中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030408

聞「數」起舞

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 王郁婷 國二 陳泓志 國二 鄭達駿	陳亮君

關鍵詞：座標、數列、對稱

聞「數」起舞

摘要

笛卡爾結合幾何與代數，讓我們了解直角座標的美，體認代數與幾何有著密不可分的關係，因此本研究中結合數列和平面圖形－正方形、六邊形、三角形，按著左轉或右轉的規則行走舞動的軌跡，交織出多種複雜卻具有規律的有趣圖形。我們利用方格紙及 GSP 軟體繪製出這有的像風車、有的像烏龜的圖形並進行歸納、推測與證明。研究結果顯示：轉彎時的角度和方向是影響圖形的變化最關鍵的因素；利用外角和與對稱等相關性質可證明舞步圖形是封閉圖形與否。舞步數列的循環次數與舞步軌跡所圍成的面積、周長、重疊線段的長度在研究中也都可得出個別之通式。

壹、　研究動機

在我們正為了找尋理想的科展題目而煩惱時，想起了數學老師曾說過：「日常生活所見所聞的事物常常都蘊涵著數學含義，那往往就是理想題目的來源。」因此我們紛紛談論起數學課本第四冊的單元與最近生活相關的事，感性的組員 A 天外飛來一筆的想到，近來電視上的選秀節目多如雨後春筍，居然也有令人耳目一新的舞蹈比賽，看那舞者在舞台上隨著節奏舞動、跳躍、旋轉，最後回到舞台中央接受觀眾的喝采，實在是場力與美的演出。理性的組員 B 接著聯想到有種新型的自動吸塵器 Roomba 在設定行程後，也能來回移動清潔房間，並返回基地台充電。這看似不相干的兩件事都有著相同的模式－移動者由定點出發，依規律移動，再回到定點。這讓我們腦內產生了一連串的疑問：移動者回到某定點是件容易的事嗎？會不會有些規律讓移動者永遠回不到定點？改變移動時轉彎的角度會是影響回不回到定點的因素嗎？移動的路徑會構成什麼圖形？那這些圖形的面積、周長會不會也是有規律可循呢？……「這不就是課本第一單元和第二單元的重點：數與形嗎？」我們相信這些問題裡都藏著數學在裡面，所以我們假想出一個跳舞機器人、隨著數字的節奏及舞步規則的改變而畫出不同的圖案，命令它聞『數』起舞，陪我們一同邁向研究之路。

貳、　研究目的

一、探討改變走的規則後，所得到的圖形變化情形。
二、探討改變轉的方向後，所得到的圖形變化情形。
三、探討改變每次轉的角度後，所得到的圖形變化情形。
四、探討圖形所圍成面積、周長的通式。
五、探討圖形是封閉圖形與否的要件。
六、探討圖形的循環次數與規則的關聯。

參、　研究工具

紙、筆、方格紙、電腦

肆、 研究過程與討論

一、 正方形的舞步

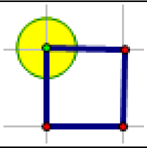
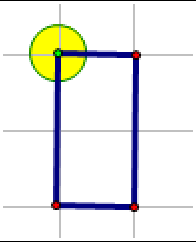
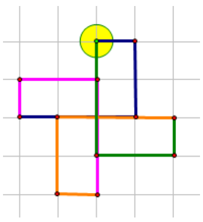
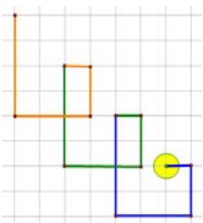
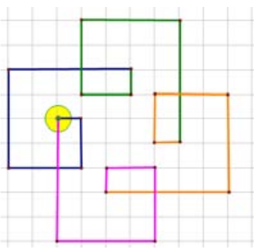
定義：假想有一個舞者站在原點，依照我們所訂的規則走，**每次向右(左)轉 90 度**，一直循環我們所訂的規則，直到在某個循環完成後走回原點。

(註：有些圖形持續往同一方向增加相同的舞步，結果永遠不可能回到原點)。

以下我們將實際操作不同走法規則，來看看會有何種結果產生。

(一) 基本型(規律一)--------走法規則：1,2,3⋯x-1,x(全部向右轉 90 度)

1. 在方格紙上實際操作後，我們將形成的圖形、圖形所圍面積、圖形的周長、回到原點所需的循環次數、及圖形中重疊的線段長整理成下表：

x 值	形成的圖形	面積	周長	循環次數	重疊線段長
1		1	4	4	0
2		2	6	2	0
3		8	16	4	4
4		不是封閉圖形	∞	∞	0
5		57	36	4	0
6	參閱附錄 P1	40	30	2	0
7	參閱附錄 P1	96	48	4	12
8	參閱附錄 P1	不是封閉圖形	∞	∞	0

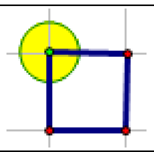
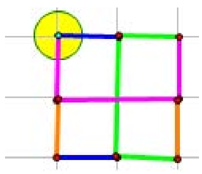
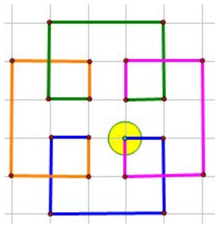
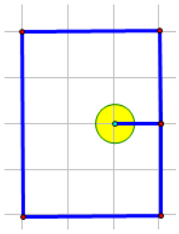
2.根據上表，我們推論面積通式、周長通式、循環次數可以區分爲以下類型：

x	面積通式	周長通式	循環次數
4n+1	$3x^2-4x+2$	4(2x-1)	4
4n+2	$7x^2/4-9/2x+4$	6(x-1)	2
4n+3	$3x^2-8x+5$	8(x-1)	4
4n	不是封閉圖形	∞	∞

(二)雲霄飛車(規律二) --------走法規則：1,2,3⋯x-1,x,x-1⋯3,2,1(全部向右轉 90 度)

註：此規律之 x 不論爲何，皆可繞回原點。故命名爲『雲霄飛車』(因雲霄飛車都走得回原點，若是它走不回來……)

1. 實際操作後所得資料如下：

x 值	形成的圖形	面積	周長	循環次數	重疊線段長
1		1	4	4	0
2		4	8	4	4
3		21	20	4	0
4		12	14	1	1
5	參閱附錄 P3	25	20	4	48
6	參閱附錄 P3	36	24	4	32
7	參閱附錄 P3	77	36	4	44
8	參閱附錄 P3	56	30	1	6

2. 根據上表，我們推論面積通式、周長通式、循環次數可以區分爲以下類型：

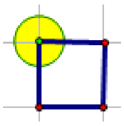
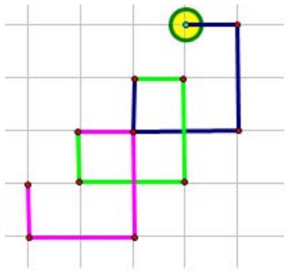
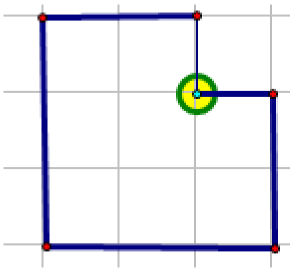
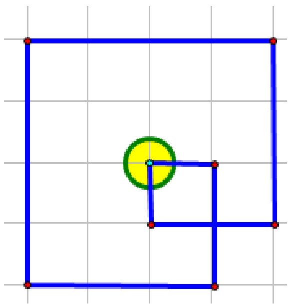
x	面積通式	周長通式	循環次數
x=4n+1	x^2	4x	4
x=4n+2	x^2	4x	4
x=4n+3	$(x+2)^2-4$	(x+2)×4	4
x=4n	x(x-1)	(2x-1)×2	1

3. 此規律之 x 不論為何，必可繞回原點，由於證明篇幅較多，我們將在正方形舞步探討時呈現證明過程。

(三) 三缺一(規律三) --------走法規則：1,2,3,4…x-1,x,x,x-1…3,2,1(全部向右轉)

註：每一組規律中的 4 個，有 2 個是四角中缺一角。

1. 實際操作後所得資料如下：

x 值	形成的圖形	面積	周長	循環次數	重疊線段長
1		1	4	2	0
2		不是封閉圖形	∞	∞	0
3		8	12	1	0
4		15	16	1	0
5	參閱附錄 P4	25	20	2	20
6	參閱附錄 P4	不是封閉圖形	∞	∞	0
7	參閱附錄 P4	48	28	1	6
8	參閱附錄 P4	63	32	1	8
9	參閱附錄 P5	81	36	2	48
10	參閱附錄 P5	不是封閉圖形	∞	∞	0
11	參閱附錄 P5	120	44	1	20
12	參閱附錄 P5	143	48	1	24

2. 根據上表，我們推論面積通式、周長通式、循環次數可以區分爲以下類型：

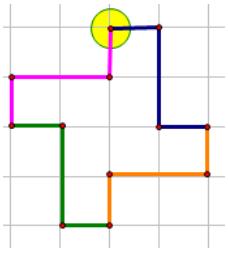
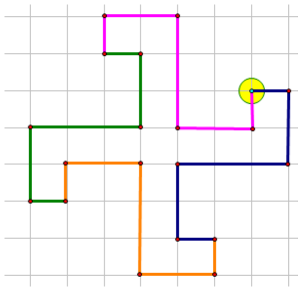
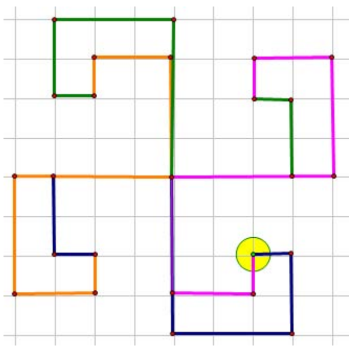
x	面積通式	周長通式	循環次數
4n+1	x^2	4x	2
4n+2	不是封閉圖形	∞	∞
4n+3	x^2-1	4x	1
4n	x^2-1	4x	1

3. 在此規律下，只有 x=4n+2 無法走回原點，其餘當 x=4n+1、4n+3、4n，皆可繞回原點，我們將在正方形舞步探討時證明。

(四) **風車一(規律四)** --------走法規則：向右轉「1,2,3⋯x-1,x」，向左轉「x-1⋯3,2,1」

說明：移動步數爲「1,2,3⋯x-1,x」時，行進方向每次向右轉 90 度，移動步數爲「x-1⋯3,2,1」時，行進方向每次向左轉 90 度，以下簡稱爲 R(1,x)＋L(x-1,1)。

1. 實際操作後所得資料如下：

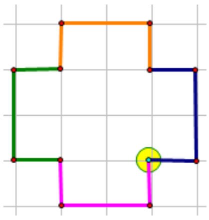
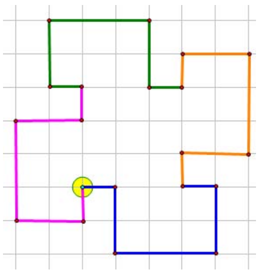
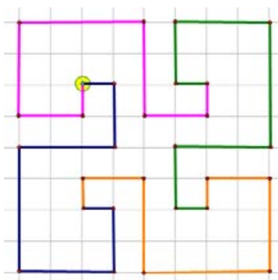
x 值	形成的圖形	面積	周長	循環次數	重疊線段長
1	x=1，情況單純，不需討論。	非封閉圖形	∞	∞	0
2		2×4=8	16	4	0
3		4×4+1=17	36	4	0
4		4×4=16	52	4	12
5	參閱附錄 P6	4×4+1=17	72	4	28
6	參閱附錄 P6	40	116	4	28
7	參閱附錄 P6	65	168	4	28
8	參閱附錄 P6	64	200	4	56

2. 根據上表，我們推論面積通式、周長通式、循環次數可以區分為以下類型：

x	面積通式	周長通式	循環次數
x=4n+1	$(x-1)^2+1(n\neq 0)$	$[x(x+1)/2+(x-2)n]\times 4=2x^2+x(2+4n)-8n\ (n\neq 0)$	$4(x\neq 1)$
x=4n+2	x^2+4	$[x(x+1)/2+(x+1)(n+1)-x]\times 4=2x^2+x(2+4n)+4n+4$	4
x=4n+3	$(x+1)^2+1$	$[(n+1)x+x(x+1)/2]\times 4=2x^2+2(2n+3)x$	4
x=4n	x^2	$[x(x+1)/2+(x-1)n]\times 4=2x^2+x(4n+2)-4n$	4

(五) 風車二(規律五) --------走法規則：向右轉「1,2,3⋯x-1」，向左轉「x,x-1⋯3,2,1」

1. 實際操作後所得資料如下：

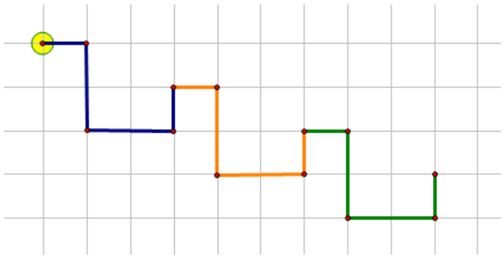
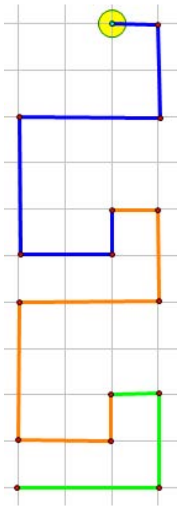
x 值	形成的圖形	面積	周長	循環次數	重疊線段長
1	x=1，情況單純，不需討論。	不是封閉圖形	∞	∞	0
2		$4^2-1\times4=4\times3=12$	16	4	0
3		$7^2-4\times4=11\times3=33$	36	4	0
4		$8^2-4\times4=12\times4=48$	64	4	0
5	參閱附錄 P7	65	36	4	12
6	參閱附錄 P7	108	48	4	28
7	參閱附錄 P7	161	100	4	28
8	參閱附錄 P7	192	160	4	28
9	略	225	68	4	88
10	略	300	80	4	88
11	略	385	164	4	88
12	略	432	256	4	164

2. 根據上表，我們推論面積通式、周長通式、循環次數可以區分為以下類型：

x	面積通式	周長通式	循環次數
$x=4n+1$	$x(3x-2)\quad(n\neq 0)$	$4(2x-1)\quad(n\neq 0)$	$4(x\neq 1)$
$x=4n+2$	$3x^2$	$8x$	
$x=4n+3$	$3x^2+2x$	$4(2x+1)+8(x-2)=16x-12$	
$x=4n$	$3x^2$	$8(3x-4)$	

