

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

第三名

030405

集葉成球~ n 球公切球之研究與探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國一 牛思云	張仲凱
國二 謝心耘	魏子超
國二 駱為庭	
國二 鄒宜承	

關鍵詞：公切、圓錐曲面、三元二次方程式

集葉成球—— n 球公切球之研究與探討

摘要

本研究旨在探討「任意給定 n 球，存在多少個公切球？」。起初，在二維平面上找出圓錐曲線性質作圖法和圓錐曲線方程式作圖法；接著利用旋轉的概念將平面上的雙曲線以貫軸所在直線為旋轉軸旋轉，得到三維空間的雙曲面，即公切球球心所在軌跡圖形，以之推算平面上三截圓雙曲線的標準式，再進一步推導三球雙曲面的標準式，並解出其交線方程式，證明一般情況下相異三球存在無限個公切球。

另外，我們找出了構成 n 球公切球最佳解(非無限多個的最多情形)的充分條件—— n 等球球心構成最多組環形，並利用畢氏定理計算公切球半徑，可推得 n 球公切球的個數，如下表。

給定不共面相異 n 球數	2	3	4	5	6	7	8	9	∞
公切球數最佳解	∞	∞	16	12	10	8	8	4	4

最後，我們以極限的觀點來觀察 n 球公切球的存在情形，再次驗證三球和四球中公切球的存在狀況。

壹、研究動機

曾看過關於公切圓的研究報告，我們不禁思考，在三維空間中是否能發現更有趣的現象？兩球條件下，存在幾個公切球？ n 球時又存在幾個？有何方法或公式可求得公切球個數？

為使之具體化呈現，我們用電腦軟體輔助觀察與思考，進一步探討公切球存在的幾何性質。再透過數學方法及衍生的公式，推導 n 球條件下，公切球存在的個數。

貳、研究目的

- 一、探討如何將平面公切圓轉換成立體公切球
- 二、利用圓錐曲面探討公切球的存在性
- 三、利用三元二次方程式探討公切球的存在狀況
- 四、探討 n 球公切球之最佳解球數
- 五、利用其他方式判別 n 球公切球之最佳解球數

參、研究工具

GSP 動態幾何軟體、Cabri 3D 幾何軟體、Matlab 套裝軟體、紙、筆

肆、研究過程與討論

一、平面公切圓求法

n 球公切球的探討我們想先以平面著手，再將之轉換成立體。平面公切圓可用圓錐曲線求得，或以便於運算的方程式求得其軌跡，兩種方法分述如下：

(一) 圓錐曲線性質作圖法

在研究過程中，我們發現，兩圓內離時，其公切圓之圓心軌跡為一橢圓；兩圓相交、外離、內切或外切時，其公切圓之圓心軌跡為一雙曲線。令給定兩圓半徑 r_1 、 r_2 ，當其公切圓為一內一外切或一外一內切型時，其圓心之軌跡是定值為 $r_1 + r_2$ 的圓錐曲線；當公切圓為兩外切或兩內切型時，其圓心之軌跡是定值為 $|r_1 - r_2|$ 的圓錐曲線，因此我們將圓錐曲線性質作圖法分成雙曲線和橢圓兩種，作法分述如下：

1. 雙曲線

(1) 定義：

平面上任一點 P 和兩定點 F_1 、 F_2 的距離差絕對值為定值時，所有 P 點構成的圖形稱為雙曲線。 F_1 、 F_2 稱為焦點，如(圖 1-1)，即 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = K$ (K 為定值)。

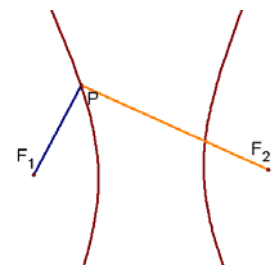


圖1-1 雙曲線

(2) 作圖法：

設圓 A 半徑為 r_1 ，圓 B 半徑為 r_2 。公切圓 O_1 半徑為 R ，若公切圓圓心至兩圓圓心距分別為 $r_1 + R$ 、 $r_2 + R$ ，則依雙曲線定義可繪出以 A、B 為焦點且定值為 $|\overline{O_1A} - \overline{O_1B}| = |(R+r_1) - (R+r_2)| = |r_1 - r_2|$ 的雙曲線，如(圖 1-2)；若距離為 $R - r_1$ 、 $R + r_2$ ，則可繪出定值為 $|\overline{O_1A} - \overline{O_1B}| = (R+r_2) - (R-r_1) = r_1 + r_2$ 的雙曲線，如(圖 1-3)。雙曲線上任一點與兩圓距離相等，以其為圓心即可作出圓 A、圓 B 的公切圓。

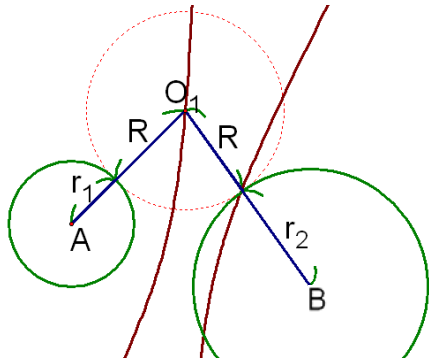


圖 1-2

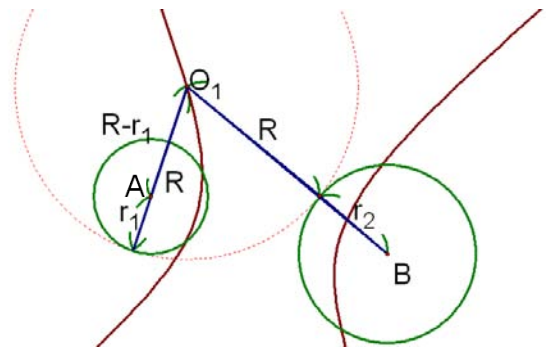


圖 1-3

a. 求定值為 $|r_1 - r_2|$ 之雙曲線作法：

- i. 以 B 為圓心，作半徑為 $|r_1 - r_2|$ 的圓 C
- ii. 在圓 C 上任取一個點 D，做出 \overline{AD} 的中垂線
- iii. 作 \overline{BD} ，交 \overline{AD} 之中垂線於 E 點
- iv. 利用 GSP 動態幾何使點 D 在圓 C 上移動，繪出 E 點的路徑軌跡，如(圖 1-4)

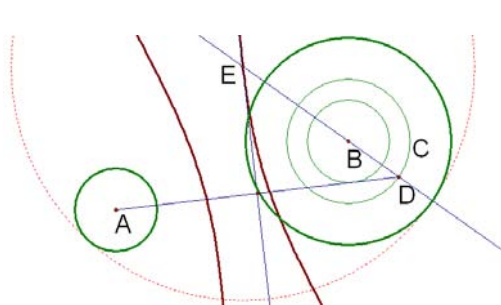


圖 1-4

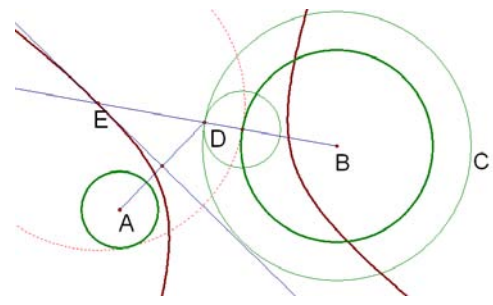


圖1-5

b. 求定值為 $r_1 + r_2$ 之雙曲線作法：

- i. 以 B 為圓心，作半徑為 $r_1 + r_2$ 的圓 C
- ii. 在圓 C 上任取一個點 D，做出 \overline{AD} 的中垂線
- iii. 作 \overline{BD} ，交 \overline{AD} 之中垂線於 E 點
- iv. 利用 GSP 動態幾何使點 D 在圓 C 上移動，繪出 E 點的路徑軌跡，如(圖 1-5)

2. 橢圓

(1) 定義：

平面上任一點 P 至兩定點 F_1 、 F_2 的距離和為定值之所有點構成的圖形，稱為橢圓。兩定點 F_1 、 F_2 稱為焦點，如(圖 1-6)，即 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = K$ (K 為定值)。

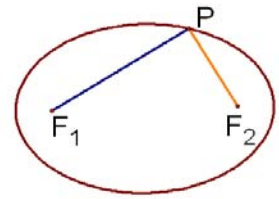


圖 1-6

(2) 作圖法：

令圓 A 與圓 B 內離、內切或相交(定值為 $r_1 + r_2$)時，圓 A 半徑為 r_1 ，圓 B 半徑為 r_2 ，公切圓圓心 O_1 、半徑為 R 。作定值為 $|r_1 - r_2|$ 的橢圓時， $\overline{AO_1} = r_1 - R$ ， $\overline{BO_1} = R - r_2$ ，由橢圓的定義，可得以 A 、 B 為焦點且定值為 $|(r_1 - R) + (R - r_2)| = |r_1 - r_2|$ 的橢圓，如(圖 1-7)；或定值為 $(r_1 - R) + (r_2 + R) = r_1 + r_2$ 的橢圓，如(圖 1-8)。其作圖法與雙曲線作圖法相同。

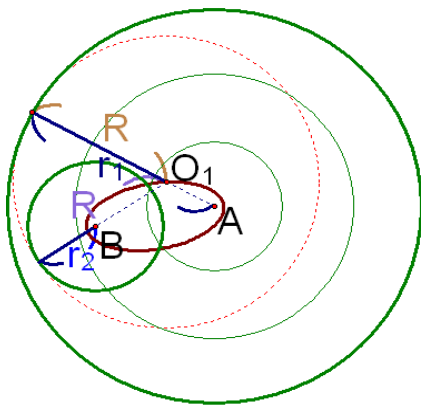


圖 1-7

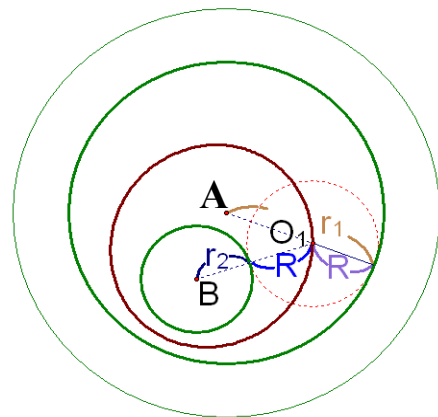


圖 1-8

3. 用圓錐曲線求 n 圓公切圓

我們使用定值為 $|r_1 - r_2|$ 和 $r_1 + r_2$ 的圓錐曲線求出 n 圓公切圓，步驟分述如下：

(1) 兩兩圓作出以 $|r_1 - r_2|$ 和 $r_1 + r_2$ 為定值的圓錐曲線

(2) 承上，共有 $n(n-1)$ 組圓錐曲線，但任兩圓只需提供定值為 $|r_1 - r_2|$ 或 $r_1 + r_2$ 其中一組，因此若交點上有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條圓錐曲線，其交點即為所求公切圓之圓心，

如(圖 1-9)，給定任意 3 圓時， P 為 $\frac{3 \times (3-1)}{2} = 3$ 條雙曲線交點， P 即公切圓圓心。

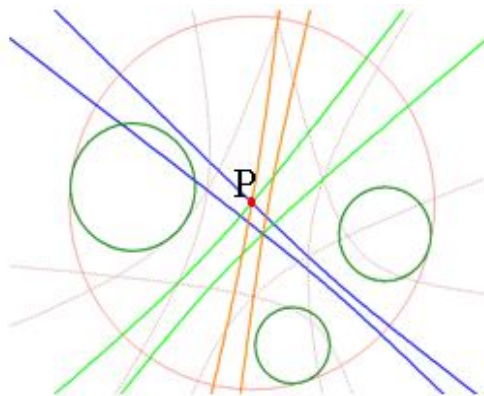


圖 1-9 3 圓需 3 條圓錐曲線通過交點 P

(二) 圓錐曲線方程式作圖法

n 圓公切圓是使用圓錐曲線性質作圖法求得，但我們想用簡易的直角座標直接求出雙曲線或橢圓的標準式。因此探究出第 2 種求法，直接求雙曲線或橢圓標準式的 a、b，再藉由座標軸旋轉公式，求出所要的圓錐曲線。以雙曲線為例，研究過程如下：

1. 用已知條件求雙曲線方程式：

令兩圓半徑為 r_1 、 r_2 ，其圓心 O_1 、 O_2 為雙曲線的焦點，P 為雙曲線上任一點，如(圖 1-10)，根據定義， $2a = \overline{AG} = |\overline{PO_1} - \overline{PO_2}|$ ， $2c = \overline{O_1O_2}$ ，再利用其性質 $a^2 + b^2 = c^2$ ，求出 b，代入即可得到雙曲線標準式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，即公切圓圓心軌跡方程式。

