中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030403

神奇的三角錐體

學校名稱：桃園縣立草漯國民中學

作者：	指導老師：
國二 周明玥	許鶴懷
國二 張祐嘉	魏旺平
國二 陳盈君	
國二 盧家彥	

關鍵詞：巴斯卡三角形、三角錐體

神奇的三角錐體

摘要

國中二年級的數學課程中，我們學習到 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，如果次方依序增加，即$(a+b)^3$、$(a+b)^4$、$(a+b)^5$‧‧老師教導我們可以利用巴斯卡三角形的方法求解二項式各次方乘積的結果。那麼$(a+b+c)^2$、$(a+b+c)^3$、$(a+b+c)^4$三項展開式會如何呢？又$(a+b+c+d)^2$、$(a+b+c+d)^3$、$(a+b+c+d)^4$四項展開式會有什麼規律麼? 這就是我們這次想要探索的目標。

壹、 研究動機

在上數學課的時候，我們學到了二項展開式與「巴斯卡三角形」的關係！看見數與數之間，彷彿都存在著一定的連結，令我們好奇心大發，想更加深入其中，探索三項展開式與四項展開式的規律性，了解其與巴斯卡三角形之間是否有關連。

貳、 研究目的

研究三項式與四項式各次方乘積是否有類似巴斯卡三角形的特性。

參、 研究設備與器材

紙、筆、個人電腦、GSP 繪圖軟體。

肆、 研究過程與方法

一、二項式(a+b)與巴斯卡三角形(我國叫做「賈憲三角」或「楊輝三角」)

二項式次方	二項式次方乘積展開式	展開式各項係數
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

表一:巴斯卡三角形(「賈憲三角」或「楊輝三角」)

由上式結果與參考資料得知線段上層係數和會等於下層係數，由此關係我們可以推得二項式 3 次、4 次、5 次….甚至是更高次方的展開式與各項係數的關係。

二、三項式(a，b，c)各次方的乘積：

三項式的展開式為何呢?這裡僅將推導化簡的結果簡述如下:

1. $(a+b+c)^0=1$

2. $(a+b+c)^1=a+b+c$

3. $(a+b+c)^2=(a+b+c)^1 \cdot (a+b+c)^1= a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2ca$

4. $(a+b+c)^3=(a+b+c)^1 \cdot (a+b+c)^2=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3+3c^2a+3ca^2+6abc$

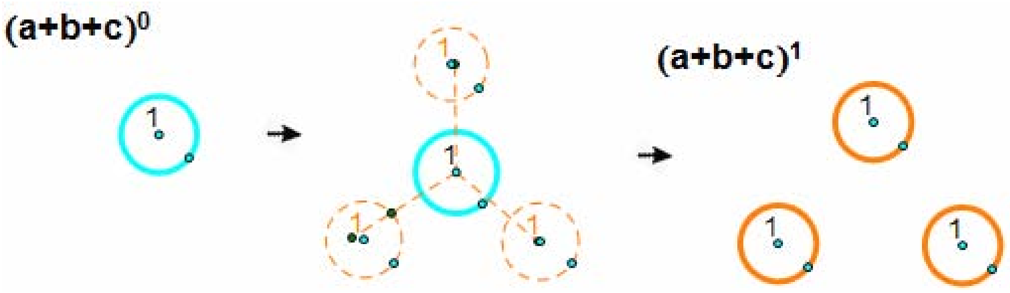
5. $(a+b+c)^4=(a+b+c)^1 \cdot (a+b+c)^3=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4+$
$4c^3a+6c^2a^2+4ca^3+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$

6. $(a+b+c)^5=(a+b+c)^1 \cdot (a+b+c)^4=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5+5b^4c+10b^3c^2+$
$10b^2c^3+5bc^4+c^5+5c^4a+10c^3a^2+10c^2a^3+5ca^4+$
$20a^3bc+20ab^3c+20abc^3+30a^2b^2c+30ab^2c^2+$
$30a^2bc^2$

三、假設與推算:

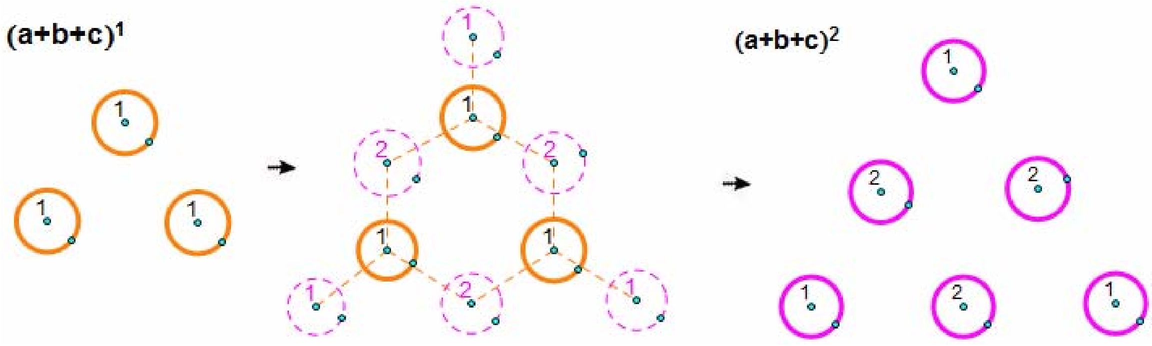
接著我們來探討三項式乘積的結果，我們將三項式各次方乘積展開化簡、歸納後發現三項式乘積好像也隱含著巴斯卡三角形的影子，所以大膽假設三項式的乘積符合巴斯卡三角形規則，因此我們利用巴斯卡三角形的規則，來推算各層的係數關係:

1. $(a+b+c)^0 \rightarrow (a+b+c)^1$:因為$(a+b+c)^0=1$ 所以我們以 1 為最上層，將三項式分別以三個面向依照巴斯卡三角形的規則，分別向下推算下一層的乘積項係數$(a+b+c)^1$如下圖一表示:



