

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

最佳創意獎

030406

方程式與電扇之旋轉

學校名稱：臺南縣立新化國民中學

| | |
|---|------------------|
| 作者： 國二 陳耿緯 國二 楊皓文 國二 朱毅坤 | 指導老師： 嚴文廷 |
|---|------------------|

關鍵詞：一元二次方程式、不等式、電扇

壹、摘要

將電扇拆解之後仔細觀察其擺動關係，我們發現影響電扇擺動的主要機構為四個轉軸點，因此我們將這四個軸點與軸之間的軸長，用一元二次方程式與不等式推導公式以準確計算出各轉軸點的位置。在初期能較有效率的修改我們的電扇結構。

但是我們並不滿足於計算出電扇各軸點的位置而已，因為這樣對於如何調整使電扇擺動角度增減的問題仍然必須大量嘗試錯誤。因此我們進一步將公式推演，最後推導出以四個軸長表示出各軸點的位置的完美公式，並且推導出如何配置四個軸長以達到擺動的最佳角度，最後亦得到四軸長度相互的牽制關係，對於電扇擺動角度及未來電扇設計是相當有用的結果。

貳、研究動機

夏天在教室，經常會為了吹電扇而使同學們搶得不可開交，甚至惡言相向。如果教室內能夠人手一台電風扇是最好的，但是礙於教室內插頭數量有限，再加上目前我們必須要愛護地球養成節能省電的好習慣，因此我們必須另想辦法。

我們想到如果可以增大電風扇擺動的角度，使得一台電風扇就可以將風送到兩台電風扇所能吹到的位置，那麼不但可以讓大家都吹到電風扇吹，也可以達到節能減碳的環保標準，達到一舉兩得的目的。

一開始我們本來要做 180 度轉向的電風扇，在經過我們實際拆解電扇並嘗試修改後，我們發現從嘗試錯誤(try and error)中逐步修改電扇結構並不是最好的方法，因為那將會使我們浪費許多不必要的時間，並且等於是用碰運氣的方式完成我們的作品。因此我們改變研究方向決定轉而研究電扇擺動的相關數學原理探究。在簡圖及基本公式推導出來後，我們更進一步研究擺動的限制條件。

參、研究目的

- 一、拆解電扇實際觀察並探討電扇擺動的方式與機構，簡化後畫出簡圖。
- 二、將電扇結構簡圖數學化並推理，以找出電扇擺動方式並研究欲影響電扇擺動角度的關鍵。
- 三、驗證並測試推理結果。

肆、研究歷程與方法

一、實際觀察電扇結構並畫出簡圖：

一般日常生活中會碰到的電扇類型有許多種，我們在這次科展是觀察一般常用的立扇及工業用電扇，一般立扇如圖(一)。



圖(一)



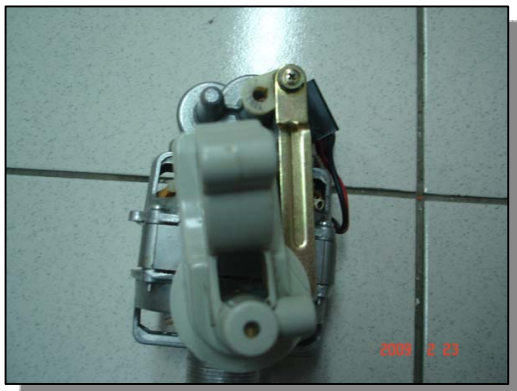
圖(二)

我們觀察發現電扇擺動的關鍵處在於扇葉後面的塑膠盒中，因此我們把電扇後面的盒子拆掉，如圖(二)，是拆掉塑膠盒後的側面圖。

如圖(三)，這是拆掉塑膠盒後的俯視圖。



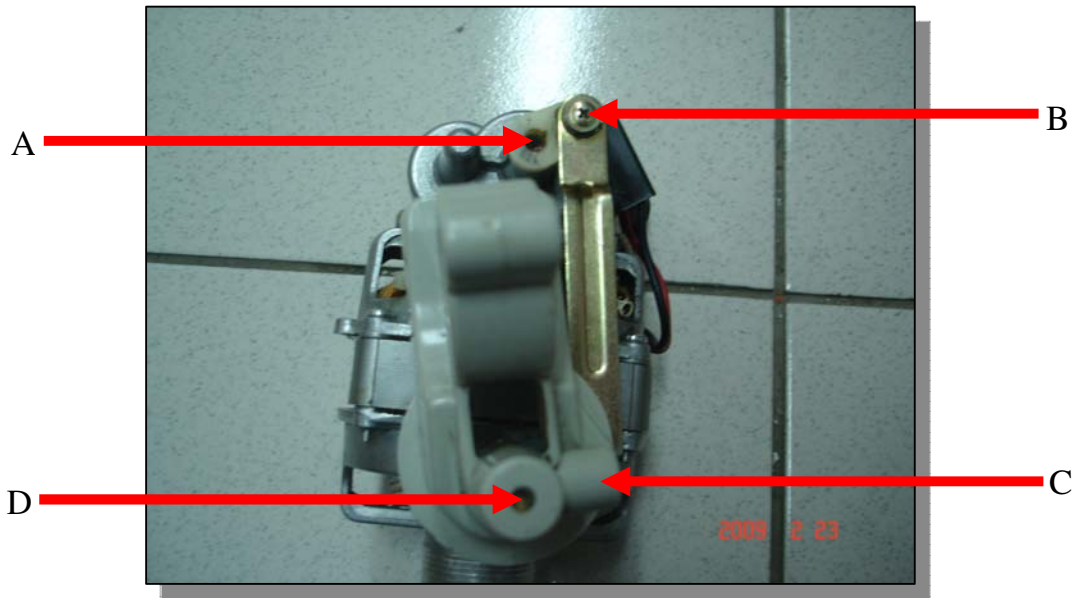
圖(三)



