、1:1、1:2



面積 SRQPT = 12.61 公分^2

面積 GABCD = 23.95 公分^2

$\frac{(\text{面積 SRQPT})}{(\text{面積 GABCD})} = 0.52644$

圖三十三

a	b	c	d	e	a
1	2	3	1	2	1
2(1+cos108°)(b+1-2cos108°)/5[(a+1)(b+1-2cos108°)+1]					
0.121417	0.085929	0.0630752	0.121417	0.081726	
子母面積比值= 0.52644					

表四

六、七邊形：

(一)最後發現適用於更多邊形的計算，最便捷的方法：

定 A(－1,0)、B(0,0)，且坐標以外角表達。

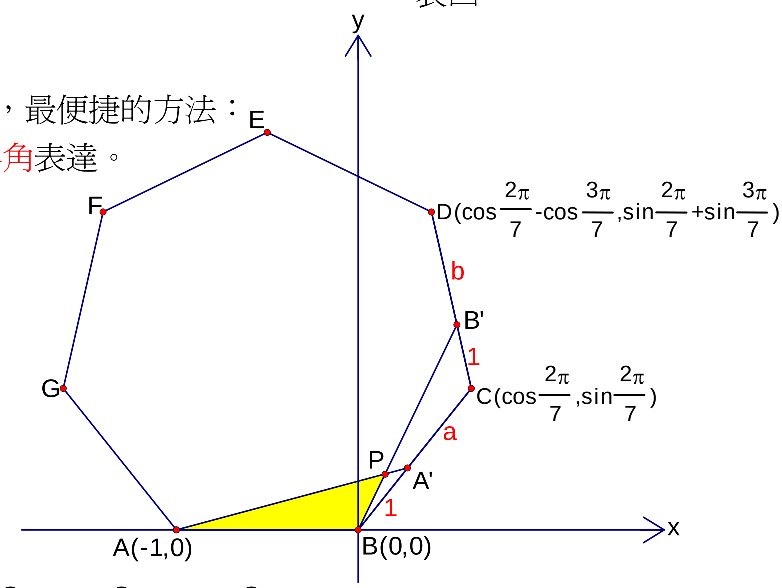
則 $C(\cos\frac{2\pi}{7},\sin\frac{2\pi}{7})$

$D(\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7},\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7})$

1.先求 A'、B'坐標。

$$A'(\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{1+a},\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{1+a})$$

$$B'(\frac{\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+b\cos\frac{2\pi}{7}}{1+b},\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7}}{1+b})$$



圖三十四

2.再求 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 的直線方程式。

$$\overline{AA'}:\ y=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{1+a+\cos\frac{2\pi}{7}}(x+1) \qquad \overline{BB'}:\ y=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+b\cos\frac{2\pi}{7}}x$$

3.求 P 點的縱坐標＝ΔABP 中 $\overline{AB}$ 的高，再求 ΔABP 的面積。

$$x+1=\frac{1+a+\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}y \quad \cdots\cdots (1) \qquad x=\frac{\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+b\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7}}y \quad \cdots\cdots (2)$$

$$(1)-(2)\ \rightarrow\ \left[\frac{1+a+\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+b\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7}}\right]y=1$$

$$y=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7})}{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7}+a\sin\frac{3\pi}{7}+a\sin\frac{2\pi}{7}+ab\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7})}{ab\sin\frac{2\pi}{7}+b\sin\frac{2\pi}{7}+a(\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7})+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}}$$

$$(\because\ \sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7})$$

$$=\frac{b\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}}{\left[ab+b+(1+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}})a+1+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}\right]+1}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(b+1+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}})}{\left[ab+b+(1+2\cos\frac{2\pi}{7})a+1+2\cos\frac{2\pi}{7}\right]+1}$$

$$(\because\ \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{4\pi}{14}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=2\sin\frac{3\pi}{14}=2\cos\frac{2\pi}{7})$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}=\ \Delta ABP\text{中}\overline{AB}\text{的高}$$

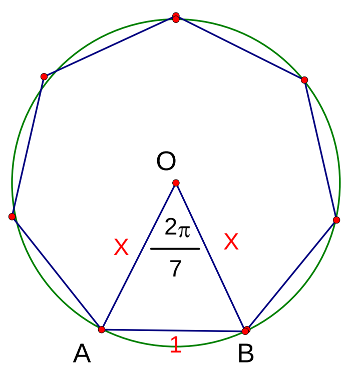
$$\therefore\ \Delta ABP\text{的面積}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}$$

4.求正七邊形 ABCDEFG 面積

設正七邊形 ABCDEFG 中心點 O 到頂點距離爲 x，

由餘弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得：

$$x^2+x^2-2x^2\cos\frac{2\pi}{7}=1\qquad\rightarrow\qquad x^2=\frac{1}{2(1-\cos\frac{2\pi}{7})}$$



圖三十五

七邊形 PQRSTUV 面積＝(正七邊形 ABCDEFG－ ΔABP －………)面積

$$=7\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{4(1-\cos\frac{2\pi}{7})}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}-\cdots\cdots\cdots$$

5.再求七邊形 PQRSTUV：正七邊形 ABCDEFG 面積的比值。

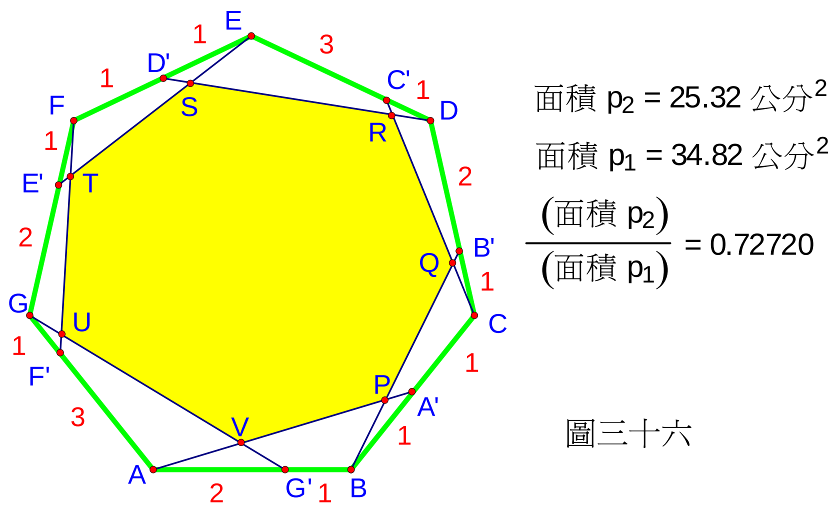
$$\frac{\text{七邊形PQRSTUV}}{\text{七邊形ABCDEFG}}=\frac{\text{七邊形ABCDEFG}-\Delta ABP-\ldots}{\text{七邊形ABCDEFG}}$$

$$=\frac{7\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{4(1-\cos\frac{2\pi}{7})}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}-\cdots\cdots}{7\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{4(1-\cos\frac{2\pi}{7})}}$$

$$=1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{7})}{7}\left[\frac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{7}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}+\cdots\cdots\right]$$

$$=1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{7})}{7}\sum{}'\frac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{7}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}$$