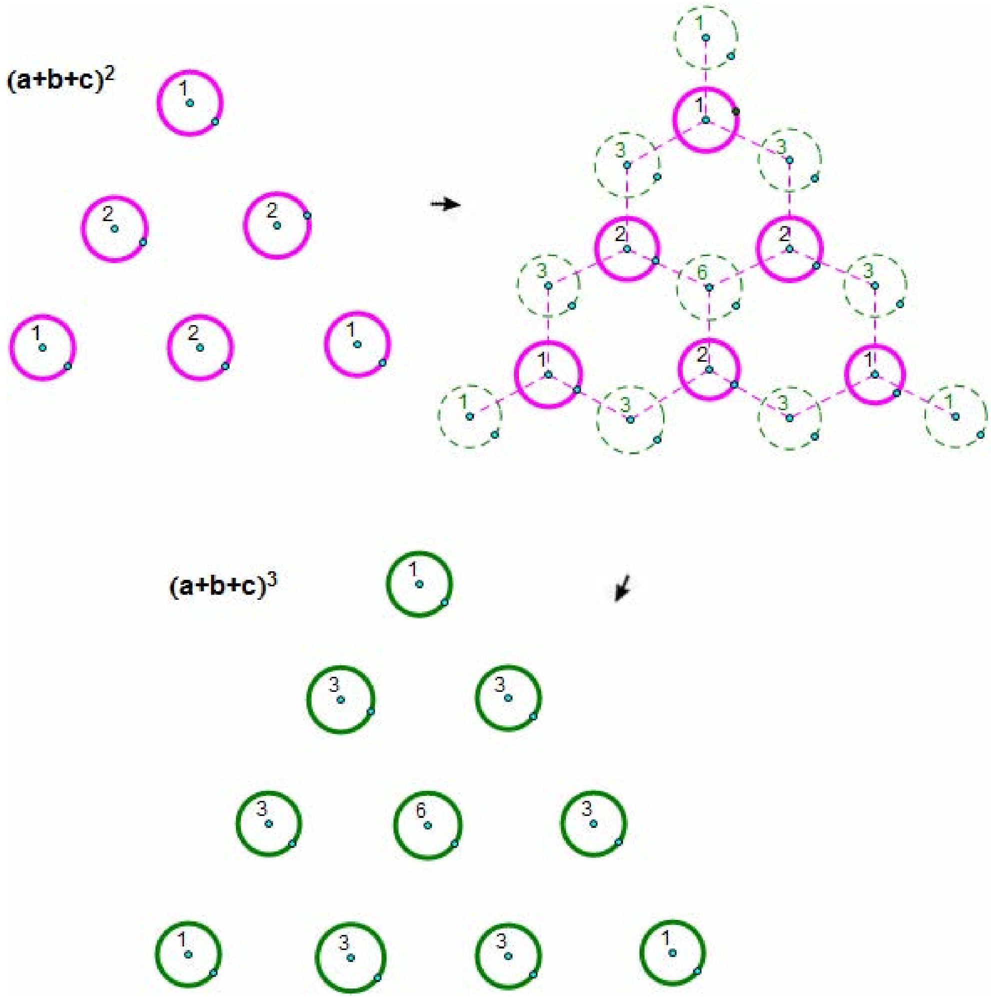
圖一

2. $(a+b+c)^1 \rightarrow (a+b+c)^2$:以$(a+b+c)^1=a+b+c$分別以三個面向依照巴斯卡三角形的規則向下推算下一層$(a+b+c)^2$的乘積項係數如下圖二表示:



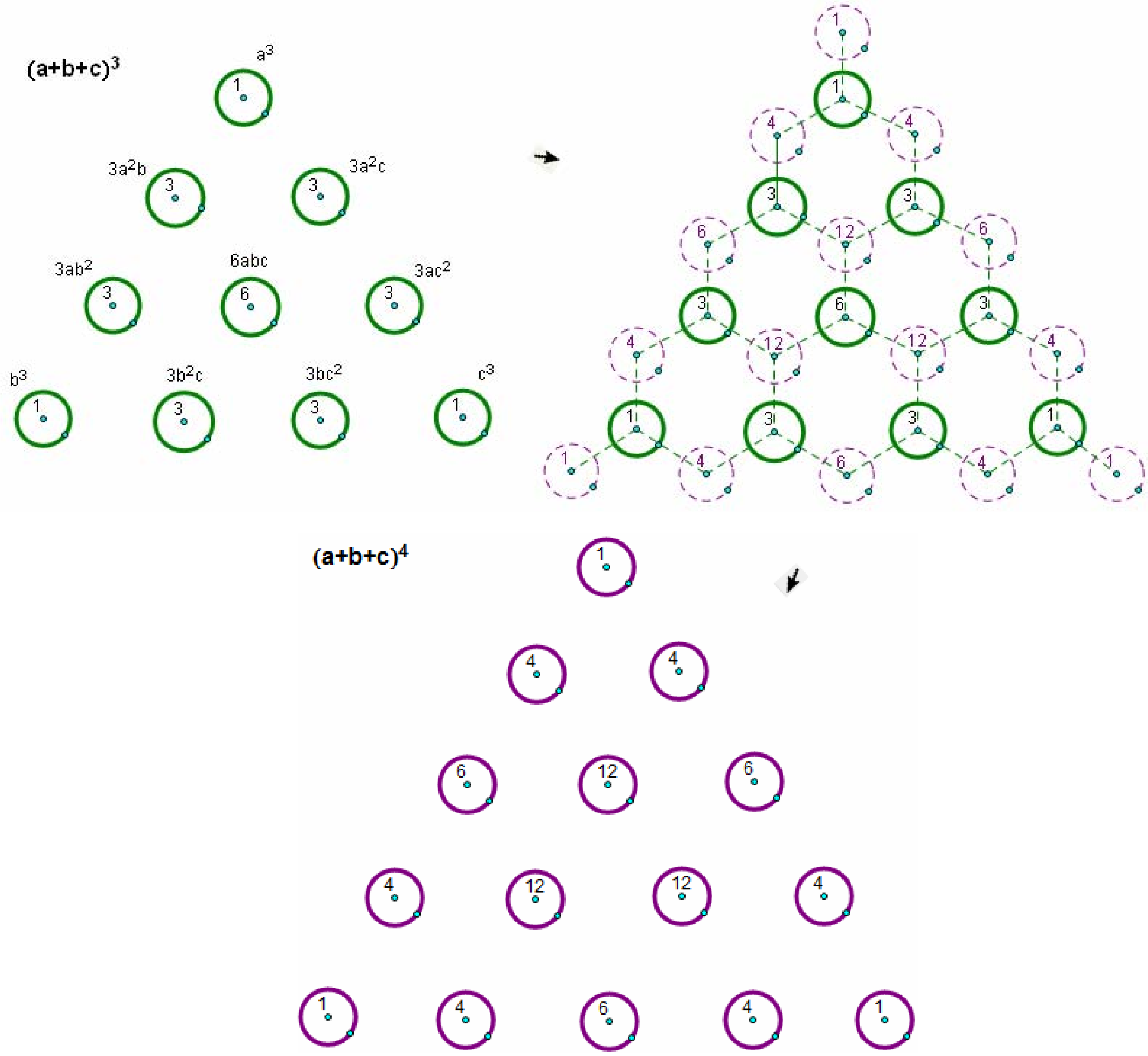
圖二

3.$(a+b+c)^2$→ $(a+b+c)^3$:以$(a+b+c)^2$分別以三個面向依照巴斯卡三角形的規則向下推算下一層$(a+b+c)^3$的乘積項係數如下圖三表示:



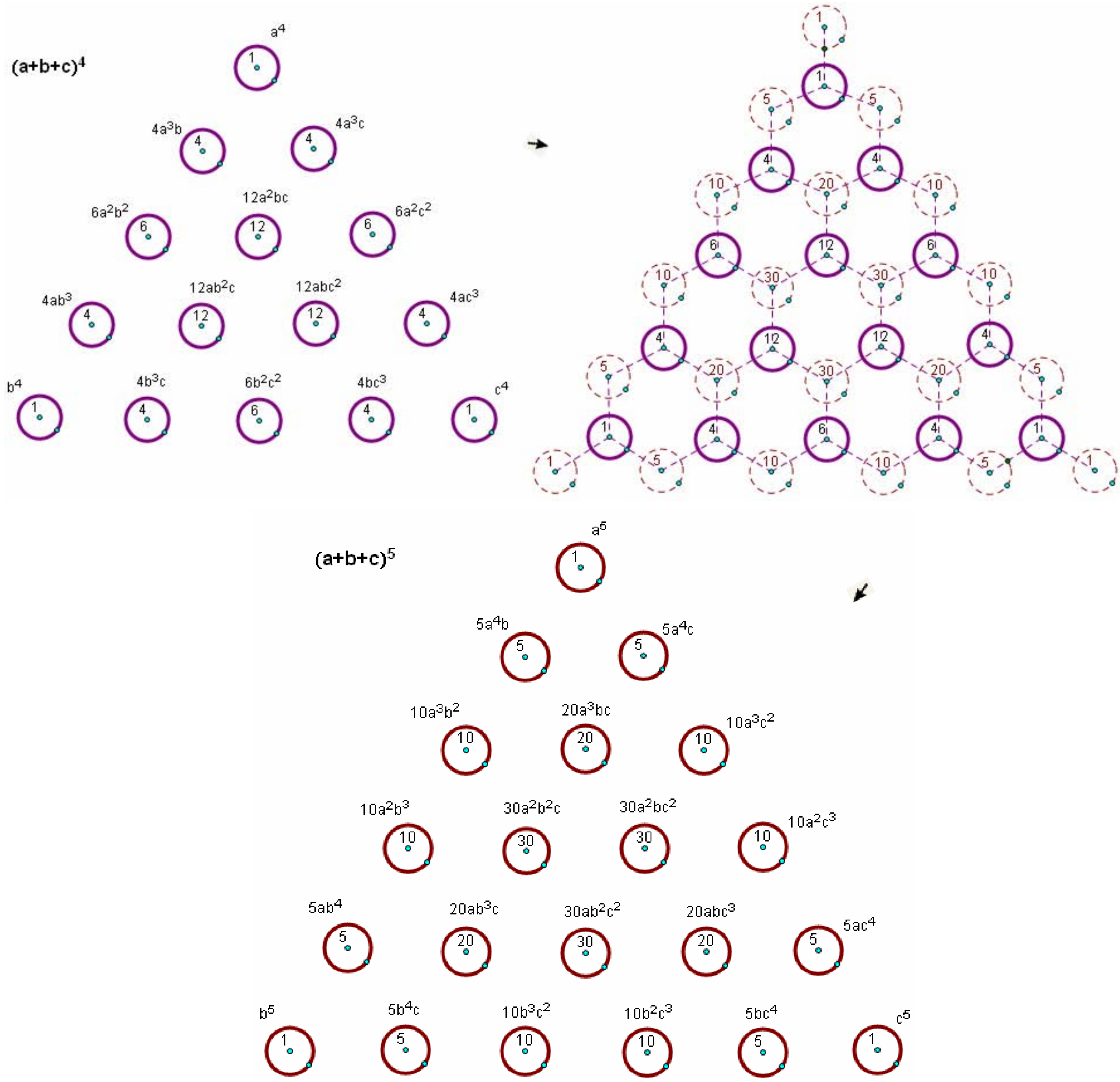
圖三

4. $(a+b+c)^3 \rightarrow (a+b+c)^4$：以$(a+b+c)^3$分別以三個面向依照巴斯卡三角形的規則，向下推算下一層$(a+b+c)^4$的乘積項係數如下圖四表示:



圖四

5.$(a+b+c)^4 \rightarrow (a+b+c)^5$：以$(a+b+c)^4$分別以三個面向依照巴斯卡三角形的規則，向下推算下一層$(a+b+c)^5$的乘積項係數如下圖五表示：



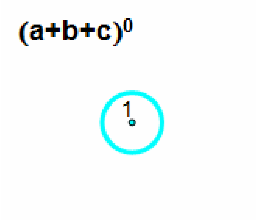
圖五

四、驗證：

接下來我們就以實際導出的三項式各次方乘積項與上述以巴斯卡三角形規則所導出的結果互相比對驗證。

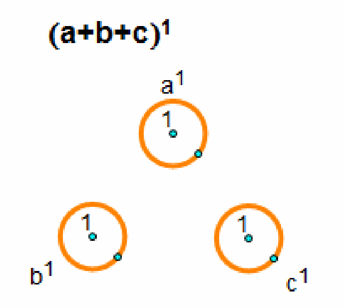
1.$(a+b+c)^0=1$，如下圖六，以一個圓來表示，圓內標示1代表$(a+b+c)^0$的值。與

前面假設初值一致。



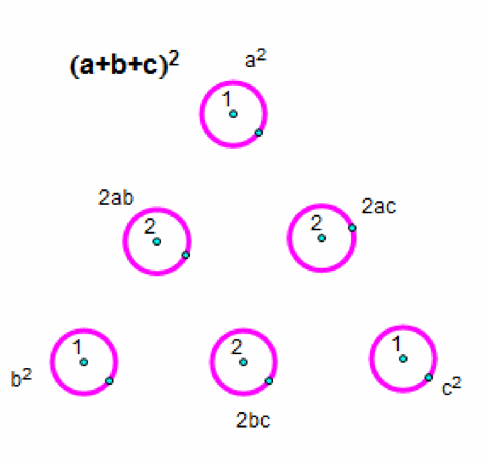
圖六

2. $(a+b+c)^1=a+b+c$，分別將a, b, c三個乘積項各別以圓型表示排列成三角形，圓內標示1代表a, b, c三個一次項變數的係數。如下圖七。恰好與前面推導的結果(圖一)一致，



圖七

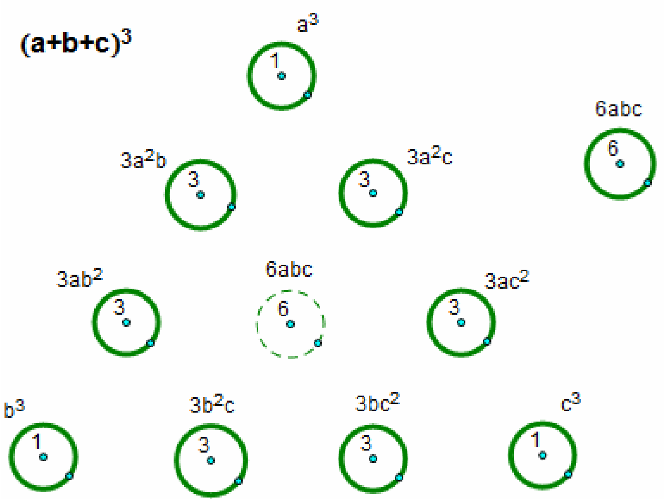
3. $(a+b+c)^2= a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2ca$，如下圖八，以六個圓排列成三角形來表示，圓內標示各項乘積的係數，其中表示2ab的圓形應放置於a^2與b^2之間、表示2bc的圓應置於b^2與c^2之間，(以後各乘積項均以巴斯卡三角形的規則排列，不再贅述）比對圖八與前面推導的結果（圖二）一致。



圖八

，

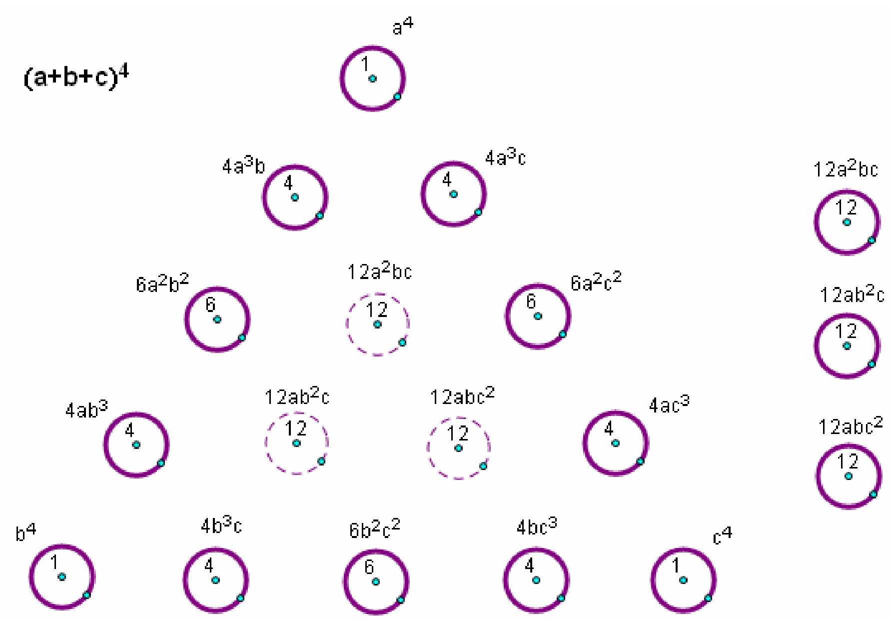
4. $(a+b+c)^3= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3+3c^2a+3ca^2+6abc$，將各項乘積依係數按照巴斯卡三角形的規律排放成等邊三角形，可以用下圖九來表示：