(六)走不回(規律六) --------走法規則：向右轉「1,2,3⋯x-1,x」，向左轉「x,x-1⋯3,2,1」

1. 實際操作後所得資料如下：

x 值	形成的圖形	面積	周長	循環次數	重疊線段長
1	x=1，情況單純，不需討論。	不是封閉圖形	∞	∞	0
2		不是封閉圖形	∞	∞	0
3		不是封閉圖形	∞	∞	0

2. 這一類的規則的圖形一定走不回來，無論是面積、周長、循環次數都是無限大。

二、 正方形舞步的探討

(一) 如何判斷是否可以走回原點及走回原點所需的循環次數之探討

1. 在正方形舞步中，由於是轉 90 度，因此在每一循環中奇數步和偶數步會分別影響 X 座標、Y 座標。若此循環開始的第一步為 X 方向，則奇數步影響 X 座標、偶數步影響 Y 座標；若此循環開始的第一步為 Y 方向，則奇數步影響 Y 座標、偶數步影響 X 座標。因此我們可以先找出完成每一次循環後，X 座標和 Y 座標的改變量，並依每次循環的 X 座標和 Y 座標的累計改變量是否可以為零，來判斷是否可以回到原點。

2. 證明基本型【1,2,3⋯x-1,x(全部向右轉 90 度)】走法規則中，

當 x=4n，必無法走回原點；當 x=4n+1、x=4n+2、x=4n+3，必可以走回原點。

證明過程：

(1) 當 x=4n，每一步對位置座標的影響如下表：

	1	2	3	4	⋯	⋯	4n-3	4n-2	4n-1	4n
第1個循環	+X	-Y	-X	+Y	⋯	⋯	+X	-Y	-X	+Y
第2個循環	+X	-Y	-X	+Y	⋯	⋯	+X	-Y	-X	+Y

註：利用步數除以 4 所得的餘數來判斷移動方向，餘 1 表+X；餘 2 表- Y；餘 3 表-X；整除表+Y。

由表中可知第 2 個以後的循環對 X、Y 座標的影響皆與第 1 個循環相同，因此只需考慮第 1 個循環後是否可以回到原點即可。

奇數步對 X 座標的影響量 $\Delta X_1 = 1-3+5-7+\ldots\ldots+(4n-3)-(4n-1)=-2n$

偶數步對 Y 座標的影響量 $\Delta Y_1 = -2+4-6+8-\ldots\ldots-(4n-2)+4n=2n$

因此可知第 1 個循環後無法回到原點，即當 x=4n，必無法走回原點。

(2) 當 x=4n+1，每一步對位置座標的影響如下表：

	1	2	3	4	⋯	⋯	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1
第 1 個循環	+X	-Y	-X	+Y	⋯	⋯	+X	-Y	-X	+Y	+X
第 2 個循環	-Y	-X	+Y	+X	⋯	⋯	-Y	-X	+Y	+X	-Y
第 3 個循環	-X	+Y	+X	-Y	⋯	⋯	-X	+Y	+X	-Y	-X
第 4 個循環	+Y	+X	-Y	-X	⋯	⋯	+Y	+X	-Y	-X	+Y

第 1 個循環 $\Delta X_1 = 1-3+5-7+\ldots\ldots+(4n-3)-(4n-1)+(4n+1)=2n+1$

$\Delta Y_1 = -2+4-6+8-\ldots\ldots-(4n-2)+4n=2n$

第 2 個循環 $\Delta X_2 = -2+4-6+8-\ldots\ldots-(4n-2)+4n=2n$

$\Delta Y_2 = -1+3-5+7+\ldots\ldots-(4n-3)+(4n-1)-(4n+1)=-(2n+1)$

第 3 個循環 $\Delta X_3 = -1+3-5+7+\ldots\ldots-(4n-3)+(4n-1)-(4n+1)=-(2n+1)$

$\Delta Y_3 = 2-4+6-8+\ldots\ldots+(4n-2)-4n=-2n$

第 4 個循環 $\Delta X_4 = 2-4+6-8+\ldots\ldots+(4n-2)-4n=-2n$

$\Delta Y_4 = 1-3+5-7+\ldots\ldots+(4n-3)-(4n-1)+(4n+1)=2n+1$

由此可知，四次循環後 $\Delta X = \Delta X_1+\Delta X_2+\Delta X_3+\Delta X_4=0$ ；

$\Delta Y = \Delta Y_1+\Delta Y_2+\Delta Y_3+\Delta Y_4=0$

(3) 當 x=4n+2，每一步對位置座標的影響如下表：

	1	2	3	4	⋯	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1	4n+2
第 1 個循環	+X	-Y	-X	+Y	⋯	+X	-Y	-X	+Y	+X	-Y
第 2 個循環	-X	+Y	+X	-Y	⋯	-X	+Y	+X	-Y	-X	+Y

由上表中可以清楚看出，第 1 個循環和第 2 個循環對座標的改變量會有抵銷的現象，因此兩個循環後即可回到原點。

(4) 當 x=4n+3，每一步對位置座標的影響如下表：

	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1	4n+2	4n+3
第 1 個循環	+X	-Y	-X	+Y	…	+X	-Y	-X	+Y	+X	-Y	-X
第 2 個循環	+Y	+X	-Y	-X	…	+Y	+X	-Y	-X	+Y	+X	-Y
第 3 個循環	-X	+Y	+X	-Y	…	-X	+Y	+X	-Y	-X	+Y	+X
第 4 個循環	-Y	-X	+Y	+X	…	-Y	-X	+Y	+X	-Y	-X	+Y

由上表中可以清楚看出，第 1 個循環和第 3 個循環對座標的改變量會有抵銷的現象、第 2 個循環和第 4 個循環對座標的改變量會有抵銷的現象，因此 4 個循環後即可回到原點。

3. **證明雲霄飛車【1,2,3…x-1,x,x-1…3,2,1 (全部向右轉 90 度)】走法規則中，無論 x 值為何，皆可回到原點。**

證明過程：

(1) 當 x=4n，每一步對位置座標的影響如下表：

第 1 循環走法	前半段	1	2	3	4	…	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n
	→	+X	-Y	-X	+Y	…	…	+X	-Y	-X	+Y
	後半段	1	2	3	4	…	…	4n-3	4n-2	4n-1	
	←	-X	-Y	+X	+Y	…	…	-X	-Y	+X	
對座標的改變	$\Delta X_1 = 0$ $\Delta Y_1 = [-2+4-6+8+.....-(4n-2)]\times 2+4n = (-2n)\times 2+4n = 0$										

由此可知，當 x=4n 時，只要一個循環次數即可回到原點。

(2) 當 x=4n+1，每一步對位置座標的影響如下表：

第 1 循環走法	前半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1
	→	+X	-Y	-X	+Y	…	+X	-Y	-X	+Y	+X
	後半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	
	←	+X	+Y	-X	-Y		+X	+Y	-X	-Y	
對座標的改變	$\Delta X_1 = [1-3+5-7+.....+(4n-3)-(4n-1)]\times 2+(4n+1) = (-2n)\times 2+(4n+1) = 1$ $\Delta Y_1 = 0$										

因此第 1 個循環無法回到原點。需進一檢視第 2 循環，

由於第 2 循環的第 1 步為第 8n+2 步，除以 4 後，餘 2，因此由-Y 開始，

第 2 循環走法	前半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1
	→	-Y	-X	+Y	+X		-Y	-X	+Y	+X	-Y
	後半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	
	←	-Y	+X	+Y	-X		-Y	+X	+Y	-X	
對座標的改變	$\Delta X_2 = 0$ $\Delta Y_2 = [-1+3-5+7+.....-(4n-3)+(4n-1)]\times 2-(4n+1) = (2n)\times 2-(4n+1) = -1$ 此時 $\Delta X = 1+0 = 1$; $\Delta Y = 0-1 = -1$，尚未回到原點。										

由前兩個循環可知，若循環開始爲+X，則走完此循環後 $\Delta X = 1 ; \Delta Y = 0$ ；若循環開始爲-Y，則走完此循環後 $\Delta X = 0 ; \Delta Y = -1$

再檢視第 3 個循環，第 3 循環的第一步爲第(8n+1)×2+1=16n+3 步，除以 4 後，餘 3，因此由-X 開始，

第 3 循環走法	前半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1
	→	-X	+Y	+X	-Y		-X	+Y	+X	-Y	-X
	後半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	
	←	-X	-Y	+X	+Y		-X	-Y	+X	+Y	
對座標的改變	$\Delta X_3 = [-1+3-5+7+.....-(4n-3)+(4n-1)]\times 2-(4n+1) = (2n)\times 2-(4n+1) = -1$ $\Delta Y_3 = 0$ 此時 $\Delta X = 1+0-1 = 0$ ；$\Delta Y = 0-1+0 = -1$ ，尚未回到原點。										

再檢視第 4 個循環，第 4 循環的第一步爲第(8n+1)×3+1=24n+4 步，除以 4 後，餘 0，因此由+Y 開始，

第 3 循環走法	前半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1
	→	+Y	+X	-Y	-X		+Y	+X	-Y	-X	+Y
	後半段	1	2	3	4	…	4n-3	4n-2	4n-1	4n	
	←	+Y	-X	-Y	+X		+Y	-X	-Y	+X	
對座標的改變	$\Delta X_4 = 0$ $\Delta Y_2 = [1-3+5-7+.....+(4n-3)-(4n-1)]\times 2+(4n+1) = (-2n)\times 2+(4n+1) = +1$ 此時 $\Delta X = 1+0-1+0 = 0$ ；$\Delta Y = 0-1+0+1 = 0$ ，**回到原點**。										

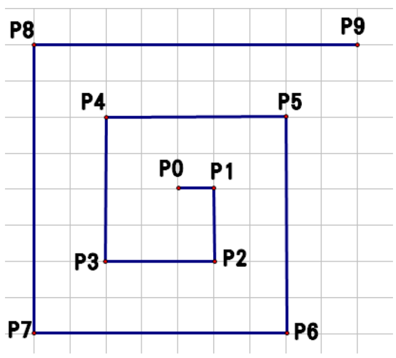
(3) 同理可證，當 x=4n+2 和 x=4n+3 時，亦可證明經過 4 次循環次數後，可以回到原點。

(二) 利用線對稱的觀念來判斷是否可以走回原點及走回原點所需的循環次數之探討

1. 首先我們先找出**基本型【1,2,3⋯x-1,x(全部向右轉 90 度)】走法規則**中，**第 P_k 點的座標通式**：

我們將起點座標定爲(0,0)，然後以每 4 步爲一組，來推出第 P_4、P_8…P_{4m} 點的座標，結果如下表：

第 1 個 4 步	1	2	3	4	第 P_4 點座標
	+X	-Y	-X	+Y	(-2 , 2)
第 2 個 4 步	5	6	7	8	第 P_8 點座標
	+X	-Y	-X	+Y	(-2×2 , 2×2)
…	…	…	…	…	…
第 m 個 4 步	4m-3	4m-2	4m-1	4m	**第 P_{4m} 點座標**
	+X	-Y	-X	+Y	**(-2×m , 2×m)**

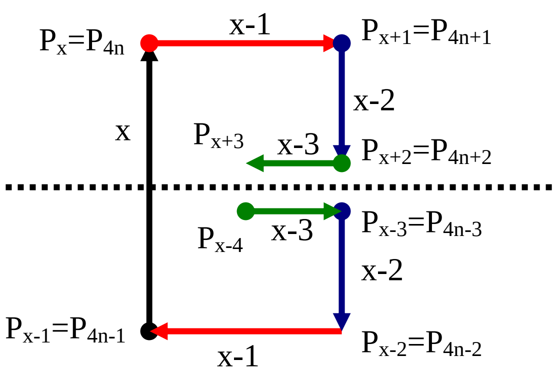


第 4m+1 步爲向右，因此**第 P_{4m+1} 點座標爲(2m+1 , 2m)**；第 4m+2 步爲向下，因此**第 P_{4m+2} 點座標爲(2m+1 , -2m-2)**；第 4m+3 步爲向左，因此**第 P_{4m+3} 點座標爲(-2m-2 , -2m-2)**。

2. 雲霄飛車【1,2,3⋯x-1,x,x-1⋯3,2,1 (全部向右轉 90 度)】走法規則下所成圖形必爲**線對稱，且存在著相對稱點。**

我們發現在此規律下，每一完整循環所畫出來的舞步，都是以通過第 x 步中點的水平線或鉛直線爲對稱軸的線對稱圖形。我們依 x 爲 4n、4n+1、4n+2、4n+3 的情形分述如下：

(1) 當 x=4n 時，x 可被 4 整除，故第 x 步爲向+Y 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：

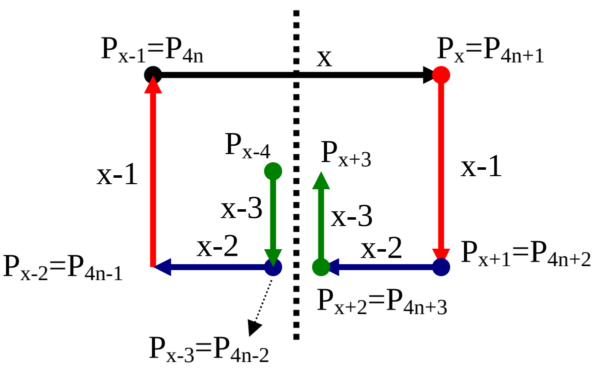


a.由上述探討 1 知 P_{4n} 的座標爲(-2n,2n)、P_{4n-1} 的座標爲(-2n,-2n)，由此可知圖形的**對稱軸爲 y=0 的直線**。

b.又由右圖可知，第 P_{x-1} 點和第 P_x 點、第 P_{x+1} 點和第 P_{x-2} 點、第 P_{x+2} 點和第 P_{x-3} 點互爲對稱點，由此可以推論出**若 a+b=2x-1，則第 P_a 點和第 P_b 點互爲對稱點**。

c.由 a、b 可知：起點 P_0=(0,0)與一次循環的最後一點 P_{2x-1} 的座標必爲以直線 y=0 爲軸的相對稱點，因此可知 P_{2x-1}=(0,0)，表示此種情形下經一次循環便可回到原點。