(二)舉一個正七邊形的實例：七邊依序取 1:1、1:2、1:3、1:1、1:2、1:3、2:1



圖三十六

a	b	c	d	e	f	g	a
1	2	3	1	2	3	0.5	1
[b+1+2cos(2π/7)]/{[b+1+2cos(2π/7)]*(a+1)+1}							
0.447335	0.313422	0.232127	0.447335	0.313422	0.229146	0.553104	
子母面積比値=	0.72720						

表五

七、正 n 邊形：由正七邊形子母面積比值公式可推論，

正 n 邊形子母面積比值的公式為：

$$1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}{n}\sum{}'\frac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{n}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{n})+1}$$

代入前述 n ＝3，$\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$，得 $1-\sum{}'\frac{b}{ab+b+1}$

n ＝4， $\cos90^\circ=0$ ，得 $1-\frac{1}{2}\sum{}'\frac{b+1}{(a+1)(b+1)+1}$

n ＝6， $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ ，得 $1-\frac{1}{6}\sum{}'\frac{b+2}{(a+1)(b+2)+1}$

n ＝5 代入， 得 $1-\frac{2(1-\cos72^\circ)}{5}\sum{}'\frac{b+1+2\cos72^\circ}{(a+1)(b+1+2\cos72^\circ)+1}$

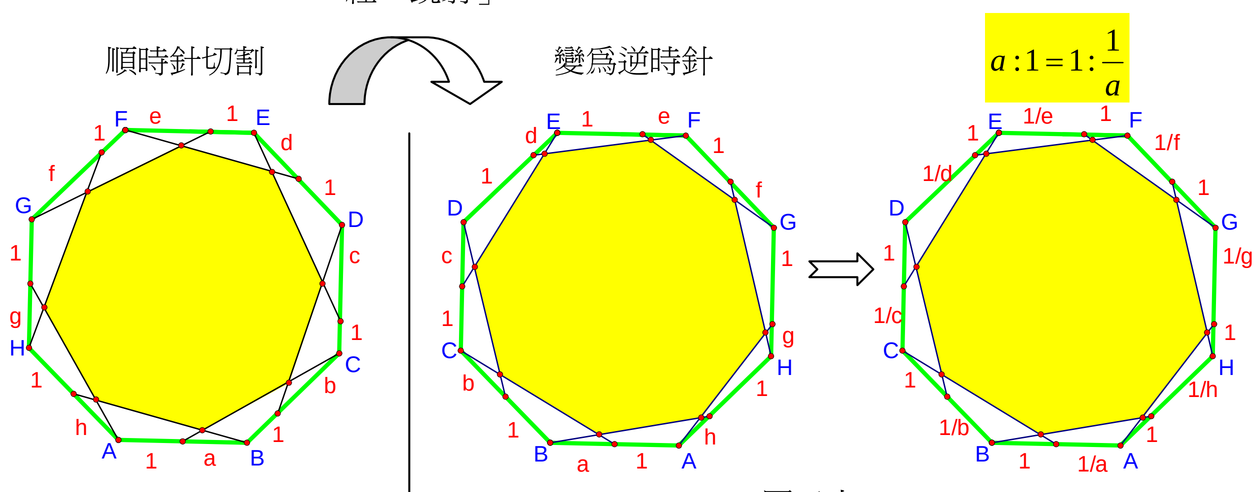
$$=1-\frac{2(1+\cos108^\circ)}{5}\sum{}'\frac{b+1-2\cos108^\circ}{(a+1)(b+1-2\cos108^\circ)+1}$$

均正確符合公式！

八、順時針方向連接：

(一)當切割分點比例相同，但改以順時針方向切割，可得公式，命名為「鏡射公式」。以正八邊形為例：各邊仍依序取 1：a、1：b、1：c…，但以順時針方向切割。

經「鏡射」



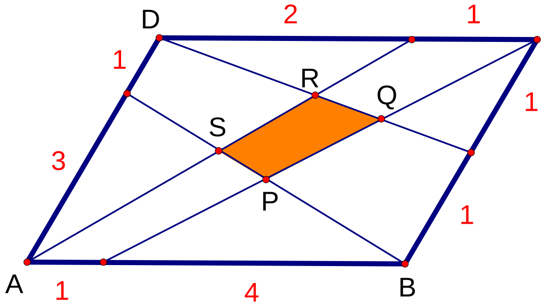
圖三十七

由圖可見，將$1:\frac{1}{a}, 1:\frac{1}{h}, 1:\frac{1}{g}$...代入原公式：$1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}{n}\sum'\frac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{n}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{n})+1}$

得正 n 邊形各邊依序取 1：a、1：b、1：c⋯，以順時針方向切割，子母面積比值公式爲：

$$1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}{n}\Sigma'\frac{\frac{1}{a}+1+2\cos\frac{2\pi}{n}}{(\frac{1}{b}+1)(\frac{1}{a}+1+2\cos\frac{2\pi}{n})+1}$$

(二)實例：分點比例與圖十八完全相同，但順、逆時針連接所得的子母面積比值不同。



面積 SPQR = 1.49 公分^2
面積 ABCD = 20.82 公分^2
$\frac{(\text{面積 SPQR})}{(\text{面積 ABCD})} = 0.07143$

