中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030404

神秘數列破解

～階差數列的計算與推演的創意思考

學校名稱：臺中市立光明國民中學

作者：	指導老師：
國二 李耘笙	柴智文 紀淑玲

關鍵詞：階差數列、級數和、圖形思考

神秘數列破解～*階差數列的計算與推演的創意思考*

～～*對一個國中生而言,「**階差數列**」*的級數和，到底該怎麼算最方便？

摘要

想要運用已學會的＜等差數列級數和＞公式和所知，來破解一個神秘數列（階差數列）是我很感興趣的挑戰。在這探索中，我意外地發現了一個階差數列的計算與推演的創意思考方法──我暫時把它命名爲**＜大小三角形排列＞思考法**！這方法具有視覺與圖形一目瞭然的特性，使我們可以僅僅利用到簡單的四則運算，配合上大小三角形排列計算，就可破解各類的神秘階差數列求和之問題！甚至，不必用到我們國中生所看不懂的”Σ”符號，就可破解一切難題！

用這大小三角形排列思考法，我進一步推導完成了＜**階差數列求和的公式**＞－也許我正在發明一個很重要的數學公式哦！這公式會使神秘又困難的階差數列求和的計算，變得簡單。請大家來一起看看我的創意思考過程，和這可愛的公式吧！

壹、研究動機

有一天我去配眼鏡，在等待檢查視力的時候，我看到報紙的休閒版上有一個很奇怪的數學題目：**1+3+6+10+15+21+28+ ……+5050=?** 這是一個我所不明白的數列。**這個數列好像有規則，但又好像沒有規則**。學校當時正在教「等差數列」單元（部編版數學科第四冊第一章，<u>數列與級數</u>之<u>等差數列</u>、<u>等差級數</u>），我覺得其中也許有些關聯，就把題目抄回家去算。我試了許多的方法，最後雖然算出答案，但突然發現：其實這個數列只是這類型數列（後來我問教會裏一個阿姨，她說這題目的數列叫階差數列）中最基本的型態。於是，我不止想答對這一題而已，我想知道：是否有快速的方法，或甚至有一個通解（公式）能快速的解答所有類似的數列和問題。所以，我一步步思考怎樣找出適用於計算這種數列（階差數列）總和的通用公式，展開了我的數列探險。

貳、研究目的

一、更深入的認識<階差數列>的特性。
二、探討能計算「階差數列」級數和的多種方法。
三、比較＜階差數列＞級數和的多種計算方法，看看到底該怎麼算最方便？
四、**最後，我想要發展出一個能最簡便計算「階差數列」級數和的＜通用公式＞**。

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機。

肆、研究過程與方法

一　*最初的思考*：*五個失敗的或不良的方法*

一開始看到的題目是： **1+3+6+10+15+21+28+ ……+5050=?**
我剛開始想到的方法，是一些不好或不對的方法，到後來才慢慢摸到頭緒・・・

第一個想法：慢慢加。但是我認爲：這是一個笨方法，因爲要把一百個數字寫出來然後加一百個數字，過程中很容易出錯。

第二個想法：用等差級數和的算法，即利用梯型的公式：$(a_1+a_n)\,n\div 2$…來計算。但我發現：這是一個錯的方法。因爲這個數列根本不是等差數列。

第三個想法：動手排一排。將所有的數，排列一下，觀察其中的規律。

(1)先把數列用圖型方式呈現，寫成

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5….
…..…..…..
1 2 3 4 5 6 7………….. 100

(2) 從圖型看出來：這裏有 100 個 1、 99 個 2、98 個 3…、1 個 100。

(3) 可列出計算式爲：**(1×100 + 2×99 +….50×51＋51×50 +…99×2 + 100×1)**

(4) 因爲數列前後兩端對稱：所以可簡化爲 **2× (1×100 + 2×99 +….50×51)**

(5) 這只是一個略有改善的方法！可是，還是必須計算 50 次乘法與加法。

第四個想法：

(1)先把數列中的數，每兩項兩項列在一起，再試試看….

1=1×1
3=1×3

6=2×3
10=2×5

15=3×5
21=3×7

28=4×7
36=4×9

….

(2) 從數的兩兩分組中，可列出計算式為：1×(1+3) + 2×(3+5) + 3×(5+7) + 4×(7+9)....