圖九

參考上圖九，其中表示 6abc 乘積項的的圓，是剩餘的一項，恰巧可以放入三角形中心位置，因為 a, b, c 均為 1 次，故放在中間也符合巴斯卡三角形的規則，係數 6 亦與前面利用巴斯卡三角形規則推算出來的圖形(圖三)一致。

5. $(a+b+c)^4= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4+4c^3a+6c^2a^2+4ca^3$ $+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$可用如下圖十表示:



圖十

參考上圖十，將$(a+b+c)^4$的展開式中依照巴斯卡三角形的規則將各項乘

積項排列成三角形的三個邊後，剩下 $12a^2bc, 12b^2c, 12abc^2$ 三個乘積項，恰好可以排入三角形空下的三個位置。

$12a^2bc$：a為 2 次b、c均為 1 次所以將其放入最靠近 a^3 的位置。

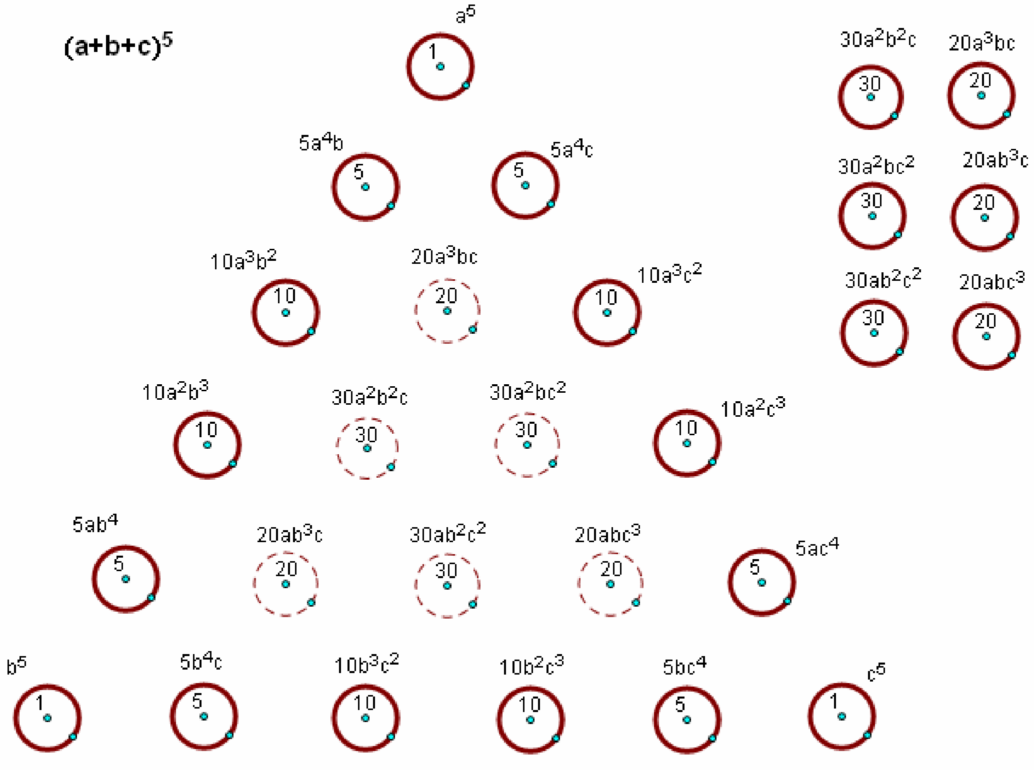
$12ab^2c$：b為 2 次a、c均為 1 次所以將其放入最靠近 b^3 的位置。

$12abc^2$：c為 2 次a、b均為 1 次所以將其放入最靠近 c^3 的位置。

完成後與前面推算結果（圖四）一致。

6. $(a+b+c)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5+5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+5bc^4+c^5+5c^4a+10c^3a^2+10c^2a^3+5ca^4+20a^3bc+20ab^3c+20abc^3+30a^2b^2c+30ab^2c^2+30a^2bc^2$

參考下圖十一，將 $(a+b+c)^5$ 的展開式的各項乘積項，依照巴斯卡三角形的規則將各項乘積項排列成三角形後，剩下 $20a^3bc, 20ab^3c, 20abc^3, 30a^2b^2c, 30a^2bc^2, 30ab^2c^2$ 六個乘積項未排入。



圖十一

參考上圖十一，在這裡共有六項乘積剩下來，恰好可以放入三角形中的六個空缺，每一項乘積應該放置到那一個位置？現在我們就來探討這些問題。

$20a^3bc$：a為 3 次b、c均為 1 次所以將其放入最靠近a^5的位置。

$20ab^3c$：b為 3 次a、c均為 1 次所以將其放入最靠近b^5的位置。

$20abc^3$：c為 3 次a、b均為 1 次所以將其放入最靠近c^5的位置。

$30a^2b^2c$：a、b均為 2 次c為 1 次所以將其放入較靠近a^5 與b^5且距離a^5、b^5的距離等距的位置。

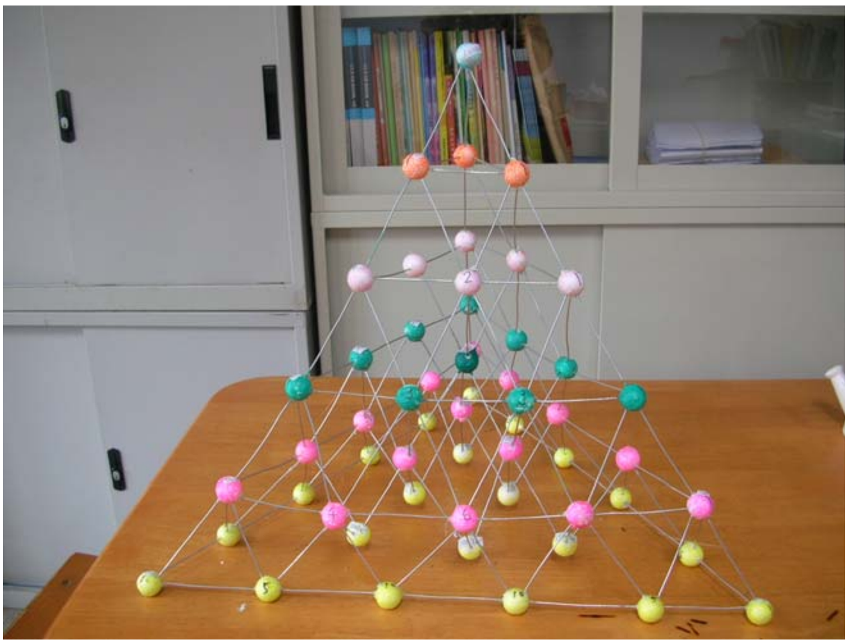
$30a^2bc^2$：a、c均為 2 次b為 1 次所以將其放入較靠近a^5 與c^5且距離a^5、c^5的距離等距的位置。