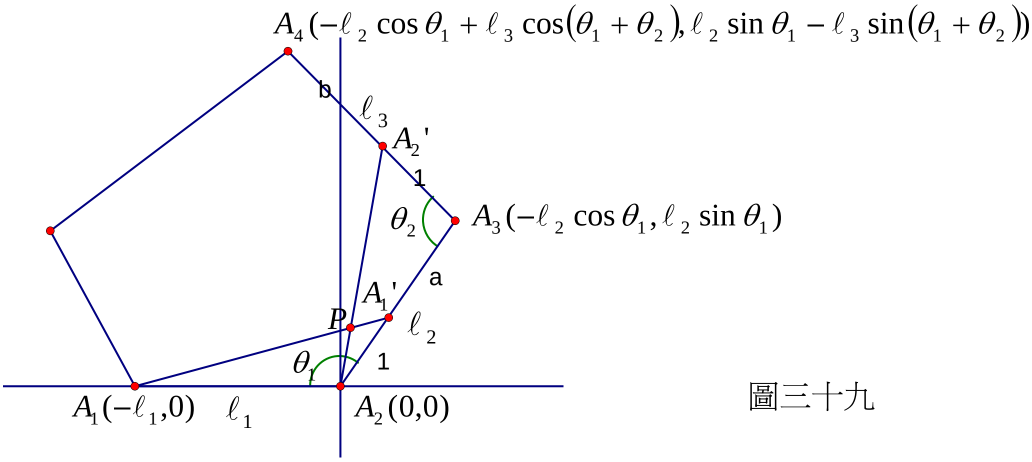
圖三十八

a	b	c	d	a
1	2	3	4	1
(1+1/a)/[(1+1/a)(1+1/b)+1]				
1/2	1/2	1/2	5/14	
子母面積比值=	1/14	≒	0.07143	

表六

九、任意 n 邊形：雖然任意多邊形無公式，但若以角度、長度限制圖形，應能發現規律。

(一)任意五邊形：令坐標如圖



圖三十九

求分點坐標：$A_1'(\frac{-\ell_2\cos\theta_1}{a+1}, \frac{\ell_2\sin\theta_1}{a+1})$

$$A_2'\left(\frac{-b\ell_2\cos\theta_1-\ell_2\cos\theta_1+\ell_3\cos(\theta_1+\theta_2)}{b+1},\frac{b\ell_2\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)}{b+1}\right)$$

(二)求直線方程式：

$$\overline{A_1A_1'}: x+\ell_1=\frac{-\ell_2\cos\theta_1+\ell_1(a+1)}{\ell_2\sin\theta_1}\cdot y$$

$$\overline{A_2A_2'}: x=\frac{-b\ell_2\cos\theta_1-\ell_2\cos\theta_1+\ell_3\cos(\theta_1+\theta_2)}{b\ell_2\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot y$$

(三)求 ΔA_1A_2P 面積

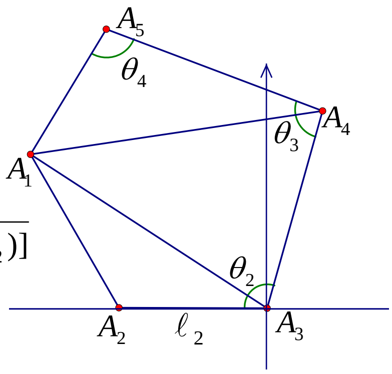
$\because$ P 的 y 坐標值即 ΔA_1A_2P 的高($\overline{A_1A_2}$ 為底)

$$\therefore \frac{-b\ell_2\cos\theta_1-\ell_2\cos\theta_1+\ell_3\cos(\theta_1+\theta_2)}{b\ell_2\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot y+\ell_1=\frac{-\ell_2\cos\theta_1+\ell_1(a+1)}{\ell_2\sin\theta_1}\cdot y$$

$$\ell_1=\left[\frac{-\ell_2\cos\theta_1+\ell_1(a+1)}{\ell_2\sin\theta_1}-\frac{-b\ell_2\cos\theta_1-\ell_2\cos\theta_1+\ell_3\cos(\theta_1+\theta_2)}{b\ell_2\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)}\right]\cdot y$$

$$\ell_1=\frac{\ell_2\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1-\ell_2\ell_3\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1+\ell_1(a+1)[b\ell_2\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\sin\theta_1[b\ell_2\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}\cdot y$$

$$\therefore \frac{\ell_1\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}=y$$



$$\therefore \Delta A_1A_2P=\frac{1}{2}\cdot\overline{A_1A_2}\cdot y$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ell_1\cdot\frac{\ell_1\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell_1^{\,2}\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

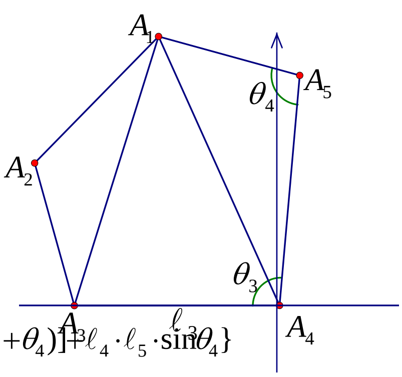
(四)求母多邊形面積：以切割方式求值，可推廣至任意多邊形

$$\Delta A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\cdot\ell_2\cdot\underline{[\ell_3\cdot\sin\theta_2-\ell_4\cdot\sin(\theta_2+\theta_3)+\ell_5\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)]}$$

(為 A_1 由逆時針方向來看的 y 值，即高)

$$\Delta A_1A_3A_4=\frac{1}{2}\cdot\ell_3\cdot[\ell_4\cdot\sin\theta_3-\ell_5\cdot\sin(\theta_3+\theta_4)]$$

$$\Delta A_1A_4A_5=\frac{1}{2}\cdot\ell_4\cdot\ell_5\cdot\sin\theta_4$$



$\therefore$ 五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 面積

圖四十

$$=\frac{1}{2}\{\ell_2\cdot[\ell_3\cdot\sin\theta_2-\ell_4\cdot\sin(\theta_2+\theta_3)+\ell_5\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)]+\ell_3\cdot[\ell_4\cdot\sin\theta_3-\ell_5\cdot\sin(\theta_3+\theta_4)]+\ell_4\cdot\ell_5\cdot\sin\theta_4\}$$

(五)因此可得任意 n 邊形子母面積比值公式：

$$1-\frac{1}{f(\theta)}\sum{}' \frac{\ell_1{}^2\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$f(\theta)=\ell_2\cdot[\ell_3\cdot\sin\theta_2 - \ldots + \ldots \pm \ell_n\sin(\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})]+\ldots\ldots+\ell_{n-1}\cdot\ell_n\cdot\sin\theta_{n-1}$$

(六)先以第十六頁圖三十三的正五邊形例子檢驗公式，正確無誤。

a	b	c	d	e	a	b
1	2	3	1	2	1	2
Ln=1	θ n=108°		n=1,2,3,4,5			
0.417791	0.295677	0.217039	0.417791	0.281214		
0.951057	1.538842	0.951057	f(θ)=	3.440955		
0.121417	0.085929	0.063075	0.121417	0.081726		
子母面積比値 =		0.52644				