(3) 算式可簡化 ＝1×4 + 2×8 + 3×12 + 4×16.... = 4+16+36+64……

(4) <u>這是稍好一點的方法！還是不夠簡單</u>！這基本上是個 <平方數列>，沒有解決想要簡化的問題！？

第五個想法：

(1) 同樣試將數列兩兩分組觀察，但這次先保留第一項，從第二項起開始兩兩相加。我想看看有沒有什麼規律可觀察出各項之間的關係。

1=1×1

3=1×3
6=2×3

10=2×5
15=3×5

21=3×7
28=4×7

36=4×9 …………………

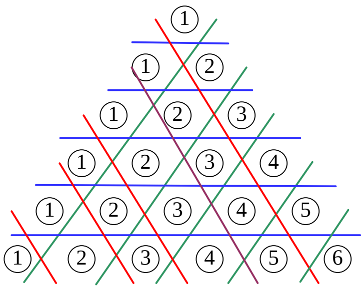
(2) 從數的分組中可列出算式為：1×1 + 3×3 + 5×5 + 7×7 + 9×9＋⋯ ，是有規律了⋯

(3) 但是，<u>這仍是一個<平方數列> 還是太複雜</u>，沒有達到我想要簡化計算的目標。

二　*創新的想法*

經歷了上述的失敗以後，我決定用”畫”的！畫出來看看，能不能看出數列中有什麼秘碼！前面五種思考的方法，並沒有成功地簡化計算。但我覺得造成規律的地方裏面應該有秘密！<u>我結合以上的各種想法，畫出了一個類似像保齡球排法的三角形，並且意外的發現，保齡球三角形當中呈現了神奇的數列秘密，我暫時把這樣的數列思考方法稱爲＜大小三角形排列＞的思考法——也就是說：我們可以用三角形排列，來表達出本研究的那一個數列 **1,3,6,10,15,21⋯**。</u>