(2) 當 x=4n+1 時，x 除以 4 會餘 1，故第 x 步爲向+X 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：



a.由上述探討 1 知 P_{4n+1} 的座標爲(2n+1,2n)、P_{4n} 的座標爲(-2n,2n)，由此可知圖形的**對稱軸爲 X=1/2 的直線**。

b.又由右圖可知，

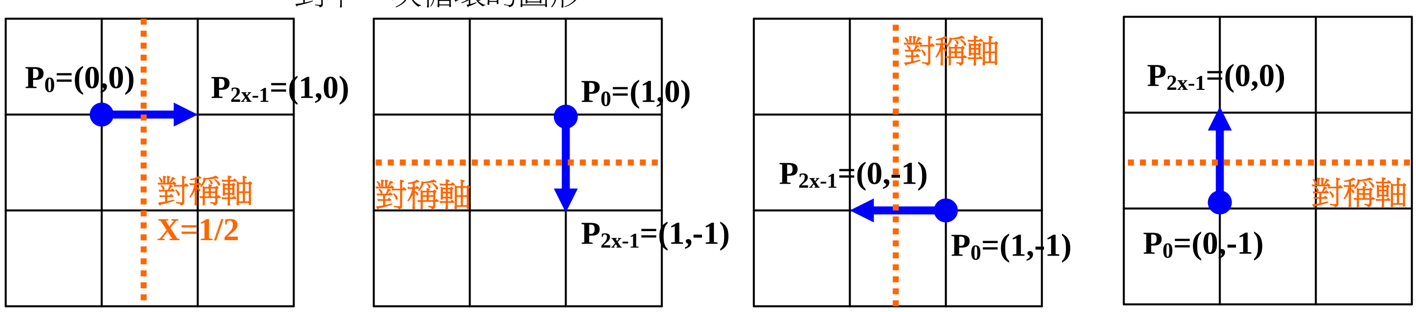
若 a+b=2x-1，則第 P_a 點和第 P_b 點互爲對稱點。

c.起點 P_0=(0,0)與一次循環的最後一點 P_{2x-1} 的座標必爲以直線 X=1/2 爲軸的相對稱點，因此可知 P_{2x-1}=(1,0)，尙未回到原點。

d. 由上可得以下結論：

當 x=4n+1 時，第一循環的第一步向+X 方向移動，完成一次循環後位置座標會由 P_0=(0,0)向+X 方向移動至 P_{2x-1}=(1,0)，即以 X=1/2 的直線爲對稱軸。

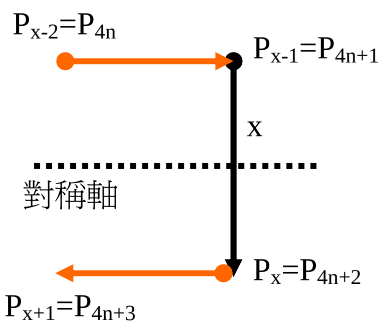
由於完成第一次循環共走了 2x-1=8n+1 步，因此第二個循環的第一步將會向-Y 方向移動，故**將第一次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。我們可以進一步推論，將此次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到下一次循環的圖形。



(第一次循環：第 1 步+X) (第二次循環：第 1 步-Y) (第三次循環：第 1 步-X) (第四次循環：第 1 步+Y)

由上圖可知，當 x=4n+1 時，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

(3) 當 $x=4n+2$ 時，x 除以 4 會餘 2，故第 x 步為向-Y 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：



a.由上述探討 1 知 P_{4n+1} 的座標為$(2n+1,2n)$、P_{4n+2} 的座標為$(2n+1,-2n-2)$，由此可知**對稱軸為 $Y=-1$ 的直線**。

b.又由右圖可知，

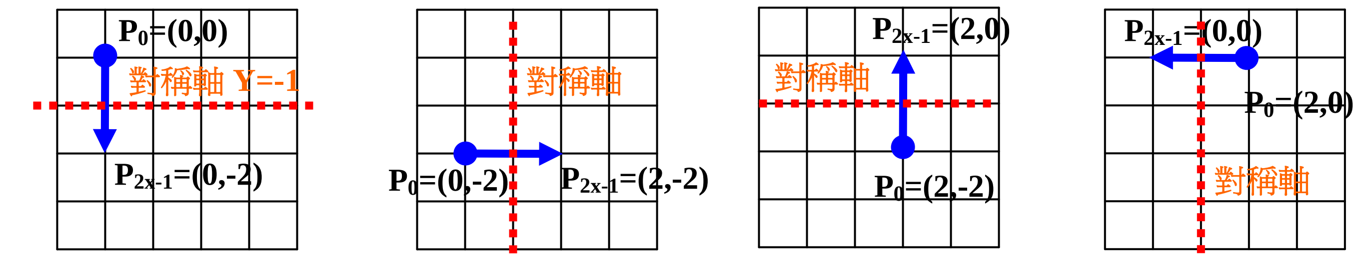
若 $a+b=2x-1$，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點。

c.起點 $P_0=(0,0)$與一次循環的最後一點 P_{2x-1} 的座標必為以直線 $Y=-1$ 為軸的相對稱點，因此可知 $P_{2x-1}=(0,-2)$，尚未回到原點。

d. 由上可得以下結論：

當 $x=4n+2$ 時，第一循環的第一步向+X 方向移動，完成一次循環後位置座標會由 $P_0=(0,0)$向-Y 方向移動至 $P_{2x-1}=(0,-2)$，即以 $Y=-1$ 的直線為對稱軸。

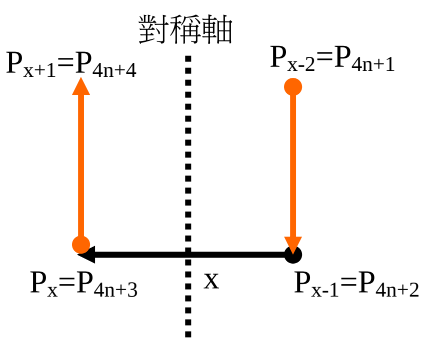
由於完成第一次循環共走了 $2x-1=8n+3$ 步，因此第二個循環的第一步將會向+Y 方向移動，故**將第一次循環圖形逆時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。我們可以進一步推論，將此次循環圖形逆時針旋轉 90^0 後，即可得到下一次循環的圖形。



(第一次循環：第 1 步+X) (第二次循環：第 1 步+Y)(第三次循環：第 1 步-X) (第四次循環:第 1 步-Y)

由上圖可知，當 $x=4n+2$ 時，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

(4) 當 $x=4n+3$ 時，x 除以 4 會餘 3，故第 x 步為向-X 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：



a.由上述探討 1 知 P_{4n+3} 的座標為$(-2n-2,-2n-2)$、P_{4n+2} 的座標為$(2n+1,-2n-2)$，由此可知**對稱軸為 $X=-1/2$ 的直線**。

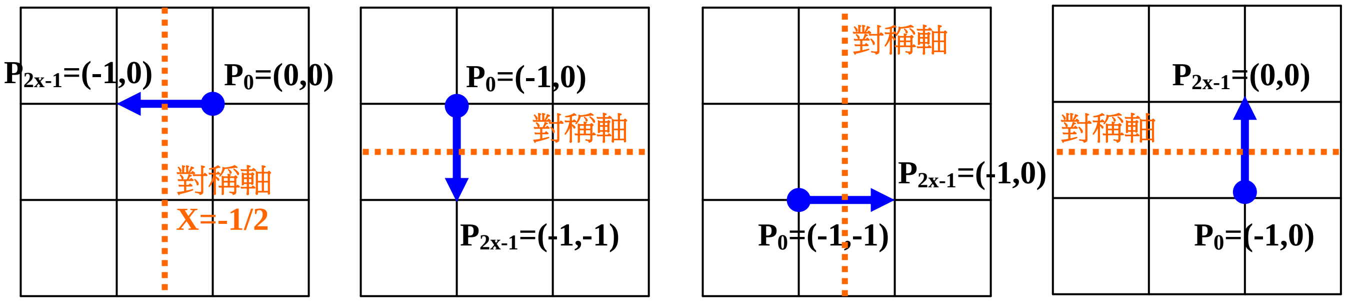
b.又由右圖可知， **若 $a+b=2x-1$，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點**。

c.起點 $P_0=(0,0)$與一次循環的最後一點 P_{2x-1} 的座標必為以直線 $X=-1/2$ 為軸的相對稱點，因此可知 $P_{2x-1}=(-1,0)$，尚未回到原點。

d. 由上可得以下結論：

當 $x=4n+3$ 時，第一循環的第一步向+X 方向移動，完成一次循環後位置座標會由 $P_0=(0,0)$向-X 方向移動至 $P_{2x-1}=(-1,0)$，即以 $X=-1/2$ 的直線為對稱軸。

由於完成第一次循環共走了 $2x-1=8n+5$ 步，因此第二個循環的第一步將會向-Y 方向移動，故**將第一次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。我們可以進一步推論，將此次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到下一次循環的圖形。



(第一次循環：第 1 步+X) (第二次循環：第 1 步-Y) (第三次循環：第 1 步-X) (第四次循環：第 1 步+Y)

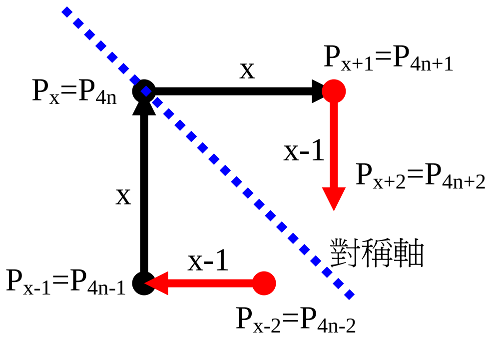
由上圖可知，當 x=4n+3 時，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

(5) 由上述(1)~(4)我們可以利用圖形的線對稱特性，證明**雲霄飛車【1,2,3…x-1,x,x-1…3,2,1 (全部向右轉 90 度)】走法規則下，除 x=4n 時，一次循環次數便可到原點外，其餘 x 值只要四次循環次數便可到原點。**

3. **利用線對稱觀念，探討三缺一【1,2,3,4…x-1,x,x,x-1…3,2,1(全部向右轉)】走法規則下，走回原點所需的循環次數。**

在此走法規律下，每一完整循環中的前 x 步和後 x 步，會呈現線對稱的情形，且會有相對應點的存在。我們依 x 為 4n、4n+1、4n+2、4n+3 的情形分述如下：

(1) 當 x=4n 時，x 可被 4 整除，故第 x 步為向+Y 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：

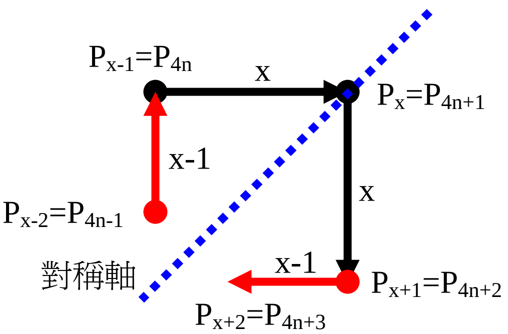


a.由右圖可知對稱軸必為斜率為-1 且通過 P_x=(-2n,2n)的直線。
令對稱軸為 Y=-X+b，將 P_x=(-2n,2n)代入，可得 b=0，因此可知**對稱軸為 Y=-X 的直線**。

b.又由右圖可知，
若 a+b=2x，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點。

c.起點 P_0=(0,0)與一次循環的最後一點 P_{2x} 的座標必為以直線 Y=-X 為軸的相對稱點，因此可知 P_{2x}=(0,0)，因此一次循環後便可回到原點。

(2) 當 x=4n+1 時，x 除以 4 會餘 1，故第 x 步為向+X 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：

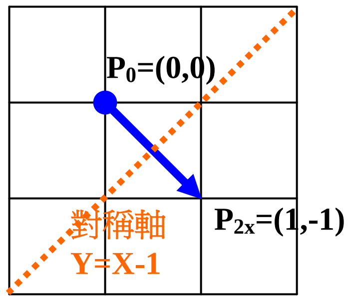


a.由右圖可知對稱軸必為斜率為 1 且通過 P_x =P_{4n+1}=(2n+1,2n)的直線。
令對稱軸為 Y=X+b，將 P_x=(2n+1,2n)代入，可得 b=-1，因此可知**對稱軸為 Y=X-1 的直線**。

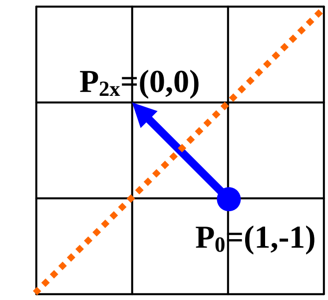
b.又由右圖可知，
若 a+b=2x，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點。

c.起點 P_0=(0,0)與一次循環的最後一點 P_{2x} 的座標必為以直線 Y=X-1 為軸的相對稱點，因此可知 P_{2x}=(1,-1)，一次循環後尚未回到原點。

由於完成第一次循環共走了 2x=8n+2 步，因此第二個循環的第一步將會向-X 方向移動，故**將第一次循環圖形順時針旋轉 180^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。我們可以進一步推論，將此次循環圖形順時針旋轉 180^0 後，即可得到下一次循環的圖形。



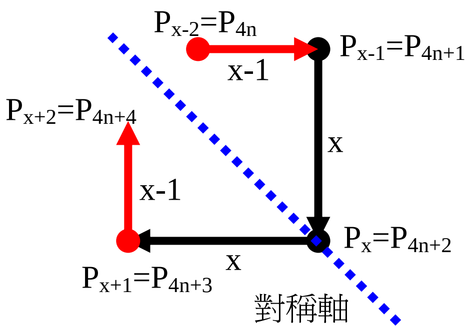
(第一次循環：第 1 步+X)



(第二次循環：第 1 步-X)

由上圖可知，當 x=4n+1 時，經過 2 次循環次數後，便可回到原點。

(3) 當 x=4n+2 時，x 除以 4 會餘 2，故第 x 步為向-Y 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：

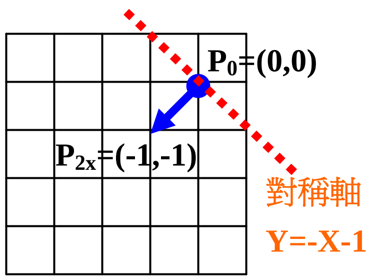


a.由右圖可知對稱軸必為斜率為-1 且通過 $P_x=P_{4n+2}=(2n+1,-2n-2)$的直線。
令對稱軸為 Y=-X+b，將 $P_x=(2n+1,-2n-2)$代入，可得 b=-1，因此可知**對稱軸為 Y=-X-1 的直線**。