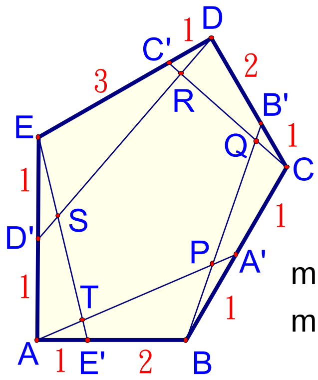
表七

表七與表四對照，其倒數第二列的五個數值爲「所扣掉的五個小三角形面積與正五邊形面積的比値」，完全一致。

(七)任意五邊形的實例：

作一五邊形 ABCDE，各邊長、內角與各邊分點比例，如圖四十一所示，以 Microsoft Excel 驗證無誤。

AB = 3.00 公分
BC = 4.00 公分
CD = 3.00 公分
DE = 4.00 公分
EA = 4.06234 公分



m∠ABC = 120.00°
m∠DCB = 120.00°
m∠CDE = 90.00°
m∠DEA = 120.50632°
m∠EAB = 89.49368°

面積 PQRST = 11.10962 公分^2
面積 ABCDE = 21.28942 公分^2

$\frac{(\text{面積 PQRST})}{(\text{面積 ABCDE})} = 0.52184$

圖四十一

a	b	c	d	e	a	b
1	2	3	1	2	1	2
L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_1	L_2
3	4	3	4	4.06234	3	4
θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_1	
120	120	90	120.50632	89.49368	120	
4.5848404	3.205438	2.6883025	6.2114995	3.66952208		
10.392297	18.186538	14.000013	ABCDE面積= f(θ)/2 =	21.28942		
子母面積比値 =		0.52184				

表八

伍、研究結果

邊數	具有公式的條件	子母面積比值公式
一、三角形	任意三角形	$1-\Sigma'\dfrac{b}{ab+b+1}$
二、四邊形	平行四邊形	$1-\dfrac{1}{2}\Sigma'\dfrac{b+1}{(a+1)(b+1)+1}$
三、六邊形	正六邊形	$1-\dfrac{1}{6}\Sigma'\dfrac{b+2}{(a+1)(b+2)+1}$
四、八邊形	正八邊形	$1-\dfrac{2-\sqrt{2}}{8}\Sigma'\dfrac{b+\sqrt{2}+1}{(a+1)(b+\sqrt{2}+1)+1}$
五、五邊形	正五邊形	$1-\dfrac{2(1-\cos72°)}{5}\Sigma'\dfrac{b+1+2\cos72°}{(a+1)(b+1+2\cos72°)+1}$
六、七邊形	正七邊形	$1-\dfrac{2(1-\cos\frac{2\pi}{7})}{7}\Sigma'\dfrac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{7}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{7})+1}$
七、特殊n邊形	任意三角形 平行四邊形 n ≧5：正n邊形	$1-\dfrac{2(1-\cos\theta)}{n}\Sigma'\dfrac{b+1+2\cos\theta}{(a+1)(b+1+2\cos\theta)+1}$ 其中$\theta=2\pi/n$
八、順時針方向連接	任意三角形 平行四邊形 n ≧5：正n邊形	$1-\dfrac{2(1-\cos\theta)}{n}\Sigma'\dfrac{\frac{1}{a}+1+2\cos\theta}{(\frac{1}{b}+1)(\frac{1}{a}+1+2\cos\theta)+1}$ 其中$\theta=2\pi/n$
九、任意n邊形	任意n邊形 令邊長： $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$ 內角： $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$	$1-\dfrac{1}{f(\theta)}\Sigma'\dfrac{\ell_1^2\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}$ $f(\theta)=\ell_2\cdot[\ell_3\cdot\sin\theta_2-\ldots+\ldots\pm\ell_n\sin(\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})]+\ldots\ldots+\ell_{n-1}\cdot\ell_n\cdot\sin\theta_{n-1}$

陸、討論

一、三角形：

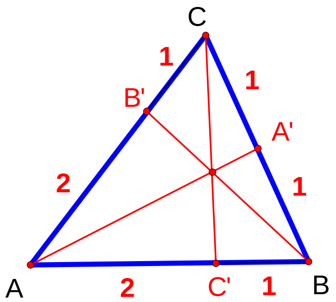
(一)由$\dfrac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\dfrac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}$我們可發現

若 axbxc＝1，則$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$三線交於一點。

例如：a＝1，b＝2，c＝$\frac{1}{2}$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}$$

$$=\frac{\left(1\times 2\times\frac{1}{2}-1\right)^2}{(1\times 2+2+1)\left(2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}\times 1+1+1\right)}=0$$



若三邊取 1:1、1:2、2:1，則$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$三線交於一點。

圖四十二

(二)由$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}$我們可發現：

當$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$爲三中線，即 a＝b＝c＝1，使得 abc－1＝0

故子三角形△PQR 面積＝0，所以三中線$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$交於一點(重心)。

(三)希瓦(Ceva)定理：若$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點 G，

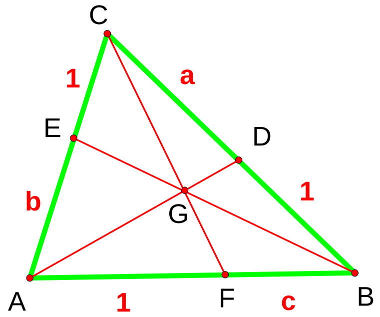
則$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$

證明：∵$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點 G ∴△PQR＝0

由$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(abc-1)^2}{(ab+b+1)(bc+c+1)(ca+a+1)}=0$

可得 axbxc＝1，則$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{1}{c}\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=1$

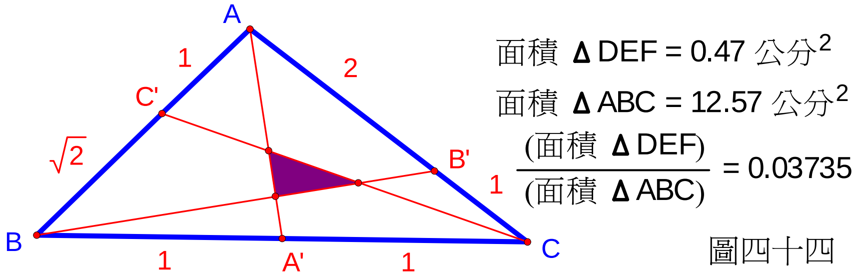
這結果可用來證明希瓦(Ceva)定理。



圖四十三

(四)分點取無理數的比：三邊分別取 1:1、1:2、1:$\sqrt{2}$，公式亦正確。

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(1\times 2\times\sqrt{2}-1)^2}{(1\times 2+2+1)(2\times\sqrt{2}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}\times 1+1+1)}=\frac{9-4\sqrt{2}}{5(8+7\sqrt{2})}\fallingdotseq 0.03735$$