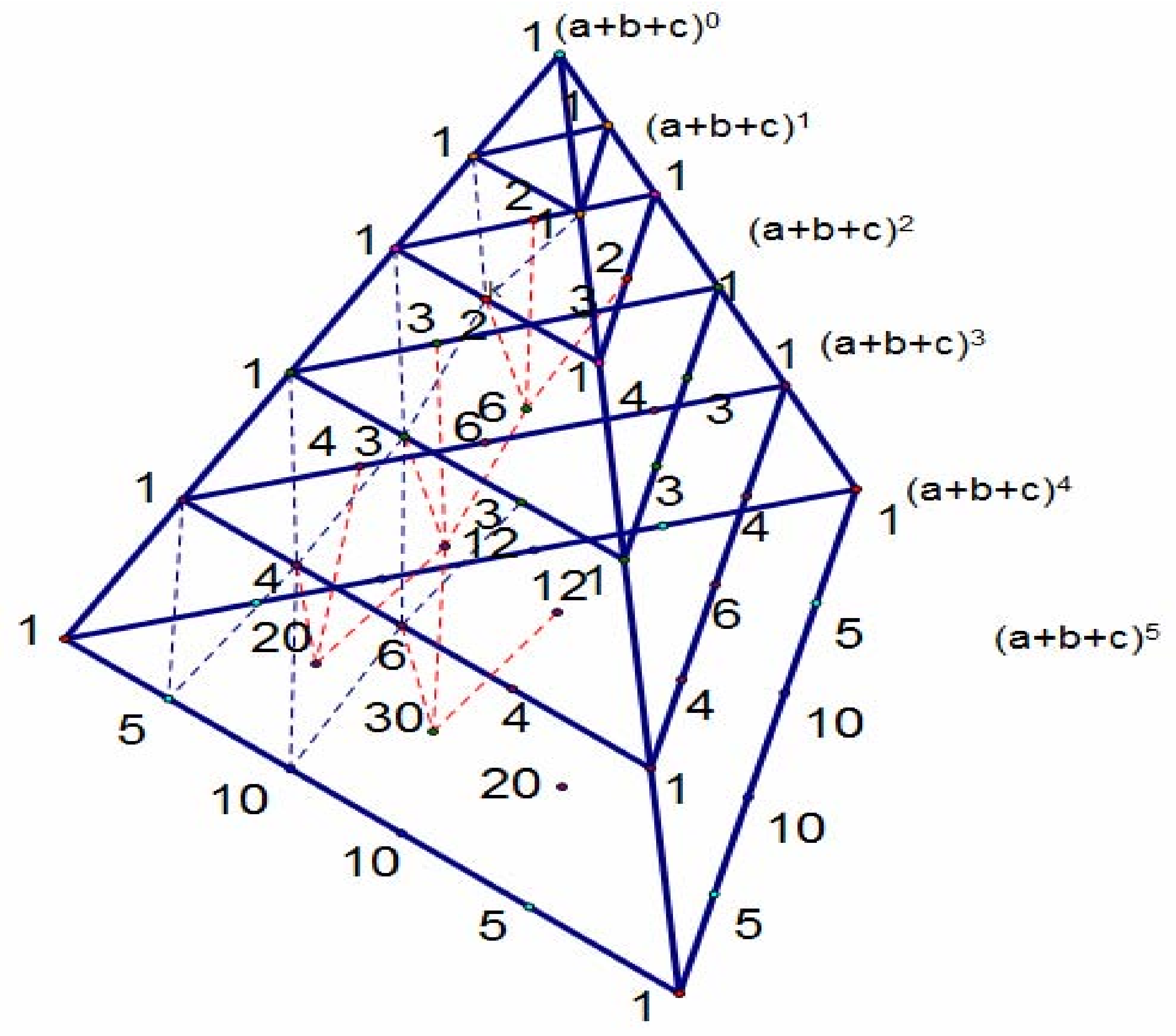
$30ab^2c^2$：b、c均為 2 次a為 1 次所以將其放入較靠近b^5 與c^5且距離b^5、c^5的距離等距的位置。

完成後各乘積項的次方都符合巴斯卡三角形的規則，係數也與前面推算結果（圖五）一致。

伍、 研究結果

經過上述的推算與驗證，我們可以用立體的觀念將三項式(a+b+c)各次方的乘積堆疊成立體，以$(a+b+c)^0$為最上層（第一層），以$(a+b+c)^1$為第二層、$(a+b+c)^2$為第三層，依序向下堆疊，成為一個三角錐體，各層間的關係也依循著巴斯卡三角形的規則，最後我們完將其關係建立成下圖十二的模型，利用這個結果可以讓我們快速的推算出三項式(a+b+c) 各次方的乘積。



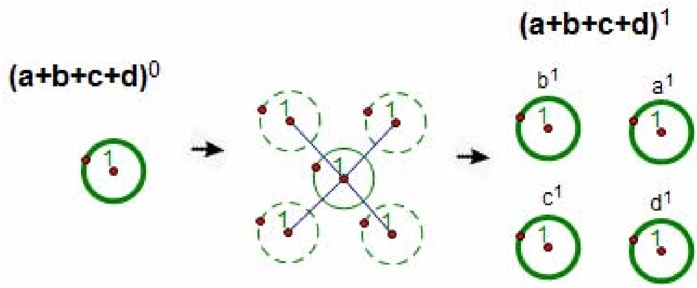


圖十二

陸、 討論

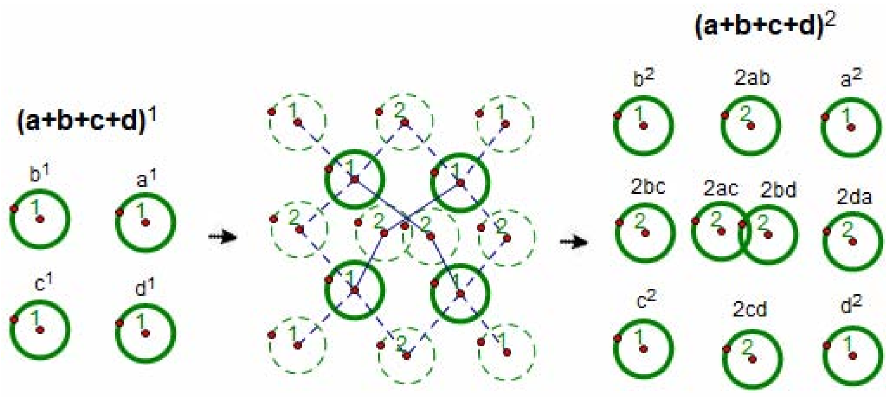
經過上述的推導，我們已經證明三項式的各次方乘積可以堆疊成一個三角錐體，且每一層的關係可以利用巴斯卡三角形原理推導，那麼四項式的各次方乘積是否可以用一個四角錐體來表示？是否也可以用巴斯卡三角形的原理推導出各層的關係？我們更進一步的來探討。

首先我們假設四項式的乘積可以構成四角錐體，因此我們以$(a+b+c+d)^0=1$開始，向，依循巴斯卡三角形的規則向下一層推算，可以得到$(a+b+c+d)^1=a+b+c+d$，如下圖十三表示：