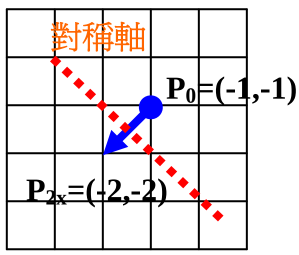
b.又由右圖可知，
若 a+b=2x，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點。

c.起點 $P_0=(0,0)$與一次循環的最後一點 P_{2x} 的座標必為以直線 Y=-X-1 為軸的相對稱點，因此可知 $P_{2x}=(-1,-1)$，一次循環後尚未回到原點。

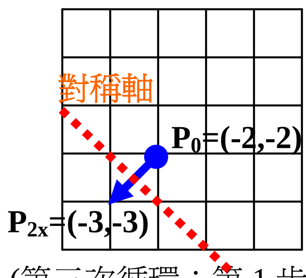
由於完成第一次循環共走了 2x=8n+4 步，因此第二個循環的第一步將會向+X 方向移動，故第二次循環的圖形與第一次循環的圖形相同。



(第一次循環：第 1 步+X)



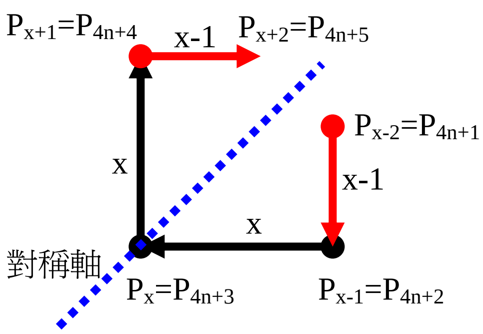
(第二次循環：第 1 步+X)



(第三次循環：第 1 步+X)

由上圖可知，當 x=4n+2 時，無論循環幾次都不會回到原點。

(4) 當 x=4n+3 時，x 除以 4 會餘 3，故第 x 步為向-X 移動，據此我們可以畫出下圖來幫助思考：



a.由右圖可知對稱軸必爲斜率爲 1 且通過 $P_x=P_{4n+3}=(-2n-2,-2n-2)$的直線。

令對稱軸爲 Y=X+b，將 $P_x=(-2n-2,-2n-2)$代入，可得 b=0，因此可知**對稱軸爲 Y=X 的直線**。

b.又由右圖可知，**若 a+b=2x，則第 P_a 點和第 P_b 點互爲對稱點**。

c.起點 $P_0=(0,0)$與一次循環的最後一點 P_{2x} 的座標必爲以直線 Y=X 爲軸的相對稱點，因此可知 $P_{2x}=(0,0)$，因此一次循環後便可回到原點。

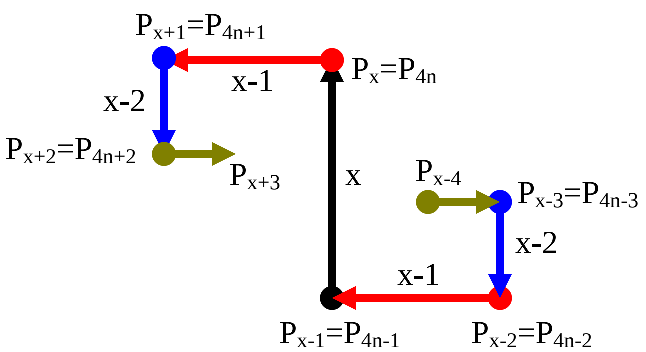
(三) **利用點對稱觀念，探討風車一【向右轉「1,2,3⋯x-1,x」，向左轉「x-1⋯3,2,1」】走法規則下，走回原點所需的循環次數**。

在此走法規律下，每一完整循環中的前 x-1 步和後 x-1 步，會呈現點對稱的情形，且會有相對應點的存在。我們依 x 爲 4n、4n+1、4n+2、4n+3 的情形分述如下：

1. 當 x=4n 時，x 可被 4 整除，故第 x 步爲向+Y 移動，我們將第 x 步前後幾步對位置座標的影響列表如下：

走法	向右轉							向左轉						
	1	⋯	x-4	x-3	x-2	x-1	x	x-1	x-2	x-3	x-4	⋯	1
對座標的影響	+X	⋯	+Y	+X	-Y	-X	+Y	-X	-Y	+X	+Y	⋯	+X

據此我們可以畫出下圖，來幫助我們思考：

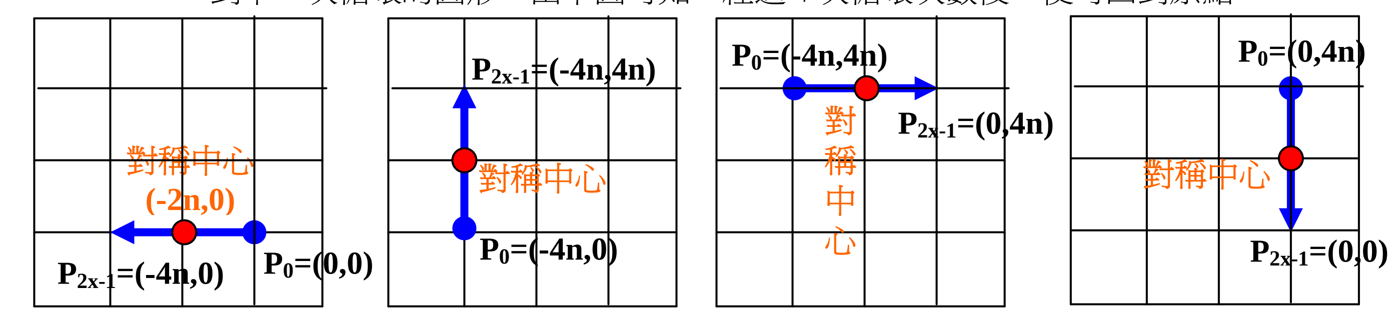


a.我們發現一次循環所成的圖形會是**以第 x 步的中點座標爲中心的點對稱圖形**。又 $P_{x-1}=P_{4n-1}=(-2n,-2n)$；$P_x=P_{4n}=(-2n,2n)$，因此中心點的座標爲(-2n,0)

b.又由右圖可知，第 P_x 點和第 P_{x-1} 點、第 P_{x+1} 點和第 P_{x-2} 點，互爲相對稱點。即**若 a+b=2x-1，則第 P_a 點和第 P_b 點互爲對稱點**。

c.起點 $P_0=(0,0)$與一次循環的最後一點 P_{2x-1} 的座標必爲以(-2n,0)爲中心的相對稱點，因此可知 $P_{2x-1}=(-4n,0)$，因此一次循環後無法回到原點。

由上表可知，由於第一次循環的最後一步爲向+X 移動，因此第二個循環的第一步將會向-Y 方向移動，故**將第一次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。我們可以進一步推論，將此次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到下一次循環的圖形。由下圖可知，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

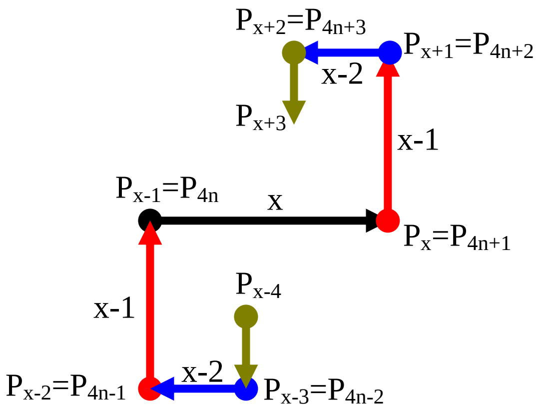


(第一次循環：第 1 步+X) (第二次循環：第 1 步-Y)(第三次循環：第 1 步-X) (第四次循環：第 1 步+Y)

2. 當 x=4n+1 時，x 除以 4 於 1，故第 x 步為向+X 移動，我們將第 x 步前後幾步對位置座標的影響列表如下：

走法	向右轉							向左轉					
	1	…	x-4	x-3	x-2	x-1	x	x-1	x-2	x-3	x-4	…	1
對座標的影響	+X	…	+X	-Y	-X	+Y	+X	+Y	-X	-Y	+X	…	+X

據此我們可以畫出下圖，來幫助我們思考：



a.圖形是以第 x 步的中點座標為中心的點對稱圖形。

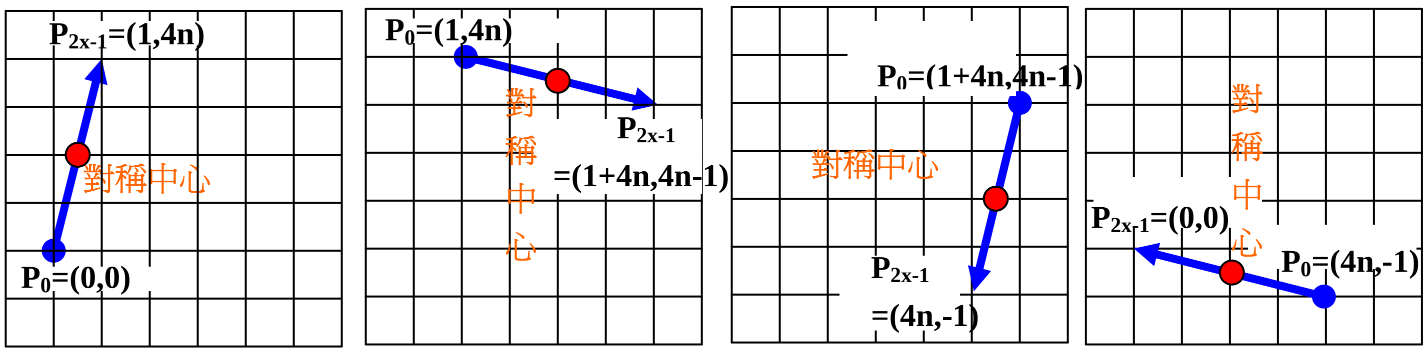
又 $P_x=P_{4n+1}=(2n+1,2n)$；$P_{x-1}=P_{4n}=(-2n,2n)$，因此中心點的座標為(1/2,2n)

b.又由右圖可知，第 P_x 點和第 P_{x-1} 點、第 P_{x+1} 點和第 P_{x-2} 點，互為相對稱點。即

若 a+b=2x-1，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點。

c.起點 $P_0=(0,0)$與一次循環的最後一點 P_{2x-1} 的座標必為以(1/2,2n)為中心的相對稱點，因此可知 $P_{2x-1}=(1,4n)$，因此一次循環後無法回到原點。

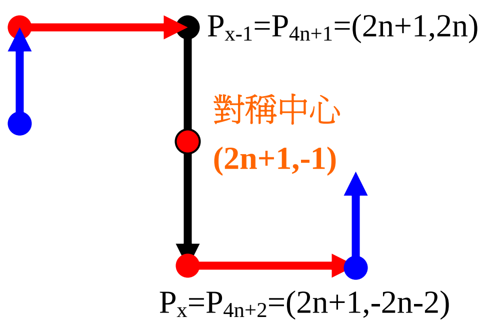
由上表可知，由於第一次循環的最後一步為向+X 移動，因此第二個循環的第一步將會向-Y 方向移動，故**將第一次循環圖形順時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。

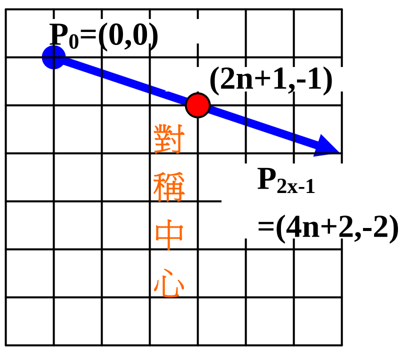


(第一次循環：第 1 步+X) (第二次循環：第 1 步-Y) (第三次循環：第 1 步-X) (第四次循環：第 1 步+Y)

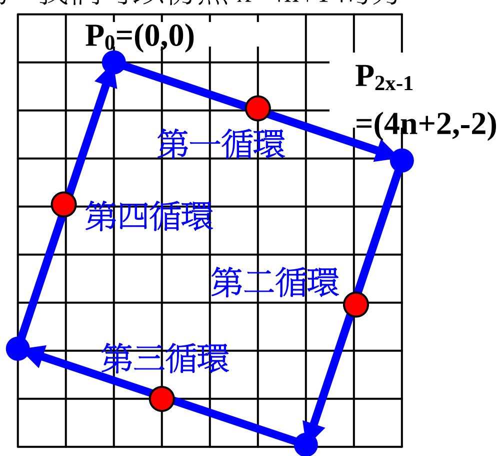
由上圖可知，當 x=4n+1 時，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

3. 當 x=4n+2 時，x 除以 4 於 2，故第 x 步為向-Y 移動，我們可以仿照 x=4n+1 的方式處理如下：



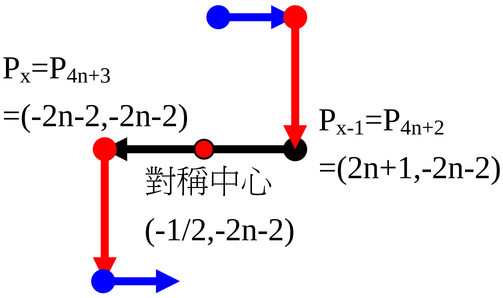


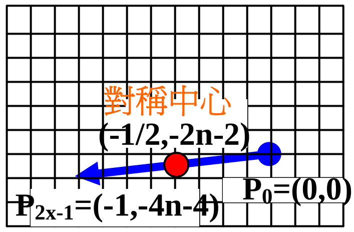
(第一次循環：第 1 步+X)



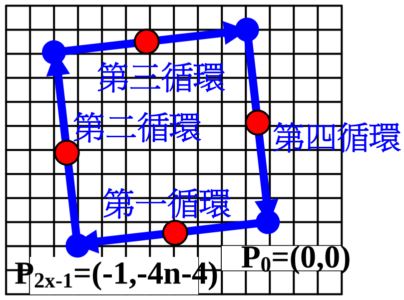
上圖可知，當 x=4n+2 時，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

4. 當 x=4n+3 時，x 除以 4 於 3，故第 x 步爲向-X 移動，我們可以仿照 x=4n+1 的方式處理如下：





(第一次循環：第 1 步+X)