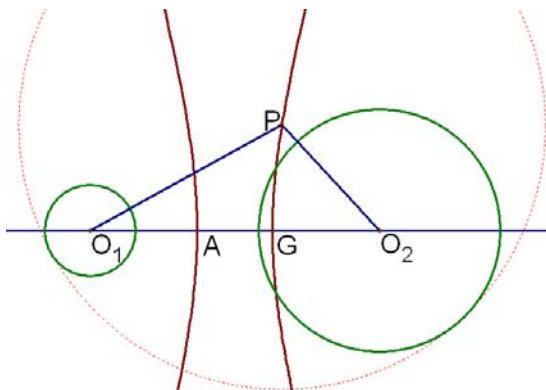


圖 1-10

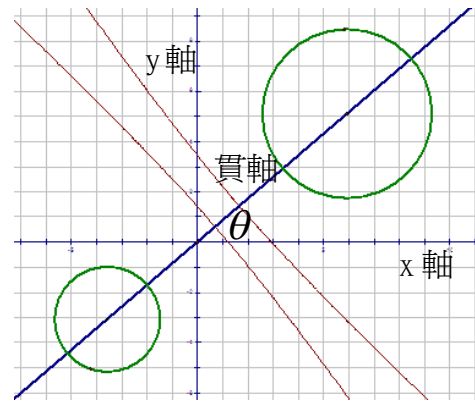


圖 1-11

2. 公切圓圓心軌跡方程式的求法：

求兩圓公切圓時，可旋轉 θ 使貫軸平行 x 軸，求得雙曲線標準式

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ，利用 GSP 繪出，再將圖形依貫軸旋轉 $-\theta$ 即可。當求三圓以上的公切圓時，我們推導的方法如下：

(1) 求兩兩圓的雙曲線貫軸(即兩圓圓心之連線)，令貫軸和 x 軸夾角為 θ ，如(圖 1-11)

(2) 將雙曲線標準式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及 θ ，利用座標軸旋轉公式求得

$$\frac{[(x-\alpha)\cos\theta - y\sin\theta]^2}{a^2} - \frac{[(x-\alpha)\sin\theta + y\cos\theta]^2}{b^2} = 1。$$

(3) 將方程式輸入 GSP 繪出，即得到所求的雙曲線。

二、平面作圖的立體轉換

已知平面公切圓可用圓錐曲線性質、圓錐曲線方程式等作圖法求得，因此我們想推廣到立體空間，探討公切球之存在性。

因三維空間不易思考，所以先將三維空間轉換成二維平面，再進一步探討。圓錐曲線至圓錐曲面的作圖轉換中，我們利用旋轉的概念呈現。設空間中兩球 S_1 、 S_2 ，球心 X_1 、 X_2 ，球半徑 r_1 、 r_2 ，平面作圖的立體轉換分述如下：

1. 令通過球心 X_1 、 X_2 的平面 N
2. 取兩球與 N 的截圓圓 C_1 、 C_2
3. 作定值 $|r_1 - r_2|$ (或 $r_1 + r_2$) 的圓錐曲線
4. 連 $\overline{X_1X_2}$ (即步驟 3. 圓錐曲線之貫軸)，如(圖 2-1)
5. 將平面 N 以 $\overline{X_1X_2}$ 為旋轉軸旋轉(同時旋轉了圓 C_1 、 C_2 和圓錐曲線)，而圓旋轉後變成球(即兩球 S_1 、 S_2)，圓錐曲線旋轉後成圓錐曲面，如(圖 2-2)。

由以上步驟，可得到定值為 $r_1 + r_2$ 和 $|r_1 - r_2|$ 的雙葉雙曲面，其性質為面上任一點和球心 X_1 、 X_2 的距離相加或相減成定值，也就是面上任一點即為 S_1 、 S_2 公切球的球心。

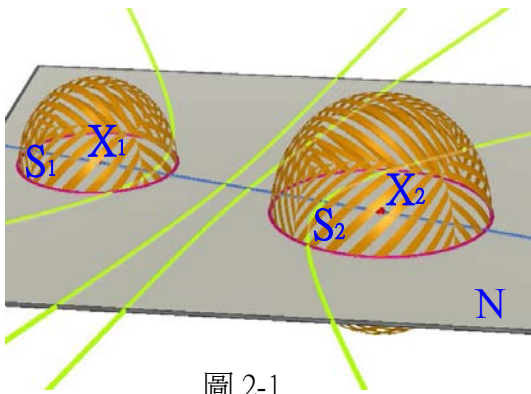


圖 2-1

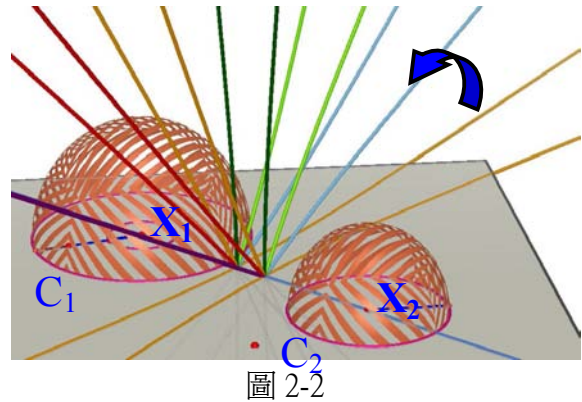


圖 2-2

三、n 球公切球的初探

由於 n 球公切球限制較多，因此先從 2、3 球依序探討，針對球與球之間圓錐曲面的相交情形初步研究公切球的存在個數，在【驗證與推廣】中有更完備的推導過程。

(一) 2 球公切球探討

空間中，兩球球心 X_1 、 X_2 ，球半徑為 r_1 、 r_2 ，用「二、平面作圖的立體轉換」步驟將圓錐曲線以 $\overline{X_1X_2}$ 為旋轉軸旋轉後，得到以公切球球心軌跡集成的一圓錐曲面，以兩球外離為例，請見(圖 3-1、3-2)，由此可知，兩球有無限個公切球。

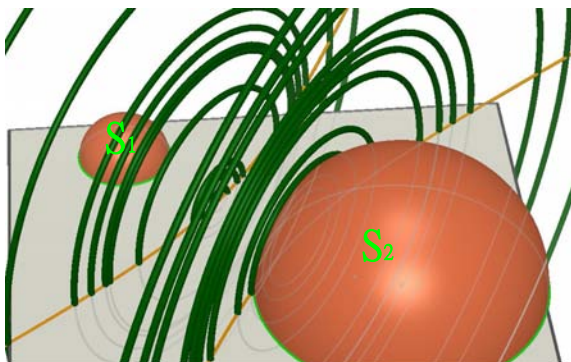


圖 3-1 兩球外離公切球球心軌跡為一圓錐曲面

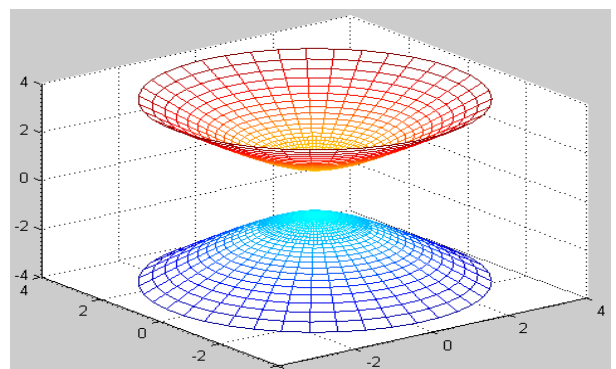


示意圖 3-2 旋轉後的雙曲線

(二) 3 球公切球探討

1. 3 等球心成正三角形：

定義 3 等球 S_1 、 S_2 、 S_3 ，球心連線為一正三角形。過正三角形外心作垂線 $L \perp$ 正三角形，則 L 上任取一點皆為全內切或全外切型公切球球心，如(圖 3-3)，至於一內二外切型或二內一外切型公切球的作法與三球一般情況相同。由上述可得 3 等球球心成正三角形有無限個公切球。

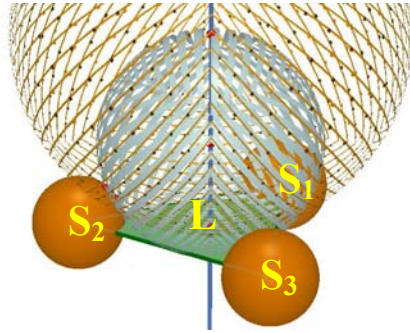


圖 3-3 L 上任取一點皆為全內切或全外切型公切球

2. 3 球心成一般情況：

給定 3 不等球 S_1 、 S_2 、 S_3 。做一平面通過 3 球球心，利用球與平面的截圓作六組圓錐曲線，再用【二、平面作圖的立體轉換】步驟將圓旋轉成球、圓錐曲線旋轉成圓錐曲面；共得到 8 條各由三圓錐曲面相交而成的曲線，得到無限個公切球，關於其存在無限個公切球證明，將於【伍、驗證與推廣】詳述；而三截圓的所有相對關係，詳如附錄一。

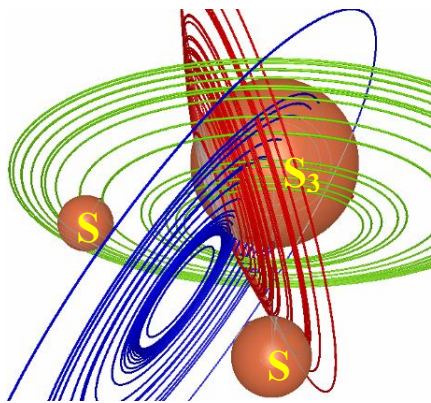


示意圖 3-4

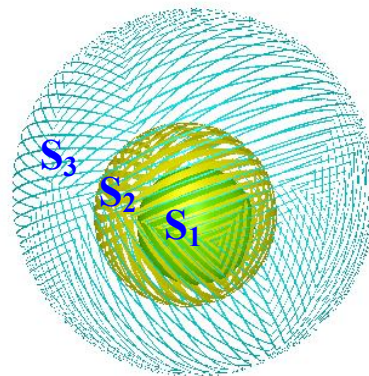


示意圖 3-5

3. 無公切球情況：

給定 3 球 S_1 、 S_2 、 S_3 兩兩內離，如(圖 3-5)， S_1 與 S_3 的公切球球心軌跡在 S_3 內、 S_1 外。 S_2 、 S_3 公切球球心軌跡在 S_3 內、 S_2 外，兩軌跡必不相交，故公切球不存在。

(三) 特殊情形

我們試著推導 n 球公切球的特殊情形，發現兩種情形必有無限個公切球，分述如下：

1. n 等球球心圍成圓形：

空間中平面 N 上，給定一圓 C ，則圓 C 直徑之垂直平分線 L 必通過圓心 O ，且必垂直平面 N ，如(圖 3-6)。由垂直平分線的性質，可得知任意 n 等球，只要球心皆在圓 C 上，則必有無限個公切球，且公切球之球心必在垂直平分線 L 上，如(圖 3-7)。

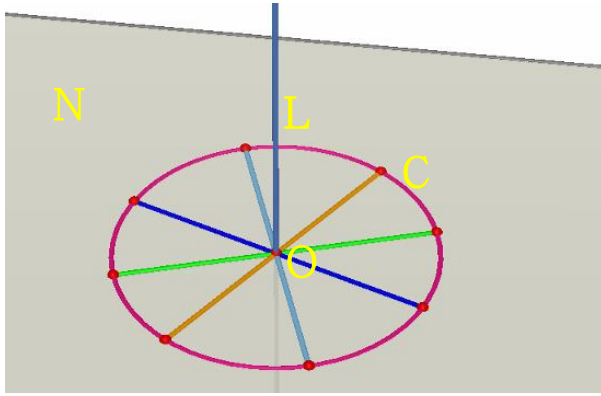


圖 3-6

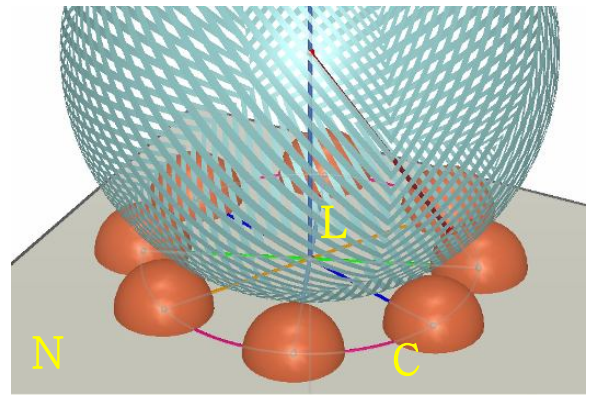


圖 3-7

2. n 球切於一點：

空間中，n 球球心在直線 L 上，n 球交於一點 Y，則 L 上任一點即可作為公切球球心 P，公切球半徑為 \overline{YP} ，而公切球球心 P 為任意在直線 L 的點，由此可知在此情形中有無限個公切球，如(圖 3-8)。