圖十三

再由(a+b+c+d)1=a+b+c+d繼續向下向下推算，可以得知：$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2cd+d^2+2ad+2bc+2ac$，如下圖十四所示



圖十四

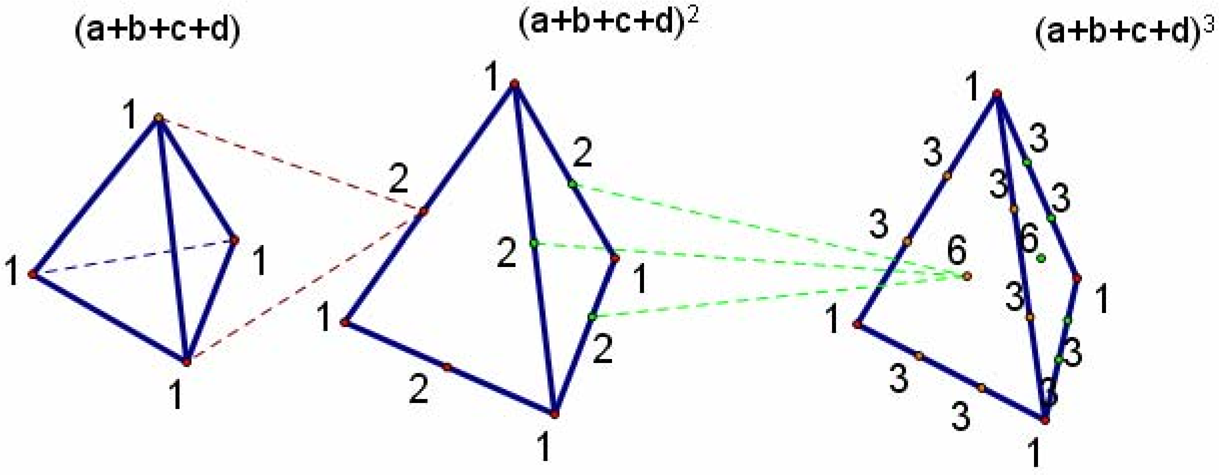
但從上圖十四中亦可以發現，圖中 2ac, 2bd 的位置不正確，這與當初我們的假設可以構成四角錐體互相抵觸，也就表示四項式的各次方乘積無法以四角錐體來表示。另外，我們將四項式的乘積推導化簡結果如下:

1. $(a+b+c+d)^0=1$

2. $(a+b+c+d)^1= a+b+c+d$

3. $(a+b+c+d)^2=(a+b+c+d)^1\cdot(a+b+c+d)^1= a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2cd+d^2+2ad+2ac+2bd$

從上述的推導計算，我們發現雖然無法用四角錐體來表示四項式和的各次方乘積，但卻和巴斯卡三角形規則所推算的結果相同，因此我們利用這樣的結果，再想辦法建構圖形，發現仍然可以用三角錐體來表示這樣的結果，如下圖十五所示：



圖十五

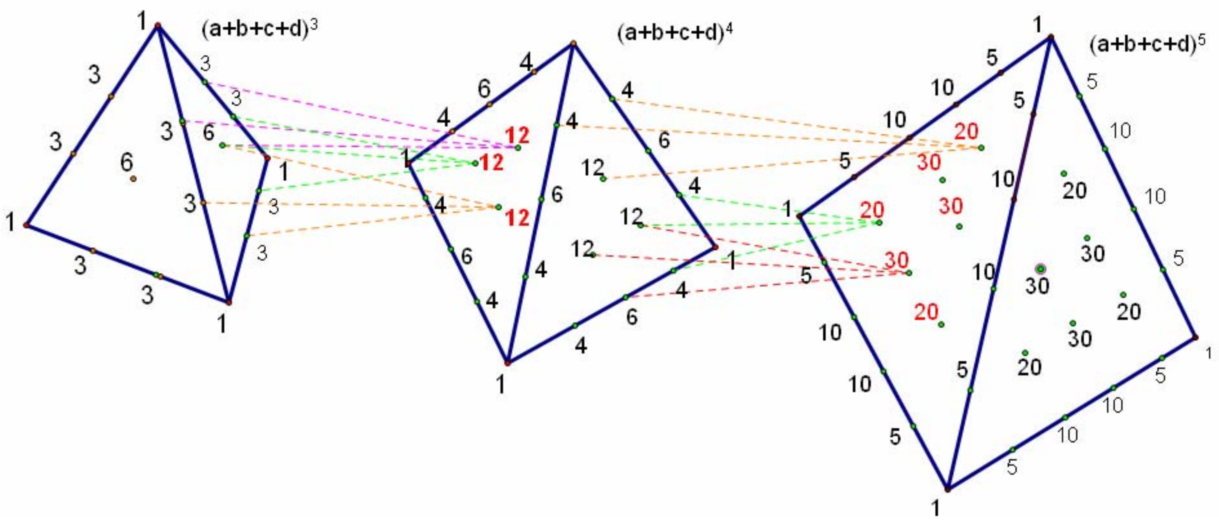
參考上圖十五，我們利用四項式和的 0、1、2 次方，計算、化簡、歸納的結果來建構其圖形，發現了不同的次方各自獨立產生一個三角錐體。且每一面的乘積項可以由上一層的乘積項利用巴斯卡三角形規則向下推導，為了更確定的驗證，我們繼續計算推導(a+b+c+d)的更高次方的乘積項。

1. $(a+b+c+d)^3=a^3+3ab^2+3a^2b+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3+3a^2c+3ac^2+3a^2d+$
$3ad^2+d^3+3b^2d+3bd^2+3c^2d+3cd^2+6abc+6abd+6acd+6bcd$

2. $(a+b+c+d)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4+4ac^3+6a^2c^2+4a^3c+$
$4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4+4bd^3+6b^2d^2+4b^3d+4c^3d+6c^2d^2+4cd^3+$
$12a^2bc+12a^2bd+12a^2cd+12ab^2c+12ab^2d+12b^2cd+12abc^2+$
$12ac^2d+12bc^2d+12abd^2+12acd^2+12bcd^2+24abcd$