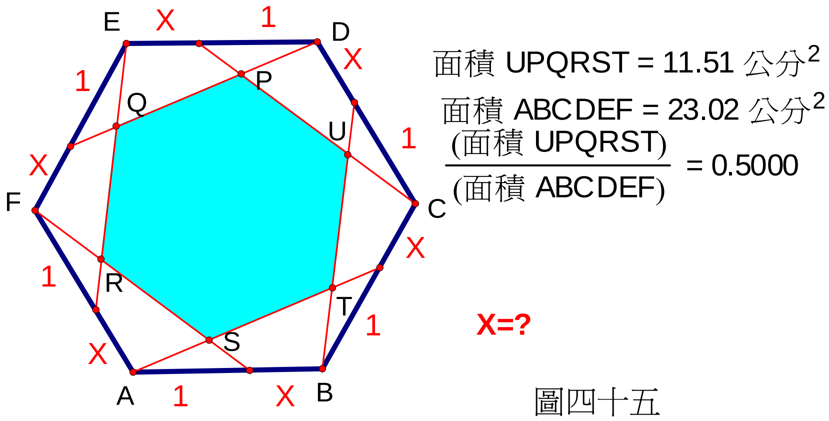


圖四十四

二、六邊形：

本結果可應用在「欲固定切割後子母面積的比值，該如何切割？」

(一)正六邊形各邊應如何切割(取相同的比例)，才能使子母面積的比值為 0.5？



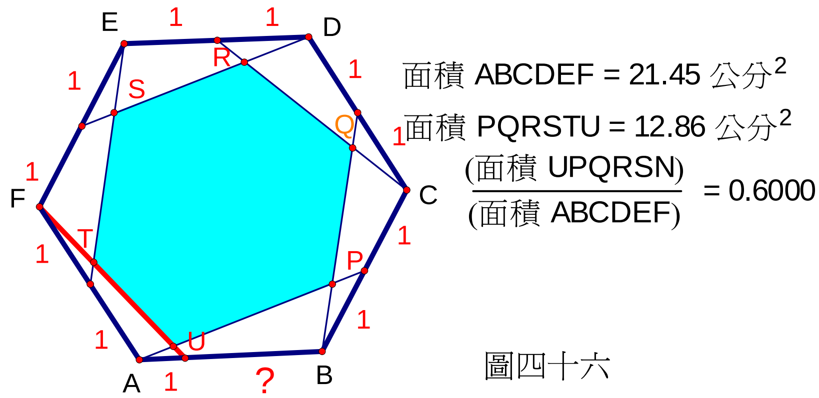
圖四十五

解：設每邊切割為 $1:x$

$$1-\frac{1}{6}\times\left[\frac{x+2}{(x+1)(x+2)+1}\times 6\right]=\frac{1}{2}$$

化簡得 $x^2+x-1=0$ ， $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 0.618$(黃金分割)

(二)正六邊形已有五邊均取 1:1 的切割點，最後一邊應如何切割，才能使子母面積的比值為 0.6？



圖四十六

解：設最後一邊切割為 $1:x$

$$1-\frac{1}{6}\left[\frac{3}{2\times 3+1}\times 4+\frac{x+2}{2(x+2)+1}+\frac{3}{3(x+1)+1}\right]=\frac{3}{5}$$

化簡得 $39x^2-8x-325=0$

$$x=\frac{8+\sqrt{64+4\times 39\times 325}}{78}\fallingdotseq 2.99$$

三、正 n 邊形：

(一)我們適用於所有 n 邊形的公式，與前述全國科展得獎作品的公式做比較：

當 a＝b＝c＝d＝⋯⋯＝m 時，

$$1-\frac{2(1-\cos\theta)}{\mathrm{n}}\Sigma'\frac{b+1+2\cos\theta}{(a+1)(b+1+2\cos\theta)+1}$$

$$=1-2(1-\cos\theta)\frac{m+1+2\cos\theta}{(m+1)(m+1+2\cos\theta)+1}$$

$$=\frac{1}{(m+1)(m+1+2\cos\theta)+1}\{[(m+1)(m+1+2\cos\theta)+1]-2(1-\cos\theta)(m+1+2\cos\theta)\}$$

$$=\frac{m^2+4m\cos\theta+4\cos^2\theta}{m^2+2(1+\cos\theta)m+2(1+\cos\theta)}=\frac{(m+2\cos\theta)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}$$

兩者的結果是一致的。然而我們的公式可擴充於各邊有不同的比例。

(二)公式亦可表示為 $1-\dfrac{2(1+\cos\alpha)}{n}\Sigma'\dfrac{b+1-2\cos\alpha}{(a+1)(b+1-2\cos\alpha)+1}$，$\alpha$ 為正 n 邊形的$\boxed{\text{內角}}$

四、任意 n 邊形順時針切割也可得公式：

$$\boxed{\begin{array}{l}1-\dfrac{1}{f(\theta)}\sum'\dfrac{\ell_1{}^2\ell_2\sin\theta_1[(\frac{1}{a}+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(\frac{1}{a}+1)[(\frac{1}{b}+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}\\ f(\theta)=\ell_2\cdot[\ell_3\cdot\sin\theta_2-...+...\pm\ell_n\sin(\theta_2+...+\theta_{n-1})]+......+\ell_{n-1}\cdot\ell_n\cdot\sin\theta_{n-1}\end{array}}$$

五、非正 n 邊形在特殊情形下有特殊公式

(一)在三角形及四邊形時，發現任意三角形、平行四邊形均有通用公式，雖推論五邊以上正多邊形才有公式，但在求出任意多邊形公式時，就思考五邊以上的非正多邊形，在一定條件下，也許有特殊的子母面積比值公式。