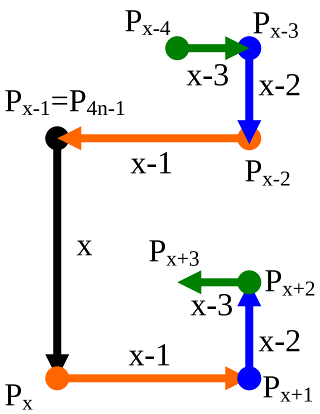
(四) **探討風車二【向右轉「1,2,3…x-1」，向左轉「x,x-1…3,2,1」】走法規則下，走回原點所需的循環次數。**

我們依 x 爲 4n、4n+1、4n+2、4n+3 的情形分述如下：

1. 當 x=4n 時，x-1 除以 4 餘 3，因第 x 步爲左轉，所以第 x 步爲向-Y 移動，我們將第 x 步前後幾步對位置座標的影響列表如下：

走法	向右轉						向左轉						
	1	…	x-4	x-3	x-2	x-1	x	x-1	x-2	x-3	x-4	…	1
對座標的影響	+X	…	+Y	+X	-Y	-X	-Y	+X	+Y	-X	-Y	…	-X

據此我們可以畫出下圖，來幫助我們思考：

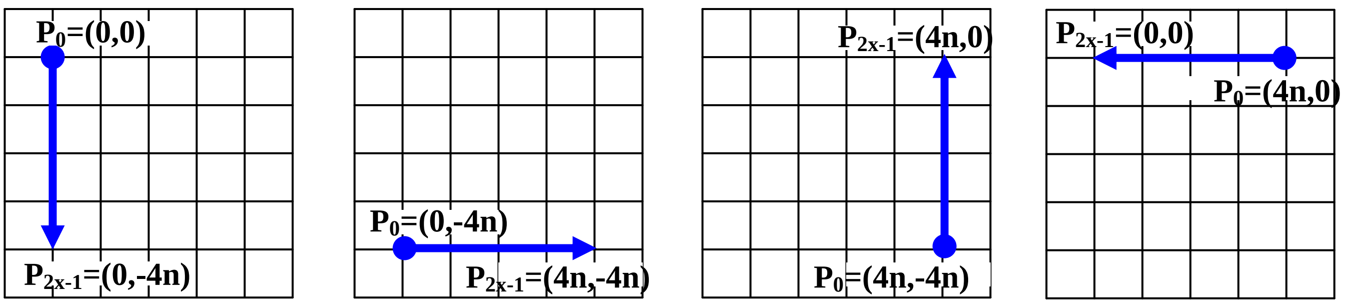


a.一次循環所成的圖形不再是線對稱或點對稱圖形。因此無法仿照之前的處理方式來討論。

b.我們由上表發現除第 x 步之外，第 x-1 步與第 x+1 步、第 x-2 步與第 x+2 步、…、第 1 步與第 2x-1 步對位置座標的影響恰好有抵銷的情形，因此一個完整循環後，相當於只有移動第 x 步(向-Y 方向)。

c.起點爲 P_0=(0,0)，因此 P_{2x-1}=(0,-4n)，因此一次循環後無法回到原點。

由上表可知，由於第一次循環的最後一步爲向-X 移動，因此第二個循環的第一步(右轉)將會向+Y 方向移動，故將**第一次循環圖形逆時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。



(第一次循環：第 1 步+X)(第二次循環：第 1 步+Y)(第三次循環：第 1 步-X)(第四次循環：第 1 步-Y)

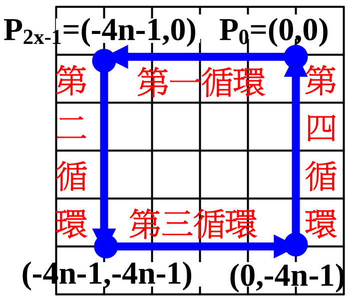
上圖可知，當 x=4n 時，經過 4 次循環次數後，便可回到原點。

2. 當 x=4n+1 時，x-1 除以 4 餘 0，因第 x 步為左轉，所以第 x 步為向-X 移動，我們將第 x 步前後幾步對位置座標的影響列表如下：

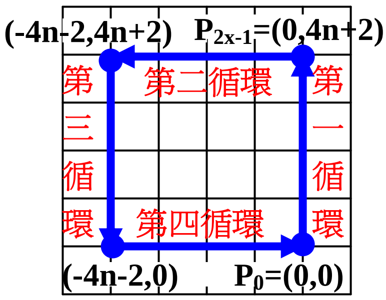
走法	向右轉						向左轉						
	1	…	x-4	x-3	x-2	x-1	x	x-1	x-2	x-3	x-4	…	1
對座標的影響	+X	…	+X	-Y	-X	+Y	-X	-Y	-X	+Y	-X	…	-X

由上表可以發現除第 x 步之外，第 x-1 步與第 x+1 步、第 x-2 步與第 x+2 步、…、第 1 步與第 2x-1 步對位置座標的影響恰好抵銷，一個完整循環後，相當於只有移動第 x 步(向-X 方向)，因此 $P_{2x-1}=(-4n-1,0)$，一次循環後無法回到原點。

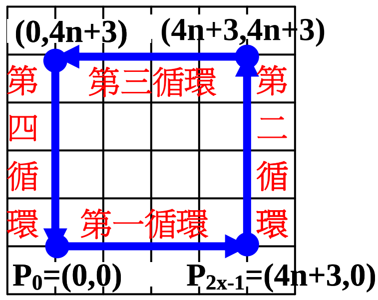
又第二個循環的第一步(右轉)將會向+Y 方向移動，故**將第一次循環圖形逆時針旋轉 90^0 後，即可得到第二次循環的圖形**。因此由下圖(甲)可知經過 4 次循環後便可回到原點。



圖(甲)：x=4n+1



圖(乙)：x=4n+2



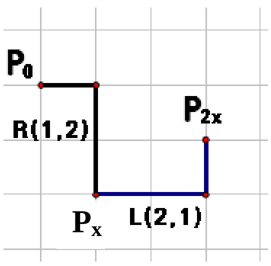
圖(丙)：x=4n+3

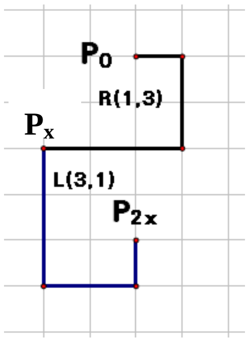
3. 當 x=4n+2 時，x-1 除以 4 餘 1，因第 x 步為左轉，所以第 x 步為向+Y 移動，由於第 x-1 步與第 x+1 步、第 x-2 步與第 x+2 步、…、第 1 步與第 2x-1 步對位置座標的影響恰好抵銷，**一個完整循環後，相當於只有移動第 x 步(向+Y 方向)**，因此 $P_{2x-1}=(0,4n+2)$，一次循環後無法回到原點。

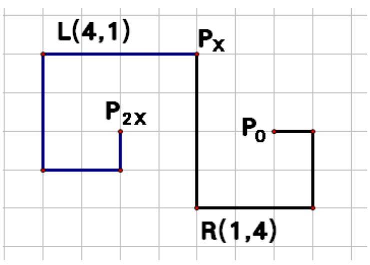
第二個循環的第一步(右轉)將會向+Y 方向移動，故將圖形**逆時針旋轉 90^0** 後即可得到第二次循環的圖形。因此由上圖(乙)可知經過 4 次循環後便可回到原點。

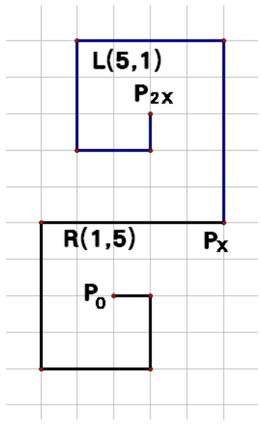
4. 當 x=4n+3 時，x-1 除以 4 餘 2，因第 x 步為左轉，所以第 x 步為向+X 移動，同上的討論可知，一個循環後相當於只移動第 x 步(向+X 方向)，經四次循環後即可回到原點，如圖丙所示。

(五) 探討走不回(規律六)【向右轉「1,2,3…x-1,x」，向左轉「x,x-1…3,2,1」】走法規則下，走回原點所需的循環次數。



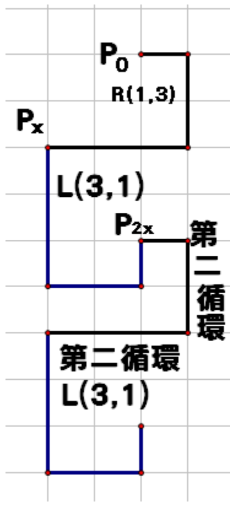






由上圖的觀察我們發現，此走法規則中，**若以第 P_X 點為軸，將「向右轉前 x 步」所成圖形，順時針旋轉 90^0，即可得到「向左轉的後 x 步」**，因此我們可以確定經**一次循環後絕對無法回到原點**。

又第一次循環後的最後一步必定向+Y 方向移動，因此第二個循環的第一步必定也是向+X 方向(向右轉)移動，因此所成圖形與第一次循環相同，故此走法必定無法走回原點。



(六) **歸納出判斷「是否可以走回原點及所需的循環次數」的方法**

由以上各種走法的探討，可以歸納出判斷是否可以走回原點及所需循環次數的步驟如下：

第一步驟：**先檢視一個循環是否可以走回原點**，若否則進入第二步驟。

第二步驟：判斷**第二個循環的第一步向何方移動**，

若是向+X 方向移動，則第二循環的圖形將只是第一循環的平移，因此無法回到原點。

若是向-Y 或+Y 方向移動，則第二循環的圖形會是第一循環的圖形順時針轉 90^0 或逆時針轉 90^0，因此需要 360÷90=4 次循環即可回到原點。

若是向-X 方向移動，則第二循環的圖形會是第一循環的圖形轉 180^0，因此需要 360÷180=2 次循環即可回到原點。

三、 探討改變步伐大小對循環次數及圖形的影響

所走的步伐大小不再是 1、2、3…的遞增步伐，而是任意不規則的步伐大小(以 a_1、a_2、a_3、…、a_n 表示)，在不同規律走法下對循環次數及圖形有何影響？

要回答這個問題，我們依舊要從上述二之(六)的結論開始探討：

(一)改變「步伐大小」會影響第一次循環是否回到原點？

經我們檢視每一規則後，發現步伐大小改為任意不規則時，會有以下現象的發生：

1. 在某些步伐條件下，會使原本第一次循環無法回到原點的狀況，變為一次循環即可回到原點，因此導致循環次數變為 1。

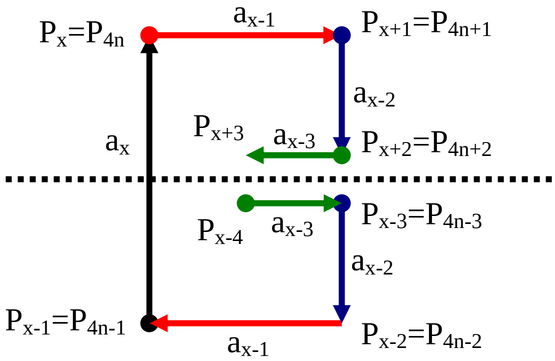
   例如：規則一基本型【1,2,3…x-1,x(全部向右轉 90 度)】走法中無論 x 值為何，第一循環皆無法回到原點。但是若改為任意步伐的形式【a_1、a_2、a_3、…、a_x】，則當 $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots\ldots = 0$ 且 $-a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - \ldots\ldots = 0$ 時，一次循環即可回到原點。

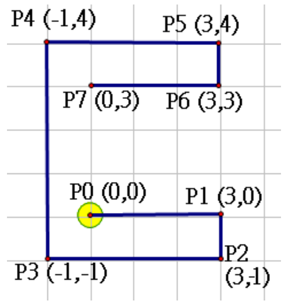
2. 在某些步伐條件下，會使原本一次循環便可回到原點的狀況，變成一次循環無法回到原點，因此會導致循環次數變為 2 或 4 或回不來的情形。

   例如：規則二雲霄飛車【1,2,3…x-1,x,x-1…3,2,1 (全部向右轉 90 度)】走法中，當 x=4n 時，一次循環便可走回原點。

   但是若改為任意步伐的形式【a_1、a_2、a_3、…a_{x-1}、a_x、a_{x-1}…、a_3、a_2、a_1】，則當

$x=4n$ 時，仍可畫出下右圖，圖形的對稱性依舊不變，但是我們無法找出 P_x 點和 P_{x-1} 點的通式座標，因此只能確定它是線對稱圖形，無法確定原點是否落在對稱線上，因此第一次循環後不一定會回到原點。





雲霄飛車【3,1,4,5,4,1,3 (全部向右轉 90 度)】

3. 由上可知步伐大小的改變會影響第一次循環是否回到原點，進而影響循環次數。

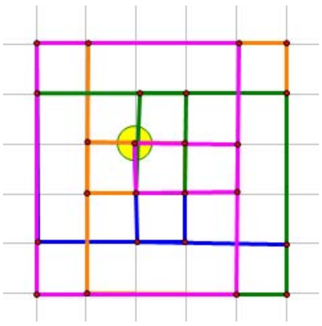
(二)若「步伐大小」改變後，第一次循環仍無法走回原點，則循環次數由一次循環的「步伐數目」所決定，而非每一步的「步伐大小」

由正方形舞步探討中，我們可以發現若將討論中的步伐大小 1、2、…、x-1、x 改為 a_1、a_2、a_3、…、a_n 的步伐大小，雖然會改變每一步的座標位置，但是並不會影響一次循環所造成的線對稱或點對稱的特性，因此上述所有的討論仍然適用。

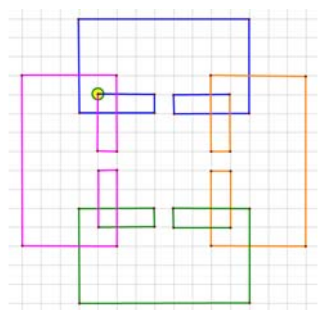
回顧之前的討論，我們知道若第一次循環沒有回到原點的走法，其循環次數主要受第二次循環的第一步往何方移動所影響，而往何方移動又由「步伐數目」所決定，因此我們可以推論**任何第一次循環沒有回到原點的走法，若改變步伐大小不會影響循環次數，但是會讓圖形產生長、寬改變**。