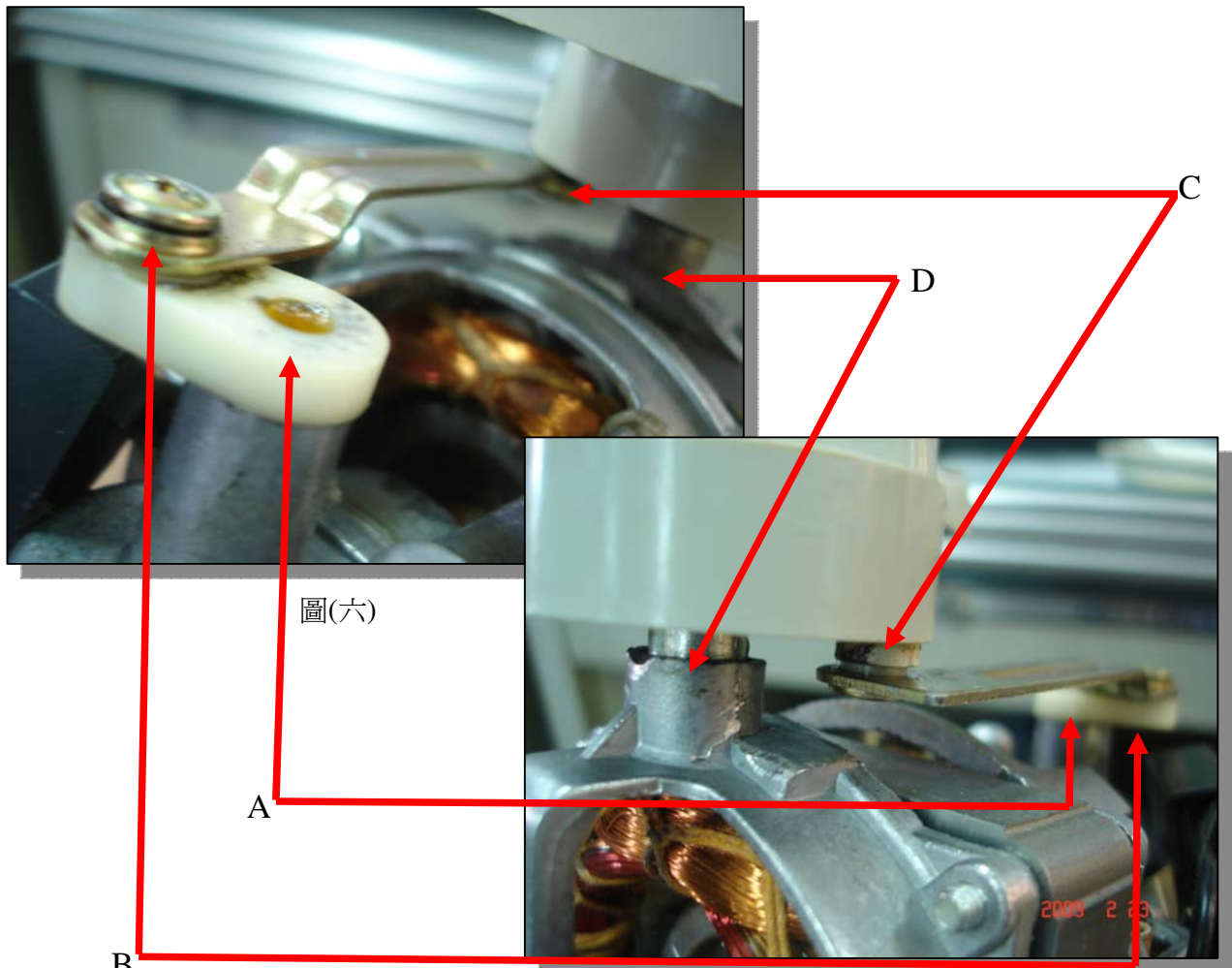
圖(四)

如圖(四)，這是拆掉塑膠盒後的仰視圖。

經由上面的觀察，我們發現控制電風扇擺動的關鍵是四個軸點，我們將它們標示在仰視圖片上，並且標示上 A, B, C, D 四個點。(扇葉位置在 D 下方)



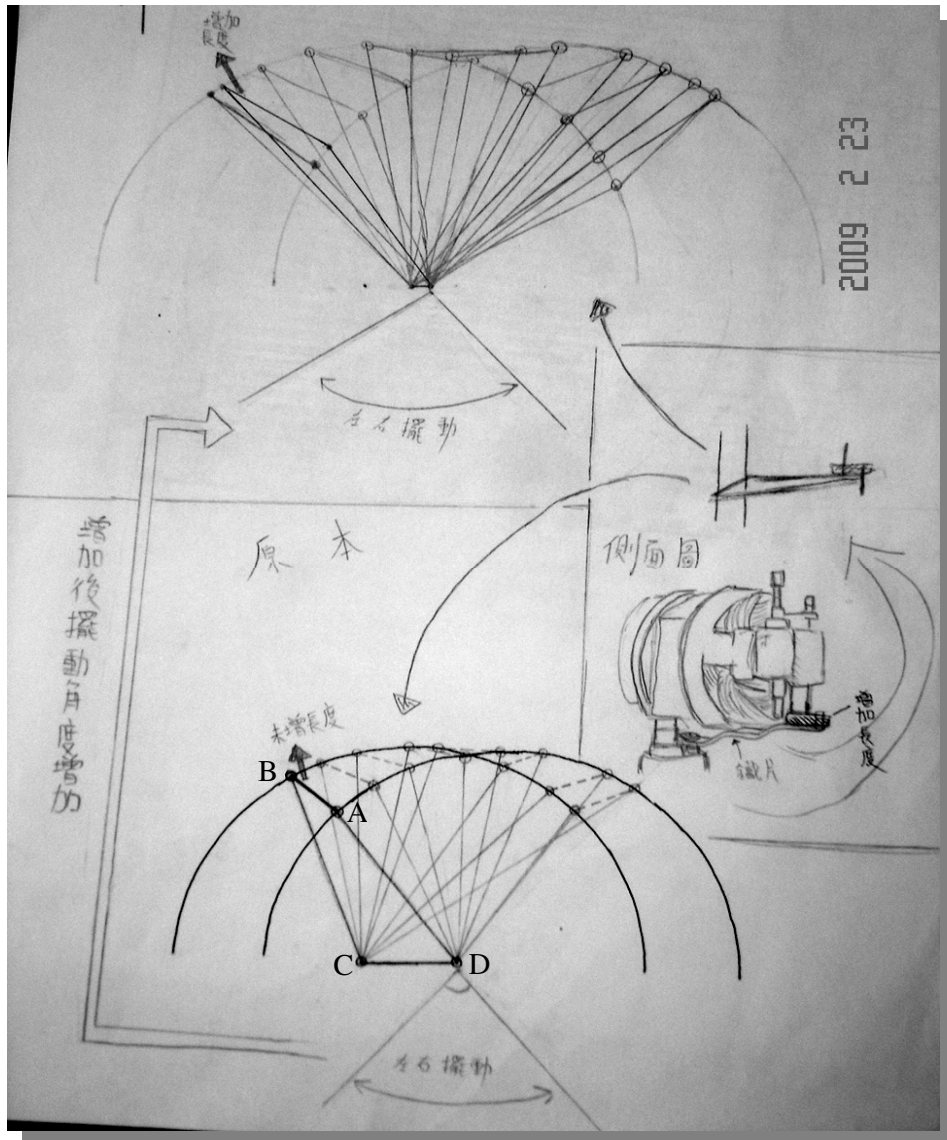
圖(五)



