中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030402

生日快樂切蛋糕之正多邊形等分問題

學校名稱：桃園縣立南崁高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 高雨彤 國二 吳怡玟 國二 張茜茹 國二 林上賀	鄭勃毅 吳帝瑩

關鍵詞：正多邊形、面積等分、切割面積

生日快樂切蛋糕之正多邊形等分問題

摘要

爲解決從正多邊形之一頂點出發，如何畫線等分面積之問題，利用國中數學課程內容所學(如：比例線段、相似、尺規作圖等)，及簡單正多邊幾何性質(如：對稱)，來進行研究探索並解決問題。

壹、　研究動機

某次的班級慶生會上，買了一個圓形蛋糕，分給全班同學，而等分一個圓並不困難，只需找出圓心即可。但若非圓形，我們開始思考如何做到等分？在國三的幾何課程中，我們學到如何經過重心三等分一個三角形的面積，但其他多邊形呢？故我們思索，若不經由重心，我們由多邊形的一頂點出發，是否能任意等分面積呢？

自國二下學期第二章節起，我們開始接觸到幾何圖形單元，對於多邊形的性質開始有較多的接觸與了解。在本研究中，運用三角形全等性質、三角形面積求法、平行線截等比例線段、多邊形的內角、對稱圖形…等概念，將課堂中所學應用在生活上，數學知識不再只是背公式、計算、解題而已。

本來，學習數學是爲了解決問題，但在一些研究中卻發現在日常生活中解決問題的人，其所使用的策略往往不同於學校的教法，有時甚至更好。我們希望能將課堂中學到的數學知識、配合研究團隊個別的生活經驗，共同討論、激發思考力，尋求解決問題的方法。

貳、　研究目的

一、　探究如何從一頂點n等分正四邊形。
二、　探究如何從一頂點n等分正六邊形。
三、　探究如何從一頂點n等分正五邊形。
四、　探究如何從一頂點n等分正 $2k$邊形。
五、　探究如何從一頂點n等分正 $2k+1$ 邊形。

參、　研究設備及器材

紙、筆、尺、圓規、電腦

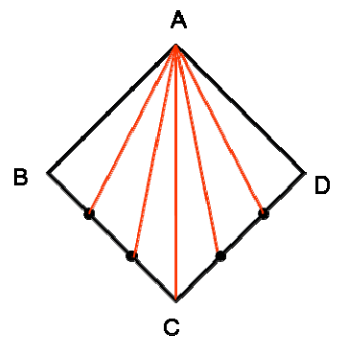
肆、　研究過程或方法

大家都知道，今天如果想要經過一個三角形的頂點畫線等分面積，是很簡單的，只須將對邊作n等分即可達到這個目的！因此接下來就直接討論等分正四邊形。

一、　正四邊形面積等分問題

由於正方形之對角線可等分面積，且爲正方形之一對稱軸，因此我們在考慮等分問題時，只需考慮一半圖形即可。而我們在討論等分問題時，若等分量爲偶數，則對角線即爲其一之等分線，將圖形平分爲二。換言之，要將正方形 n 等分時，其中 n 爲偶數，只須將左、右兩半邊的三角形 $\frac{n}{2}$ 等分即可！

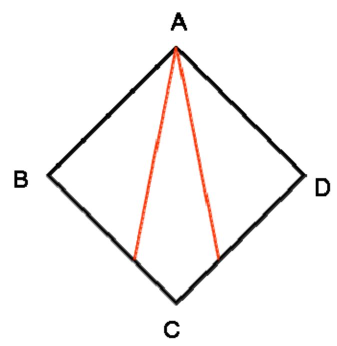
例如：想要將正四邊形分成六等分時，由於正四邊形對稱於 $\overleftrightarrow{AC}$，所以只需分別將左、右兩半邊的三角形等分爲 $\frac{6}{2}=3$ 等分即可。如右圖！



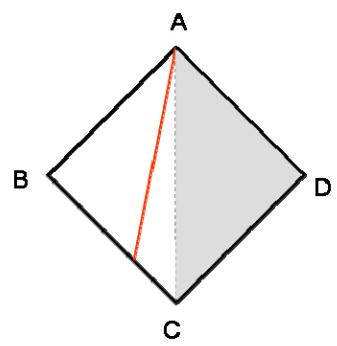
接下來，我們要討論的就是將正四邊形做奇數等分：

(一).三等分四邊形

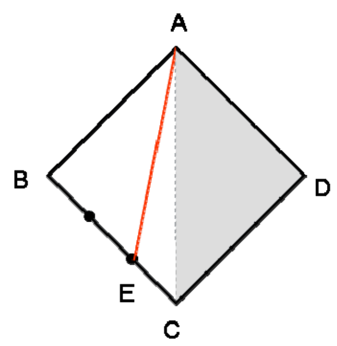
思考正四邊形三等分問題時，我們知道一定有兩條等分線，我們猜想結果如右圖！



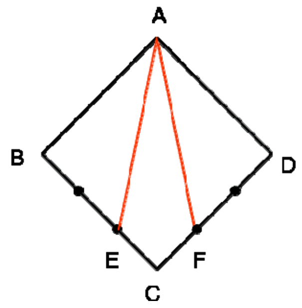
且因爲正四邊形對稱於 $\overleftrightarrow{AC}$，故我們僅須考慮左半邊之三角形！如右圖。