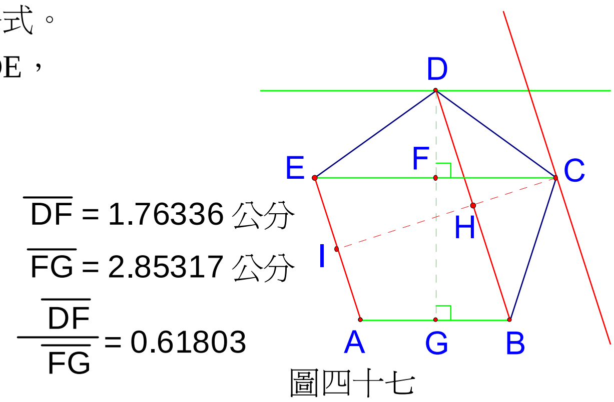
以五邊形為例：如右圖，正五邊形 ABCDE，

$\overline{AB}//\overline{CE},\overline{GF}:\overline{FD}=1:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\fallingdotseq 1:0.61803$

$\overline{AE}//\overline{BD},\overline{IH}:\overline{HC}=1:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\fallingdotseq 1:0.61803$

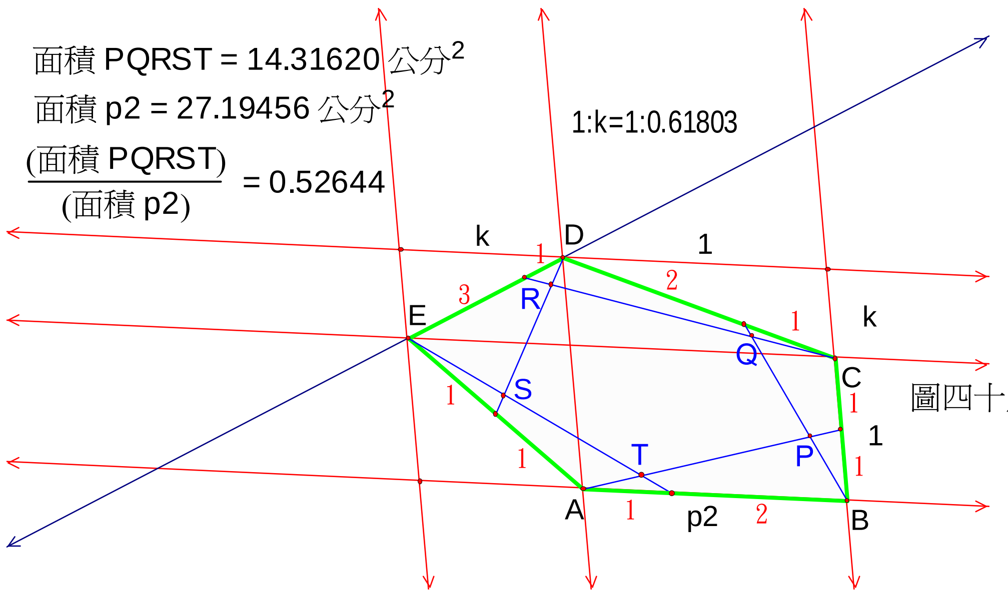
於是在 GSP 軟體上，以兩組平行線，

間隔均為$1:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，可架構出許多內角、

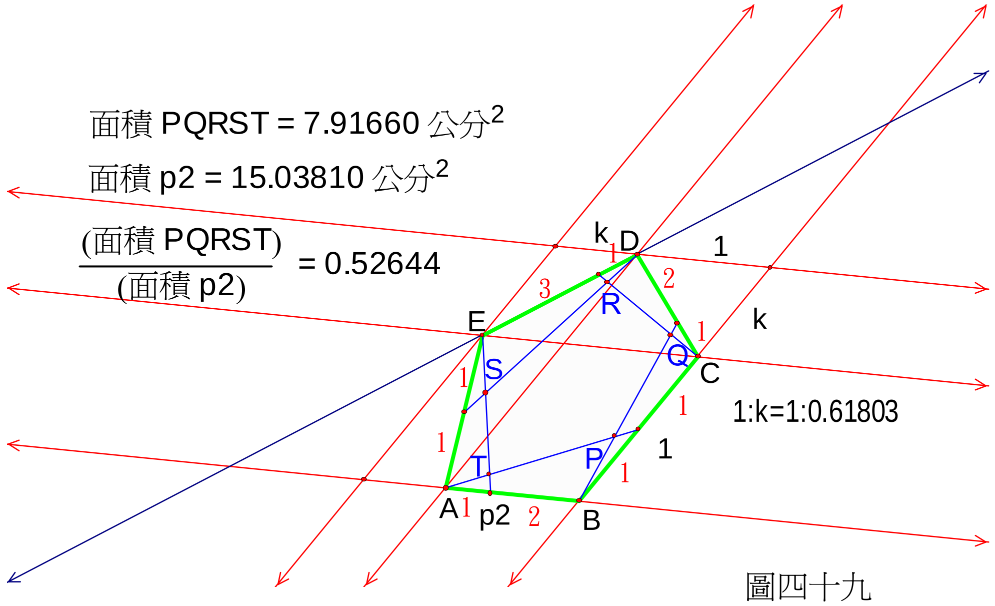


圖四十七

邊長均不相同的非正五邊形，再如同第十六頁的圖三十三，五邊依序取 1:1、1:2、1:3、1:1、1:2，竟發現子母面積比值與正五邊形相等！列印出其中兩個圖如下：



圖四十八



圖四十九

(二)令L_1,L_2,L_3為一組平行線,M_1,M_2,M_3為另一組平行線,間隔比均為$1:k$,
意即若L_1,L_2的距離$=t$,則L_2,L_3的距離$=kt$,
若M_1,M_2的距離$=u$,則M_2,M_3的距離$=ku$,可架構五邊形與六邊形。
(七邊形與八邊形每一組平行線須有四條,間隔可設為$1:k:k'$,依此類推。)

1.任意三角形($t=\ell_2\cdot\sin\theta_1$)

$$\text{子母面積比值}=1-\frac{1}{\ell_1\cdot\ell_2\cdot\sin\theta_1}\Sigma'\frac{\ell_1^{\,2}\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$=1-\frac{1}{\ell_1 t}\Sigma'\frac{\ell_1^{\,2}t[(b+1)t-t)]}{\ell_1 t+\ell_1(a+1)[(b+1)t-t]}$$

$$=1-\Sigma'\frac{\ell_1\cdot bt}{\ell_1 t[1+(a+1)\cdot b]}$$

$$=1-\Sigma'\frac{b}{ab+b+1}$$

2.平行四邊形($\ell_1=\ell_3$;$\sin\theta_1=\sin\theta_2$; $\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\pi=0$)