圖(六)

圖(七)

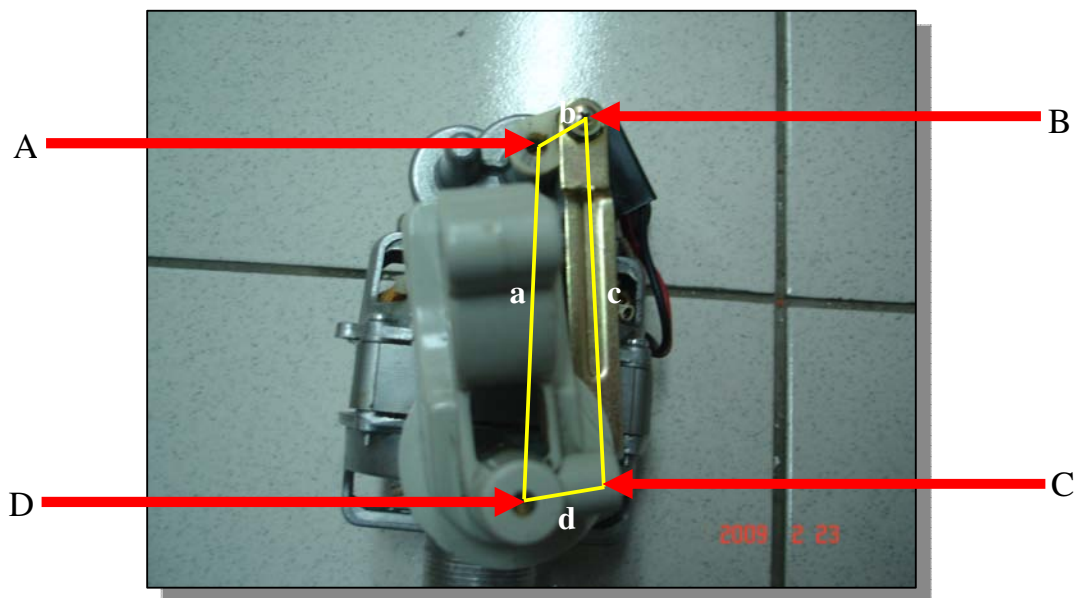
接下來我們觀察並繪出電風扇擺動時，A, B, C, D 四個點相對位置紀錄，如圖(八)。要注意因為觀察的方位是俯視圖，因此 A, B, C, D 的位置與仰視圖剛好是左右互換的。往後的研究我們都是以仰視圖為主。



圖(八)

從圖(八)我們可以發現，以 A, B, C, D 為軸的電扇，在轉動時 C 與 D 點是固定不動的，而 A 與 B 點則各自以圓弧形移動。而在 D 點下方的電扇擺動角度則視 A, B 移動多寡來決定。

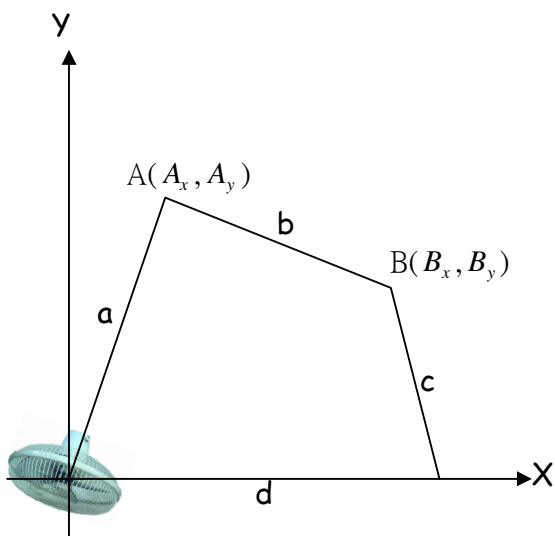
二、將電扇結構簡圖數學化並推理



上圖為將圖(五)中 D 點設為原點(0, 0), $A(A_x, A_y)$, $B(B_x, B_y)$, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$,

$\overline{CD} = d$, (如上圖黃色線的部份), 接著進行下面的數學推理:

(一)數學推理階段一: 給定已知數 a, b, c, d, A_x, A_y , 求 B 點座標 (B_x, B_y) , 目的想從 A 點座標來預測 B 點座標, 以便找到電扇擺動與各線段間的關係



給予定值: a, b, c, d, A_x, A_y

已知條件:

$$a^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad \text{-----(1)}$$

$$b^2 = (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 \quad \text{-----(2)}$$

$$c^2 = (B_x - d)^2 + B_y^2 \quad \text{-----(3)}$$

$$b^2 = B_x^2 - 2A_x B_x + A_x^2 + B_y^2 - 2A_y B_y + A_y^2 \quad \text{-----(4)}$$

$$c^2 = B_x^2 - 2dB_x + d^2 + B_y^2$$

$$b^2 = a^2 - 2A_x B_x - 2A_y B_y + c^2 + 2dB_x - d^2 \quad \text{-----(5)}$$

將(1)式及(5)式代入第(4)式

$$\Rightarrow 2A_x B_x - 2dB_x = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 - 2A_y B_y$$

$$\Rightarrow 2(A_x - d)B_x = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 - 2A_y B_y$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(A_x - d)} - \frac{2A_y B_y}{2(A_x - d)} \text{-----}(6)$$

