

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030407

「蜂蜂」相連

學校名稱：高雄縣立鳳山國民中學

作者： 國二 陳羿頻 國二 方靖富 國二 唐郁婷	指導老師： 潘姿因
---	------------------

關鍵詞：貨櫃 、 緊密排列 、 不規則形狀

「蜂蜂」相連

摘要

一般貨櫃船的甲板形狀由曲線所組成，而貨櫃的形狀則固定為長方體。今將貨櫃形狀改變成自然界中的規律形狀——「蜂窩」（正六邊形），並且將貨櫃船甲板形狀簡化後，試著找出可載運最多貨櫃的排列方式。

壹、研究動機

常常在電視節目上會看到港邊船隻來來往往的景象，而高雄的船運揚名國際，身為高雄人，也經常到西子灣看著大大小小的船載著貨櫃進出，於是就靈光一現地想到：貨櫃應該如何排列才能讓船的空間達到最大利用？

把想法和老師討論之後，老師建議我們可以從貨櫃輪下手。貨運輸本身的形狀就不是長方體，也非由直線組成的形狀，而是曲線所組成的，若要以體積來算，老師說這可能會增加很多的難度。因此我們決定先以貨櫃與貨櫃輪的甲板，開始我們的研究。

貨櫃的形狀是長方體，而在網路上也能找到每艘貨櫃輪可承載的貨櫃數量，於是我們想要跳脫一般的模式，將貨櫃形狀改成自然界中最規律的圖形——蜂窩（正六邊形）來挑戰。

貳、研究目的

- 一、找出在規則圖形下，可排列最多貨櫃（正六邊形）的排法。
- 二、利用這些排法，找出在不規則圖形下可排列最多貨櫃（正六邊形）排法。

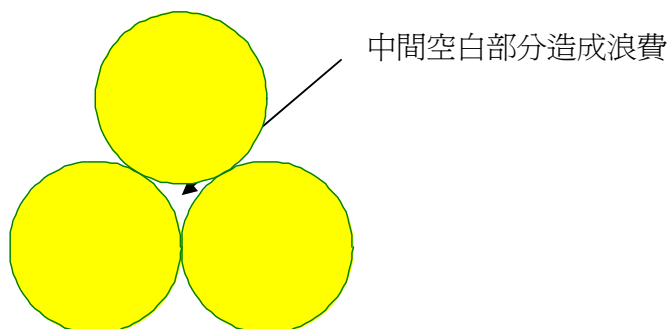
參、研究設備及器材

- 一、計算與製圖：
紙、筆、工程計算機、GSP。
- 二、製作實際模型：
圓規、直尺、圖畫紙、厚紙板。

肆、研究過程與方法

一、分析

我們一開始就想要改變貨櫃的形狀，在課堂上老師曾經提到：若用同樣的周長圍成不同圖形，則以圓形的面積最大。也提到正多邊形的邊數越多，就會越接近圓形。因此一開始，我們想要將貨櫃改為圓柱體，這個想法隨即被推翻，因為圓形無法「緊密排列」（如下圖所示），中間的縫隙就是空間浪費。



於是我們先討論何種正多邊形可以「緊密排列」，我們發現若要使同樣的正多邊形可以緊密排列，他的內角角度一定得是 360° 的因數。於是我們發現符合這種情形的正多邊形有三種：正三角形、正方形、以及正六邊形，於是我們以正六邊形為本次貨櫃的主要形狀。

二、蒐集資料並製作模型

在製造船隻的世界排名中，台灣排名第六，於是我們直接上網到台灣國際造船公司搜尋我們需要的資料。並找到資料整理如下：

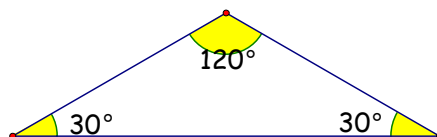
(一) 載送貨櫃的船隻粗略分成兩種：貨櫃輪與散裝貨輪，並以貨櫃輪為主流，所以我們就決定以貨櫃輪作為我們的實驗模型。

(二) 船模型：貨櫃輪又依照它可以載送多少個 20 呎標準貨櫃 (TEU) 為區分，分成 6 種不同的大小，為了方便起見，我們選擇 5500TEU 貨櫃輪做為模型。(如下圖)



我們只先探討甲板上可排列多少正六邊形貨櫃，並將貨櫃船頭的形狀由曲線改為等腰三角形，所更改過後的模型比例如下：

原本的船頭是曲線，而為了方便起見，改成下圖一的等腰三角形，主要是為了正六邊形的內角度數 120° ；船尾為平的。(如下頁圖二)