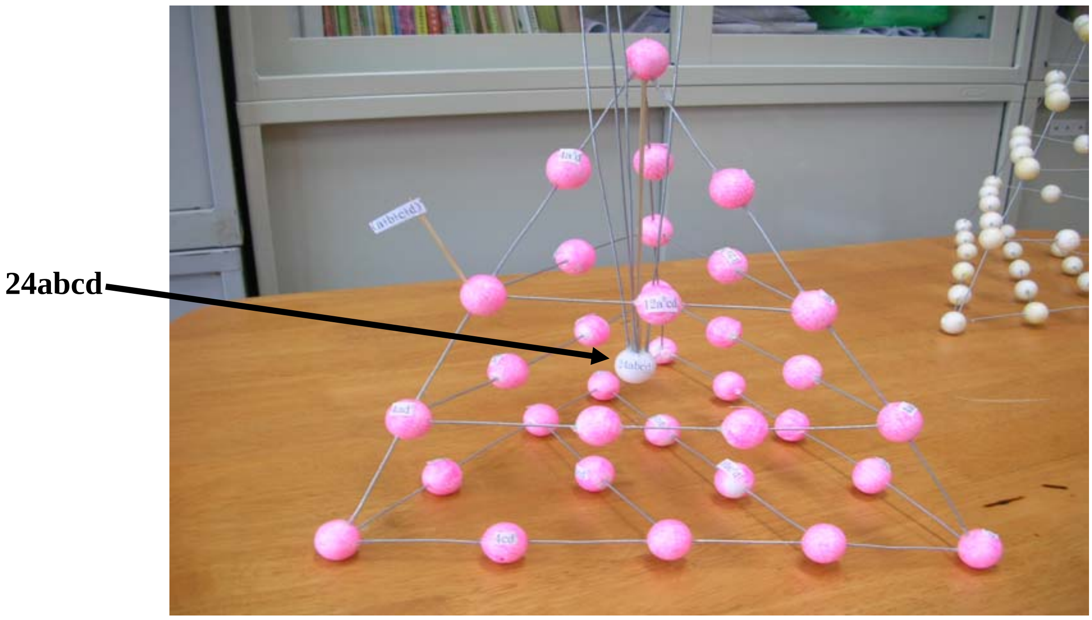
3. $(a+b+c+d)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5+5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+$
$5bc^4+c^5+5ac^4+10a^2c^3+10a^3c^2+5a^4c+5a^4d+10a^3d^2+10a^2d^3+$
$5ad^4+d^5+5bd^4+10b^2d^3+10b^2d^2+5b^4d+5cd^4+10c^2d^3+10c^3d^2+$
$5c^4d+20a^3bc+20ab^3c+20abc^3+20a^3bd+20ab^3d+20abd^3+20a^3cd+$
$20ac^3d+20acd^3+20b^3cd+20bc^3d+20bcd^3+30a^2b^2c+30a^2bc^2+$
$30ab^2c^2+30a^2b^2d+30a^2bd^2+30ab^2d^2+30ac^2d^2+30b^2c^2d+30b^2cd^2+$
$30a^2c^2d+30bc^2d^2+30a^2cd^2+60a^2bcd+60ab^2cd+60abc^2d+60abcd^2$

根據上述的推導結果我們嘗試建構成三角錐體，如下圖十六所示

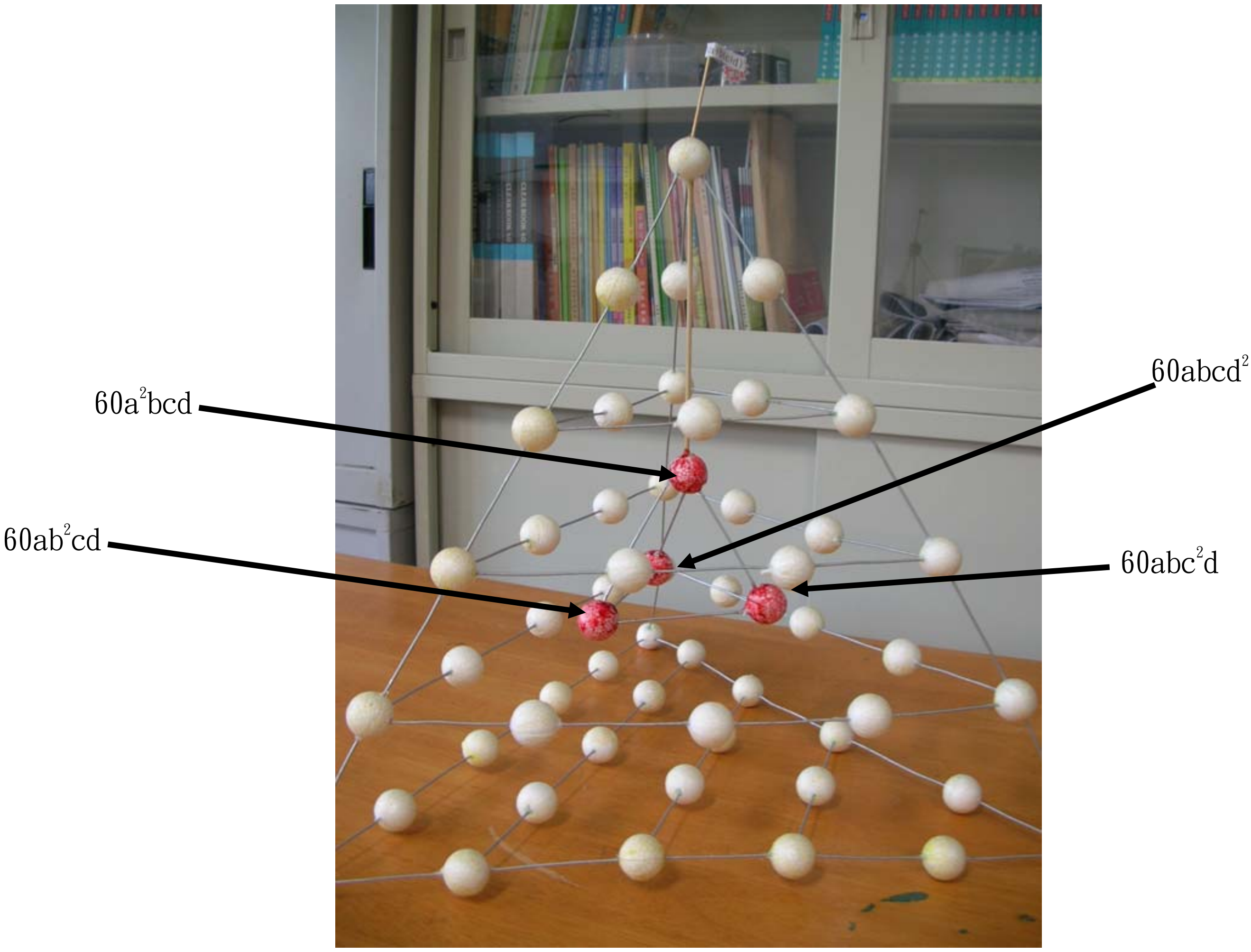


圖十六

參考上圖十六，為了讓圖形簡單、清析，僅列出關鍵點表示，並以虛線連結各層次間的推導。另外四項式的乘積項中，發現在 4 次方時，三角錐體的中心點會有一個 24abcd 的乘積項(參考圖十七)，這一項是由 3 次方的四面中心點 6 所構成，而 5 次方時，有 4 次方的中心點 24abcd 的乘積項與四個表面三個係數為 12 的乘積項所共同產生係數為 60 的 abcd 乘積項，如圖十八表示，至於四項式更高次方在三角錐體內會有什麼規則，我們在推導後發現四項展開式會產生兩層的三角錐體，外部錐體每一面都可以依據三項展開式推導出來，內部錐體則全部都是 a‧b‧c‧d 項所組成，參考圖十九所示。