現在我們舉一例子說明如下：例如將雲霄飛車【1,2,3,4,5,4,3,2,1 (全部向右轉 90 度)】的走法改為**雲霄飛車【3,1,4,5,9,5,4,1,3 (全部向右轉 90 度)】**。

我們可以先確認此走法一次循環無法回到原點($3-4+9-4+3\neq0$)，再計算一次循環的「步伐數為 9」，由於 9 除於 4 會餘 1，可知第二循環的第一步向-Y 方向移動(順時針轉 90^0)，因此可知循環次數仍然為 4，並不改變。



雲霄飛車【1,2,3,4,5,4,3,2,1 (全部向右轉 90 度)】

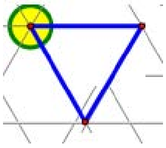
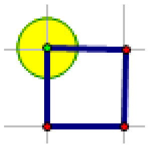
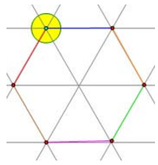
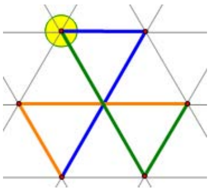
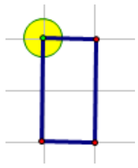
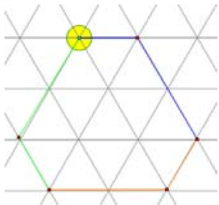
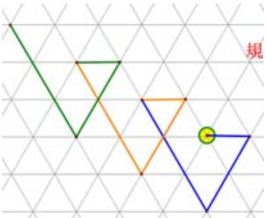
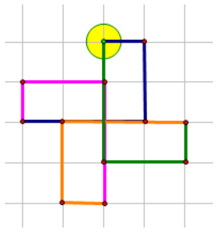
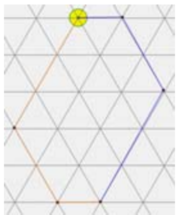
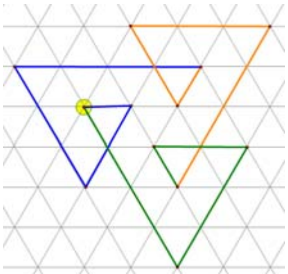
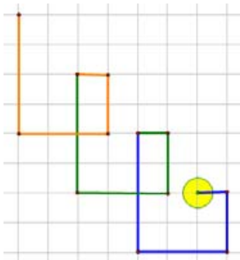
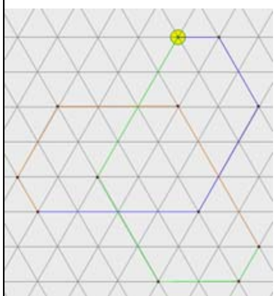
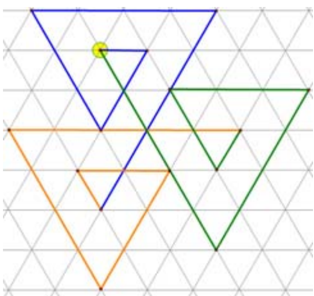
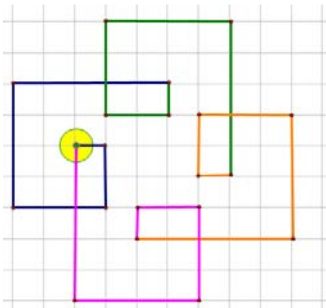
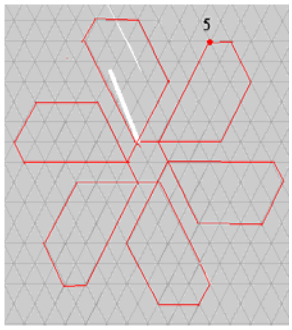
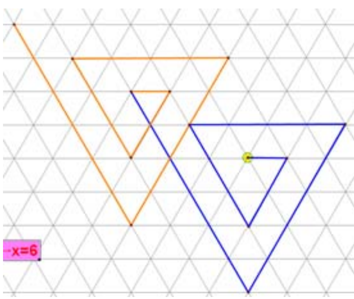
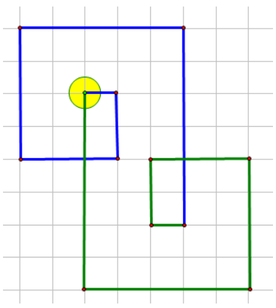
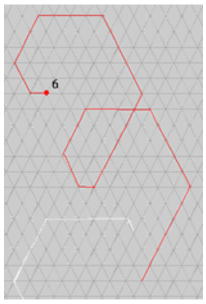


雲霄飛車【3,1,4,5,9,5,4,1,3 (全部向右轉 90 度)】

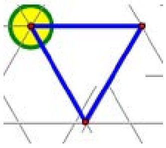
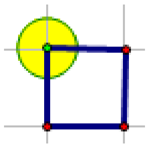
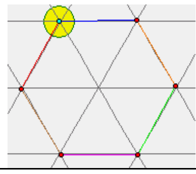
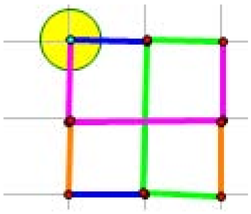
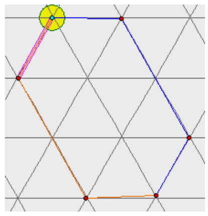
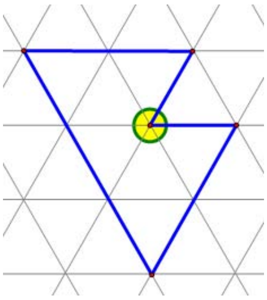
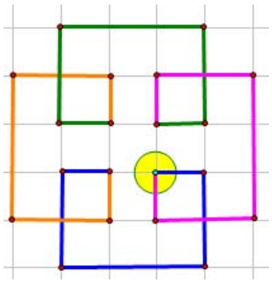
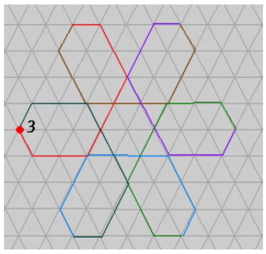
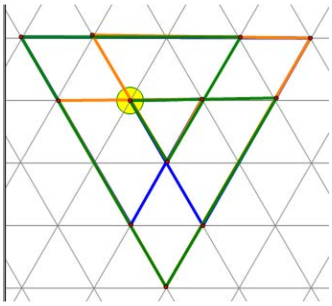
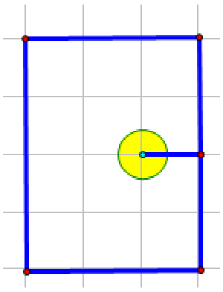
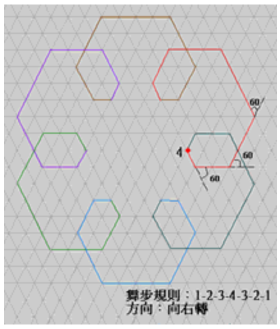
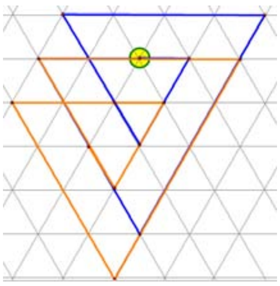
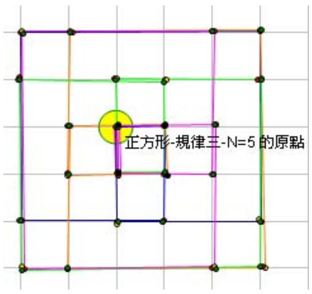
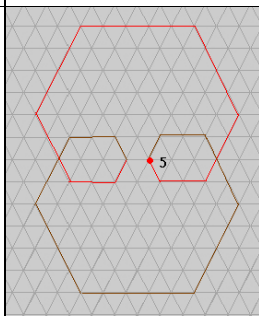
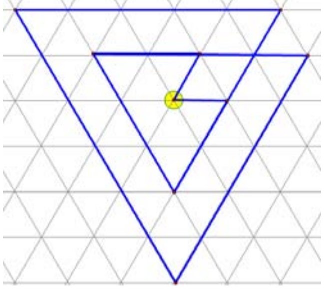
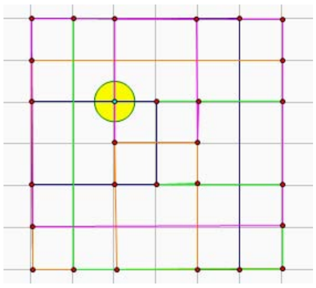
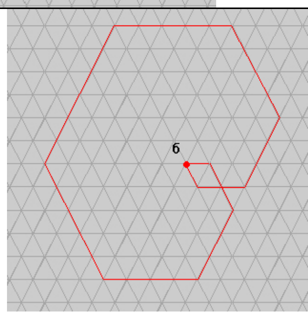
四、 探討改變轉動角度時對循環次數及圖形的影響

(一) 改變轉動角度後所形成的圖形

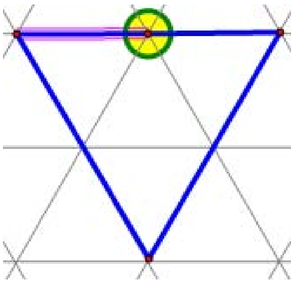
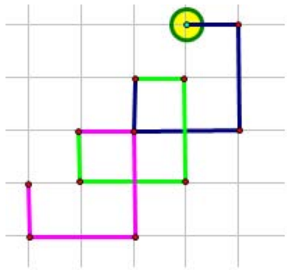
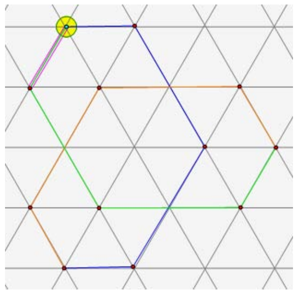
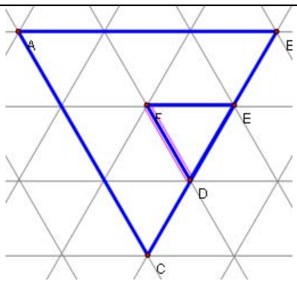
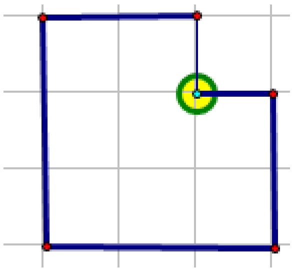
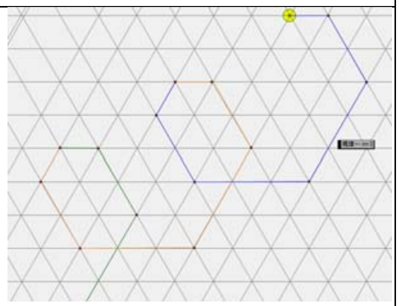
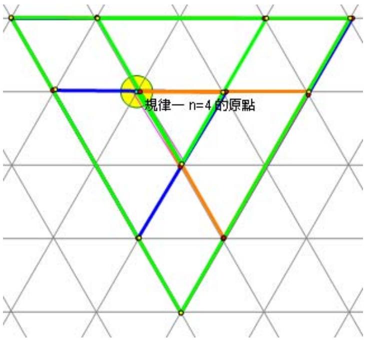
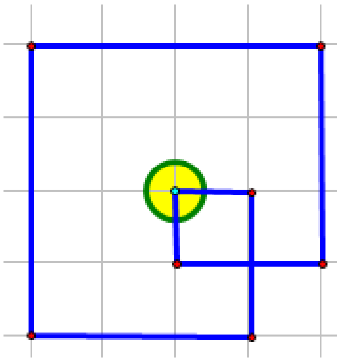
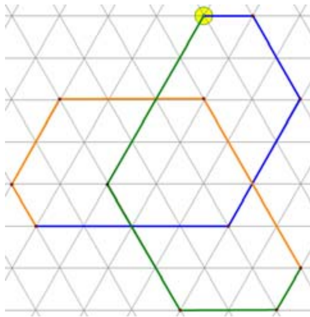
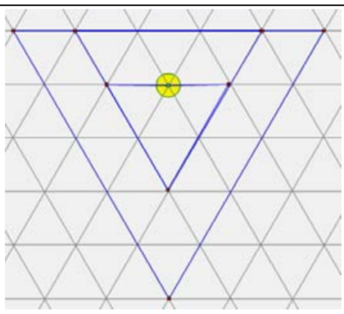
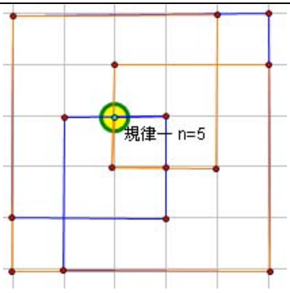
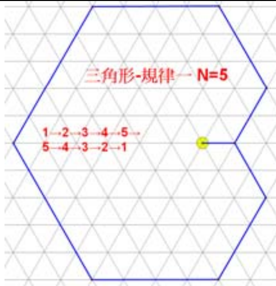
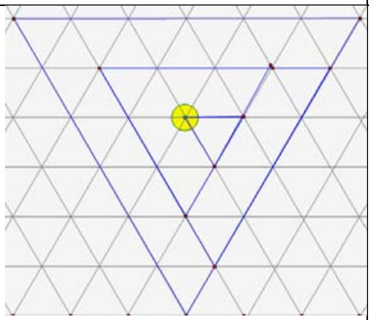
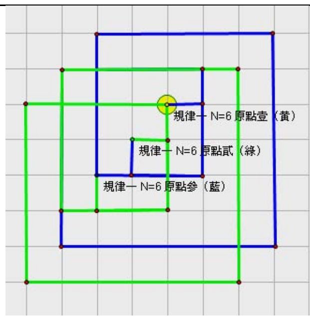
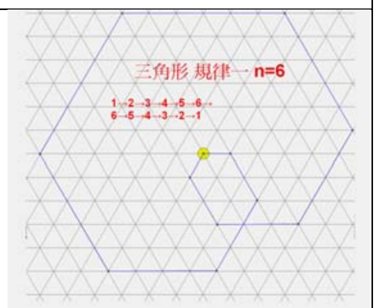
1. 規律一【走法規則：1,2,3…x-1,x】改變角度後，實際操作繪製後所得圖形如下：