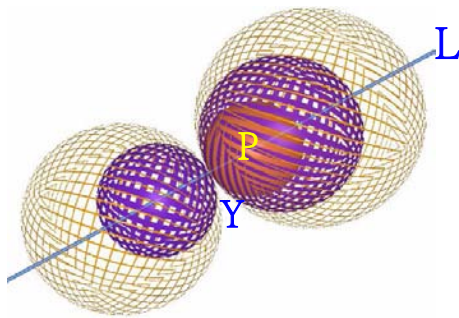


圖 3-8 過 Y 的任意球皆公切於其他球

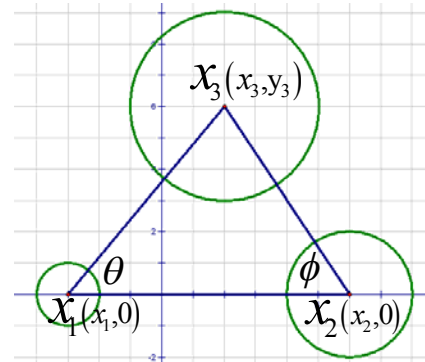


圖 4-1

伍、驗證與推廣

一、三球存在無限多公切球的證明

在 n 球公切球的探討中，我們從作圖發現一般情況下三球有無限個公切球，因此想以方程式解出三個圓錐曲面的交線，進而證明三球有無限多個公切球。我們以三球外離或外切為例，推導證明至一般化的情況。

(一)證明

因不共線相異三點可定義唯一平面，所以三球球心可視為在同一平面上。令三球 S_1 、 S_2 、 S_3 ，半徑分別為 r_1 、 r_2 、 r_3 ，球心分別 $X_1(x_1, 0)$ 、 $X_2(x_2, 0)$ 、 $X_3(x_3, y_3)$ ， X_1 、 X_2 在 x 軸上， X_3 為 xy 平面上任一點，令 $\angle X_3X_1X_2 = \theta$ ， $\angle X_3X_2X_1 = \phi$ ，如(圖 4-1)， S_1 、 S_2 之雙曲線為 $H_{1,2}$ ， S_1 、 S_3 之雙曲線為 $H_{1,3}$ ， S_2 、 S_3 之雙曲線為 $H_{2,3}$ 。先推導出 xy 平面上三圓之間雙曲面的標準式，以貫軸所在直線為旋轉軸旋轉後即是雙曲面，其中，因為此雙曲面是雙曲線依貫軸旋轉而來，所以雙曲面標準式中的 c 與雙曲線標準式中的 b 相同；我們可以用圓半徑和兩圓圓心距求出雙曲線標準式中的 a、b，進而推導出雙曲面的標準式。計算推導如下：

1. S_1 和 S_2 :

令 $H_{1,2}$ 之方程式為 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, 其中, 中心為 $(\alpha, 0)$, $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$ 。

2. S_1 和 S_3 :

令 $H_{1,3}$ 之方程式為 $\frac{[(x-\beta)\cos\theta - y\sin\theta]^2}{c^2} - \frac{[(x-\beta)\sin\theta + y\cos\theta]^2}{d^2} - \frac{z^2}{d^2} = 1$, 其中, 中心為 $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right)$, $\beta = \frac{x_1 + (x_3 \cos\theta - y_3 \sin\theta)}{2}$ 。因為 S_3 不在 x 軸上, 因此我們利用座標軸旋轉公式, 將 S_3 順時針旋轉 θ , 使 S_3 在 x 軸上。

3. S_2 和 S_3 :

令 $H_{2,3}$ 之方程式為 $\frac{[(x-\gamma)\cos\phi - y\sin\phi]^2}{e^2} - \frac{[(x-\gamma)\sin\phi + y\cos\phi]^2}{f^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1$, 其中, 中心 $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right)$, $\gamma = \frac{x_2 + (x_3 \cos\phi - y_3 \sin\phi)}{2}$ 。因為 S_3 不在 x 軸上, 因此我們利用座標軸旋轉公式, 將 S_3 逆時針旋轉 ϕ , 使 S_3 在 x 軸上。

接著我們分別解出兩雙葉雙曲面交線的方程式, 再解兩交線方程式的聯立方程式, 作法敘述如後。

$H_{1,2}$ 和 $H_{1,3}$ 之交線:

$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ \frac{[(x-\beta)\cos\theta - y\sin\theta]^2}{c^2} - \frac{[(x-\beta)\sin\theta + y\cos\theta]^2}{d^2} - \frac{z^2}{d^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 = z^2 \\ \frac{[(x-\beta)\cos\theta - y\sin\theta]^2 d^2}{c^2} - [(x-\beta)\sin\theta + y\cos\theta]^2 - d^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 - \frac{[(x-\beta)\cos\theta - y\sin\theta]^2 d^2}{c^2} + [(x-\beta)\sin\theta + y\cos\theta]^2 + d^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 - \frac{[(x-\beta)^2 \cos^2\theta - 2(x-\beta)\cos\theta y \sin\theta + y^2 \sin^2\theta] d^2}{c^2} + (x-\beta)^2 \sin^2\theta + 2(x-\beta)\sin\theta y \cos\theta + y^2 \cos^2\theta + d^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{d^2 \sin^2\theta}{c^2} + \cos^2\theta\right) y^2 + \left[\frac{2d^2(x-\beta)\cos\theta \sin\theta}{c^2} + 2(x-\beta)\sin\theta \cos\theta\right] y + \left[\frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - b^2 - \frac{d^2(x-\beta)^2 \cos^2\theta}{c^2} + (x-\beta)^2 \sin^2\theta + d^2\right] = 0$$

$H_{1,2}$ 和 $H_{2,3}$ 之交線:

$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ \frac{[(x-\gamma)\cos\phi - y\sin\phi]^2}{e^2} - \frac{[(x-\gamma)\sin\phi + y\cos\phi]^2}{f^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 = z^2 \\ \frac{[(x-\gamma)\cos\phi - y\sin\phi]^2 f^2}{e^2} - [(x-\gamma)\sin\phi + y\cos\phi]^2 - f^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 - \frac{[(x-\gamma)\cos\phi - y\sin\phi]^2 f^2}{e^2} + [(x-\gamma)\sin\phi + y\cos\phi]^2 + f^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 - \frac{[(x-\gamma)^2 \cos^2\phi - 2(x-\gamma)\cos\phi y \sin\phi + y^2 \sin^2\phi] f^2}{e^2} + (x-\gamma)^2 \sin^2\phi + 2(x-\gamma)\sin\phi y \cos\phi + y^2 \cos^2\phi + f^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{f^2 \sin^2\phi}{e^2} + \cos^2\phi\right) y^2 + \left[\frac{2f^2(x-\gamma)\cos\phi \sin\phi}{e^2} + 2(x-\gamma)\sin\phi \cos\phi\right] y + \left[\frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - b^2 - \frac{f^2(x-\gamma)^2 \cos^2\phi}{e^2} + (x-\gamma)^2 \sin^2\phi + f^2\right] = 0$$

解兩交線之聯立方程式：

$$\begin{cases} \left(-1 - \frac{d^2 \sin^2 \theta}{c^2} + \cos^2 \theta\right)y^2 + \left[\frac{2d^2(x-\beta)\cos\theta\sin\theta}{c^2} + 2(x-\beta)\sin\theta\cos\theta\right]y + \left[\frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - b^2 - \frac{d^2(x-\beta)^2 \cos^2 \theta}{c^2} + (x-\beta)^2 \sin^2 \theta + d^2\right] = 0 \\ \left(-1 - \frac{f^2 \sin^2 \phi}{e^2} + \cos^2 \phi\right)y^2 + \left[\frac{2f^2(x-\gamma)\cos\phi\sin\phi}{e^2} + 2(x-\gamma)\sin\phi\cos\phi\right]y + \left[\frac{(x-\alpha)^2 b^2}{a^2} - b^2 - \frac{f^2(x-\gamma)^2 \cos^2 \phi}{e^2} + (x-\gamma)^2 \sin^2 \phi + f^2\right] = 0 \end{cases}$$

化簡後得到 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，其中

$$\begin{cases} A = -\frac{d^2 \cos^2 \theta}{c^2} + \sin^2 \theta + \frac{f^2 \cos^2 \phi}{e^2} - \sin^2 \phi \\ B = \frac{2d^2 \cos \theta \sin \theta}{c^2} + 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{2f^2 \cos \phi \sin \phi}{e^2} - 2 \sin \phi \cos \phi \\ C = -\frac{d^2 \sin^2 \theta}{c^2} + \cos^2 \theta + \frac{f^2 \sin^2 \phi}{e^2} - \cos^2 \phi \\ D = \frac{2d^2 \beta \cos^2 \theta}{c^2} - 2\beta \sin^2 \theta - \frac{2f^2 \gamma \cos^2 \phi}{e^2} + 2\gamma \sin^2 \phi \\ E = -\frac{2d^2 \beta \cos \theta \sin \theta}{c^2} - 2\beta \sin \theta \cos \theta + \frac{2f^2 \gamma \cos \phi \sin \phi}{e^2} - 2\gamma \sin \phi \cos \phi \\ F = -\frac{d^2 \beta^2 \cos^2 \theta}{c^2} + \beta^2 \sin^2 \theta + d^2 + \frac{\gamma^2 f^2 \cos^2 \phi}{e^2} - \gamma^2 \sin^2 \phi - f^2 \end{cases}$$

從二元二次式的判別式中得知：

1. 當 $B^2 - 4AC > 0$ 時，此圖形為雙曲類
2. 當 $B^2 - 4AC = 0$ 時，此圖形為拋物類
3. 當 $B^2 - 4AC < 0$ 時，此圖形為橢圓類

不論是屬於雙曲類或拋物類或橢圓類，交線二元二次方程式是否退化影響了公切球存在情形：若二元二次方程式不退化，則存在無限多的解，即存在無限多個公切球；若二元二次方程式退化，則其圖形可能為空集合或一點等。

(二) 討論

在前述的證明中， $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 為二元二次方程式，

令 $\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$ ，我們參考高中基礎數學第四冊：

1. 當 $B^2 - 4AC > 0$ ， $\Delta = 0$ 時，雙曲線退化為相交於一點的兩直線。
2. 當 $B^2 - 4AC = 0$ ， $\Delta = 0$ 時，拋物線退化為兩平行線，一直線或空集合。
3. 當 $B^2 - 4AC < 0$ ， $A\Delta > 0$ 時，橢圓或圓退化為一點或空集合。

然而，計算上有其複雜度和難度，我們改以窮舉三球所有關係（共 $H_3^5 = 35$ 種，如附錄），加以連結分析。一般而言，給定任意圓心不共線三圓，任兩圓作圓錐曲線，則可得八個交點，再將平面轉換成立體，則此 8 點分別成為空間中的 8 條曲線，曲線上每一點皆為公切球球心，亦即公切球存在無限多個；而前證退化情形，可視為附錄中不存在公切球的情況，如圖 4-1，圓 C_1 、 C_2 、 C_3 不存在任何公切球。

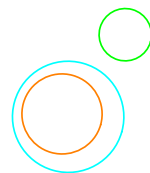


圖 4-1

(三) 驗證

我們試著代入一組數據，令 $X_1=(0,0)$ ， $X_2=(4+4\sqrt{3},0)$ ， $X_3=(4,4\sqrt{3})$ ， $\angle X_3X_1X_2=\theta=60^\circ$ ， $\angle X_3X_2X_1=\phi=45^\circ$ ， $r_1=1$ ， $r_2=2$ ， $r_3=3$

$$H_{1-2} = \frac{[x - (2 + 2\sqrt{3})]^2}{0.5^2} - \frac{y^2}{\sqrt{(2.5 + 2\sqrt{3})(1.5 + 2\sqrt{3})}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{(2.5 + 2\sqrt{3})(1.5 + 2\sqrt{3})}^2} = 1$$

$$H_{1-3} = \frac{[(x-4)\cos(-60^\circ) - y\sin(-60^\circ)]^2}{0.5^2} - \frac{[(x-4)\sin(-60^\circ) + y\cos(-60^\circ)]^2}{\sqrt{23.75}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{23.75}^2} = 1$$

$$H_{2-3} = \frac{\left\{ [x - (4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6})] \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ \right\}^2}{1^2} - \frac{\left\{ [x - (4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6})] \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ \right\}^2}{\sqrt{15}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{15}^2} = 1$$