(1) 數列三角形的思考：先讓我們用三角型來表達數列 1,3,6,10,15,21 如下圖所示。



1
3
6
10
15
21

(2) 從三角形來看，會很容易利用三角形的三個邊來聯想：

三角形內的所有的數字總和 **(其實就是這個數列的和)** ，有三種算法。

方法**(A)**：是所有＜自上方頂點往左下方斜＞各列總和；

即 1,1,1,1,1,1　2,2,2,2,2　3,3,3,3…的和

方法**(B)**：所有＜自上方頂點往右下方斜＞各列總和；

即 1,2,3,4,5,6　1,2,3,4,5　1,2,3,4 …..的和

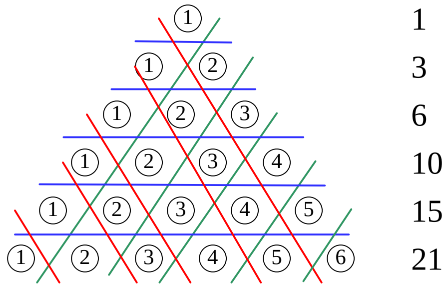
方法**(C)**：將各＜水平線＞各列的總和。

即 1,　1,2,　1,2,3,　1,2,3,4……的和

(3) 這樣的算法比前面的好多了。因爲方法**(A)**容易懂，而方法**(B)**與**(C)**可以利用＜等差級數＞的公式來計算。

三　來列出一個算式吧！——利用<數列三角形>來思考

(1) 第一、我先利用一開始看見的這小規模數列，用三角形圖形，做爲我思考的依據



(2)第二，我用前述**(A)(B)(C)**的計算方法，將此數列求和的算式列出如下：

(A)式：**1×6 + 2×5 + 3×4 + 4×3 + 5×2 + 6×1**

(B)式：**(1+6)×6÷2 + (1+5)×5÷2 + (1+4)×4÷2 + (1+3)×3÷2 + (1+2)×2÷2 + (1+1)×1÷2**

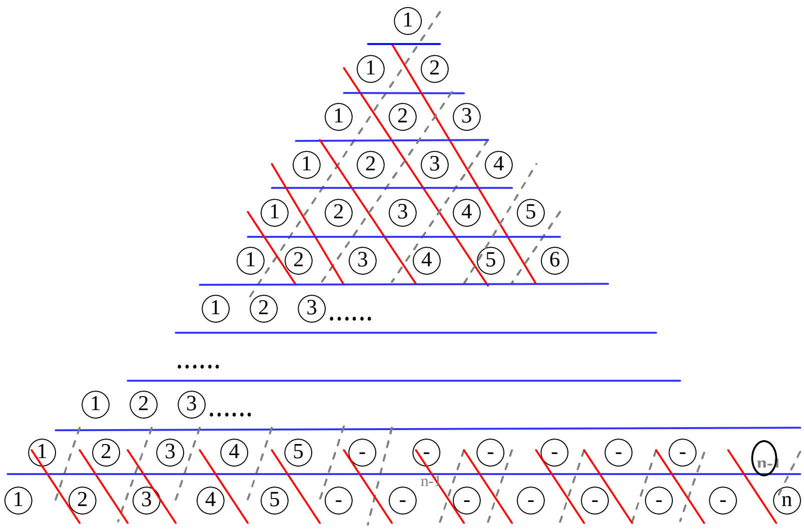
(C)式：**(1+1)×1÷2 + (1+2)×2÷2 + (1+3)×3÷2 + (1+4)×4÷2 + (1+5)×5÷2 + (1+6)×6÷2**

(3)第三，如果數列要繼續擴展延續時怎麼辦？所以，我必需將上述試驗的實數變成抽象的代數式。其中，數列的最後一項會寫成 a_n

$(a_n) = 1+2+3......+n$

$= (1+n)\,n÷2$

(4) <u>現在，我應該可以利用上述的想法與算法，推導出本研究問題的數列之計算式：</u>



使用**(A)**式、**(B)**式或 **(C)**式 三種方式之一即可算出數列的級數和。

(A)式爲　1×n + 2×(n-1) + 3×(n-2)........+ n×1

(B)式爲　(1+n)n÷2 +〔1+(n-1)〕×(n-1) ÷2 +........ +〔1+(n-(n-1))〕×〔n-(n-1)〕÷ 2

(C)式爲　〔1+(n-(n-1))〕×〔n-(n-1)〕÷ 2 +.......... +〔1+(n-1)〕×(n-1) ÷2 + (1+n)n÷2

其實 (B)式和(C)式相同，只是寫的順序相反而已

(5) **可是，這樣的計算式並沒有實質的簡化**，只是把前頁的方法一、及方法二抽象化，在實際的計算上，還是要一一計算。　所以，我要繼續想!

四 繼續利用<數列三角形>來思考，以"簡化"計算過程爲目標

(1) 第一步、我用三角形圖來觀察(A)(B)(C)三個代數式之間有什麼差異。

我發現了：

◎ 數列有從 $1\times n$ 依序到 $n\times 1$ 的規律

◎ $(1+n)n\div 2$ 及〔$1+(n-(n-1))$〕〔$(n-(n-1))\div 2$〕 等，這是不易簡化的積和

◎ 其實(B)式與(C)式相同。

(2) 第二步、我來嘗試把(A)(B)(C)三式合併加總，再除以 **3**

（這樣想的原因是：三式合併時，將可利用對位的方法，使三式相同的代數有可能被合併或被簡化）

(A)式爲 $1\times n + 2\times(n-1) + 3\times(n-2)........+ n\times 1$

(B)式爲 $(1+n)n\div 2 +〔1+(n-1)〕\times(n-1)\div 2 +.......... +〔1+(n-(n-1))〕\times〔n-(n-1)〕\div 2$

(C)的計算同(B)

(B)+(C)爲

$(n+1)n + n(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots\cdots\cdots +〔1+(n-(n-1))〕〔(n-(n-1))〕$

(A)+(B)+(C)爲

$(n+2)n + (n+2)(n-1) + (n+2)(n-2)\cdots\cdots\cdots + (n+2)(n-(n-1))$

$=(n+2)〔n+(n-1)+(n-2)\cdots\cdots +1〕$

$=(n+2)〔1+2+3+\cdots+n〕$

$=(n+2)〔(1+n)\times n\div 2〕$

所以，研究問題的數列和 可用計算式表達爲：

$(n+2)〔(1+n)\times n\div 2〕\div 3$ (請先記住! 這是 公式一!)