圖一

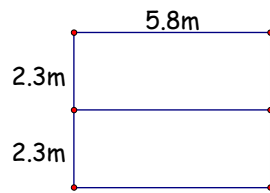


圖二

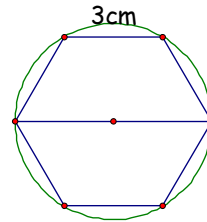
船身長度：276 cm

船身寬度：40 cm

(三) 貨櫃模型：20 呎的普通貨櫃內徑約為 5.8x2.3x2.3(M)，因為我們想要用正六邊形作為新的貨櫃形狀，因此我們決定以兩個 20 呎貨櫃合併之後的尺寸作為參考，正六邊形與原本貨櫃尺寸比例如下：



面積：26.68m²



面積： $\frac{27\sqrt{3}}{2}cm^2$ (約為23.38cm²)

三、實驗並記錄

由於實驗時發現把全部的貨櫃排列完，相當浪費時間，因此我們決定先找出可以排列最多貨櫃的方法。

(一) 實際實驗與結果

排列方式一



排列說明與結果：

這是我們嘗試的第一種排列法，我們總共排了 12 層，長度為 54 cm，可以排 60 個。

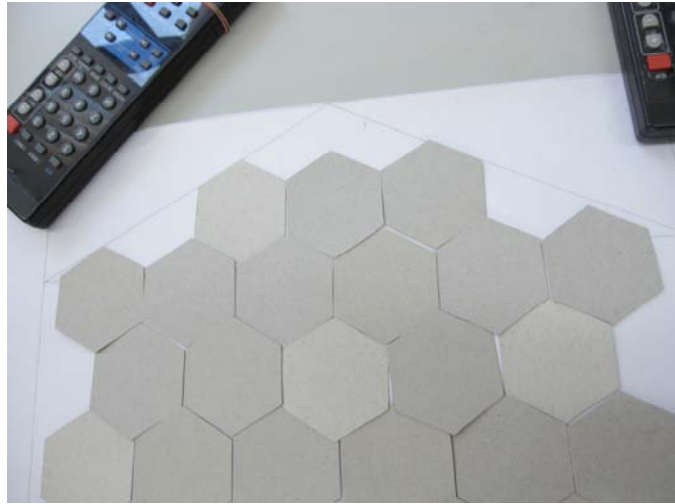
排列方式二



排列說明與結果：

此方式也排了 12 層，長度約為 57 cm，也排了 60 個。

排列方式三



排列說明與結果：

此方式排 12 層，長度約為 57 cm，排了 64 個。

排列方式四



排列說明與結果：

因為一直都用正的或者垂直的方法排列，這裡特地改用斜的排排看，但是排出來的結果不太好，排了 12 層之後，卻只能排 63 個。

排列方式五



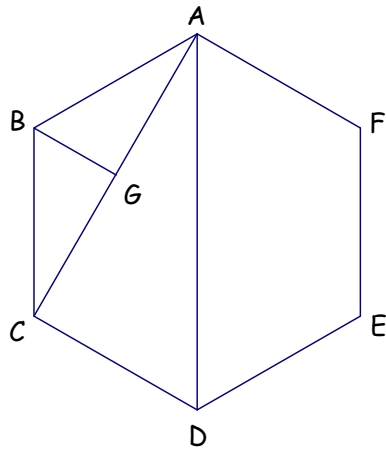
排列說明與結果：

此方式總長度約 55.5 cm，小貨櫃的個數達 65 個，是最多的排列法。

(二) 結果整理一

根據上列的排法，我們發現第 5 種排法是可以排出最多貨櫃，所用總長度又最小的一種排法。但是用模型排列會發生小誤差，於是後來我們改用計算的方式加以驗證。

1. 正六邊形各種長度：

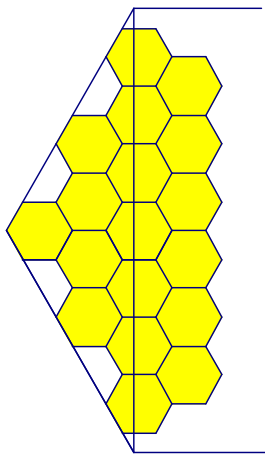


左圖為本次貨櫃模型正六邊形 ABCDEF，

邊長 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 3\sqrt{3}$ ， $\overline{AD} = 6$ ，