此時令上式的 $\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(A_x - d)} = p$ ，則上式 $B_x = p - \frac{A_y B_y}{(A_x - d)}$ ，將 B_x 代入(3)

$$\therefore c^2 = \left[\left(p - \frac{A_y B_y}{(A_x - d)} - d \right)^2 + B_y^2 \right]$$

$$\text{將上式展開成：} c^2 = p^2 + \left[\frac{A_y B_y}{(A_x - d)} \right]^2 + d - 2p \frac{A_y B_y}{(A_x - d)} + 2d \frac{A_y B_y}{(A_x - d)} - 2pd + B_y^2$$

接下來將 B_y^2 與 B_y 的係數分離出來成為以 B_y 為未知數的一元二次方程式如下：

$$\left\{ \left[\frac{A_y}{(A_x - d)} \right]^2 + 1 \right\} B_y^2 + 2(d - p) \frac{A_y}{(A_x - d)} B_y + p^2 - 2pd + d^2 - c^2 = 0$$

$$\text{令} \left[\frac{A_y}{(A_x - d)} \right]^2 + 1 = q, \quad 2(d - p) \frac{A_y}{(A_x - d)} = r, \quad p^2 - 2pd + d^2 - c^2 = s$$

$$\text{則原式可以改寫成 } qB_y^2 + rB_y + s = 0 \text{-----}(7)$$

$$\text{用公式解(7)式得 } B_y = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q} \text{-----}(8)$$

$$\text{將(8)式代回(6)得 } B_x = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(A_x - d)} - \frac{2A_y}{2(A_x - d)} \times \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q}$$

若探討(8)式一元二次方程式的解，我們可以知道

當 $r^2 - 4qs > 0$ 時， B_y 有兩相異實數解，即連桿圖上可以順利繪出兩個相異的 B (B_x, B_y)

$r^2 - 4qs = 0$ 時， B_y 有重根，即在連桿圖上可以繪出一個 B (B_x, B_y)

$r^2 - 4qs < 0$ 時， B_y 無實數解，即在圖形上繪不出來，也就是不可能產生此圖形。

得到以上的結果後，我們對 $r^2 - 4qs < 0$ 無實數解產生好奇，到底什麼限制條件之下會導致方程式無解？什麼長度的 a, b, c, d 會使得這個連桿機構不能成立？因此我們下一步要試著把 $r^2 - 4qs < 0$ 加以演化成有用的結果。

(二)數學推理階段二：將階段一所得出的結果，令 A_x 為未知數，進而推演出 A_x 的限制條件，即可找到電扇擺動幅度的限制

將(一)數學推理階段中我們所假設的 p, q, r, s 逐步還原代入 $r^2 - 4qs < 0$ ：

$$\text{得 } [2(d-p)\frac{A_y}{A_x-d}]^2 - 4[\frac{A_y^2}{(A_x-d)^2} + 1][(p-d)^2 - c^2] < 0$$

$$\text{展開後得 } 4(d-p)^2 \frac{A_y^2}{(A_x-d)^2} - 4(d-p)^2 \frac{A_y^2}{(A_x-d)^2} + 4c^2 \frac{A_y^2}{(A_x-d)^2} - 4(p-d)^2 + 4c^2 < 0$$

$$\text{化簡後得 } 4c^2 \frac{A_y^2}{(A_x-d)^2} - 4(p-d)^2 + 4c^2 < 0 \rightarrow c^2 \frac{A_y^2}{(A_x-d)^2} - (p-d)^2 + c^2 < 0$$

$$\text{接下來將 } p = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(A_x - d)} \text{ 代入 } c^2 \frac{A_y^2}{(A_x - d)^2} - (\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(A_x - d)} - d)^2 + c^2 < 0$$

$$\rightarrow c^2 \frac{A_y^2}{(A_x - d)^2} - (\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2 - 2dA_x + 2d^2}{2(A_x - d)})^2 + c^2 < 0, \text{ 不等式左右同乘 } 4(A_x - d)^2$$

$$\rightarrow 4c^2 A_y^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2 - 2dA_x + 2d^2)^2 + 4c^2 (A_x - d)^2 < 0, \text{ 展開後同類項合併}$$

$$\rightarrow 4c^2 (A_x^2 + A_y^2 + d^2) - 8c^2 dA_x - (a^2 + c^2 + d^2 - b^2 - 2dA_x)^2 < 0$$

令 $a^2 + c^2 + d^2 - b^2 = t$ ， $A_x^2 + A_y^2 = a^2$ 代入，則可將上式改寫成下式：

$$\rightarrow 4c^2 (a^2 + d^2) - 8c^2 dA_x - (t - 2dA_x)^2 < 0$$

$$\rightarrow (t - 2dA_x)^2 + 8c^2 dA_x - 4c^2 (a^2 + d^2) > 0 \text{ 展開後同類項合併}$$

$$\rightarrow 4d^2 A_x^2 + (8c^2 d - 4dt)A_x + [t^2 - 4c^2 (a^2 + d^2)] > 0$$

欲解不等式，則設 A_x 為變數，對上式 $4d^2 A_x^2 + (8c^2 d - 4dt)A_x + [t^2 - 4c^2 (a^2 + d^2)] = 0$ 進

$$\begin{aligned} \text{行公式解，可以得到 } & \frac{-(8c^2 d - 4dt) \pm \sqrt{(8c^2 d - 4dt)^2 - 16d^2 (t^2 - 4c^2 (a^2 + d^2))}}{8d^2} \\ & = \frac{(4dt - 8c^2 d) \pm \sqrt{64c^4 d^2 - 64c^2 d^2 t + 16d^2 t^2 - 16d^2 t^2 + 64a^2 c^2 d^2 + 64c^2 d^4}}{8d^2} \\ \therefore A_x = & \frac{(4dt - 8c^2 d) \pm \sqrt{64c^4 d^2 - 64c^2 d^2 t + 64a^2 c^2 d^2 + 64c^2 d^4}}{8d^2} \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