(3)本研究所探討的數列和 **1+3+6+10+15+21+28+ ……+5050=?**

它的計算式依據公式一爲 $(100+2)\times(1+2+3+4\cdots+100)\div 3$

$=102\times 5050\div 3$

$=171700$

吔! 算出答案了! 這算是達成<簡單化>任務的第一階段成果！

五　本研究基本的方法：運用已知的等差數列思考　來表達任一階差數列

我們想瞭解這個神秘數列，最基本的方法，是必需利用到原本已經教過的<等差數列方法>來表達；其實，在我們知道這種數列叫<階差數列>之前，想表達一個<階差數列>會利用<等差數列>來幫助思考：

例如

第一排	第二排	第三排
1		
	> 2	
3		> 1
	> 3	
6		> 1
	> 4	
10		> 1
	> 5	
15		

1.以數列 1,3,6,10,15 爲例子

2.每一個　“>”表示後項減前項，所得到的”差”寫在右方尖端

3.當第三排皆相等時
第二排就是“等差數列”
而第一排就是我們所討論的”階差數列”了

六 新的問題－新的挑戰！

雖然已導出研究的階差數列求和的計算式，但是，我又發現了一些新的問題：

(一)階差數列可能會有很多不同型式：例如，階差數列的階差之間的差，並不一定都會是 1；
(二)而且，我懷疑 1 真的是數列的起點嗎？階差數列也許不必然從 1 開始；
(三)那麼，如果數列起點不是一，我前面的公式一還會有效嗎？還可以改良嗎？
(四)找得到一個公式可以用來解答其他的同類階差數數列嗎？

所以，我要繼續擴大探索！

七　列出一些難一點的階差數列，試著歸納尋找出一個通解！

現在，我必需創造出一些複雜一點的階差數列來做例子，用這些例子來推演。

(一) 我運用上一頁的等差級數表達方式，造出<階差的差不是１>或<數列起點不是１>的數列作例子，再利用這些例子試著推導階差數列的計算公式。

(二) 以下的例二，就是我們前面的研究數列。

(三) 研究過程中，我舉了以下十八個比較單純的階差數列爲例子，這可以讓我在不要太複雜的例題中，檢驗看看是否能找出公式；等公式被找出來以後，我會再列出兩個超複雜的階差數列，用複雜的數列來檢查看我導出的公式對不對。也就是先用歸納法找出一個通解(公式), 再進行證明。

例一　1,2,4,7,11
```
 1
      >  1
 2          >  1
      >  2
 4          >  1
      >  3
 7          >  1
      >  4
11
```

例二　1,3,6,10,15
```
 1
      >  2
 3          >  1
      >  3
 6          >  1
      >  4
10          >  1
      >  5
15
```

例三　1,4,8,13,19
```
 1
      >  3
 4          >  1
      >  4
 8          >  1
      >  5
13          >  1
      >  6
19
```

例四　2,3,5,8,12
```
 2
      >  1
 3          >  1
      >  2
 5          >  1
      >  3
 8          >  1
      >  4
12
```

例五　2,4,7,11,16
```
 2
      >  2
 4          >  1
      >  3
 7          >  1
      >  4
11          >  1
      >  5
16
```

例六　2,5,9,14,20
```
 2
      >  3
 5          >  1
      >  4
 9          >  1
      >  5
14          >  1
      >  6
20
```

例七　3,4,6,9,13
```
 3
      >  1
 4          >  1
      >  2
 6          >  1
      >  3
 9          >  1
      >  4
13
```

例八　3,5,8,12,17
```
 3
      >  2
 5          >  1
      >  3
 8          >  1
      >  4
12          >  1
      >  5
17
```

例九　3,6,10,15,21
```
 3
      >  3
 6          >  1
      >  4
10          >  1
      >  5
15          >  1
      >  6
21
```

例十 1,2,5,10,17

```
 1
     >  1
 2           >  2
     >  3
 5           >  2
     >  5
10           >  2
     >  7
17
```

例十一 1,3,7,13,21

```
 1
     >  2
 3           >  2
     >  4
 7           >  2
     >  6
13           >  2
     >  8
21
```

例十二 1,4,9,16,25

```
 1
     >  3
 4           >  2
     >  5
 9           >  2
     >  7
16           >  2
     >  9
25
```

例十三 2,3,6,11,18

```
 2
     >  1
 3           >  2
     >  3
 6           >  2
     >  5
11           >  2
     >  7
18
```

例十四 2,4,8,14,22

```
 2
     >  2
 4           >  2
     >  4
 8           >  2
     >  6
14           >  2
     >  8
22
```

例十五 2,5,10,17,26

```
 2
     >  3
 5           >  2
     >  5
10           >  2
     >  7
17           >  2
     >  9
26
```