因爲對稱的關係，可以清楚的知道 $\triangle AEC=\frac{1}{2}\triangle ABE$，也就是我們要在 $\overline{BC}$ 上找一點 E 使得 $\overline{BE}:\overline{EC}=2:1$，也就是將 $\overline{BC}$ 三等分即可！如右圖。

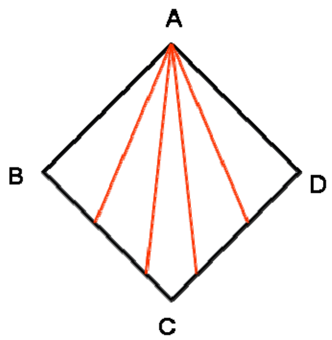


最後，在利用對稱性質，將E點對稱於$\overleftrightarrow{AC}$找到F點，或直接利用同樣方法將$\overline{CD}$三等分找到F點，連接$\overline{AE}$、$\overline{AF}$即為所求。如右圖。

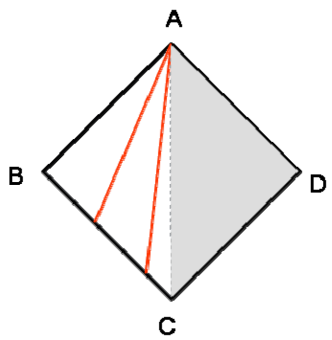


(二).五等分正四邊形

思考正四邊形五等分問題時，我們知道一定有四條等分線，我們猜想結果如右圖！

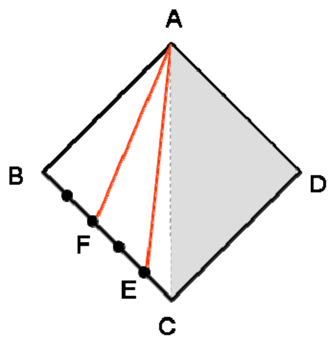


且因為正四邊形對稱於$\overleftrightarrow{AC}$，故我們僅須考慮左半邊之三角形！如右圖。

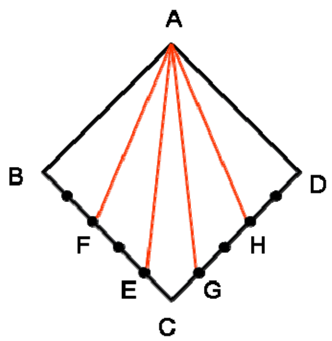


因為對稱的關係，所以

$\triangle AEC=\frac{1}{2}\triangle AFE=\frac{1}{2}\triangle ABF$，也就是說我們要在$\overline{BC}$上找兩點$E$、$F$使得$\overline{BF}$ ： $\overline{FE}$ ： $\overline{EC}$ ＝2：2：1，也就是將$\overline{BC}$五等分即可！如右圖。



最後，在利用對稱性質，將E、F點分別對稱於$\overleftrightarrow{AC}$找到G、H點，或直接利用同樣方法將$\overline{CD}$五等分找到G、H點，連接$\overline{AE}$ 、$\overline{AF}$ 、$\overline{AG}$ 、$\overline{AH}$即為所求。如右圖。

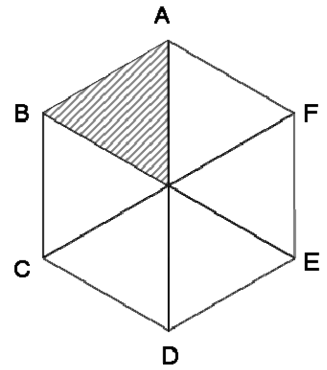


二、　正六邊形面積等分問題

我們先思考一些有關正六邊形的性質問題：

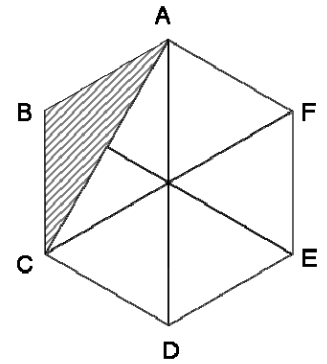
基本性質一：

若將正六邊形的三條對角線連結起來，可以將此六邊形等分爲六個正三角形。也就是說斜線部分面積佔正六邊形的$\frac{1}{6}$，如右圖。



基本性質二：

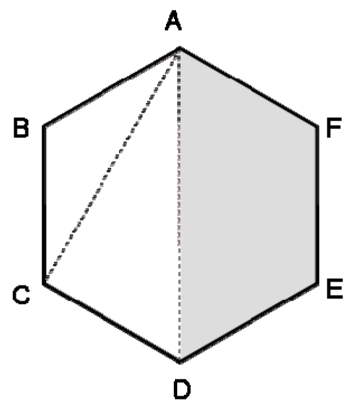
考慮△ABC和△ACD，可以發現△ABC 爲正六邊形的$\frac{1}{6}$，而相對的△ACD爲正六邊形的$\frac{1}{3}$(因爲$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$)