接下來將 $t = a^2 + c^2 + d^2 - b^2$ 代入(9)式中

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{[4d(a^2 + c^2 + d^2 - b^2) - 8c^2d] \pm \sqrt{64c^4d^2 - 64c^2d^2(a^2 + c^2 + d^2 - b^2) + 64a^2c^2d^2 + 64c^2d^4}}{8d^2} \\ = &\frac{[4d(a^2 + c^2 + d^2 - b^2) - 8c^2d] \pm \sqrt{64c^4d^2 - 64a^2c^2d^2 - 64c^4d^2 - 64c^2d^4 + 64b^2c^2d^2 + 64a^2c^2d^2 + 64c^2d^4}}{8d^2} \\ = &\frac{[4d(a^2 + c^2 + d^2 - b^2) - 8c^2d] \pm \sqrt{64b^2c^2d^2}}{8d^2} = \frac{(4a^2d + 4c^2d + 4d^3 - 4b^2d - 8c^2d) \pm 8bcd}{8d^2} \\ = &\frac{(4a^2d + 4d^3 - 4b^2d - 4c^2d) \pm 8bcd}{8d^2} \text{ 接下來對分子分母同除 } 4d \\ \rightarrow &\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \pm 2bc}{2d} = \frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2d} \text{ 或 } \frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2d} \end{aligned}$$

即表示當 $A_x > \frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2d}$ 或 $A_x < \frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2d}$ 時， $r^2 - 4qs < 0$ 無解

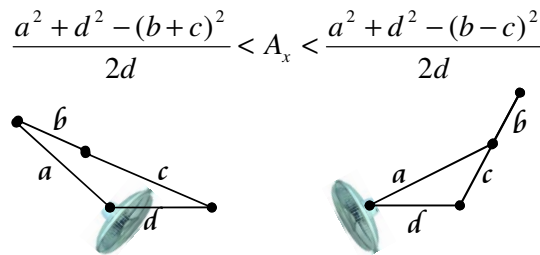
換句話說，只有當 $\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2d} < A_x < \frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2d}$ 時， A_x 才有解，而當 A_x 能夠移動的距離越大時，電扇擺動的角度也會隨之增大。

(三) 數學推理階段三：將階段二所得出的結果，再進行分析，以得知四個軸長度的關係式

將階段二結果展開 $\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2d} - \frac{bc}{d} < A_x < \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2d} + \frac{bc}{d}$ -----(10)

1. 觀察(10)式，如果我們想要讓 A_x 的移動範圍增大，就要讓上述不等式的右項更大，左項更小。因此我們得讓 $\frac{bc}{d}$ 的值更大，亦即 d 要越小越好，bc 要越大越好。

2. 我們推想(10)式移動到最兩邊極限時的四軸情況，大致如圖(十一)：



圖(九)

我們可以看到在極限左邊和右邊時皆成爲三角形，因此利用三角形兩邊之和大於第三邊，我們可以得到兩個式子：

$$\begin{cases} a+d > b+c \\ d+c-b > a \end{cases} \rightarrow \text{將上下兩式相加後得 } a+c+2d > a+c+2b \rightarrow \underline{\underline{d > b}}$$

3.由圖(十一)及圖(十二)中我們可以看出，b 軸因為會在 a 與 c 上有旋轉的軌跡，因此 $b < a$ ， $b < c$ 才能夠旋轉。

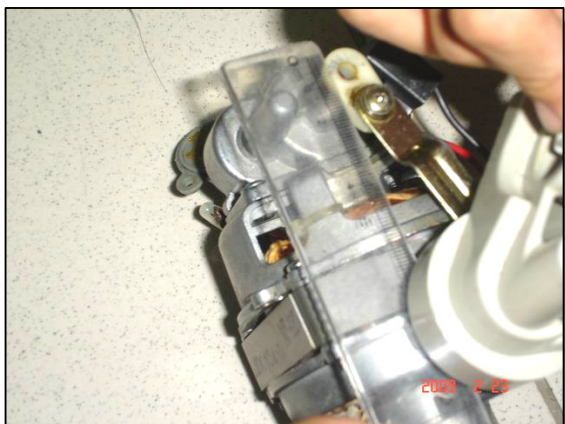
故由 1.2.3 三個結果我們總結出想要使 A_x 移動增加範圍加大，使得電扇擺動角度增家的方法是 d 要越小越好，bc 要越大越好，a,b,c 均大於 b，因而得知 c 要比 b 大很多才能把 bc 變大，因此我們可以推得四者關係為：

$$a \text{ 與 } c > d > b$$

三、驗證測試推理結果。

(一)將電扇數據套用推理結果與電腦軟體 EXCEL 作驗證

接下來驗證推理成果，因此我們測量電扇 a, b, c, d 的長度，我們測量軸長的方法是採取軸點的螺絲中心到另一個軸點的螺絲中心。原因是比對電腦的計算試驗後，發現用此方法測量的結果與計算結果最相符