例十六 3,4,7,12,19

```
 3
     >  1
 4           >  2
     >  3
 7           >  2
     >  5
12           >  2
     >  7
19
```

例十七 3,5,9,15,23

```
 3
     >  2
 5           >  2
     >  4
 9           >  2
     >  6
15           >  2
     >  8
23
```

例十八 3,6,11,18,27

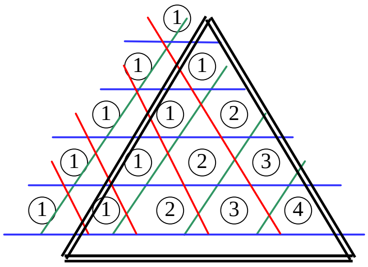
```
 3
     >  3
 6           >  2
     >  5
11           >  2
     >  7
18           >  2
     >  9
27
```

(四)以上 18 例，是用來表示階差數列<起點>與<階差的差>是 1 或不是 1 的數列例子。

(五)限於報告篇幅有限制，我在這裏要利用例 1,例 8,例 15,例 17 的計算來推導公式，其他十四個例子的計算過程，另外在研究日誌中可以查考。

八 利用創新的<大小三角形思考法> 來推導出十八個數列的共通計算式！

例一　1,2,4,7,11 數列，可畫成以下的三角形



區域 A(雙線三角形外區) + 區域 B (雙線三角形內區)

<u>思考及計算</u>

1. 從圖型中可看出：第四頁所發現的<數列三角形>(即雙線三角形)被隱藏在大三角形中!
2. 所以可以利用＜數列三角形＞的計算式(公式一)來求和
3. 它的答案是：區域 A＋區域 B，就是 5 個 1 (數列有五項) 加上 1 個<數列三角形>

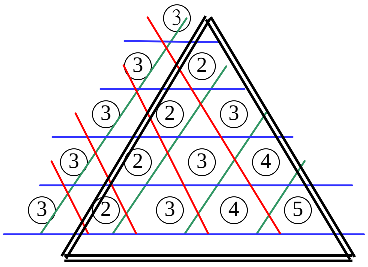
區域 B

1x4+2x3+3x2+4x1	是第 6 頁的(A)式
(1+4)x4/2 + (1+3)x3/2 + (1+2)x2/2 + (1+1)x1/2	是第 6 頁的(B)式
5x4+ 4x3 + 3x2 + 2x1	是第 6 頁的(B)+(C)式
(6x4)+(6x3)+(6x2)+(6x1)=6x10=60	是第 6 頁的(A) + (B)+(C)式
60÷3=20	

區域 A 為 5

本例數列之和為區域 A＋區域 B= 25

例八　3,5,8,12,17 數列 可以畫成以下的三角形



3
5
8
12
17

區域 A(雙線三角形外區) +　區域 B (雙線三角形區)

<u>思考與計算：與例一的思考方法相同</u>

答案是　五個 3(數列有五項)(區域 A) 加上 一個<數列三角形>(區域 B)

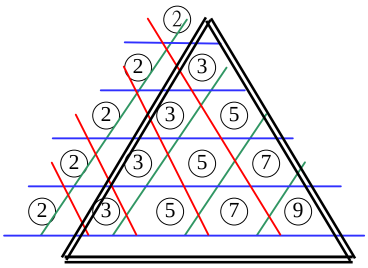
區域 B

$4\times2+3\times3+2\times4+1\times5$	是第 6 頁的(A)式
$(2+5)\times4/2 + (2+4)\times3/2 + (2+3)\times2/2 + (2+2)\times1/2$	是第 6 頁的(B)式
$7\times4+ 6\times3 + 5\times2 + 4\times1$	是第 6 頁的(B)+(C)式
$(9\times4)+(9\times3)+(9\times2)+(9\times1)=9\times10=90$	是第 6 頁的(A) + (B)+(C)式

$90\div3=30$

區域 A 為 $5\times3=15$　　本例數列和為區域 A＋區域 B= 45

例十五　2,5,10,17,26 數列 可以畫成以下的三角形



2
5
10
17
26

區域 A(雙線三角形外區) +　區域 B (雙線三角形區)