化簡後得到

H_{1-2} 、 H_{1-3} 、 H_{2-3} 的交線方程式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，其中

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{\sqrt{23.75}^2 \cos^2(-60^\circ)}{0.5^2} + \sin^2(-60^\circ) + \frac{\sqrt{15}^2 \cos^2 \phi}{1^2} - \sin^2 45^\circ \\ B &= \frac{2\sqrt{23.75}^2 \cos(-60^\circ) \sin(-60^\circ)}{0.5^2} + 2\sin(-60^\circ) \cos(-60^\circ) - \frac{2\sqrt{15}^2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ}{1^2} - 2\sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ C &= -\frac{\sqrt{23.75}^2 \sin^2(-60^\circ)}{0.5^2} + \cos^2(-60^\circ) + \frac{\sqrt{15}^2 \sin^2 45^\circ}{1^2} - \cos^2 45^\circ \\ D &= \frac{2\sqrt{23.75}^2 4 \cos^2(-60^\circ)}{0.5^2} - 2 \times 4 \sin^2(-60^\circ) - \frac{2\sqrt{15}^2 (4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \cos^2 45^\circ}{1^2} + 2(4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \sin^2 45^\circ \\ E &= -\frac{2\sqrt{23.75}^2 4 \cos(-60^\circ) \sin(-60^\circ)}{0.5^2} - 2 \times 4 \sin(-60^\circ) \cos(-60^\circ) + \frac{2\sqrt{15}^2 (4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \cos \phi \sin \phi}{1^2} - 2(4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ F &= -\frac{\sqrt{23.75}^2 4^2 \cos^2(-60^\circ)}{0.5^2} + 4^2 \sin^2(-60^\circ) + \sqrt{23.75}^2 + \frac{(4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6})^2 \sqrt{15}^2 \cos^2 45^\circ}{1^2} - (4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6})^2 \sin^2 45^\circ - \sqrt{15}^2 \end{aligned} \right.$$

將此方程式輸入 GSP 繪出為一雙曲線，線上任一點皆為公切球的球心，如(圖 4-2)。由此可驗證三球任三個雙葉雙曲面可能交於橢圓、雙曲線或拋物線，進而推論一般情況下，三球有無限個公切球，如(圖 4-3)。

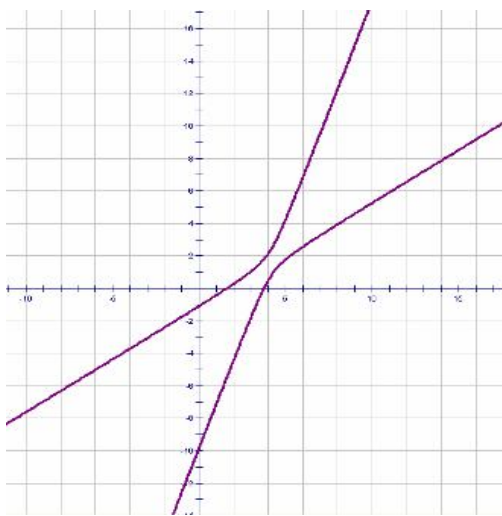


示意圖 4-3 上述三組雙葉雙曲面方程式之交線

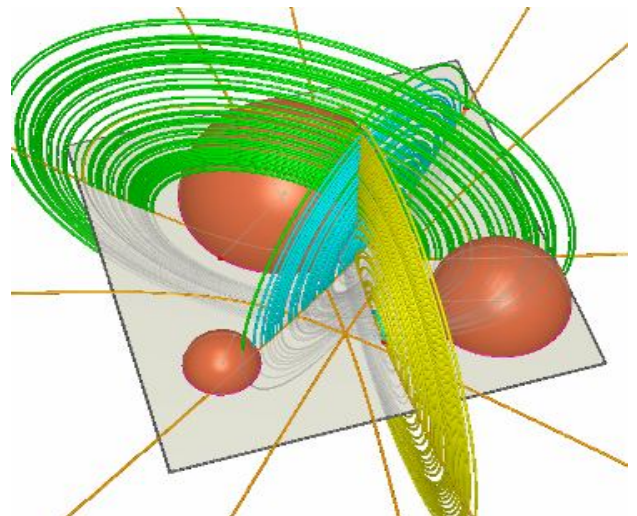


示意圖 4-4 三組雙葉雙曲面交於無限多點

二、 n 球公切球最佳解探討

在研究中，因 n 球排列的不同使得公切球的存在數量不一致，所以我們著手討論 n 球公切球的**最佳解**——除「無限多個」之外的**最多存在數目**，得到滿足最佳解的充分條件後進而求出其存在個數，討論如下：

(一) n 球公切球最佳解的充分條件

在 n 球公切球最佳解探討中，我們做了很多嘗試和分類研究，得到一滿足 n 球公切球最佳解的**充分條件**—— **n 等球排列呈現最多組環形**，而此充分條件是由兩種面向結合而成的，其分述如下：

面向一： n 等球球心圍成一組環形

由【肆—三—(三)】知， n 等球球心圍成圓形時，公切球球心軌跡為一通過圓心的垂直線，其存在無限個公切球。因此若將 n 球球心置於一直圓柱的上、下兩底面圓周上(稱一組環形)，公切球球心軌跡重合，可得公切球數量較多，以六球為例，請見(圖 5-1、5-2)。

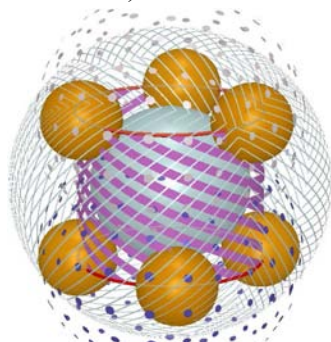


圖 5-1 n 球球心圍成一組環形，其存在四個公切球

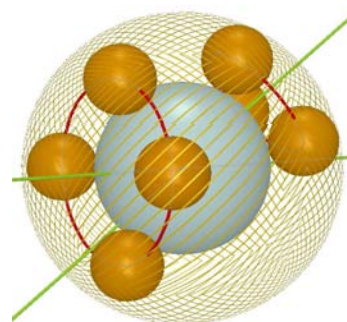


圖 5-2 兩環的公切球軌跡不重合，僅得到兩個公切球

面向二：環形組數多寡

當 n 等球球心的分布位置呈現不只一組環形時(n 等球球心置於一直圓柱的上、下兩底面圓周上)，代表 n 球含有多組對稱面，由(圖 5-3)可以知道，若對稱面的上方存在公切球，則下方亦然，因此當對稱面存在數量越多，公切球球數存在越多，以八球為例，請見(圖 5-4)。

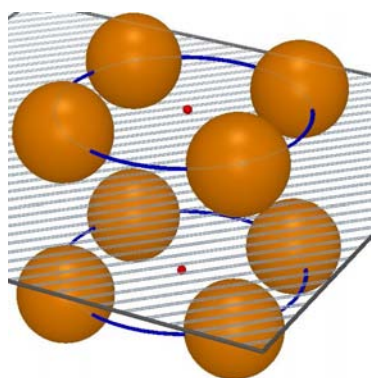


圖 5-3 n 球球心分布位置呈現不只一組環型時，有多組對稱面

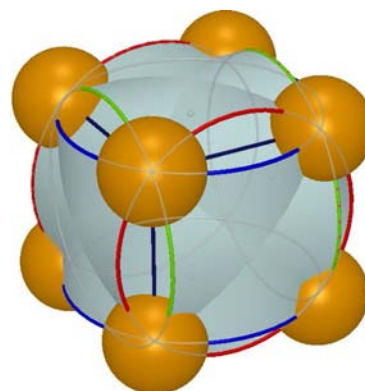


圖 5-4 8 等球排列共有綠、藍、紅三組環形

由此兩面向，我們可以得到形成 n 球公切球最佳解的充分條件： n 等球排列呈現最多組環形，在此考量之下，得到當 n 等球球心在含有最多組對稱面的正四面體、正六面體、正八面體頂點時必有最佳解，另外因為頂點個數的限制，所以我們將 n 球分為九球以下、九球以上分別探討。

(二)九球以下公切球最佳解探討

由上述滿足 n 球公切球最佳解的充分條件後，我們從正四面體、正八面體、正六面體頂點開始探討(分別是四球、六球、八球)，再進而討論到五球與七球，討論分述如下：

1. 四球公切球最佳解詳述

(1) 四球內外判別：

在四球最佳解探討中，我們利用四等球在正四面體頂點上進行探討。令正四面體邊長為 a ，四球半徑為 b ，公切球半徑 r ，公切球球心為 P 。

a. 全外切型：

此情形公切球球心即正四面體中心(各底面高的交點)，而其半徑為 $\overline{PB} - b$ ，又 \overline{PB} 為正四面體外接球半徑($\overline{PB} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$)，可推得 $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a - b$ ，如(圖 5-5)。

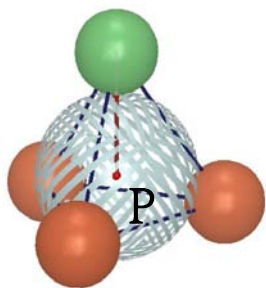
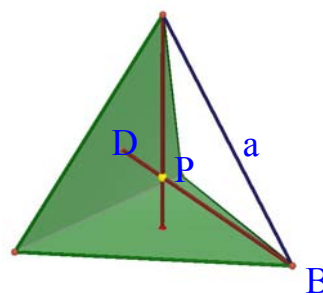


圖 5-5



b. 三外一內切型：

令外切於公切球的已知球 A、內切於公切球的已知球 B，兩球球心皆在正多面體的頂點上，底面外心 C ；連接 \overline{BC} ， $\overline{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，接著連接 \overline{AP} 、 \overline{AC} ，如圖(5-6)，在 $\triangle APC$ 中，以畢氏定理和 \overline{BC} 可列式

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{3}a - (r-b) &= \sqrt{(r+b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - (r-b)\right)^2 &= (r+b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{2}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}a(r-b) &= 4rb - \frac{1}{3}a^2 \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{2\sqrt{6}}{3}ar - \frac{2\sqrt{6}}{3}b + 4rb \\ \Rightarrow r &= \frac{a^2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}ab}{\frac{2\sqrt{6}}{3}a + 4b} = \frac{\sqrt{6}a^3 - 2a^2b - 4\sqrt{6}ab^2}{4a^2 - 24b^2} = \frac{a(\sqrt{6}a + 4b)}{4(a + \sqrt{6}b)} \end{aligned}$$

從上述公切球半徑 r 的探討，因 a 、 $b > 0$ ，所以解必為正數，又將所得 r 代回驗算亦符合所求，由此得知三外一內切型公切球確實存在。

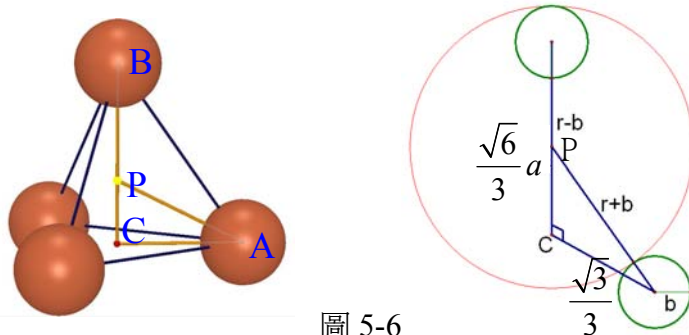


圖 5-6

c. 兩內兩外切型：

令球心 X_1 、 X_2 一組，球心 X_3 、 X_4 一組，連接 $\overline{X_1X_2}$ 、 $\overline{X_3X_4}$ ，作 $\overline{X_1X_2}$ 的垂直平分面，與 $\overline{X_3X_4}$ 的垂直平分面交於 L ，如(圖 5-7)，則公切球球心必在直線 L 上，我們以此為前提進行兩內兩外切型公切球的討論。