子母面積比值

$$=1-\frac{1}{2\cdot\ell_1\cdot\ell_2\cdot\sin\theta_1}\Sigma'\frac{\ell_1^{\,2}\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$=1-\frac{1}{2\cdot\ell_1\cdot\ell_2\cdot\sin\theta_1}\Sigma'\frac{\ell_1^{\,2}\ell_2\sin\theta_1\cdot(b+1)\ell_2\sin\theta_1}{\ell_2\ell_1\sin\theta_1+\ell_1(a+1)\cdot(b+1)\ell_2\sin\theta_1}$$

$$=1-\frac{1}{2\cdot\ell_1\cdot\ell_2\cdot\sin\theta_1}\Sigma'\frac{\ell_1\cdot(b+1)\ell_2\sin\theta_1}{1+(a+1)\cdot(b+1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}\Sigma'\frac{b+1}{(a+1)(b+1)+1}$$

3.五邊形(以下公式僅針對 $k=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 時討論 ∵能力有限，尚無法探討更深入)

$$\text{子母面積比值}\ =1-\frac{1}{tu(k^2+2k+2)}\sum{}'\frac{u^2t[(b+1)t+kt]}{tu+u(a+1)[(b+1)+kt]}$$

$$=1-\frac{1}{tu(k^2+2k+2)}\sum{}'\frac{u^2t^2[(b+1)+k]}{tu\{1+(a+1)[(b+1)+k]\}}$$

$$=1-\frac{1}{k^2+2k+2}\sum{}'\frac{(b+1)+k}{1+(a+1)[(b+1)+k]}$$

當 $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 時，

$$\text{代入可得公式}\ =1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{5})}{5}\Sigma'\frac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{5}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{5})+1}$$

這解釋了圖四十八與圖四十九的結果，也使得具有這樣特殊條件的五邊形，其子母面積比值公式被適度簡化了。

4.六邊形(以下僅能針對 $k=1$ 時討論)

$$\text{原公式}\ =1-\frac{1}{tu(k^2+4k+1)}\sum{}'\frac{u^2t[(b+1)t+kt]}{tu+u(a+1)[(b+1)+kt]}$$

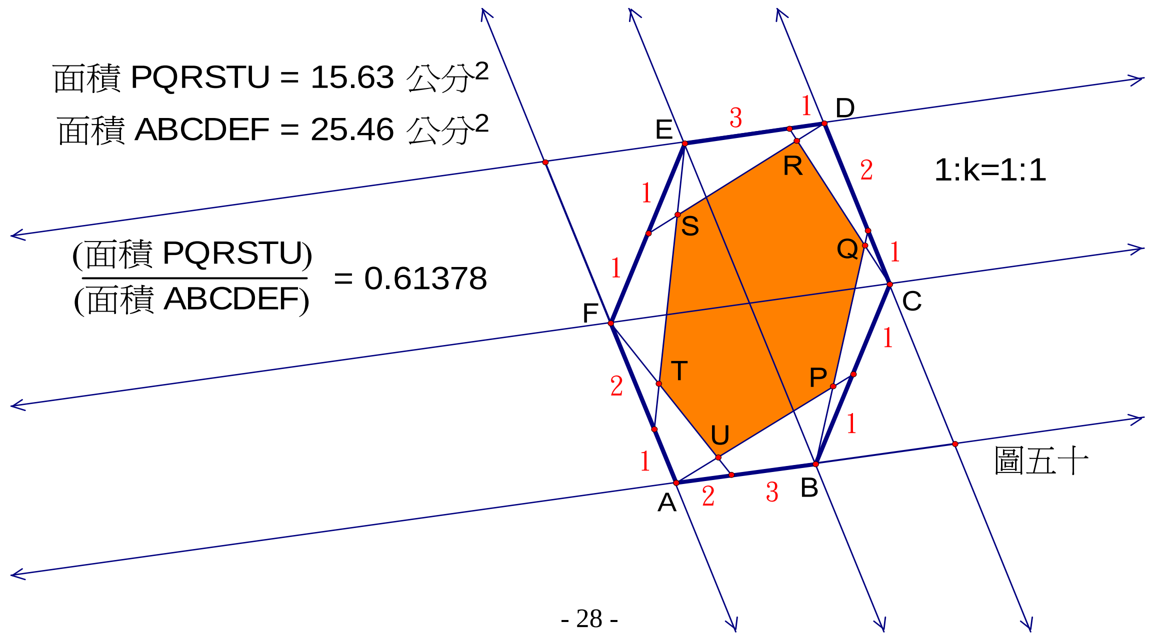
$$=1-\frac{1}{tu(k^2+4k+1)}\sum{}'\frac{u^2t^2[(b+1)+k]}{tu\{1+(a+1)[(b+1)+k]\}}$$

$$=1-\frac{1}{k^2+4k+1}\sum{}'\frac{(b+1)+k}{1+(a+1)[(b+1)+k]}$$

當 $k=1$ 時，即為正六邊形平行　線間隔比例

$$\text{可得公式}\ =1-\frac{1}{6}\Sigma'\frac{b+2}{(a+1)(b+2)+1}$$

如同第十頁的圖二十四的比例，六邊依序取 1:1、1:2、1:3、1:1、2:1、2:3，予以佐證如下。



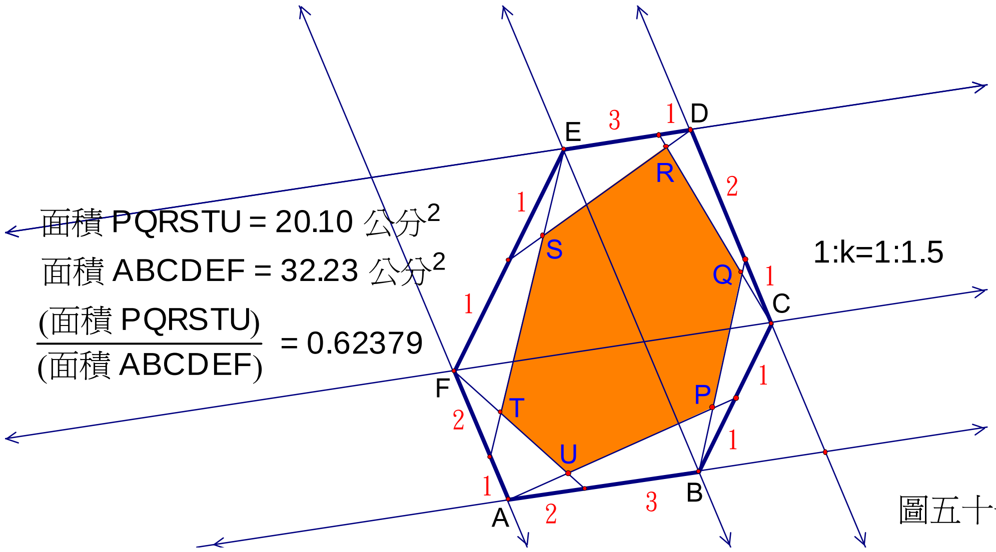
圖五十

(三)由於變數隨著邊數的增加而更多，以現有能力，較難推廣。不過，目前我們已經得到此一結果：當平行線間隔取正 n 邊形的間隔比例，所得的「特殊多邊形」子母面積比值和正 n 邊形相同，公式為：