$\overline{AG} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $\overline{BG} = \frac{3}{2}$ 。(單位：公分)

2. 排列方式一：



此種排列法可以明顯看出每層個數成一數列：

$$1, 4, 7, 6, 7, 6, \dots$$

而且也可以從每個貨櫃的邊長算出總共可排幾層，他的邊長排列也成爲一數列：

$$6, 3, 6, 3, \dots$$

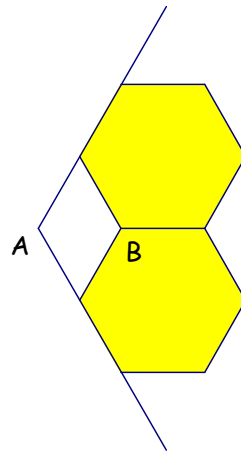
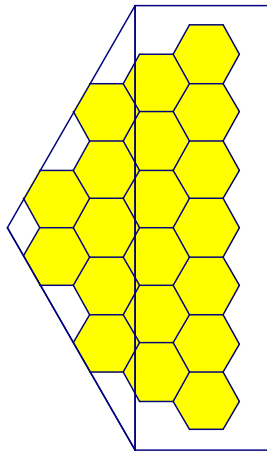
以總長度 276 cm 來看，總共可排出：

$$276 \div 9 = 30 \Delta 6$$

$$30 \times 2 + 1 = 61 \text{ 層，}$$

共有 $1+4+7+6+7+6+\dots = 389$ 個貨櫃。

3. 排列方式二：



上圖左爲排列方法，上圖右爲船頭局部放大部分。

這個排列方法也讓每層個數形成數列：

$$2, 5, 6, 7, 6, 7, \dots$$

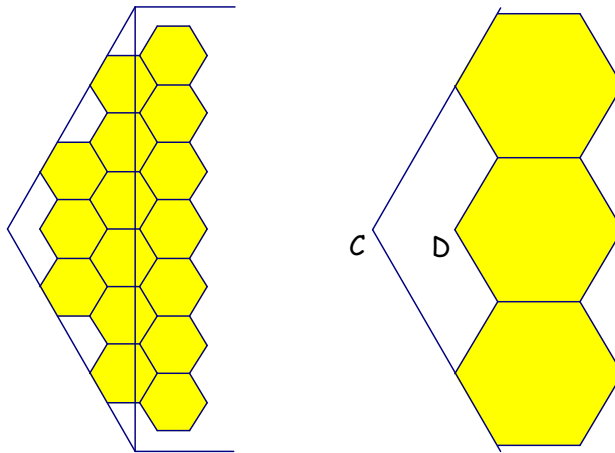
而且在上圖右可以發現 \overline{AB} 長度剛好是貨櫃的邊長 3 cm，

因此又可以算出共可排 $(276 - 3) \div 9 = 30 \Delta 3$ ，

$$30 \times 2 = 60 \text{ 層，}$$

共 $2+5+6+7+6+7+\dots = 384$ 個貨櫃。

4. 排列方式三：



圖左為排列方式，圖右為船頭局部放大部分。
每層個數所形成數列：3，6，7，6，7，...