由上求得的直線 L 交正四面體於兩邊中點 M_1 、 M_2 ，取 $\overline{M_1M_2}$ ，利用畢氏定理 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \overline{M_1M_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 。接著，將 $\overline{M_1M_2}$ 上的 P 點連接 X_1 、 X_4 ，如(圖 5-8)，利用畢氏定理由直角 ΔM_1X_1P 、直角 ΔPX_4M_2 ，找出通式

$$\begin{aligned} & \sqrt{(r-b)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{(r+b)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \Rightarrow & 4rb + \frac{1}{2}a^2 = a\sqrt{2\left((r+b)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} \\ \Rightarrow & r = \pm \sqrt{\frac{2a^2b^2 - \frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4}{16b^2 - 2a^4}} = \frac{\pm\sqrt{6a^6 - 64a^4b^2 + 128a^2b^4}}{32b^2 - 4a^2} \end{aligned}$$

由上述算式的推導，我們可以由 a 、 b 的不同得到公切球半徑，進一步得知兩內兩外切型公切球的存在性。

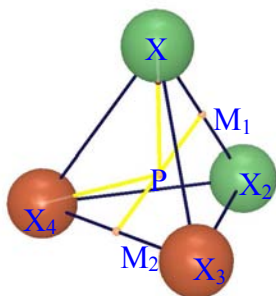


圖 5-7

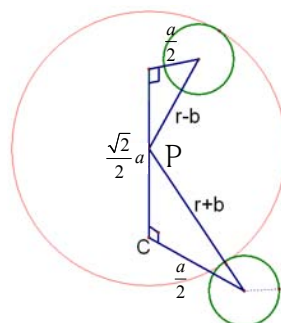


圖 5-8

d. 一外三內切型：

令外切於公切球的已知球 A 、內切於公切球的已知球 B ，兩球球心皆在正多面體的頂點上，底面外心 C ；連接 \overline{BC} ， $\overline{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，接著連接 \overline{BP} 、 \overline{AC} ，其中 $\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，如圖(5-9)，在 ΔBPC 、 ΔABC 中，以畢氏定理可列式如下，求得公切球半徑通式。

$$\begin{cases} r + b - \overline{PC} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \dots\dots\dots ① \\ \overline{PC}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = (r - b)^2 \dots\dots ② \end{cases}$$

由 ① 代入 ②

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(r + b - \frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 &= (r - b)^2 \\ \Rightarrow r \left(4b - \frac{2\sqrt{6}}{3}a\right) + \left(a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}ab\right) &= 0 \\ \Rightarrow r &= \frac{4\sqrt{6}ab^2 - 2a^2b - \sqrt{6}a^3}{24b^2 - 4a^2} \end{aligned}$$

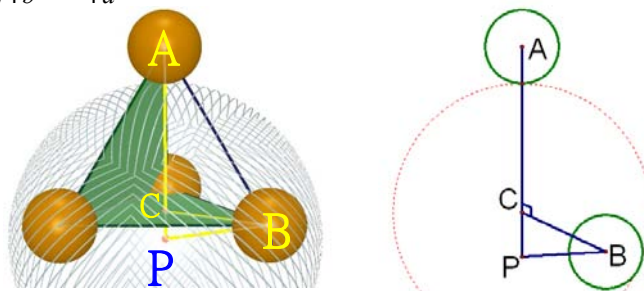


圖 5-9

e. 全內切型：

在全內切型公切球中，由於球心在正四面體的中心與全外切型相同，因此只有公切球半徑改變，其計算方式為 $\frac{\sqrt{6}}{4}a + b$ ($\frac{\sqrt{6}}{4}a$ 為正四面體外接球半徑)。

(2) 四球公切球的數量關係比較表：

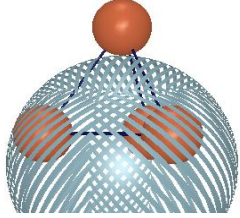
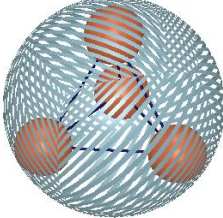
我們將四球公切球的種類、最佳解的示意圖、公切球半徑及個數彙整如下表，以供比較參考，請見表 1-1、表 1-2。

表 1-1

內切個數	4	3	2	1	0
外切個數	0	1	2	3	4
公切球存在個數	1	4	6	4	1

表 1-2

公切球種類	全外切型	三外一內切型	兩內兩外切型
示意圖			
公切球個數	1 個	4 個	6 個
公切球半徑	$\frac{\sqrt{6}}{4}a - b$	$\frac{a(\sqrt{6}a + 4b)}{4(a + \sqrt{6}b)}$	$\frac{\pm\sqrt{6a^6 - 64a^4b^2 + 128a^2b^4}}{32b^2 - 4a^2}$

公切球種類	一外三內切型	全內切型	公切球總數：16 個
示意圖			
公切球個數	4 個	1 個	
公切球半徑	$\frac{a^3\sqrt{6}+2a^2b-4ab^2\sqrt{6}}{4a^2-24b^2}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a+b$	

2. 六球最佳解探討簡述：

接續上述研究，我們先以正八面體進行探討，也就是以正八面體的六個頂點為已知等球球心，討論其公切球的存在情形。令正八面體的邊長為 a ，六等球的半徑為 b ，正八面體中心為 P (P 與各頂點等距)。

(1) 全內、全外切型：

在全外、內切情形中，公切球的球心為正八面體的中心，而半徑為 $\overline{PA}-b$ 與 $\overline{PA}+b$ 。又 \overline{PA} 為正八面體外接球半徑 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，公切球半徑分別為全外切的 $\frac{\sqrt{2}}{2}a-b$ 與全內切的 $\frac{\sqrt{2}}{2}a+b$ ，如(圖 5-10)。

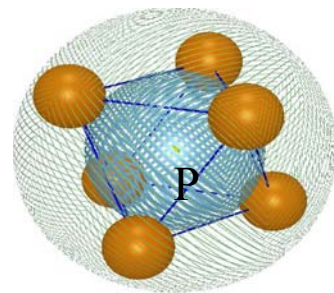
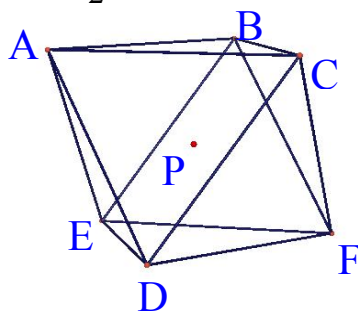


圖 5-10

(2) 三外三內型：

如(圖 5-11)，於 $\triangle ABC$ 的外心上做垂線 L 。接著以畢氏定理算出公切球半徑後，即可推得公切球球心。如(圖 5-12)利用圖上綠色兩直角三角形列出公切球半徑公式 $\sqrt{(r+b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} + \sqrt{(r-b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$ ，化簡結果見表 2-2。此公切球每個面各有一個，故有八個公切球存在。

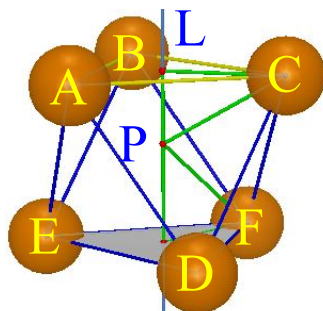


圖 5-11

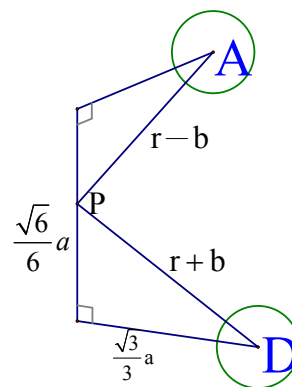


圖 5-12

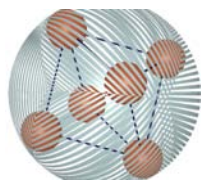
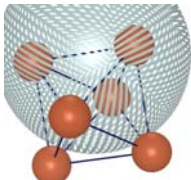
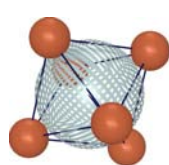
(3) 六球公切球的數量關係比較表：

我們由上述討論彙整出公切球內外切性質、示意圖、公切球半徑以及個數，以供參考比較，請見表 2-1、2-2。

表 2-1

內切個數	0	1	2	3	4	5	6
外切個數	6	5	4	3	2	1	0
公切球存在個數	1	0	0	8	0	0	1

表 2-2

公切球種類	全內切	三內切三外切	全外切
示意圖			
公切球半徑	$\frac{\sqrt{2}a}{2} + b$	$\frac{\pm\sqrt{216a^6+192a^2b^4-2642a^4b^2}}{256b^2-24a^2}$ (取正)	$\frac{\sqrt{2}a}{2} - b$
公切球個數	1	8	1

3. 八球最佳解探討：

在八球最佳解探討中，以正六面體頂點為已知等球球心，討論其公切球的存在情形。令正六面體的邊長為 a ，六等球的半徑為 b ，正六面體中心為 P (P 與各頂點等距)。

(1) 全外切、內切型：

在全外、內切情形中，公切球的球心為正六面體的中心，而半徑為 $\overline{PG} - b$ 與 $\overline{PG} + b$ 。正六面體外接球半徑 $\overline{PA} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (小正六面體對角線)，公切球半徑分別為

全外切的 $\frac{\sqrt{3}}{2}a - b$ 與全內切的 $\frac{\sqrt{3}}{2}a + b$ ，如(圖 5-13)。

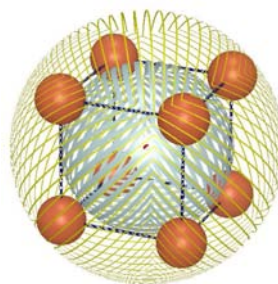
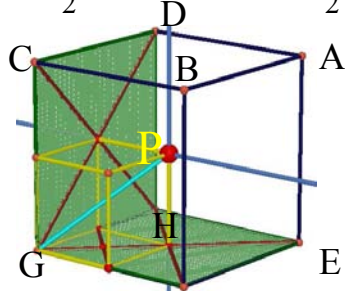


圖 5-13

(2) 四內四外切型：F

如(圖 5-14)，以平面 ADHE 為例，經計算後得到球心在通過外心且垂直於平面 ADHE 的四內四外切型公切球，其餘面亦然，因此在此種情形可得六個公切球。

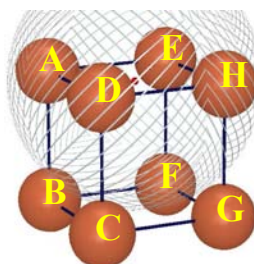


圖 5-14

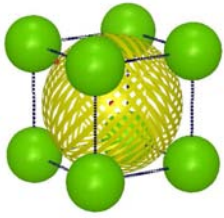
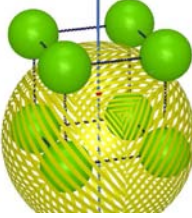

(3) 八球公切球的數量關係比較表：

我們由上述討論彙整出公切球內外切性質、示意圖、公切球半徑以及個數，以供參考比較，請見表 3-1、3-2。

表 3-1

外切個數	8	7	6	5	4	3	2	1	0
內切個數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
公切球存在個數	1	0	0	0	6	0	0	0	1

表 3-2

公切球性質	全外切	四內四外切	全內切
示意圖			
公切球半徑	$\frac{\sqrt{a^2+2a}}{2} - b$	$\pm \frac{\sqrt{16a^2b^4+3a^6-16a^4b^2}}{8b^2-2a^2}$	$\frac{\sqrt{a^2+2a}}{2} + b$
公切球個數	1	6	1

4. 五球最佳解探討簡述：

由六球最佳解探討，我們視五球為拿掉正八面體頂點上任意一球的情形。設正八面體 ABC-DEF，令正八面體的邊長為 a，五等球的半徑為 b，正八面體中心為 P(P 與各頂點等距)。

(1) 內外判別公切球：

a. 全外切、內切型：

在全外、內切情形中，公切球的球心為正八面體的中心，而半徑為 $\overline{PA}-b$ 與 $\overline{PA}+b$ 。又 \overline{PA} 為正八面體外接球半徑 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，公切球半徑分別為全外切的 $\frac{\sqrt{2}}{2}a-b$ 與全內切的 $\frac{\sqrt{2}}{2}a+b$ 。如(圖 5-15)

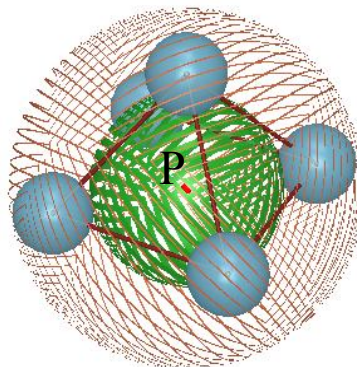
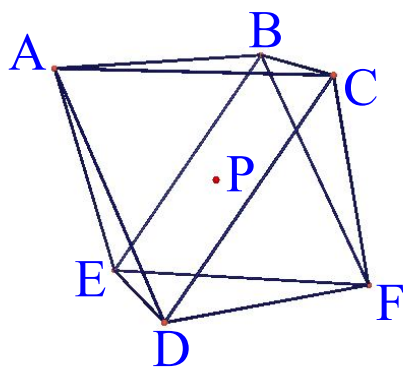