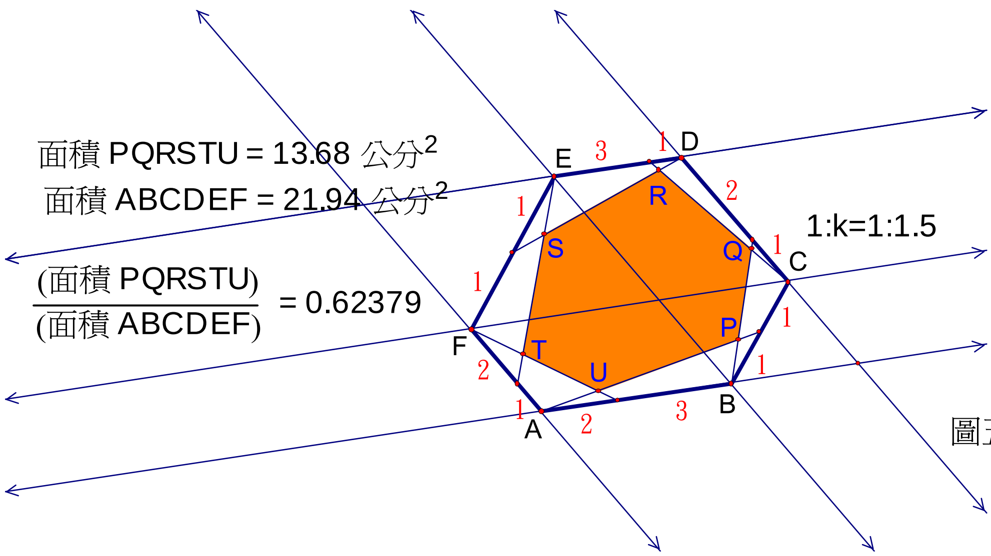
$$1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}{n}\sum{}'\frac{b+1+2\cos\frac{2\pi}{n}}{(a+1)(b+1+2\cos\frac{2\pi}{n})+1}$$

這也解釋了任意三角形和平行四邊形的情況。

此外，雖然無法探討推廣性，但可以肯定的是：以兩組平行線群，一定比例相隔，連接交點，得到一些不相似的多邊形，可以用 GSP 作圖，發現它們有相同的子母面積比值，例如圖五十一與圖五十二。



圖五十一



圖五十二

柒、結論

一、很高興由一開始不知道公式是否存在，到最後竟研究出一個能適用於所有邊數的通用公式。這不算短的過程當中，我們遇到幾次瓶頸，就想辦法改變策略，而在三、四、六、八邊的公式出爐後仍看不出其關聯，於是在引進三角函數的概念後，挑戰五、七邊形，終於得到令我們滿意的公式，而且更進一步得到任意多邊形的公式，實為一大成就。

二、正 n 邊形，各邊依序取 1：a、1：b、1：c、1：d…的分點，各與一頂點連接，則

子母面積比值＝$\boxed{1-\dfrac{2(1-\cos\theta)}{n}\Sigma'\dfrac{b+1+2\cos\theta}{(a+1)(b+1+2\cos\theta)+1}}$，其中 $\theta=2\pi/n$，Σ' 表示

$a\to b\to c\to d\to e\to\cdots\cdots\to a$ 對稱性式子的和，且任意三角形與平行四邊形均適用。

在 Microsoft Excel 運算表中，輸入邊數與各邊分點比例，可立即算出子母面積的比值，順時針切割亦有公式及 Excel 運算表。

三、任意多邊形，也得出子母面積比值公式：

$$\boxed{1-\frac{1}{f(\theta)}\Sigma'\frac{\ell_1^{\,2}\ell_2\sin\theta_1[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}{\ell_2\ell_3\sin\theta_2+\ell_1(a+1)[(b+1)\ell_2\sin\theta_1-\ell_3\sin(\theta_1+\theta_2)]}}$$

其中 $f(\theta)=\ell_2\cdot[\ell_3\cdot\sin\theta_2-\ldots+\ldots\pm\ell_n\sin(\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})]+\ldots\ldots+\ell_{n-1}\cdot\ell_n\cdot\sin\theta_{n-1}$

四、**以兩組平行線群，一定比例相隔，連接交點，所得的特殊多邊形**，雖無法做完整證明，但仍研究出**以正 n 邊形的比例，所繪出異於正 n 邊形的多邊形，有著與正 n 邊形相同的子母面積比值公式；非正 n 邊形的比例，所繪出互不相似的多邊形，也有固定的子母面積比值。**

五、整合以上所得，可以得知，以巢狀方式切割，子母面積比值除了受切割比例影響外，

任意n邊形子母面積比值——受 邊長、內角 控制；

特殊n邊形子母面積比值——受 平行線間隔 控制。

捌、參考資料

一、宋釗宜(民 81)。**難解數學破題**(87-88 頁)。台北市：大展出版社。

二、林雅淇等(民 96)。**正多邊形母子面積比**。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中數學組作品。桃園縣立桃園國中。

取自：國立台灣科學教育館：http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/high/030415.pdf

三、洪有情主編(民 95)。**國中數學第四冊**。台北市：康軒出版社。

四、洪有情主編(民 96)。**國中數學第五冊**。台北市：康軒出版社。

五、林福來主編(民 96)。**高中數學第二冊**。台南市：南一書局。

【評語】030411

1. 主題有趣，推理清晰，GSP 繪圖操作熟練。

2. 數學計算完整正確，結論漂亮。

3. 具學術價值，單獨完成此科展，更屬不易。數學根基好。有潛力。

4. 解說時，稍嫌突顯自我個性，給一些評審不夠誠懇的感受，來日方長，應學習謙和。