而圖右 \overline{CD} 也剛好是貨櫃長度 3 cm。

因此算出總層數： $(276 - 3) \div 9 = 30 \wedge 3$ ，

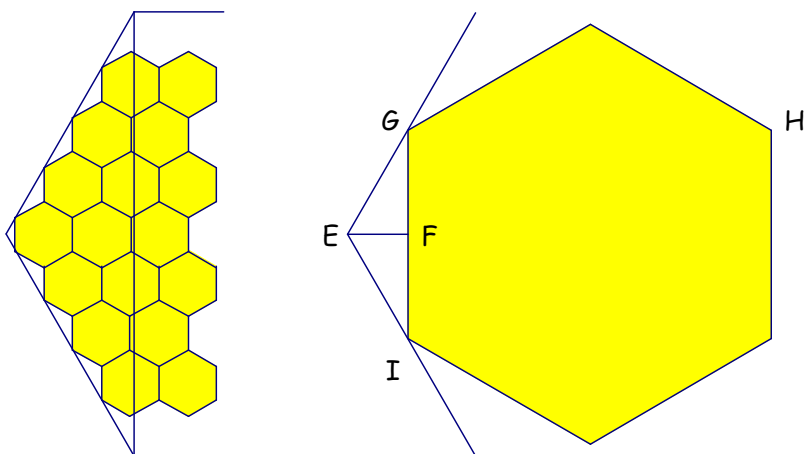
$$30 \times 2 = 60 \text{ 層}$$

共可以排 $3+6+7+6+7+\dots=386$ 個貨櫃。

5. 排列方式四：

由實際實驗結果發現，此種斜的排法無法將空間做到最大的利用（即剩餘空間太多），因此，這種斜的排法不做討論。

6. 排列方法五：



上頁圖左是排列方法，圖右為船頭局部放大部分。
 這個方法不好算出層數，但是可以從最中間一排的個數去推算
 出其他排貨櫃的數目。

首先計算出 \overline{EF} 的長度：

因為 $\overline{GI} = 3$ ， $\angle EGF = 30^\circ$ ， $\angle EFG = 90^\circ$ ，

所以可以得到 $\overline{EF} : \overline{FG} : \overline{EG} = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，得出 $\overline{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

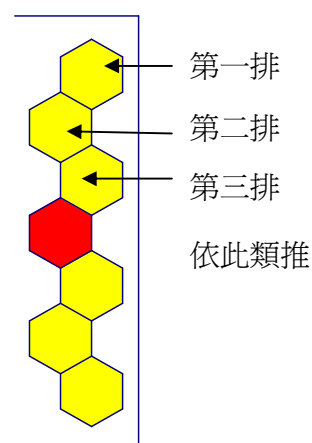
而 $\overline{GH} = 3\sqrt{3}$ ，所以可以算出最中間那一排的總個數：

令總個數為 n 個，

$$\text{則：} \frac{\sqrt{3}}{2} + n \times 3\sqrt{3} \leq 276, \text{ 得到 } n \leq \frac{276 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{184\sqrt{3} - 1}{6},$$

約為 52.95，因此取 $n = 52$ 。

因此可以推測最後船尾的排法應如下圖：



中間紅色的正六邊形即為中間那一排(即第四排)的第 52 個貨櫃。

所以可以推測：

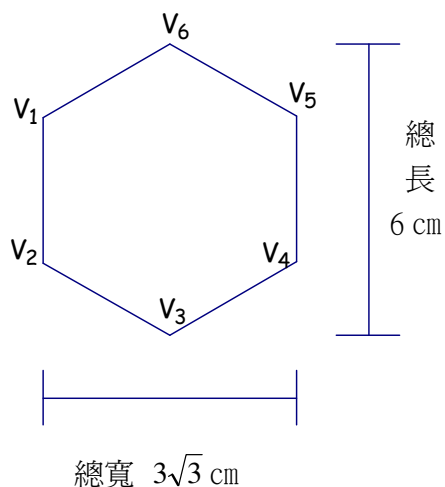
第三排和第五排的貨櫃個數為 52，

第一排、二、六、七排的貨櫃個數是 51，

由此推算出貨櫃總個數為：

$$52 \times 3 + 51 \times 4 = 360 \text{ 個。}$$

(三) 討論一



在推算完所有結果之後，我們很驚訝地發現，原本認為可以排列最多的第五種排列方式，算出來卻是排列最少的，反而是第一種排法可以排出最多的貨櫃數。

造成這個結果的主要原因是船的長寬限制。若使用第一到第三種排列法，我們發現貨櫃邊長以及貨櫃的總長都是 276 的因數（如左圖），因此使用這三種排法，可以確保前後不易浪費空間。反觀總寬因為不是 276 的因數，因此造成前後必定會有空間被浪費。

而在船寬的部分，船共寬 40 cm，此時兩者都並非 40 的因數，但我們從算式可算得兩種排法可排幾個貨櫃（如下）：

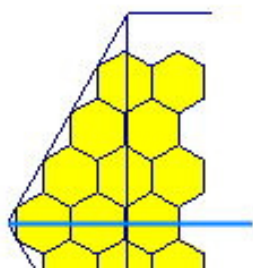
1. 第一到第三種排法

在這三種排法中，要算出船寬可容納幾個貨櫃，只需要將船寬 \div 貨櫃總寬即可，也就是：

$$40 \div 3\sqrt{3} = \frac{40\sqrt{3}}{9},$$

約為 7.7 個貨櫃，因此最多可以排到 7 個貨櫃。

2. 第五種排法



此種方法剛好是上下對稱的排法，因此我們在計算時只需要算上半部（或下半部）即可，而且仔細觀察圖形後，我們發現貨櫃排列時，邊長與總長會形成一個數列：1.5，6，3，6，...