圖 5-15

b. 四內一外、四外一內切型：

已知公切球球心於 \overline{PA} 上，以畢氏定理算出公切球半徑後，即可推出公切球球心。利用圖中綠色直角三角形列出公切球半徑公式 $\sqrt{(r+b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} + (c-b) = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ，

經計算此兩種情況各存在一個公切球，如(圖 5-16)、表 2-1。

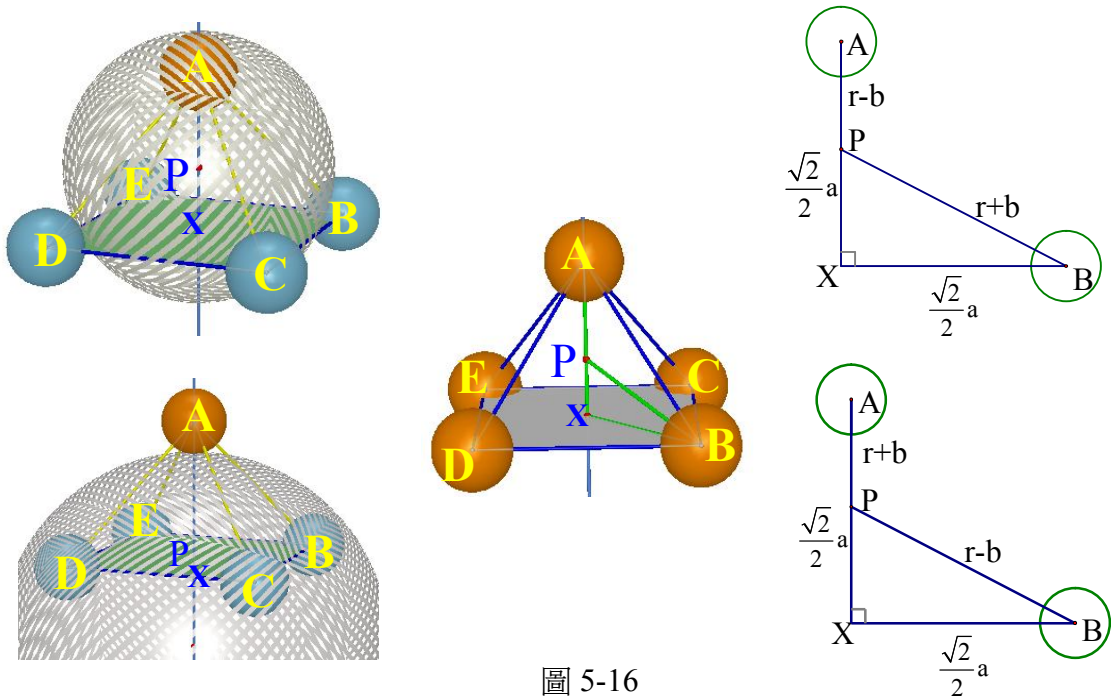


圖 5-16

c. 三外兩內與兩外三內型：

已知公切球球心在垂直於通過外心且垂直於 $\triangle ABC$ 的垂直線上，接著以畢氏定理算出公切球半徑，如(圖 5-17)，圖上兩綠色直角三角形可利用畢氏定理求出公切球半徑公式 $\sqrt{(r+b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} + \sqrt{(r-b)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$ ，如(圖 5-18)，化簡結果

詳如表 3-1。而在其餘三面($\triangle ABE$ 、 $\triangle AED$ 、 $\triangle ADC$)重複此步驟後，可得八個公切球。

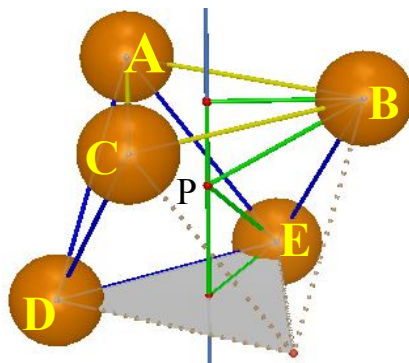


圖 5-17

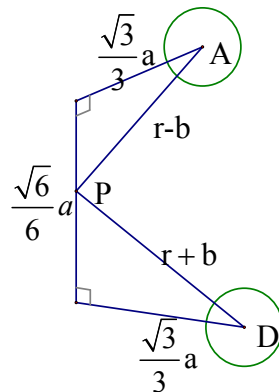
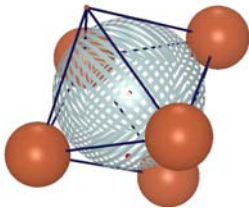
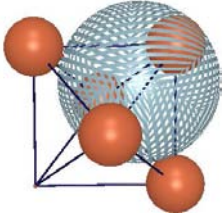
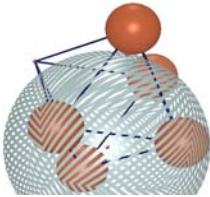
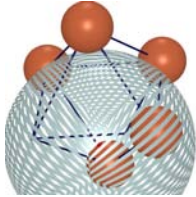
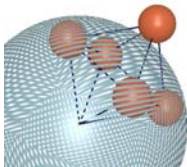
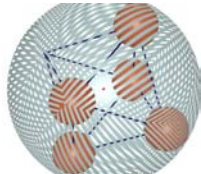


圖 5-18

(2) 五球公切球的數量關係比較表：

我們由上述討論彙整出公切球內外切性質、示意圖、公切球半徑以及個數，以供參考比較，請見表 4-1。

表 4-1

公切球性質	全外切型	一內四外切型
示意圖		
公切球半徑	$\frac{\sqrt{2a}}{2} - b$	$\frac{-2a^2b + \sqrt{2a^3 - 4\sqrt{2}ab^2}}{2a^2 - 16b^2}$
公切球數目	1	1
公切球性質	三外二內切型	二內三外切型
示意圖		
公切球半徑	$\frac{\pm\sqrt{246a^6 + 192a^2b^4 - 2642a^4b^2}}{256b^2 - 24a^2}$ (取正)	$\frac{\pm\sqrt{246a^6 + 192a^2b^4 - 2642a^4b^2}}{256b^2 - 24a^2}$ (取正)
公切球數目	4	4
公切球性質	四內一外切型	全內切型
示意圖		
公切球半徑	$\frac{2a^2b + \sqrt{2a^3 - 4\sqrt{2}ab^2}}{2a^2 - 16b^2}$	$\frac{\sqrt{2a}}{2} + b$
公切球數目	1	1

5. 七球最佳解探討：

在七球最佳解討論中，七球視為將正六面體頂點中任意取走一個，因此其討論方式皆同八球公切球的情況。而公切球可區分為全外切、內切型，如(圖 5-19)、四內三外切型、三內四外切型公切球，如(圖 5-20)。

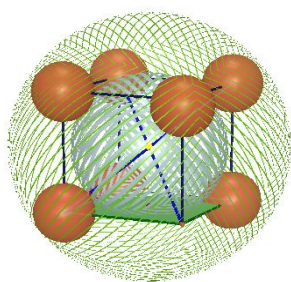


圖 5-19

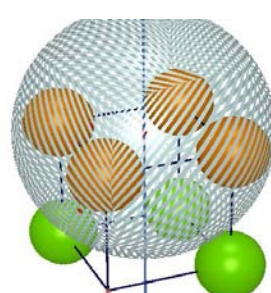
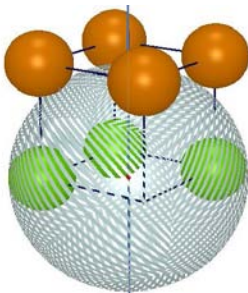


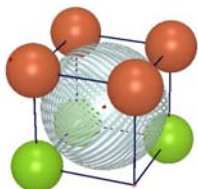
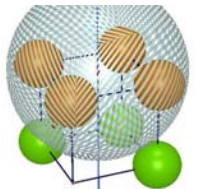
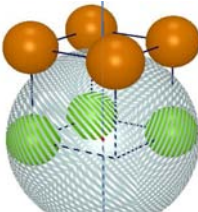
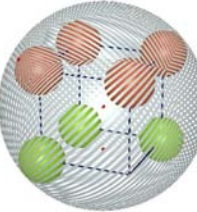
圖 5-20

在上述的七球最佳解討論中，我們以表格整理結果，表 5-1 為七球最佳解的歸納表，表 5-2 則為七球的公切球簡表，其中包括了公切球示意圖、個數、半徑，經過統計，公切球個數總共有八個。

表 5-1

外切個數	7	6	5	4	3	2	1	0
內切個數	0	1	2	3	4	5	6	7
公切球存在個數	1	0	0	3	3	0	0	1

表 5-2

公切球種類	全外切	三外切四內切
示意圖		
公切球半徑	$\frac{\sqrt{a^2+2a}}{2} - b$	$\pm \frac{\sqrt{16a^2b^4+3a^6-16a^4b^2}}{8b^2-2a^2}$
公切球個數	1	3
公切球種類	四外切三內切	全內切
示意圖		
公切球半徑	$\pm \frac{\sqrt{16a^2b^4+3a^6-16a^4b^2}}{8b^2-2a^2}$	$\frac{\sqrt{a^2+2a}}{2} + b$
公切球個數	3	1

(三)九球以上最佳解公切球球數探討

當 n 球($n \geq 9$)時，正十二面體和正二十面體頂點無法如其他正多面體圍出兩組以上的環形(對稱面至多存在一個)。其違背了構成最佳解公切球數的充分條件，以九球為例，如(圖 5-21、圖 5-22)，公切球排列至多呈現一組環形。

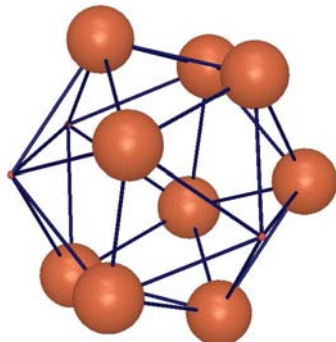


圖 5-21

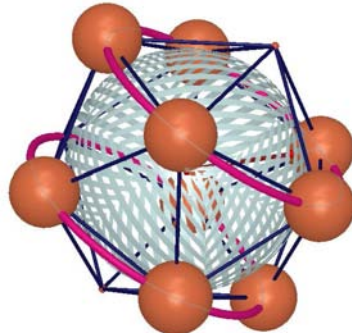


圖 5-22

由上，因為九球以上的球心排列只有一組環形的限制，所以 n 等球公切球最佳情形 (n 為 ≥ 9 的任意數) 的限制皆相同，以 10 球為例，令球心所在環形 C_1 、 C_2 ，圓心 A 、 B ，且半徑為 a ，公切球球心為 P ，公切球半徑 r ， h 為兩環形之間的距離，其討論分述如下：

1. 全內切和全外切：

首先連接 \overline{AB} ，作 \overline{AB} 中點 (\overline{AB} 即為 h)，中點即為全內切或全外切型公切球球心，如(圖 5-23)。所以 $r = \sqrt{\frac{h^2}{4} + a^2} - b$ (全外切時)， $r = \sqrt{\frac{h^2}{4} + a^2} + b$ (全內切時)。

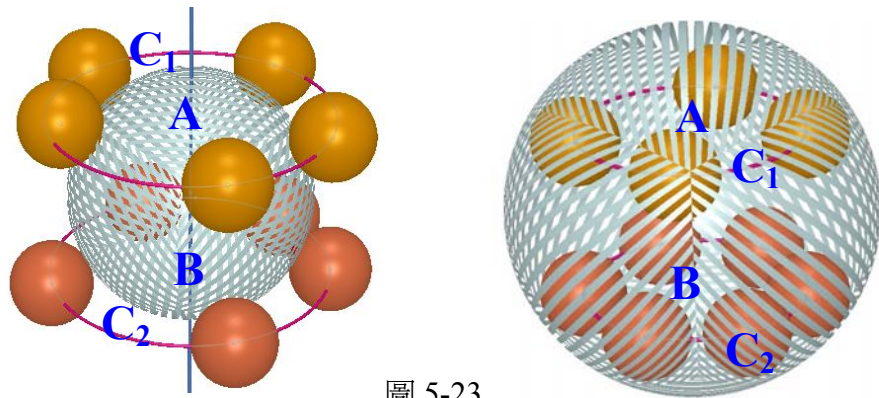


圖 5-23

2. 一環內切，一環外切：

令 10 等球球心於兩環 C_1 、 C_2 上，連接 \overline{AB} (\overline{AB} 即為 h)，10 等球半徑 b ，如(圖 5-24)，由直角 $\triangle APE$ 和直角 $\triangle PBF$ ，可用畢氏定理， $\sqrt{(r-b)^2 - a^2} + \sqrt{(r+b)^2 - a^2} = h$ ，得到公切球球心與半徑，即可確認其存在性。