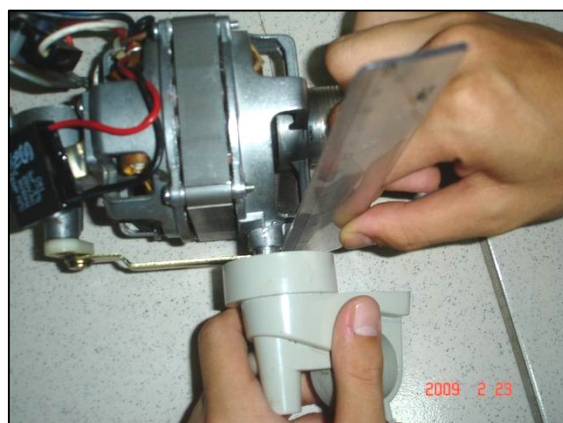
圖(十)-1 軸長 a 的測量



圖(十)-2 軸長 b 的測量



圖(十)-3 軸長 c 的測量



圖(十)-4 軸長 d 的測量

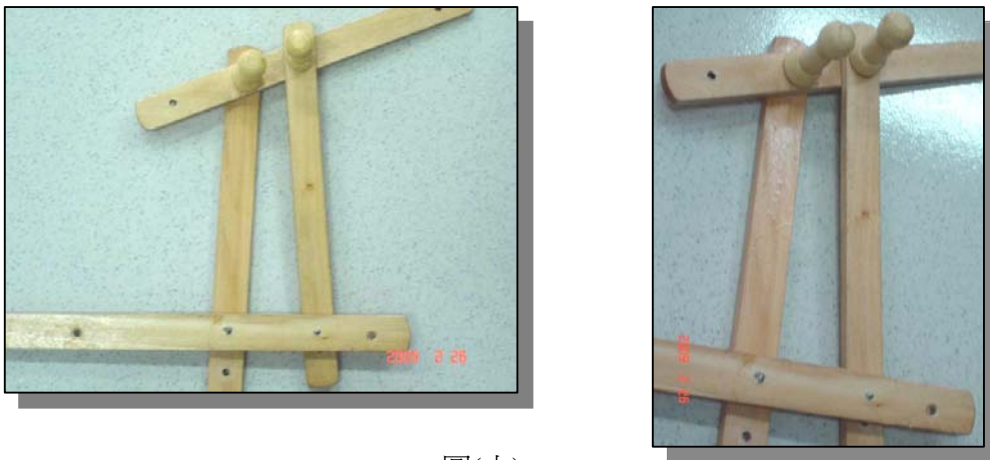
表(一)是我們將電扇實地測量出 a, b, c, d 的長度後，再測量 $A(A_x, A_y)$ ， $B(B_x, B_y)$ 的值與用電腦軟體 EXCEL 計算後所得值的驗證表。我們可以發現，左邊黃底表格中的測量數據，與右邊黃底表格的計算數據相當接近，代表我們所推算的式子是正確的。

不僅如此，我們也可以從 EXCEL 中看出 A_x 的移動範圍不能超過 6.851647 與 -0.85165 (紅底表格)，從測量數據中我們也知道電扇四軸的大小與我們所推理的「 a 與 $c > d > b$ 」結果相當吻合，再次驗證我們的推理是正確的。

| 實際測量結果 | | 用電腦軟體 EXCEL 試算結果 | | | | | | 驗證結果 |
|------------------|-----|----------------------|----------|-----|----------|------------------|-------------------|------|
| a = | 7.5 | | | | | | | 成功 |
| b = | 1.5 | A _x = | 4 | | | p= | 28.5 | |
| c = | 8 | A _y = | 6.5 | | | q= | 11.5625 | |
| d = | 2 | a= | 7.5 | | | r= | -172.25 | |
| A _x = | 4 | b= | 1.5 | | | s= | 638.25 | |
| A _y = | 6.5 | c= | 8 | | | B _x = | 2.564901 6.018883 | |
| B _x = | 2.5 | d= | 2 | | | B _y = | 7.980031 6.917267 | |
| B _y = | 8 | $r^2 - 4qs$ 無解的值 | | 151 | | | | |
| | | 當 A _x 的座標 | | | | | | |
| | | 大於 | 6.851647 | 或小於 | -9.85165 | 時,就無解 | | |

表(一)

在模型製作方面，我們原本要做電扇四個軸等比例放大模型，如圖(十)。



圖(十)

但因為還要驗證不同長度的 a, b, c, d 對於我們推理結果的驗證，所以我們必須做能夠讓 a, b, c, d 伸縮的模型。因此，我們必須針對各軸的伸縮性進行模型上的修正動作。

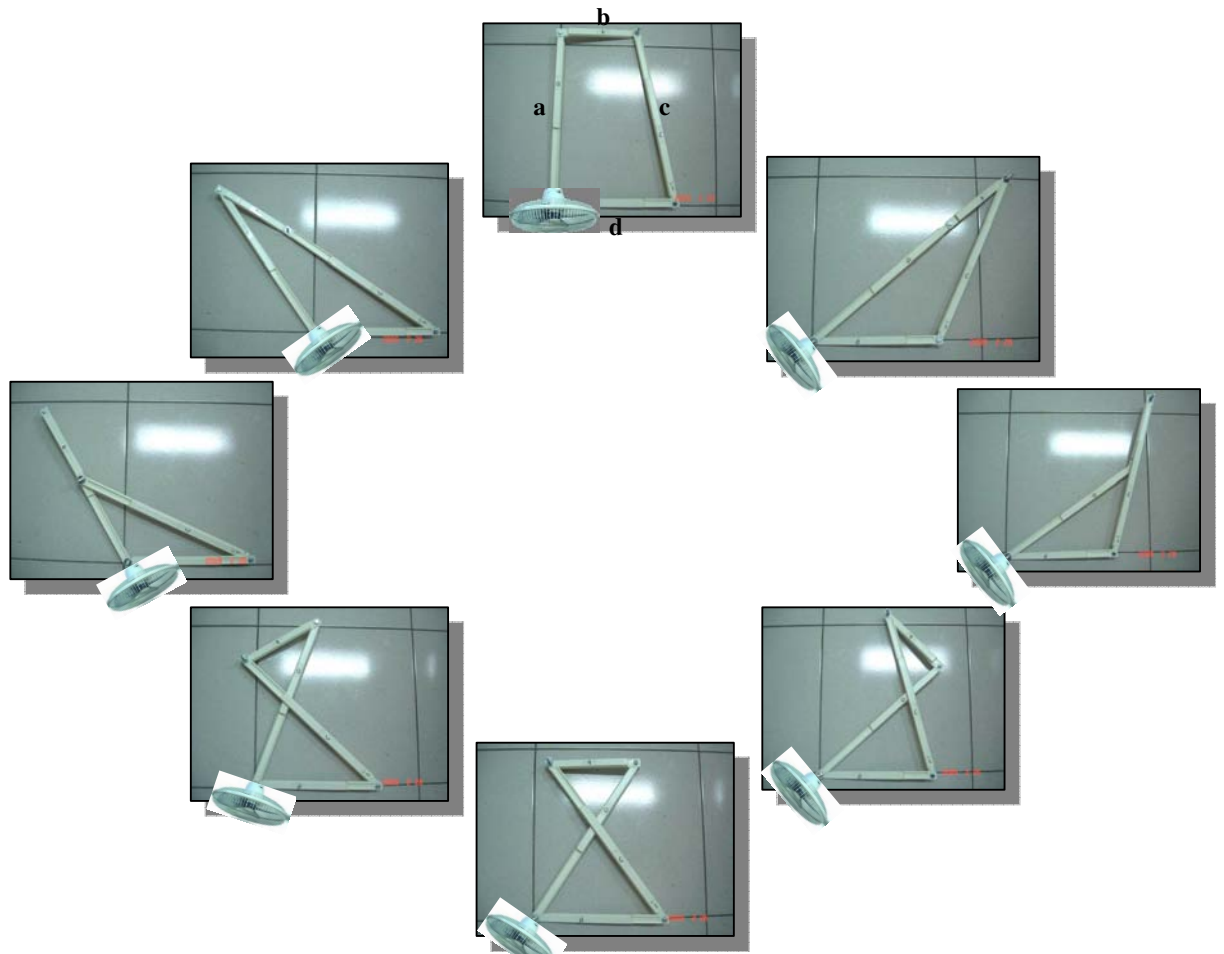
(二)製作伸縮模型加以測量，套用推理結果與電腦軟體 EXCEL 作驗證

如圖(十一)，在五金行購買的螺絲、螺帽與鋸掉一部份四個伸縮桿，利用螺絲與螺帽兩兩相接。



圖(十一)