<u>思考與計算：與例一的思考方法相同</u>

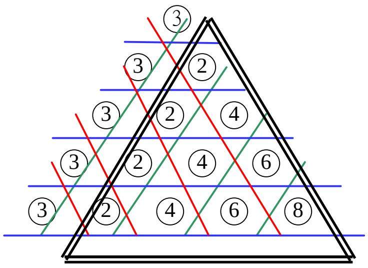
答案是　五個 2(數列有五項)(區域 A) 加上 一個<數列三角形>(區域 B)

區域 B

3×4+5×3+7×2+9×1	是第 6 頁的(A)式
(3+9)×4/2 + (3+7)×3/2 + (3+5)×2/2 + (3+3)×1/2	是第 6 頁的(B)式
12×4+10×3+8×2+6×1	是第 6 頁的(B)+(C)式
15×4+ 15×3 + 15×2 + 15×1	是第 6 頁的(A) + (B)+(C)式
150÷3=50	

區域 A 爲 5×2=10 **本例數列和爲區域 A＋區域 B= 60**

$\boxed{\text{例十七}}$ 3,5,9,15,23 數列 可以畫成以下的三角形



區域 A(雙線三角形外區) + 區域 B (雙線三角形區)

<u>思考與計算：與例一的思考方法相同</u>

答案是 五個 3(數列有五項)(區域 A) 加上 一個<數列三角形>(區域 B)

區域 B：

2×4+4×3+6×2+8×1	是第 6 頁的(A)式
(2+8)×4/2 + (2+6)×3/2 + (2+4)×2/2 + (2+2)×1/2	是第 6 頁的(B)式
10×4+×8×3+6×2+4×1	是第 6 頁的(B)+(C)式
12×4+ 12×3 + 12×2 + 12×1=12×10=120	是第 6 頁的(A) + (B)+(C)式
120÷3=40	