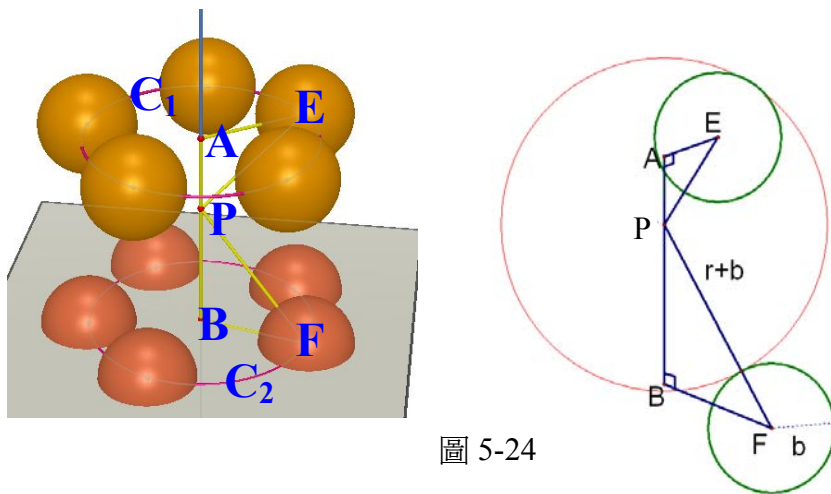
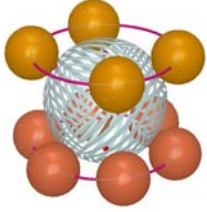
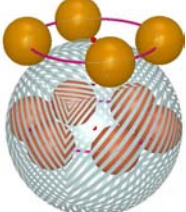
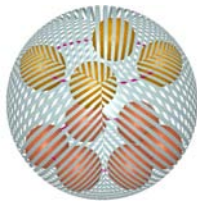


圖 5-24

3. 九球以上公切球存在性的個數統計表：

由以上九球以上公切球最佳解探討，我們彙整出表 6-1 以供參考比較，且九球以上公切球限制皆相同，因此我們以 10 球為例，以下分別是公切球半徑、存在個數、示意圖的比較。

表 6-1

	全內切型	一環內切一環外切	全外切型
公切球半徑	$\sqrt{\frac{h^2}{4} + a^2} - b$	$-\frac{8\sqrt{6}}{3}ab^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{\frac{h^2}{4} + a^2} + b$
示意圖			
公切球存在個數	1	2	1

由於九球以上公切球探討條件與上述十球公切球雷同，因此九球以上公切球最佳解情形皆與上述討論相同，其公切球存在數目為 4 個。

(四)n 球公切球最佳解存在性的實際驗證

我們用公切球半徑通式和正多面體邊長計算出實際公切球半徑，再以 Cabri 3D 度量工具驗證，以六球為例，共有 10 個公切球，公切球種類分為三種，令正八面體邊長 a，六等球半徑 b，公切球半徑 r，算出 r 的一般式後，以 a=4，b=1 代入，Cabri 度量工具驗證，經計算後皆與之符合，表 7-1 是我們所作的驗證資料：

表 7-1

	全外切型	三外切三內切	全內切型
公切球半徑	$\frac{a\sqrt{2}}{2} - b$	$\frac{\pm\sqrt{216a^6+192a^2b^4-2642a^4b^2}}{256b^2-24a^2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2} + b$
a=4，b=1 代入 (四捨五入後)	1.83	3.59(取正根)	3.83
示意圖	如(圖 5-25)	如(圖 5-26)	如(圖 5-27)

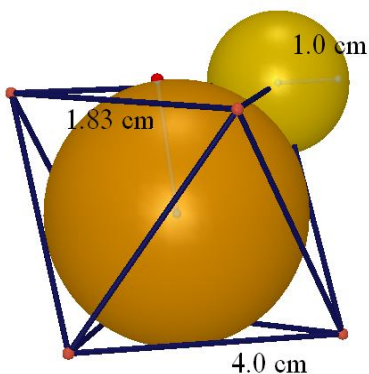


圖 5-25

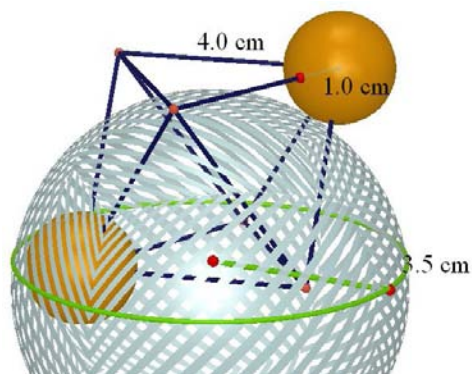


圖 5-26

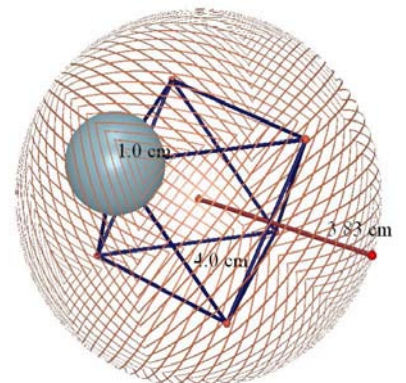


圖 5-27

三、用極限的概念探討公切球之存在性

前述圓錐曲面的作圖法過程相當複雜，而且對於空間中的繪圖又有其一定的難度，因此我們思考是否能夠在不作圖的情況下，也能獲得一樣的判斷結果？從作圖過程中，我們有了新的想法：「公切線是半徑無限大的公切圓、公切面是半徑無限大的球」，甚至將「平面上的圓視為半徑趨近於零的圓， n 球視為半徑趨近於零的球，即幾何中最基本的幾何圖形——點」，針對這兩個觀點，討論如下。

(一)將公切面視為半徑無限大的公切球

平面狀況中，兩外離圓 F_1 、 F_2 的公切線有4條，分別為 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 ，如(圖6-1)。將4條直線都視為半徑無限大的公切圓。以 L_1 為例，當半徑慢慢縮小時，圓心 O_1 漸漸接近(由 O_{1-1} 到 O_{1-2})，且圓心之軌跡為雙曲線或直線。

在半徑縮小時，曲率作連續性的改變，公切圓必有一時與圓 F_3 相切，情況分別有兩種，一種為外切第三圓如圓 C_1 ，另一種為內切第三圓如圓 C_2 ，因此公切線可以判斷有兩個公切圓的存在。

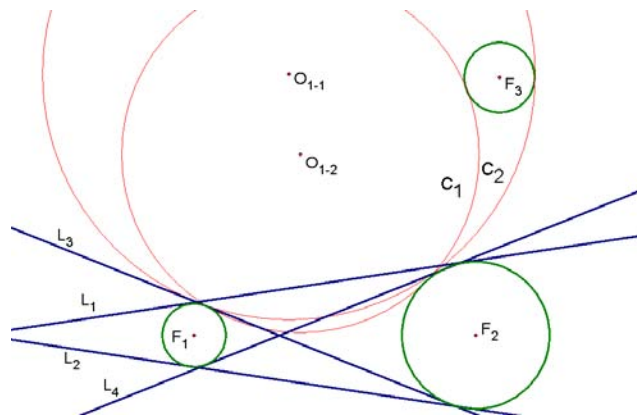


圖6-1

承接上述想法，令空間中3球皆外離，分別為 S_1 、 S_2 、 S_3 ，我們將公切面視為一半徑無限大公切球的一部分，當半徑慢慢縮小時，球心也會慢慢移動，其軌跡為一曲線。

反之，公切球的球心在曲線上移動時，公切球半徑會改變，面的弧度也會隨著連續性的改變，因此只要在空間中與第四球相切，便可決定其公切球。

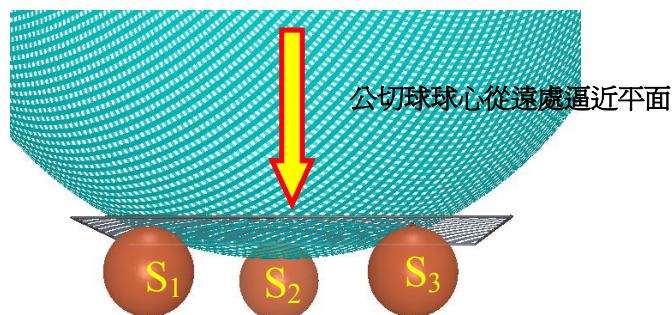


圖6-2

空間中三球 S_1 、 S_2 、 S_3 的一個公切面為 E_1 。將面視為半徑無限大的公切球。當半徑慢慢縮小時，球心 P_1 漸漸接近(由 P_{1-1} 向 P_{1-2} 移動)。在半徑縮小時，弧度作連續性的改變，公切球必有一時與第四球 S_4 相切，情況分別有兩種，一種為外切第四球如球 Q_1 ，另一種為內切第四球如球 Q_2 ，因此一個公切面可以代表兩個公切球的存在。如(圖 6-3)。

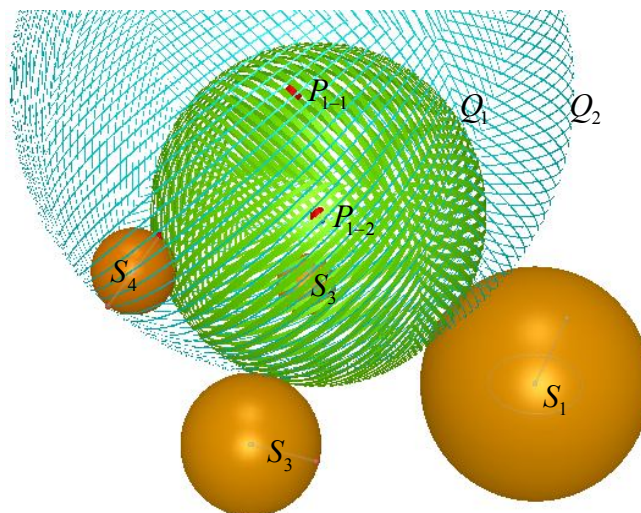


圖6-3

設空間中 3 球 S_1 、 S_2 、 S_3 ，作一個無限大的公切球(即公切面)，並將公切球半徑慢慢縮小。當空間中出現第 4 球 S_4 時， S_1 、 S_2 、 S_3 的公切面弧度逐漸變大，與空間中第四球 S_4 外切、內切。

由於三雙曲面必交於一曲線，所以三維空間中三球公切球球心軌跡為八條曲線，取曲線上任一點(亦為公切球球心)，將點拉到無限遠處，所形成的公切球亦愈變大，直至成為公切面，由此可推論：三球存在相異八個公切面，又每一個公切面都能推得兩個公切球，因此可推算出 4 球公切球數量最多為 16 個。如圖(6-4)。

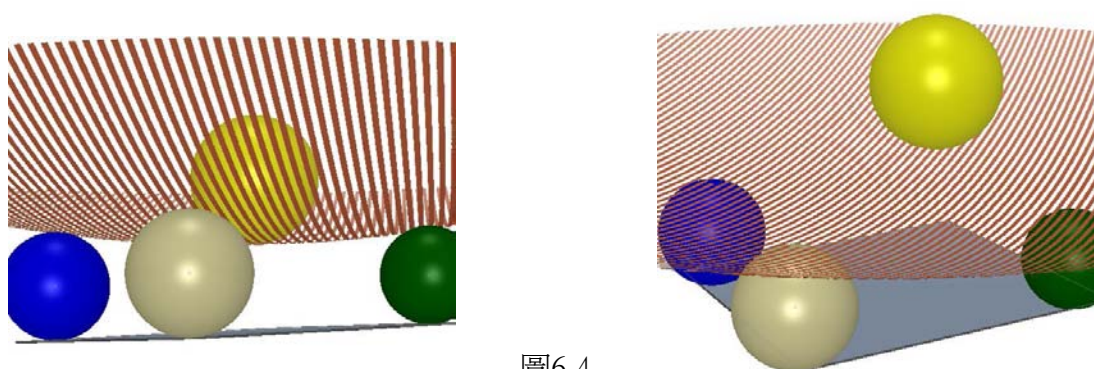


圖6-4

公切面代表有公切球的存在，三球有八個公切面，其公切球球存在數目列於表 8-1。

表8-1

面的代號	E1	E2
示意圖		
公切球個數	2	2
面的代號	E3	E4
示意圖		
公切球個數	2	2
面的代號	E5	E6
示意圖		
公切球個數	2	2
面的代號	E7	E8
示意圖		
公切球個數	2	2