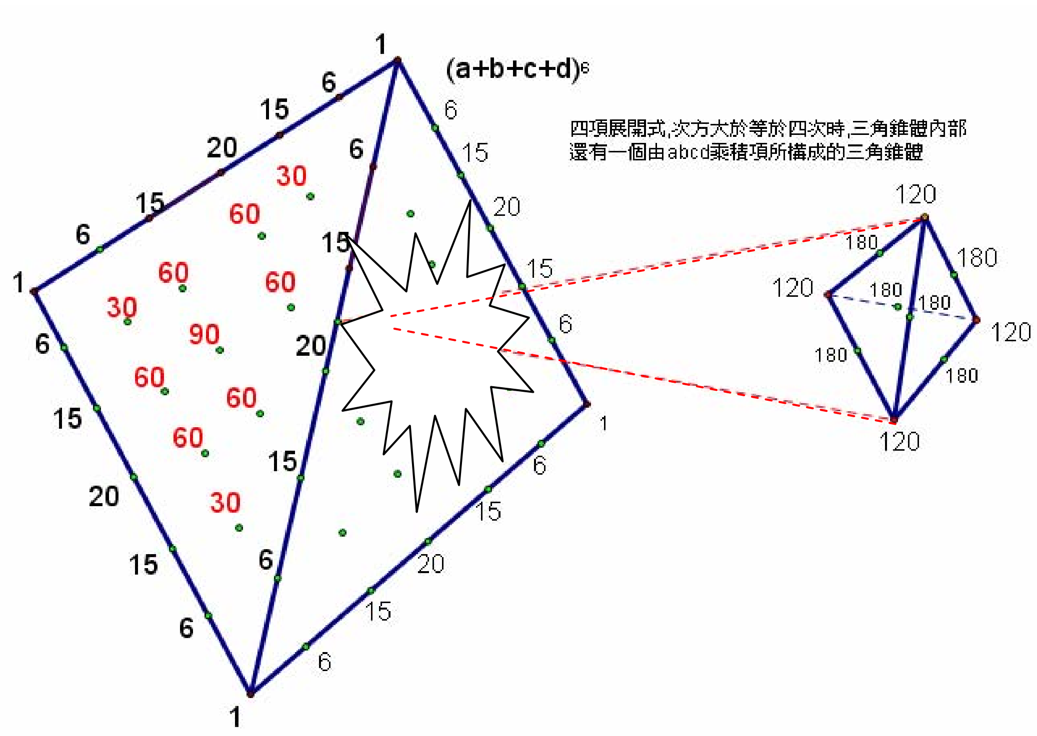


圖十七



60a²bcd
60ab²cd
60abcd²
60abc²d

圖十八

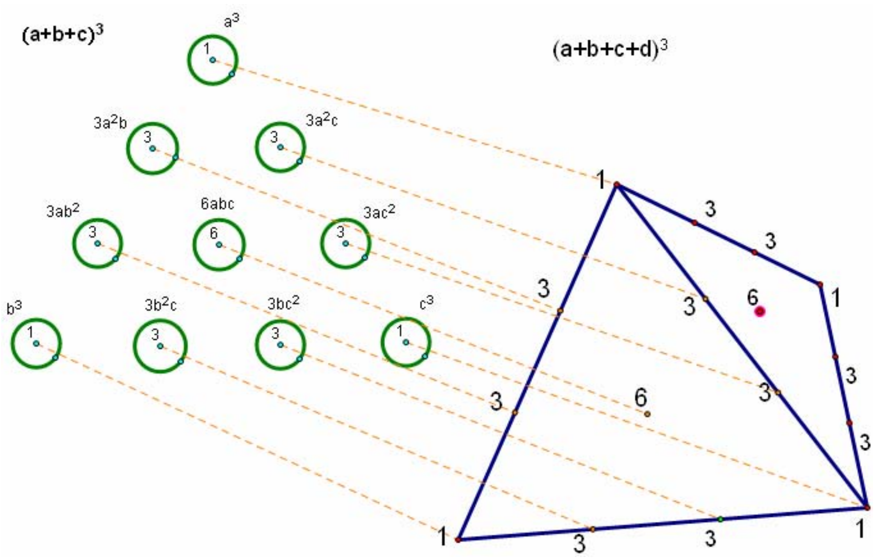


(a+b+c+d)⁶
四項展開式,次方大於等於四次時,三角錐體內部
還有一個由abcd乘積項所構成的三角錐體

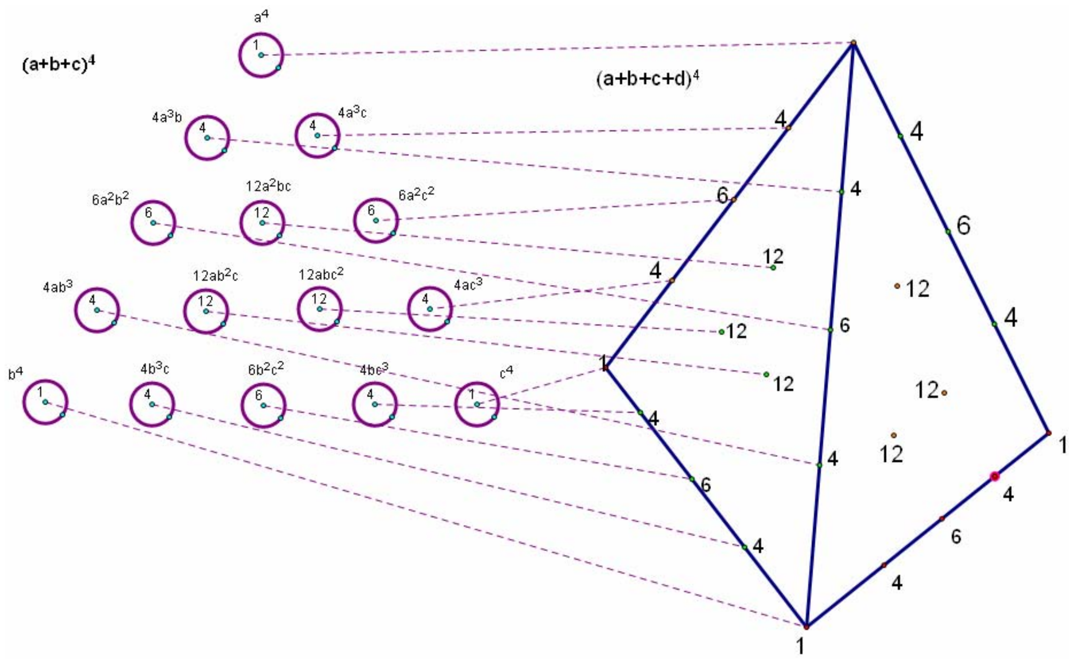
圖十九

從上述四項式的推導結果中，我們發現了二個特性:

1. 三項展開式$(a+b+c)^2$恰好是構成四項展開式$(a+b+c+d)^2$三角錐體的其中一面，所以可以用三項式n次方乘積的結果來建構四項式n次方的三角錐體的四個面，如下圖二十、二十一表示。
2. 四項展開式，可以組成雙層（內層、外層）的三角錐體，外層錐體是可由上述(特性１)構成，內層三角錐體則是 a‧b‧c‧d 項構成(參考圖十九)。



圖二十



圖二十一

柒、 結論

由我們的實驗可以發現，三項式(a+b+c) 各次方的乘積可以建構成三角錐體，利用巴斯卡三角形的原理依序向下擴展，推導三項式各次方的乘積項，可快速推導出的ｎ次方乘積項結果，另外也可以用來建構四項式ｎ次方乘積三角錐體的四個面。

捌、 參考資料及其他

國中數學(翰林、康軒版)

巴斯卡三角形網站：

數學王子的家：http://euler.tn.edu.tw/topic35.htm

維尼哥哥開講２９：http://www.bud.org.tw/Winnie/Wshow29.htm

【評語】030403

作者能主動推廣巴斯卡三角形所表徵的二項式定理：展開式(a+b)n 次方、據以搭造正四面體支架，以其三面表現巴斯卡三角形，與及〝實心〞組織明確顯示(a+b+c)n 次方係數間的層次關係與衍生結構，手腦並用，不但發揮想像力，也有實踐力與創意，值得肯定與鼓勵。

惟在思考的邏輯程序上有所踟躕，由於未能識別「假設」條件，而對明明可循規蹈矩的地緣字母符號運算加乘的三項式目乘不敢輕車熟路駕馭，反倒外借〝大膽〞謙稱〝假設〞後，才敢加以推算（P.2）。四項式的目乘及其支架表徵也很生動，請妥為運用。