x 值	轉 120^0 所成的圖形	轉 90^0 所成的圖形	轉 60^0 所成的圖形
1			
2			
3			
4			
5			
6			

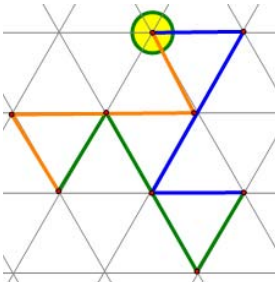
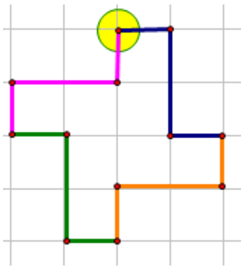
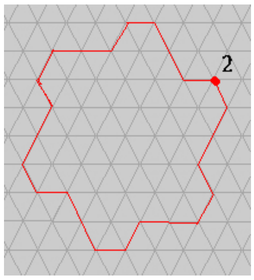
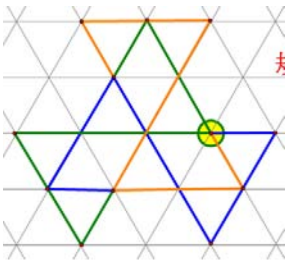
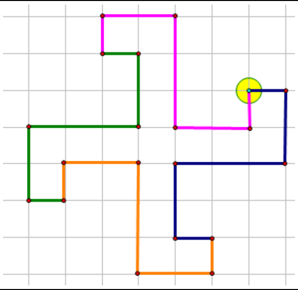
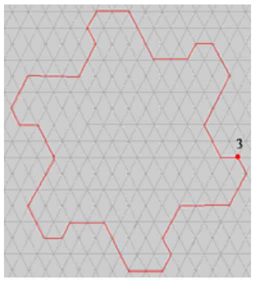
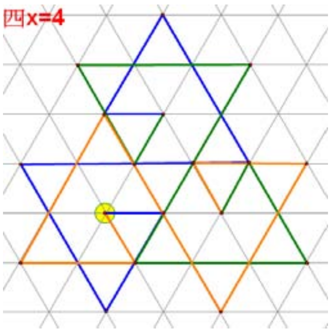
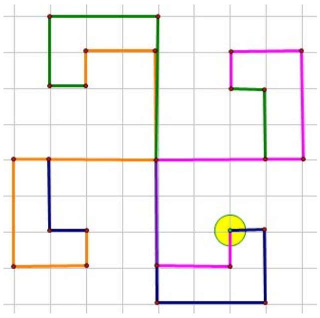
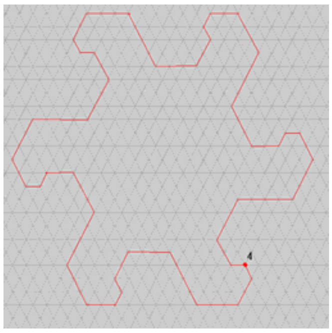
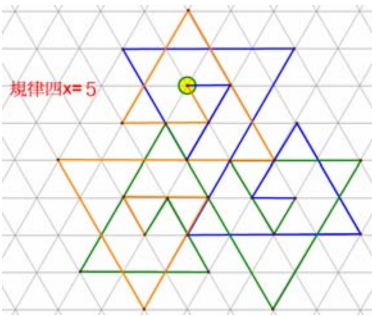
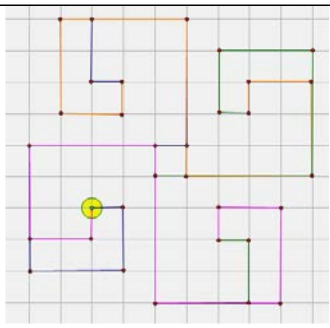
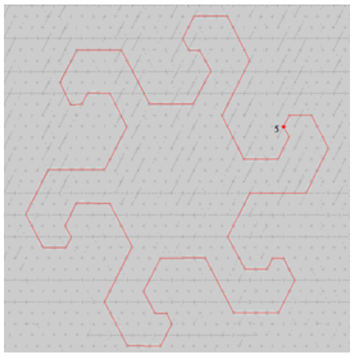
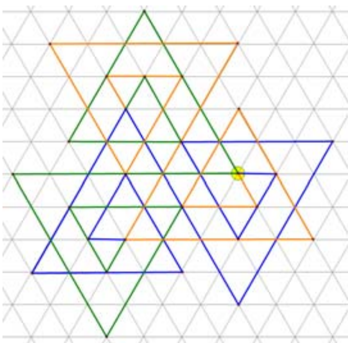
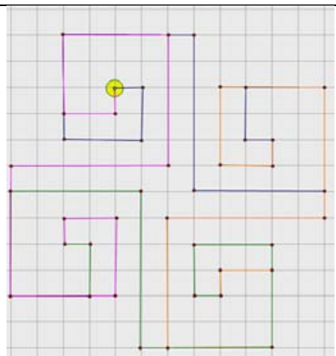
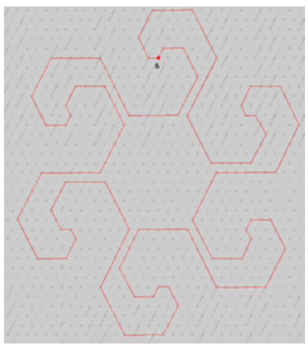
2. 規律二【走法規則：1,2,3⋯x-1,x,x-1⋯3,2,1】，改變角度後所得圖形如下：

x 值	轉 120^0 所成的圖形	轉 90^0 所成的圖形	轉 60^0 所成的圖形
1			
2			
3			
4			
5			
6			

3. 規律三【走法規則：1,2,3,4⋯x-1,x,x,x-1⋯3,2,1】，改變角度後所得圖形如下：

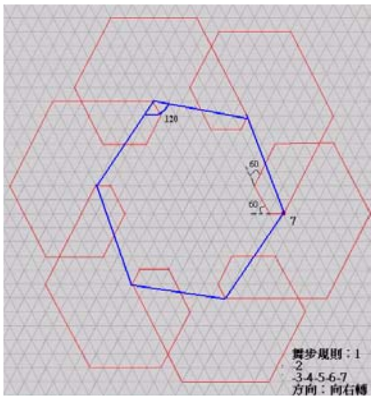
<table>
<tr><th>x 值</th><th>轉 120^0 所成的圖形</th><th>轉 90^0 所成的圖形</th><th>轉 60^0 所成的圖形</th></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

4. 規律四【走法規則：向右轉「1,2,3…x-1,x」，向左轉「x-1…3,2,1」】，改變角度後所得圖形如下：

x 值	轉 120^{0}所成的圖形	轉 90^{0}所成的圖形	轉 60^{0}所成的圖形
2			
3			
4			
5			
6			

(二) 改變轉動角度時對循環次數及圖形的影響探討

1. 當**轉動角度改爲 60^0** 時，圖形會變爲**以六邊形爲主的圖形**，此時循環次數的判斷方法仍需先檢視第一次循環是否可以回到原點，若否，則再依**一次循環的步伐數目除以 6 的餘數來決定**。



基本形走法 1,2,3,4,5,6,7(向右轉 60^0)

   (1) 若除以 **6 餘數爲 1**，則下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 60^0，因此只要將第一循環的圖形**順時針轉 60^0**，即可得到第二循環的圖示，因此根據正方形的結論我們可知此時**循環次數爲 360÷60=6**。

   (2) 同理，若除以 **6 餘數爲 2**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 120^0，圖形**順時針轉 120^0**，因此可知此時**循環次數爲 360÷120=3**。

   (3) 同理，若除以 **6 餘數爲 3**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 180^0，圖形**順時針轉 180^0**，因此可知此時**循環次數爲 360÷180=2**。

   (4) 同理，若除以 **6 餘數爲 4**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 240^0，圖形**逆時針轉 120^0**，因此可知此時**循環次數爲 360÷120=3**。

   (5) 同理，若除以 **6 餘數爲 5**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 300^0，圖形**逆時針轉 60^0**，因此可知此時循**環次數爲 360÷60=6**。

   (6) 同理，若除以 **6 餘數爲 0**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 0^0，圖形會重複，因此**回不來**。

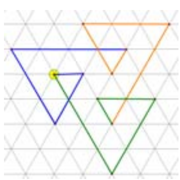
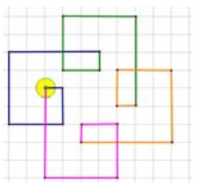
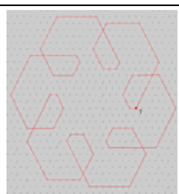
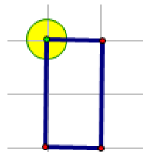
2. 當**轉動角度改爲 120^0** 時，圖形會變爲**以三角形爲主的圖形**，循環次數判斷由除以 3 的餘數來決定。

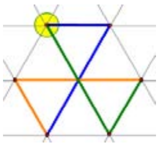
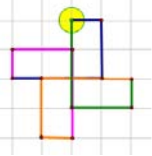
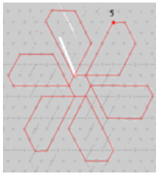
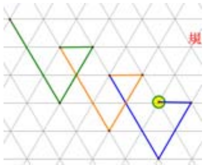
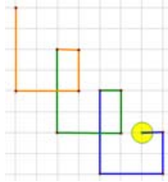
   (1) 若除以 **3 餘數爲 1**，則下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 120^0，因此只要將第一循環的圖形**順時針轉 120^0**，即可得到第二循環的圖示，因此根據正方形的結論我們可知此時**循環次數爲 360÷120=3**。

   (2) 同理，若除以 **3 餘數爲 2**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 240^0，圖形**逆時針轉 120^0**，因此可知此時**循環次數爲 360÷120=3**。

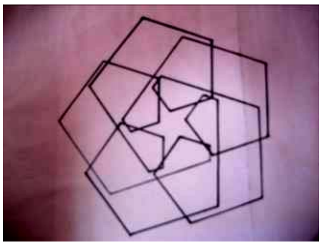
   (3) 同理，若除以 **3 餘數爲 0**，下一個循環的第一步與第一個循環的第一步夾 0^0，圖形會重複，因此**回不來**。

3. 在**規律一的走法**下，當轉動角度改變時，所成圖案的基本形狀會隨之改變(例如：轉 120^0---三角形；轉 60^0---六邊形)，且不同轉動角度的圖形會隨著「**最大步伐 x**」除以「**基本形狀邊長數**」**的餘數**而有相對應的情形出現，亦即若邊長數爲 n，我們發現餘數爲 1、餘數爲 n/2、餘數爲 n-1 或餘數爲 0 的圖形會非常類似。

餘數爲 1			餘數爲 n/2 時		
轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形	轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形
			無此類型的餘數		

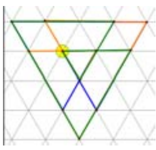
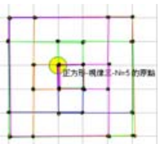
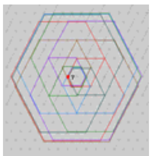
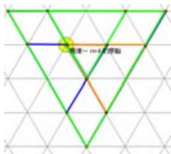
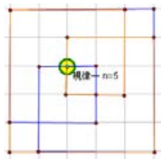
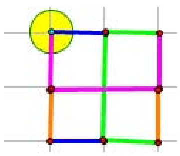
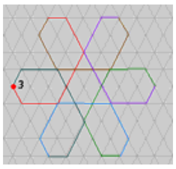
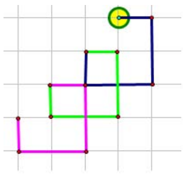
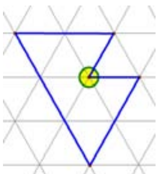
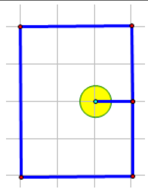
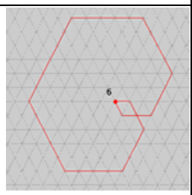
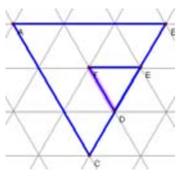
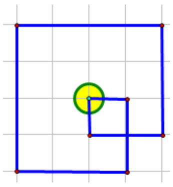
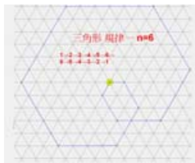
餘數爲 n-1			餘數爲 0 時		
轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形	轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形
					

經我們討論的結果認爲是因爲一次循環的總步伐數除以邊常數的餘數影響回到原點的循環次數，故將第一次循環圖形轉動得到整個圖形的情形類似所造成。
我們也因此可以大膽預測，在此規律下若轉動角度爲 72^0 時，所成的圖形會是以五邊形爲主的圖案，若餘數爲 0，必走不回來；若餘數爲 4，圖案會類似五片的風扇；若餘數爲 1，圖案會是具有 5 個循環結的五邊形。

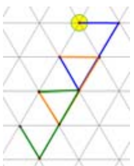
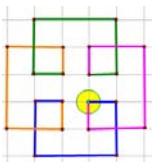
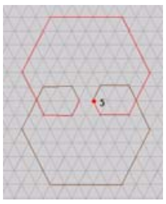
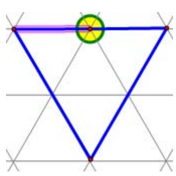
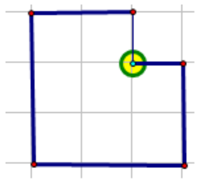
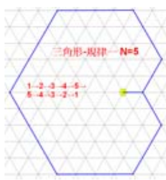


若轉動角度 72^0 的圖形

4. 若以 3.所得的結論來看規律二、規律三的圖形時，我們發現「最大步伐 x」除以「邊長數」的餘數爲 1、餘數爲 n/2、或餘數爲 0 的圖形依舊非常類似。
經計算「一次循環的步伐數」除以邊長數的餘數後發現，所得餘數也相同。

	規律二			規律三		
餘數	轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形	轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形
1						
n/2	無此餘數			無此餘數		
0						

我們也發現「最大步伐 x」除以「邊長數」的餘數爲 n-1 的圖形，會出現無法互相對應的情形。

	規律二			規律三		
餘數	轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形	轉 120^0 圖形	轉 90^0 圖形	轉 60^0 圖形
n-1						