或是

$$3, 3, 6, 3, 6, \dots$$

而切成一半之後，船寬只剩下 20，因此我們可以計算出這種排法頂多只能排 7 個。

兩種排法互相比較之後，寬度都只能排 7 個，因此決勝點在於長度，而長度又以第一到第三種排法可以排較多的貨櫃，所以第一到第三種排法自然就會排比較多的貨櫃了。

(四) 延伸計算與結果整理二

在做出此結論之後，我們將所有貨櫃輪及散裝貨輪作了相同的計算，結果如下：

圖片	名稱及大小	結果
	1800TEU 實際長寬： $172.7 \times 27.3(m)$ 計算用長寬： 173×27	第一種：167 個
		第二種：164 個
		第三種：165 個
		第五種：161 個
	2200TEU 實際長寬： $195.6 \times 30.2(m)$ 計算用長寬： 196×30	第一種：190 個
		第二種：187 個
		第三種：187 個
		第五種：183 個
	4050TEU 實際長寬： $267.7 \times 32.2(m)$ 計算用長寬： 268×32	第一種：318 個
		第二種：315 個
		第三種：317 個
		第五種：251 個
	4250TEU 實際長寬： $269.4 \times 32.2(m)$ 計算用長寬： 269×32	第一種：318 個
		第二種：321 個
		第三種：317 個
		第五種：253 個

圖片	名稱及大小	結果
	5500TEU 實際長寬： $275.8 \times 40(m)$ 計算用長寬： 276×40	第一種：389 個 第二種：384 個 第三種：386 個 第五種：360 個
	8241TEU 實際長寬： $333.2 \times 42.8(m)$ 計算用長寬： 333×43	第一種：537 個 第二種：540 個 第三種：541 個 第五種：559 個
	77000 載重噸散裝貨輪 實際長寬： $225 \times 32.26(m)$ 計算用長寬： 225×32	第一種：263 個 第二種：266 個 第三種：267 個 第五種：211 個
	175100 載重噸及 175600 載重噸散裝貨輪 實際長寬： $289 \times 45(m)$ 計算用長寬： $289 \times 45(m)$	第一種：462 個 第二種：465 個 第三種：466 個 第五種：483 個
	202500 載重噸散裝貨輪 實際長寬： $299.9 \times 50(m)$ 計算用長寬： 300×50	第一種：547 個 第二種：551 個 第三種：545 個 第五種：505 個

我們發現，在現有的貨櫃輪及散裝貨輪中，大部分都是以前一到第三種排列方法可以排得比較多，符合我們所討論出來的規則，但其中也有例外（例如：8241TEU 和 175100 及 175600 載重噸散裝貨輪），而目前我們正積極尋找造成這一類例外的原因。

伍、結論

第一到第三種排列方法可以排較多的船型：

船 型	結 果	船 型	結 果
1800TEU	第一種：167 個	5500TEU（主要討論船型）	第一種：389 個
2200TEU	第一種：190 個	77000 載重噸	第三種：267 個
4050TEU	第一種：318 個	202500 載重噸	第二種：551 個
4250TEU	第二種：321 個		