(二)將n球視為半徑趨近於零的點

從無限遠處看空間中的球就像一個點，如同在外太空看地上的物體一樣，我們試著將自己拉到無限遠處，將「探討空間中 n 球公切球存在情形」的問題轉換為「空間中 n 點共球與否」的問題：想像自己從無限遠處觀看給定的 n 個球，其半徑幾近於零，將之視為空間中給定的任意 n 個點。

1. 將相異三球視為相異三點，探討公切球之存在性

在三維空間中，由球的方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ 可知不共面相異四點方可定義唯一一球，若僅以三點代入方程式，並不足以求得唯一的球方程式，甚至有無限多組解，代表著三點不足以定義唯一球面如(圖 6-5)，由此可推得空間中給定球心不共線的相異三球有無限個公切球。

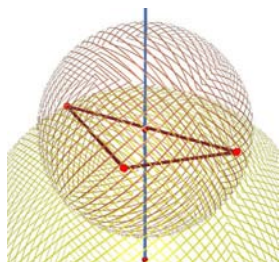


圖 6-5 有無限個球可過相同三點

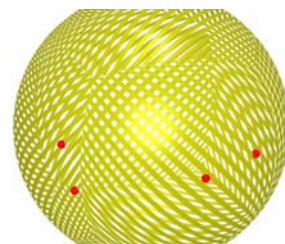


圖 6-6 有特定一球可過四點

2. 將相異四球視為相異四點，探討公切球之存在性

承上，給定不共面相異四點，將四點座標代入球的方程式可得唯有一解，代表四點決定唯一球面，我們將之視為公切球面，如(圖 6-6)。從無限遠處拉近與給定四球的距離，趨近於零的半徑略為變大，此時公切球與每個點都可視為內、外切兩個情形，經推算後，可將公切球比作全內切、一內三外、二內二外、三內一外、全外切型的公切球，即存在 $2^4=16 (=C_0^4+C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4)$ 個公切球 (取外切球數來探討，全內切個數為 $C_0^4=1$ 、三內一外 $C_1^4=4$ 、二內二外 $C_2^4=6$ 、一內三外 $C_3^4=4$ 、全外切 $C_4^4=1$)。

3. 將相異 n 球視為相異 n 點，探討公切球之存在性

設球 A、B、C、D、E 點在無限遠處視為點 A、B、C、D、E (五點不共面)，當從遠處拉近距離時，球心不共面之相異四球 A、B、C、D 可定義 16 個公切球，此時第五球若與其中之一公切球相切，則其半徑與球心位置已被限制，不見得能與其它 15 個公切球相切，由此可知相異五球的公切球數必不大於 16 個公切球。

由 1.2.3. 我們再次驗證相異三球存在無限多個公切球，相異四球存在最多相異 16 個公切球，然而五球以上無法依此判斷公切球的存在性及其存在時的實際數量。

四、公切圓和公切球的比較

三維空間中的 n 球公切球探討是以平面上 n 圓公切圓的研究基礎所建立的，因此我們將兩者之間的差異和相同處彙整以供比較參考，請見表 9-1。

表 9-1

	n 圓公切圓探討	n 球公切球探討
公切圓/球心求法比較	1. 圓錐曲線性質作圖法 2. 反演作圖法 3. 方程式求解法	1. 圓錐曲面性質作圖法 2. 圓錐曲面方程式作圖法
公切圓/球心的軌跡型態	圓錐曲線相交所形成的交點	圓錐曲面相交所形成的交線或點
求方程式時所出現的軌跡圖形	雙曲線、橢圓	雙曲面、橢球
圓/球分布的特殊情況 (使公切圓/球數量無限)	n 圓皆切於一點，如(圖 7-3)	當 n 等球排成環形時，如(圖 7-4)
圓/球分布的最佳情形 (使公切圓/球數量多於一般情形)	視圓數而定，並無一定的規則，而九圓公切圓個數皆為 2 個，如(圖 7-1)	當 n 球在正多面體的頂點，且球等大，如(圖 7-2)，或球心共線之球切於一點

註：公切圓部分參考比較自第四十八屆全國科展——有圓千里切線牽~探討 n 圓公切圓之存在性

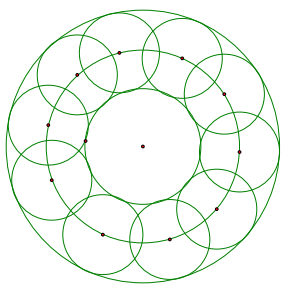


圖 7-1

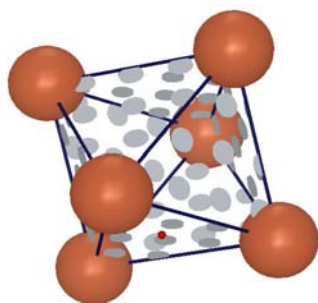


圖 7-2

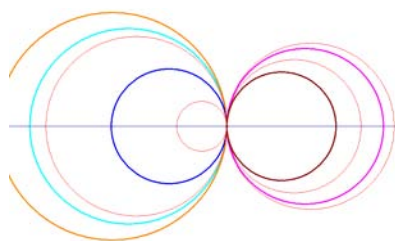


圖 7-3

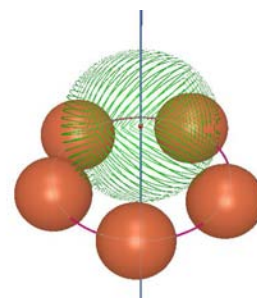


圖 7-4

陸、結論

一、將平面公切圓轉換成立體公切球

已知在 2 圓公切圓探討中，可利用雙曲線及橢圓求得公切圓的圓心軌跡，而我們將雙曲線的貫軸(或橢圓的長軸)為旋轉軸旋轉，於是 2 圓經旋轉後轉換為 2 個以其焦點（即 2 圓圓心）為球心的球。相對地，原本的雙曲線或橢圓也經旋轉後變為雙葉雙曲面或橢球，而其面上任一點即為經轉換後的兩球公切球球心軌跡。

二、圓錐曲面探究公切球

求一通過空間中兩球球心的平面，再做出平面與兩球截圓的公切圓軌跡（即圓錐曲線），將此圓錐曲線以貫軸為旋轉軸旋轉(亦可將之視為所有通過兩球心平面截圓的公切圓軌跡)，得到圓錐曲面。

在 n 球公切球探討中，我們只需重覆作上述動作，得到各球之間公切球的球心軌跡，而當交線上有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個圓錐曲面時，其交線上任一點即為 n 球公切球球心。

三、以方程式探討公切球存在性

我們利用圓半徑和兩圓圓心距推導出雙葉雙曲面的標準式，並利用旋轉軸公式、空間中雙葉雙曲面的標準式求出兩兩球之間公切球球心軌跡(即雙葉雙曲面)的方程式，利用方程式存在無限多解驗證三球一般情況時存在無限多的公切球球心，進而推得一般情況時三球存在無限多個公切球。進一步證實在三球公切球作圖時三雙葉雙曲面皆交於一線的發現，而過程中利用轉軸公式推導的三個雙葉雙曲面標準式(二元二次方程式)如下：

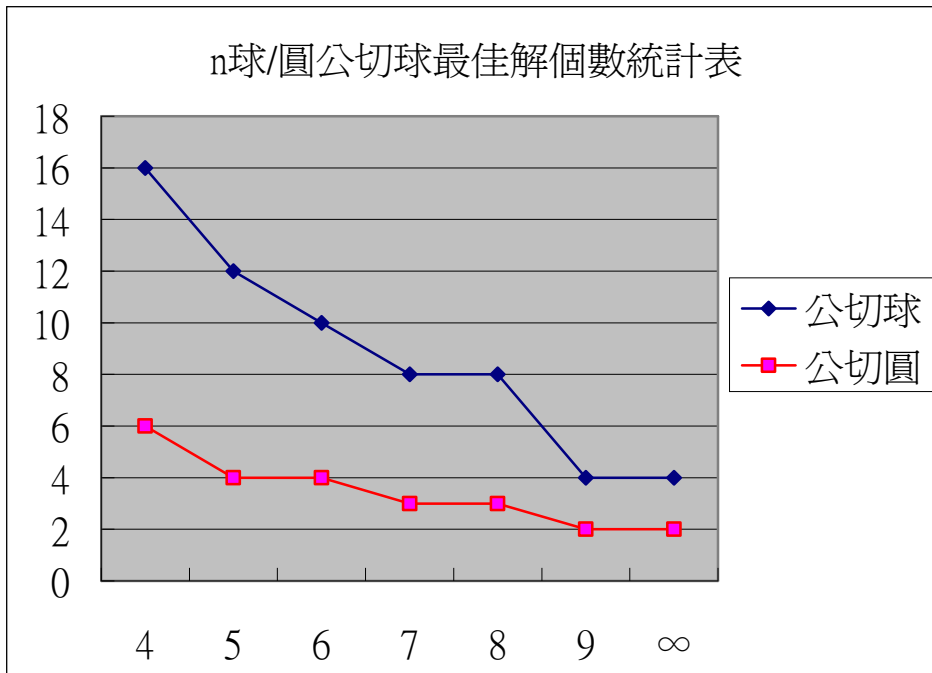
$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ \frac{[(x-\beta)\cos\theta - y\sin\theta]^2}{c^2} - \frac{[(x-\beta)\sin\theta + y\cos\theta]^2}{d^2} - \frac{z^2}{d^2} = 1 \\ \frac{[(x-\gamma)\cos\phi - y\sin\phi]^2}{e^2} - \frac{[(x-\gamma)\sin\phi + y\cos\phi]^2}{f^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1 \end{cases}$$

四、n 球公切球之最佳解球數

(一) n 球的特殊排列存在無限多個公切球，即 n 球排列成環形或 n 球球心共線且彼此相切於一點時。

(二) 在一般情況下 n 球公切球並非存在一定數，本研究探討 n 球公切球的**最佳解——除「無限多個」之外的最多存在數目**，並利用正多面體頂點為 n 等球球心，一一探討其公切球最大的存在數。隨著給定球數的增加，公切球的存在數也相對減少，當球數為九球以上時最多公切球存在 4 個。我們將最佳解公切球存在數目列出表格及繪製成折線圖如下：

n 球公切球數	2	3	4	5	6	7	8	9	∞
公切球數最佳解	∞	∞	16	12	10	8	8	4	4



五、判別最佳解公切球球數

(一)n 球公切球最佳解存在性的實際驗證

將求得的公切球半徑通式以數字代入後，算出其實際數字，再以 Cabri 3D 度量軟體作圖進一步驗證其存在性。

(二)極限概念探討公切球

1. 將平面上的公切線視為半徑無限大的公切圓，空間中切平面視為半徑無限大的公切球，透過無限遠處公切圓(球)心的逼近，驗證並支持三球公切球存在無限多個的發現，及四球存在 16 個公切球。
2. 想像研究者拉到無限遠處，給定三球相形之下逐漸縮小，半徑幾近為零，相當於三個點，又三點無法決定為一球面，可推得三球存在無限多個公切球；同理，給定不共面相異四球，依空間中相異四點決定唯一一球，及四球分別可與公切球內、外切的差異，仍可推論四球存在 16 個公切球；而五球以上的情況，也因侷限於四點決定唯一球面而受限，致使其公切球數必不足 16 個。

柒、參考資料

維基百科。「圓錐曲線——雙曲線、拋物線、橢圓」。取自 <http://www.wikipedia.org/Problem of Apollonius> 2009/2/22。

董學行、林子傑、林域天(民 97)有圓千里切線牽~探討 n 圓公切圓之存在性。第 48 屆全國科展

余文卿。高中數學課本第四冊。台南市：翰林出版社。

【評語】 030405

推廣 n 圓公切圓的研究成果，設置旋轉軸探查旋轉曲面，與 n 球公切球的球心軌跡、球半徑，分從全外切、有外有內切、全內切的情況，也從同徑球分布於正多面體的頂點的情況，表現數量關係，逐類判別，內容豐富，系統分明，值得肯定。引入極限概念，視平面為半徑為 ∞ 的球面，將切平面問題融入，考慮周全。代數計算在座標化系統中操作，掌握符號運算的便利，值得鼓勵。