完成後的伸縮模型如圖(十二)，以正上方為起始，d 邊當底不動，則依順時針看圖或逆時針看圖可模擬電扇擺動時各軸所形成的關係。



圖(十二)

接下來利用我們完成的可伸縮模型來做推理結果的驗證，驗證結果如表(二)與表(三)。

| 各軸長 | | 量測 A(A_x, A_y)與 B(B_x, B_y)比較 EXCEL 所算的 B(B_x, B_y) | | | | | | | | 驗證結果 | |
|-----|------|---|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--------|
| a = | 34 | 量測 A_x | -21 | -15.5 | -9 | -6.5 | 0 | 4 | 11 | 32 | 相 符 |
| | | 量測 A_y | 26 | 29 | 32.5 | 33 | 33.5 | 33 | 30.5 | 10.5 | |
| b = | 19.5 | 量測 B_x | 5 | 3 | 8.5 | 13.5 | 19 | 23 | 30.5 | 49 | |
| | | 量測 B_y | 16.5 | 25 | 29 | 30.5 | 31 | 32 | 30.5 | 16 | |
| c = | 32 | 計算 B_x | 無解 | 1.22 | 9.75 | 12.16 | 18.53 | 22.12 | 27.56 | 無解 | |
| | | 計算 B_y | 無解 | 23.90 | 29.35 | 30.28 | 31.75 | 32 | 31.6 | 無解 | |
| d = | 22.5 | $-7.064 < A_x < 18.53032$ | | | | | | | | | |

表(二)

| 各軸長 | | 量測 A(A_x, A_y)與 B(B_x, B_y)比較 EXCEL 所算的 B(B_x, B_y) | | | | | | | | 驗證結果 | |
|-----|------|---|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|--------|
| a = | 25.5 | 量測 A_x | -20.5 | -16.5 | -9.5 | -8.5 | 0 | 4 | 7 | 17.5 | 相 符 |
| | | 量測 A_y | 14 | 18 | 23 | 24 | 25.5 | 23.5 | 22 | 18 | |
| b = | 19.5 | 量測 B_x | -1.5 | 2 | 10 | 14 | 18 | 26 | 28.5 | 30 | |
| | | 量測 B_y | 9 | 19 | 26 | 27 | 30 | 31 | 32 | 32 | |
| c = | 32 | 計算 B_x | 無解 | 1.55 | 9.03 | 9.49 | 18.85 | 27.61 | 28.94 | 無解 | |
| | | 計算 B_y | 無解 | 17.25 | 25.4 | 25.74 | 30.51 | 31.99 | 32 | 無解 | |
| d = | 28.5 | $-7.235 < A_x < 9.278993$ | | | | | | | | | |

表(三)

驗證結果與公式推理大致上是相符合的。至於量測所得的值與精準計算值難免會有誤差，但誤差並不大，其中「無解」的部份是因為 A_x 已超過限制範圍，所以用 EXCEL 計算不出結果，上面兩大表格的驗證結果再次驗證我們的推理正確。

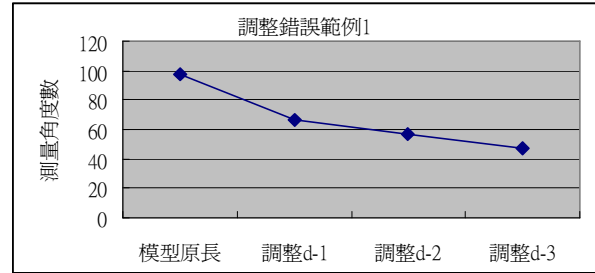
比較表(二)及表(三)，我們可以看出表(三)中 $d > a$ ，不遵守推理規則，因此表(三)中的 $-7.235 < A_x < 9.278993$ ，比表(二)中的 $-7.064 < A_x < 18.53032$ 要少了許多，同樣也說明了我們的推理結果是正確的。

(三)用模型探究各軸長與角度的關係

最後要針對推導公式改變軸長，以進行測量軸長變化與角度變化之關係。

| 調整錯誤例 1 | | | | | |
|---------|------|------|------|------|-------|
| 名目 | 軸長 a | 軸長 b | 軸長 c | 軸長 d | 測量角度數 |
| 模型原長 | 80 | 13 | 75 | 20 | 97 度 |
| 調整 d-1 | 80 | 13 | 75 | 24 | 66 度 |
| 調整 d-2 | 80 | 13 | 75 | 26 | 57 度 |
| 調整 d-3 | 80 | 13 | 75 | 28.2 | 47 度 |

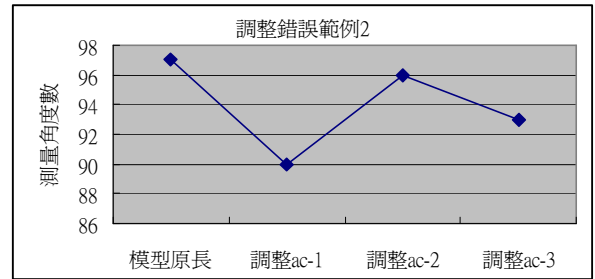
表(五)



圖(十四)

| 調整錯誤例 2 | | | | | |
|---------|------|------|------|------|-------|
| 名目 | 軸長 a | 軸長 b | 軸長 c | 軸長 d | 測量角度數 |
| 模型原長 | 80 | 13 | 75 | 20 | 97 度 |
| 調整 ac-1 | 91 | 13 | 87.7 | 20 | 90 度 |
| 調整 ac-2 | 96 | 13 | 93.8 | 20 | 96 度 |
| 調整 ac-3 | 98.1 | 13 | 98.4 | 20 | 93 度 |