第五種排列方法可以排較多的船型：

船 型	結 果
8241TEU	559 個
175100 及 175600 載重噸	483 個

陸、檢討

這次的研究有很多可以改進的地方：

一、船頭曲線

此次爲了方便計算起見，將船頭的曲線簡化成等腰三角形，未來希望可以利用電腦作業，畫出實際曲線並且也測量出可排列貨櫃的實際數據。

二、平面改爲立體

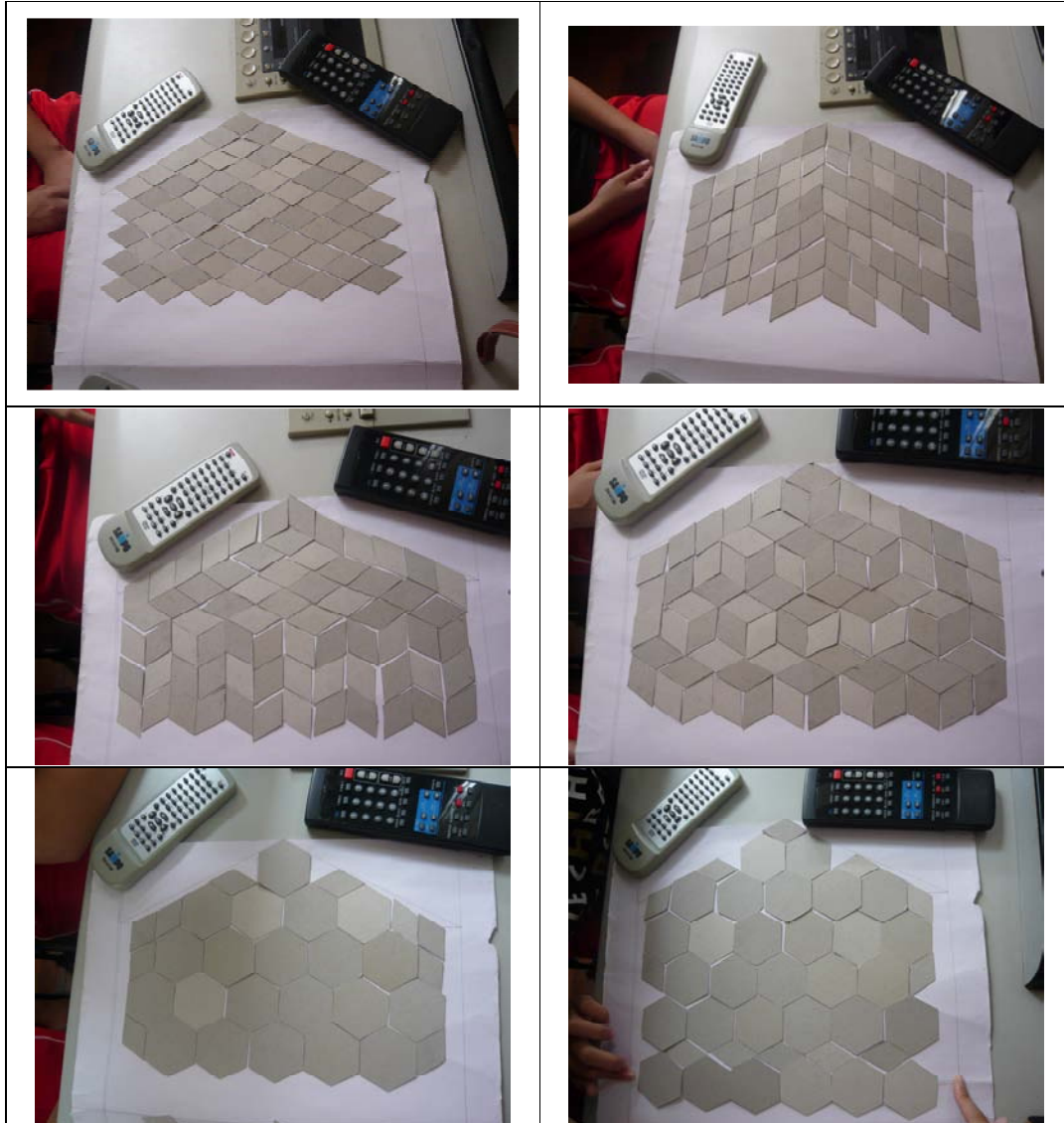
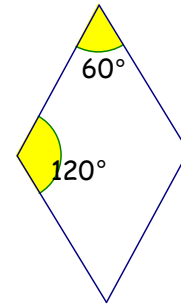
這次只研究了甲板部分可以放多少個貨櫃，都是用平面圖形來做研究，但實際上貨櫃有高度，且船艙也可以放置貨櫃，因此可以將平面改成立體繼續研究。

三、時間

由於這個研究正式開始的時間是在上學期的第二次段考之後，因此我們沒有太多的時間去繼續發展它，但我們希望三年級可以繼續研究，並將主題發展得更完整。

柒、未來展望

在研究過程中，我們發現也許可以採用菱形（如右圖）來排列，如此一來，許多空隙將可以被填滿，並且也可以和六角型貨櫃互相搭配排列，以減少浪費空間（如下列圖片所示）。但是貨櫃採用菱形時，存放的空間利用是否會比正六邊形更好，必須再做討論。



捌、參考資料及其他

- 一、台灣國際造船公司 <http://www.csbcnet.com.tw/>
- 二、兩岸通國際貨櫃公司 <http://www.ginifab.com/forwarder/container.html>

【評語】 030407

嘗試應用數學知識來解決問題的精神值得嘉許。惟貨櫃的裝卸有其考量要點，包括在船上的載運、路上的運送（如貨櫃車）、起重設備（吊貨櫃）、貨櫃本身型體的容量……等，可尋找相關專家進行訪談，以找出“核心問題”來探討，以免解決了一個問題，卻產生了其他問題。此外，本作品的數學內容稍弱，可再深化。