區域 A 爲 5×3=15 **本例數列和爲區域 A＋區域 B= 55**

九　歸納以上例子的推演過程，進一步解釋出公式中每一個代數的真正意義！

我們歸納十八個例子及三角形圖型結構的情形，再與前面所發現的<公式一>互相對照，我們就可以更進一步認識並且說明<公式一>中每一個代數的真正意義。

現在，讓我先試著**解釋公式一**：

“2”表示：
是三角形<正上方頂點>加<左下方頂點>的和；由於都是 1，所以和爲 2

“n”表示：
三角形右下方的頂點那個數

$$(2+n)\underline{〔(1+n)\times n\div 2〕}\div 3$$

“(1+n)×n ÷2 ”表示：
三角形全部的圓圈數目

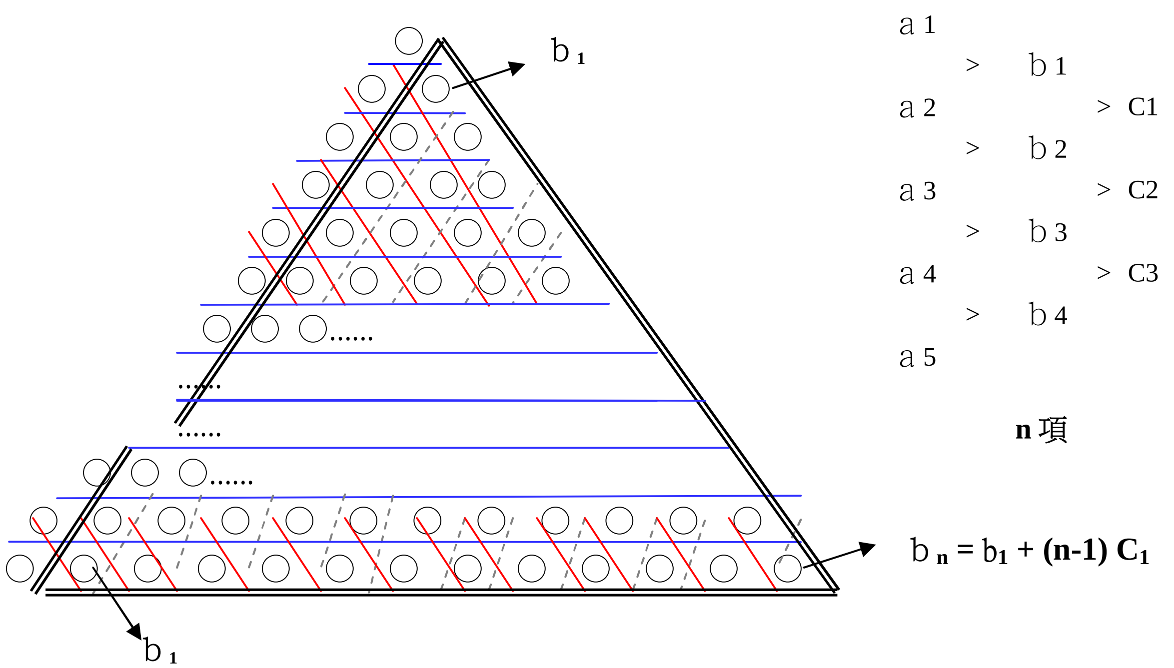
“3”表示：
三角形內的數字被橫向與斜向共算了三次；所以要除以 3

十　再進一步導出首項與階差的差都不是”1”時的公式，擴大應用範圍！

(一) 透過上面公式一圖示的說明，可以明白<公式一>是相當於例一到例十八圖型中雙線所框出的數列三角形(它是小三角形)。

(二) **當一個階差數列的首項不是”1”；階差的公差也不是”1”時，數列仍然可用三角形圖示來表達，會顯示出大三角形中有小三角形。**我們要計算的是大三角形中的數字和，當然就**可以利用小三角形已經產生的公式，來簡化計算。**

(三) 所以，<u>**我要依據前述<公式一>的代數意義，將公式一修改爲以下的公式二**</u>：



“2 b1 ”表示：
是三角形<正上方頂點>(數列首項)加<左下方頂點>的和

“b1 + (n-1) C1 ” 表示：
是三角形右下方的頂點那個數(也就是等差數列的最後一項)

其中 C_1 是等差數列的公差

公式二 $\{2b_1+〔\underline{b_1+(n-1)C_1}〕\}\times〔\underline{(1+n)n\div 2}〕\div 3+\underline{〔n+1〕a_1}$

“(1+n)n÷2”表示
是內三角形的圓圈數目；

n 也就是階差數列內隱藏的等差數列的項數

“(n+1)a1” 表示：
內三角形以外，外掛的那一排數字相同之數列和

十一　　檢驗：用一些更複雜的階差數列，來檢驗我們的通用公式

接下來，我應該要用更複雜的階差數列（就是首項不是 1, 階差的差也不是 1，而且每項數字較複雜的數列）來檢查，看看我的通用公式是否仍然正確？

例十九　　**來個難一點的數列！**

我以數列 74,85,110,149,202,269,350,445 求和，來檢驗公式

（這是一個首項爲二位數 74，末項爲三位數 445，階差的差爲二位數 14 的階差數列)

```
 74
       >     11
 85                >   14
       >     25
110                >   14
       >     39
149                >   14
       >     53
202                >   14
       >     67
269                >   14
       >     81
350
       >     95
445
           n 項
```

<u>例十九　直接運用公式計算</u>

(2×11＋95)×〔(1+7)×7÷2〕 ÷3＋(7＋1)×74
= 1092 +592
= 1684

檢驗：

再利用電子計算機逐項累加數列各項來驗算：74+85+110+…445=1684 結果相同！

證明公式無誤！吔！

$\boxed{\text{例二十}}$ **更複雜一點！**以數列 214,272,347,439,548,674,817,977,1154 求和，來檢驗公式 **(這是一個首項為三位數 214，末項為四位數 1154，階差的差為二位數 17 的階差數列)**

214				
	>	58		
272			>	17
	>	75		
347			>	17
	>	92		
439			>	17
	>	109		
548			>	17
	>	126		
674			>	17
	>	143		
817			>	17
	>	160		
977			>	17
	>	177		
1154				
		n 項		

<u>例二十 直接運用公式計算</u>

$(2\times58+177)\times〔(1+8)\times8\div2〕\div3+(8+1)\times214$

$= 3516 + 1926$

$= 5442$

檢驗：

再利用電子計算機逐項累加數列各項來驗算：214+272+347+……+1154=5442

結果相同！

再次證明公式無誤！吔！

伍、研究結果

一、我們用簡單而創新的思考方式，發現了＜大小三角形排列＞是理解階差數列的一種有效的思考方式。

二、我利用大小三角形排列來作爲創意思考，已經**成功地導出了<階差數列計算級數和>的計算通用公式**。

三、已經導出：在首項爲 $\mathbf{a_1}$，有(n＋１)項的階差數列中，其階差爲 **b**、階差項數 n，階差的差爲 **c**（如下圖）的階差數列求和之通用公式：

a_1
　　> b_1
a_2　　　　> C_1
　　> b_2
a_3　　　　> C_2
　　> b_3
a_4　　　　> C_3
　　> b_4
a_5

　　n項

通用公式爲　$$\{ 2 b_1 + 〔\underline{b_1 + (n-1) C_1}〕\} \times \{〔\underline{(1+n)n \div 2}〕\div 3 \} + \underline{(n+1) a_1}$$