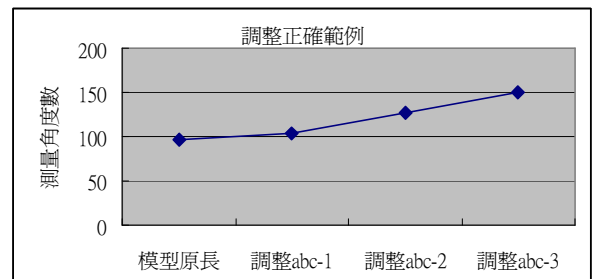
表(六)



圖(十五)

| 調整正確範例 | | | | | |
|----------|------|------|------|------|-----------|
| 名目 | 軸長 a | 軸長 b | 軸長 c | 軸長 d | 測量角度數 |
| 模型原長 | 80 | 13 | 75 | 20 | 97 |
| 調整 abc-1 | 80 | 15 | 83 | 20 | 104(+ 7%) |
| 調整 abc-2 | 80 | 17 | 83 | 20 | 127(+30%) |
| 調整 abc-3 | 90 | 19 | 91 | 20 | 150(+55%) |

表(七)



圖(十六)

在數學推導的結果我們知道 $ac > d > b$ ，但依此原則去改變軸長，結果卻不如預期中有大幅增進角度的現象，反而呈現轉動角度變小的狀況，如表(五)、表(六)及圖(十四)、圖(十五)。

我們重新審視數學公式的推導結果，發現之前有提過 bc 要越大， d 要越小能使轉動角度增加，於是我們依此原則再進行調整，發現果如預期角度大幅增加，如表(七)與圖(十六)。也因此我們知道 $ac > d > b$ 的公式要配合 bc 越大與 d 越小能夠使角度大大躍進，在紀錄上甚至能夠增加多達 55% 的旋轉角度。

四、研究結果與討論

一、電風扇擺動的關鍵在於扇葉後方塑膠盒中四個軸點所組成的結構。

二、將四軸量出軸長 a, b, c, d ，並假設 A 點座標 (A_x, A_y) 與 B 點座標 (B_x, B_y) ，令其中

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(A_x - d)} = p, \left[\frac{A_y}{(A_x - d)} \right]^2 + 1 = q, 2(d - p) \frac{A_y}{(A_x - d)} = r, p^2 - 2pd + d^2 - c^2 = s$$

$$\text{時，我們可以算出 B 點的座標 } (B_x, B_y) = \left(p - \frac{A_y B_y}{(A_x - d)}, B_y = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q} \right)$$

二、 $\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2d} < A_x < \frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2d}$ ，其中 $\frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2d}$ 大約為 A_x 的最大位置，而 $\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2d}$ 大約為 A_x 的最小位置。

三、若 A_x 移動的距離越大，則電扇擺動的角度也會隨之增大。

四、電扇擺動角度增加要遵守軸長的規則： a 與 $c > d > b$ ，要讓擺動角度增加還得同時配合 bc 要越大， d 要小的原則。

伍、後續研究建議

- 1.在數據的量測上難免有失準的地方，因此往後再進行研究時可以增加這部份的準確度以提高整個實驗的精確性。
- 2.在公式的推導上，我們得到了 A_x 的限制範圍，但對於 A_y 我們則沒有找它的限制範圍，因此後續研究上可以就 A_y 的部份進行研究。
- 3.後續研究者可以就電扇擺動角度方面加以推導及研究。
- 4.後續研究上可以從模型往做成成品方向去做發展。
- 5.研究電扇以它種型式擺動也是很好的後續研究方向。例如擺動不再只有左右，甚至可以增加上下方的擺動。

陸、工作日誌

- 第一次討論：**探討可能的研究題目。初步決定要將電扇改裝成可以 180 度擺動的電扇。
- 第二次討論：**發現製作上有技術無法克服的部份，因此決定先從原理上去找到修改電扇擺動角度的關鍵。於是先對電扇進行觀察與擺動方式之繪圖。
- 第三次討論：**大家輪流介紹自己的想法，參考書籍並由同學及老師指出具爭議的部份，歸納出擺動的關鍵四軸 a, b, c, d 。
- 第四次討論：**將四軸放在直角座標上標示主要轉動的兩個軸點 A、B，開始冗長的數學推導過程。
- 第五次討論：**太多個未知數讓推導過程相當困難，與老師共同討論。首先解決直線與商高定理問題。
- 第六次討論：**用公式解得到第一部份的結論。
- 第七次討論：**進一步將第一部份結論中判別式 < 0 的地方加以深入研究。
- 第八次討論：**繼續研究第一部份結果並與老師討論，進展不大。

第九次討論：就不等式部份與老師討論，得到一個漂亮的結果，並就結果進行推廣。完成了第二部份推導的結果。

第十次討論：爲了驗證推導結果，將四軸做成模型。

第十一次討論：模型無伸縮性，實用效果不大，經討論後決定做軸長可以伸縮的模型。

第十二次討論：將五金行找到的塑膠伸縮品削鋸並用螺絲鎖上後完成模型。

第十三次討論：測量電扇與模型數據加以驗證推導結果之正確性。

第十四次討論：完成所有模型之實驗數據。

第十五次討論：開始製作報告。

第十六次討論：報告中加入科展研究時所拍攝之照片，並與老師討論刪改的部份。

第十七次討論：完成所有科展之報告。

柒、參考資料(資料來源)

- 1.翰林版國中數學第二冊第四章：不等式
- 2.翰林版國中數學第三冊第二章：二次方根與勾股定理
- 3.翰林版國中數學第三冊第四章：一元二次方程式
- 4.翰林版國中數學第六冊第一章：二次函數
- 5.機構學多媒體網路教學
<http://140.124.30.80/introduction/teacher/%E9%99%B3%E6%AD%A3%E5%85%89/mechanism/kinematic.htm>
- 6.機構學初版，2005，全華出版，吳明勳編著

【評語】 030406

1. 本作品以傳達到電扇旋轉最大角度拆解、檢視控制電扇旋轉機制，並將實際問題轉換成數學問題，提出適當的解題方式與解答，甚具創意與實用性。
2. 可以更嚴謹有效的數學方法，求取可以任選旋轉角度的方法，提高此研究的實用性與應用價值。