經進一步計算「一次循環的步伐數」除以邊長數的餘數後發現，所得餘數並不相同，我們認爲這是造成圖形無法對應的原因。

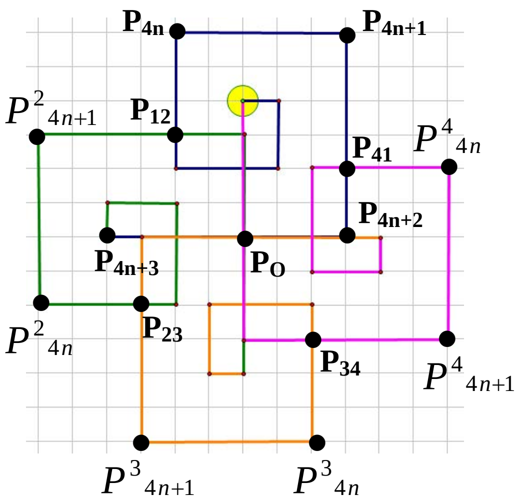
5. 在規律四走法規則下，當轉動角度改變後，其風車狀的圖形特性並沒有改變，而且我們可以發現不管在哪一種轉動角度下，隨著餘數的增加，風車圖形的風扇會漸漸長出「角」來。

伍、　討論

一、 舞步圖形所圍面積的探討

在資優數學課中老師曾經介紹過以行列式的方法計算面積，因此我們嘗試以圖形的規律性，來找出邊界點的座標，並以此法計算圖形規則一【1,2,3⋯x-1,x(全部向右轉 90 度)】所圍面積的通式。今舉較複雜的情形(x=4n+3)來說明計算的步驟：

(一) 利用圖形規律性，找出邊界點的座標



1. 當 x=4n+3 時，回到原點的循環次數爲 4，且圖形會是點對稱圖形，且對稱中心的座標爲第一循環起點座標與第三循環起點座標連線的中心點。由圖可知，第一循環的最後 4 點座標分別爲 P_{4n+3}=(-2n-2,-2n-2)、P_{4n+2}=(2n+1,-2n-2)、P_{4n+1}=(2n+1,2n)、P_{4n}=(-2n,2n)，對稱中心的座標爲(0,-2n-2)。

2. 根據點對稱的特性可知 $P^3{}_{4n+1}$=(-2n-1,-6n-4)、$P^3{}_{4n}$=(2n,-6n-4)。第二循環的邊界點爲第一循環逆時針轉 90^0 而來，因此可以知道 $P^2{}_{4n+1}$=(-4n-2,-1)、$P^2{}_{4n}$=(-4n-2,-4n-2)，同理順時針轉 90^0 可得 $P^4{}_{4n+1}$=(4n+2,-4n-3)、$P^4{}_{4n}$=(4n+2, -2)。

3. 第一循環與第二循環的邊界交點 P_{12}=(-2n,-1)、第二循環與第三循環的邊界交點 P_{23}=(-2n-1,-4n-2)，再利用點對稱可知 P_{34}=(2n,-4n-3)，P_{41}=(2n+1,-2)。

(二) 以行列式計算所圍面積

知道所有邊界點後便可利用行列式計算所圍面積，列式如下：

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2n & -2n & -4n-2 & -4n-2 & -2n-1 & -2n-1 & 2n & 2n & 4n+2 & 4n+2 & 2n+1 & 2n+1 & -2n \\ 2n & -1 & -1 & -4n-2 & -4n-2 & -6n-4 & -6n-4 & -4n-3 & -4n-3 & -2 & -2 & 2n & 2n \end{vmatrix}$$

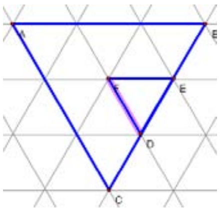
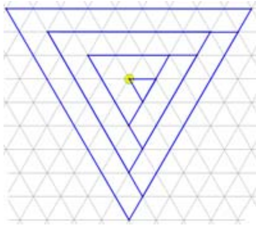
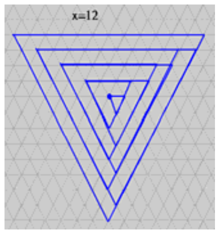
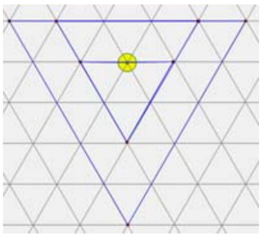
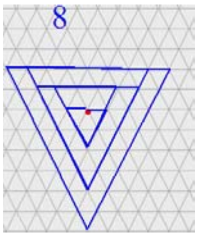
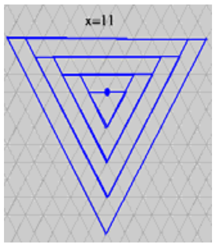
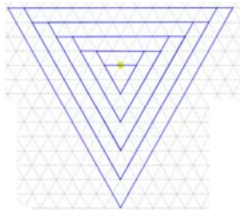
$$=48n^2+40n+8$$

經與之前(第 3 頁)我們歸納的面積通式，當 x=4n+3 時，面積爲 $3x^2-8x+5$，將 x=4n+3 代入後並展開的結果相同。

二、 規則三【走法規則：1,2,3,4⋯x-1,x,x,x,x-1⋯3,2,1】三角形舞步圖形的探討

【註：圖形類似俄羅斯娃娃般為向內堆疊三角形的**碎形圖案**，故命名『俄羅斯』。】

(一)將圖形依 x=3n、3n+1、3n+2 分類後，發現當 x=3n、3n+2 時只需一次循環便可回到原點，且會出現向內堆疊三角形的碎形圖案。

x 值	n=1	n=2	n=3	n=4
3n				
3n+2				

經觀察後我們發現：

1.在 x=3n 的圖案中，形成的大大小小正三角形，有以下規律存在：

(1)邊長依序為 1，3，4，6，7，9，10，12，13，15，16…，a_1，a_2，a_3，a_4，⋯。其中 a_1，a_2，a_3，a_4，有 $a_4= a_3+ a_2- a_1$ 的關係存在。另外我們也發現邊長除以 3 的餘數依照 0、1、0、1⋯的規律排列。

(2)若將三角形由內而外依序編號為$\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、⋯，則$\triangle_1$、$\triangle_2$的**底邊重疊**；$\triangle_2$、$\triangle_3$的**頂點共用**，依此規則可推廣到$\triangle_n$。

2.在 x=3n+2 的圖案中，形成的大大小小正三角形，有以下規律存在：

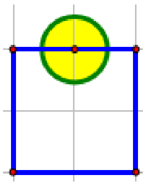
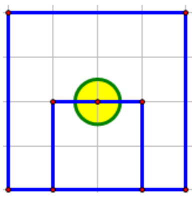
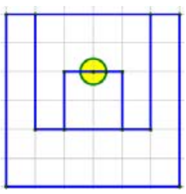
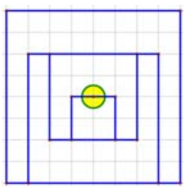
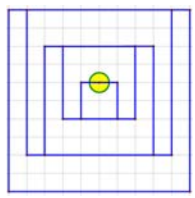
(1)邊長依序為 2，3，5，6，8，9，11，12，14，15，17⋯⋯，a_1，a_2，a_3，a_4，⋯。其中 a_1，a_2，a_3，a_4，有 $a_4= a_3+ a_2- a_1$ 的關係存在。另外我們也發現邊長除以 3 的餘數依照 2、0、2、0、⋯的規律排列。

(2)若將三角形由內而外依序編號為$\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、⋯，則$\triangle_1$、$\triangle_2$的**頂點共用**；$\triangle_2$、$\triangle_3$的**底邊重疊**，依此規則可推廣到$\triangle_n$。

3.由這兩個規則，我們可以利用三角形的走向、邊長規則、由內而外的堆疊規律，便可以預測任意 x=3n 或 3n+2 的圖形。

(二)正方形舞步碎形圖案的推論

由於三角形舞步在多走了一步最大步伐後，出現了碎形圖案，因此我們猜測若在正方形舞步中多走二步最大步伐，也會出現正方形的碎形圖案。實際繪製的結果如下，果然驗證了我們的推測。

走法	12221	123444321	1234566654321	123..78887..321	x=10
圖案					

陸、　結論

一、 關於正方形之結論探討

(一) 當舞者在正方形的方格紙上跳舞時，每次轉的角度為 90 度(外角)，所探討出的面積、周長、循環次數，都與 360÷90=4 有密切的關係。

(二) **雲霄飛車** x=4n+2 **和** x=4n+1 所圍出的圖形，通過所有圍出圖形中所有的格子點，若以智慧型吸塵器為構想，此規律為設計的最理想規律。

(三) 我們推得出了**基本形座標通式**，可尋求任意座標，**當 k=4n+1，P_k=(2n+1,2n)；當 k=4n+2，P_k=(2n+1,-2n-2)；當 k=4n+3，P_k=(-2n-2, -2n-2)；當 k=4n，P_k=(-2n,2n)。**

(四) 雲霄飛車之所有圖形皆為線對稱圖形，而且至少存在一條通過原點的對稱軸。

(五) 風車一、二不論最大邊長為何，皆可走回原點，且形成的圖形皆為點對稱圖形。

(六) 「1,2,3…x-1,x」向右轉,「x,x-1,…3,2,1」向左轉，的圖形是永遠回不來的，同樣的規律，不管改變成任意角度皆走不回。

(七) 在正方形舞步中，由於是轉 90 度，因此在每一循環中奇數步和偶數步會分別影響 X 座標、Y 座標。若此循環開始的第一步為 X 方向，則奇數步影響 X 座標、偶數步影響 Y 座標；若此循環開始的第一步為 Y 方向，則奇數步影響 Y 座標、偶數步影響 X 座標。我們用每次循環的 X 座標和 Y 座標的累計改變量來判斷是否可以回到原點。

(八) **雲霄飛車走法規則下所成圖形必為線對稱，且存在著相對稱點。**

在此規律下都是以通過第 x 步中點(此點即為對稱點)的水平線或鉛直線為對稱軸的線對稱圖形。在探討過程中我們整理出了：**若最大步數為 x，且 a+b=2x-1，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點**。

(九) **三缺一走法規則下所成圖形必為線對稱，且存在著相對稱點。**

在此規律下，每一完整循環中的前 x 步和後 x 步，會呈現線對稱的情形，且會有相對應點的存在。在探討過程中我們整理出了：**若最大步數為 x，且 a+b=2x，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點**。

(十) **風車一走法規則下所成的圖形必為點對稱，且會有相對應點的存在**。在此走法規律下，每一完整循環中的前 x-1 步和後 x-1 步，會呈現點對稱的情形，且會有相對應點的存在。在探討過程中我們整理出了：**若最大步數為 x，且 a+b=2x-1，則第 P_a 點和第 P_b 點互為對稱點**。

(十一) **在探討風車二走法中**，無法用線對稱或是點對稱來探討之，故我們發現**圖形會有抵銷的情形**，最後只剩 x 步的位移，經過 **4 次的循環**後，即可繞回原點。

(十二) 在探討**正方形基本型**的過程中，我們發現，**x=4n+2 的圖形其循環次數為 2**，異於大多數的 4 次。對於基本型 x=4n+2 的圖形會形成一個線對稱圖形，**其對稱點為 (n+0.5,-n-1)**，對於探討任意點座標時，能更快速。

二、 關於六角形之結論探討

(一) 當舞者在三角形的格紙上跳舞時；當每次轉的角度為 60 度(外角)，所探討出的面積、周長、循環次數，都與 360÷60=6，有密切的關係。

(二) **六六大順中，X=6n** 的圖形，循環節和循環次數皆為 1，和我們之前所研究出的結果有些許的出入。

三、 關於三角形之結論探討

(一) 當舞者在三角形的格紙上跳舞時；當每次轉的角度為 120 度(外角)，所探討出的面積、周長、循環次數，都與 360÷120=3，有密切的關係。

(二) 俄羅斯不論 n 為何，皆可走回原點。

(三) 規則三三角形走法下，當 x=3n、3n+2 時只需一次循環便可回到原點，且會出現向內堆疊三角形的碎形圖案。

(四) 俄羅斯圖形中，大大小小的三角形個數：當 x=3n+1，個數通式為 2x+n-1；當 x=3n+2，個數通式為 x-n-1；當 x=3n，個數通式為 2n。

四、 綜合討論

(一) **角度、旋轉方向和步數是影響圖形的變化最重要的因素，步長居次。**

(二) **正方形雲霄飛車(x=4n)、三缺一(x=4n+3)、六角形的六六大順(x=6n)、胖愛心(x=6n+5)和三角形的俄羅斯(x=3n+2)**的圖形相當特殊，起點舞步與終點舞步夾的度數，正方形並不是 90 度角(而是 0 度或 270 度)，六角形並不是 120 度(而是 0 度或 60 度)，三角形並不是 60 度(而是 180 度)……。

(三) **正方形雲霄飛車、風車一、二和三角形的俄羅斯和六角形的六六大順、烏龜**的圖形所有皆走的回原點。

(四) **利用奇數步影響 X 軸係數，偶數步影響 Y 軸係數**，我們可以歸納出判斷是否可以走回原點及所需循環次數的步驟如下：

第一步驟：**先檢視一個循環是否可以走回原點**，若否則進入第二步驟。

第二步驟：判斷**第二個循環的第一步向何方移動，**

若是向+X 方向移動，則第二循環的圖形是第一循環的平移，因此無法回到原點。

若是向-Y 或+Y 方向移動，則第二循環的圖形會是第一循環的圖形順時針轉 90^0 或逆時針轉 90^0，因此需要 360÷90=4 次循環即可回到原點。

若是向-X 方向移動，則第二循環的圖形會是第一循環的圖形轉 180^0，因此需要 360÷180=2 次循環即可回到原點。

柒、 未來研究動向

一、用極座標的方式，進階討論每次旋轉的角度θ(本研究終止討論 90 度、60 度和 120 度)與所得到的通式與圖形的關係(例如我們未來能研究每次轉 45 度角的圖形)

二、討論哪幾個位置走不到。

三、特定點被繞過的次數。

四、三角形碎形圖案和正方形碎形圖案的探討。

捌、 參考資料

一、 本校第九十四學年度校內科學展覽優良作品集，第 139-148。

【評語】030408

1. 設計舞步、規範規則，識別出 18 種變化，繪製徑路，點算循環次數，在實作中探究旋轉軸與旋轉中心的參照作用，繪製出各層次的圖形。在在都表現出作者們合作解題的智慧與熱情。

2. 利用高科技 GSP 軟體，追蹤或複製，針對封閉圖形外角和為一周角的關係尋找理想規律與座標通式，自在地遊走於正方格平面及正三角形網面，也值得鼓勵與推廣。

3. 惟聽從建議，援用 logo 繪出完整迴法，仍需確認各指令的內容與順序，且與筆端的進度與方向對照，才可以確知解題策略的有效性。