可簡化爲　$$(2 \times b_1 + b_n) \times 〔(1+n) \times n \div 2〕\div 3 + (n+1) \times a_1$$

陸、討論

一　爲什麼保齡球排法般的＜大小三角形排列＞可以用來作爲階差數列的思考方法？

因爲保齡球三角形本身就是一個等差型態，而且，三角形中包含了三角形，這樣的結構就好像階差數列是由等差數列變化而來的一樣；所以，這一個三角形思考方法，可以用來對照表達二種數列之間的包含關係。

二　爲什麼＜大小三角形排列＞的思考方法，可以簡化計算的過程，導出計算的通則？

因爲從視覺上來看三角形的圖形，我們可以看出數字結構的規律特性，這些規律化的特性，又透過眼見輕易看出如何計算。例如：階差起點是 3，每個數列數字都重複包含了 3，從＜大小三角形＞中可以一眼歸納出: <階差起點>會是計算時的一個重要計算依據。

三　爲什麼一開始的研究過程中第三頁的第四及第五個想法，當時我會認爲是平方數列而沒有簡化問題？

不論是連續奇數的平方所組成的數列，或是連續偶數的平方所組成的數列，或是連續的整數平方所組成的數列，都是階差數列的一種(這是我後來才知道的)。我當時還沒有想到大小三角形思考的方式，所以認爲它沒有達成想要簡化的目的。

四　第一個計算式（公式一）導出第二個通用公式（公式二）的過程，要注意什麼？

我在推演過程中遇到的重要工作，就是怎樣把公式中的每一個代數加以辨別，知道它真正的計算意義，要很細心。**一旦把代數的意義說清楚了，就愈明白公式怎樣寫才正確，更深覺得公式的可愛——真正可以「簡化」計算，又「擴大」應用。**

五　這個簡化的公式，以後可能利用來做什麼樣的計算與應用？

我所導出的公式，是一種有簡化特性而方便計算“有規律化地增加”的階差數列和的公式。應用上，如果有首項五位數以上且數列的項數超過十項以上的階差數列要加總，用電子計算機可能會因數字太長容易出錯。如遇到＜加總計算的項數太多，各項數字又太龐大＞的階差數列，就可以利用我們的通用公式，會簡單許多。如果一個公司，它有一種符合這種階差數列特性的薪水制度，這個公式也可以應用來計算公司若干年後公司一共支付一個員工多少薪水。

柒、結論

一、**我們有了創新的思考方法：**我們創新了思考的方式，發現了＜大小三角形排列＞是理解階差數列的一種有效的思考方式。

二、**我發現了<大小三角形思考法>具有同時表現階差數列與等差數列觀念的特性：**我們利用大小三角形排列來作爲創意思考，並且推導出了階差數列計算級數和的計算通用公式。

三、**本研究導出了一個公式**：在以首項爲 $\mathbf{a_1}$，有 n＋１項的階差數列中，**b** 爲階差、n 爲階差項數，**c** 爲階差的差，則計算此一階差數列之和的公式爲

$$(2\times b_1+ b_n)\times〔(1+n)\times n\div 2〕\div 3+ (n+1) \times \mathbf{a_1}$$

四、**這個公式有助於國中生用較簡單的方法學習階差數列**：這個階差數列的通用計算式與理解方法，可以幫助我們國中生在沒有學習高中階段數學Σ之前，用四則運算來思考解答所有階差數列計算級數和的問題！

五、**我們成功地簡化了階差級數和的計算方法！**

六、**這個階差數列公式，可以有實際的應用的價值！**

捌、參考資料

國家教育研究院籌備處（2005）。國民中學數學第四冊。台北：國家教育研究院籌備處。

【評語】030404

本作品討論階差數列的計算與推演，並獲得一些有趣的結果。

研究過程對作者的數學能力也有幫助。如能學會等差數列遞迴定義數列各項，將能獲得處理級數問題很強的能力。本作品只做二階階差數列，其結果以一般常用方法即可得到。