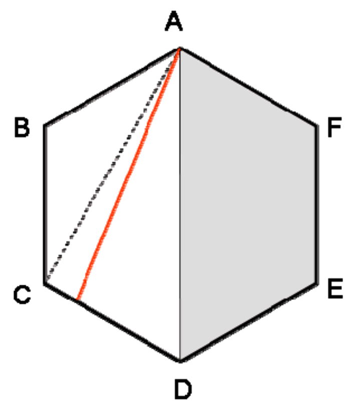
接下來，我們就利用上述這兩個基本性質來做研究與討論：

(一).四等分正六邊形

同樣的想法，我們知道正六邊形會對稱於$\overleftrightarrow{AD}$，因此我們在討論時僅須討論左半邊圖形即可！如右圖。



要將正六邊形四等分，須要有三條等分線，而且$\overline{AD}$必爲其中一條，且左、右兩半邊各一條。又因$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$，所以這條等分線會落在△ACD內。我們猜想結果如右圖。

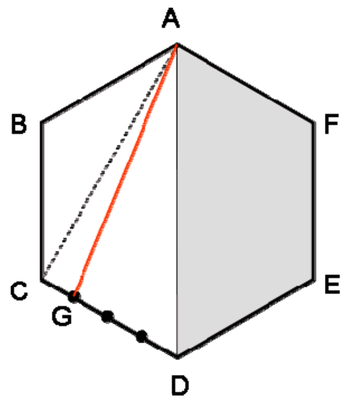


我們的目的就是要在$\overline{CD}$上找一點G點，使得

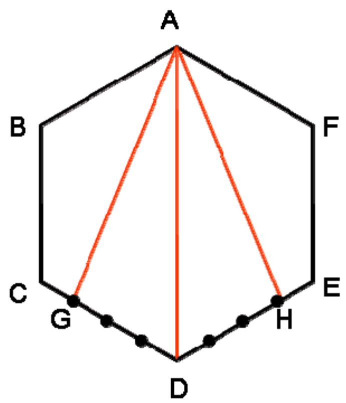
$\triangle AGD=\frac{1}{4}$正六邊形$=\frac{1}{4}\times 3\triangle ACD=\frac{3}{4}\triangle ACD$，

也就是說，將$\overline{CD}$作四等分，找$\overline{DG}=\frac{3}{4}\overline{CD}$即可。

如右圖！



利用對稱性質，將 G 點對稱$\overline{AD}$，我們可以找到另一點 H 點，或直接將$\overline{DE}$作四等分，找$\overline{DH}=\frac{3}{4}\overline{DE}$。連接$\overline{AG}$、$\overline{AD}$、$\overline{AH}$即爲所求。如右圖。

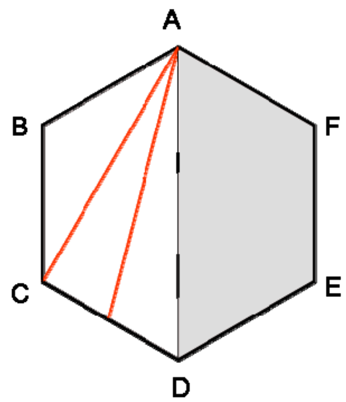


(二).六等分正六邊形

要將正六邊形六等分，須要有五條等分線，而且$\overline{AD}$必爲其中一條，且左、右兩半邊都有兩條。

又因$\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$，所以有一條等分線會落在$\triangle ACD$內。

且因$\triangle ABC$ 爲正六邊形的$\frac{1}{6}$，所以$\overline{AC}$亦爲其中一條，我們猜想結果如右圖。

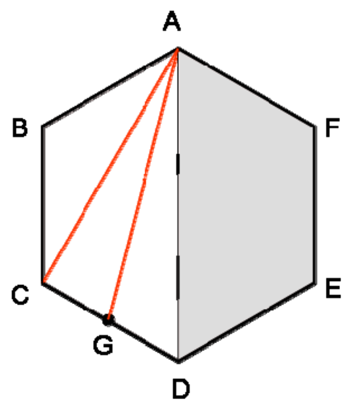


我們的目的就是要在$\overline{CD}$上找一點G點，使得

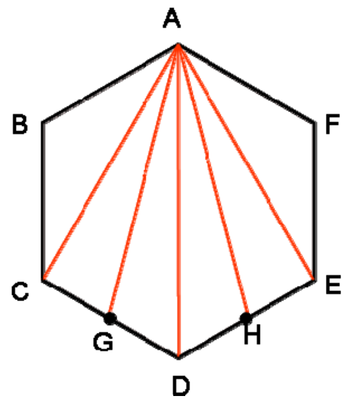
$\triangle AGD=\frac{1}{6}$正六邊形$=\frac{1}{6}\times 3\triangle ACD=\frac{1}{2}\triangle ACD$，

也就是說，將$\overline{CD}$作兩等分，找$\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{CD}$即可。

如右圖！

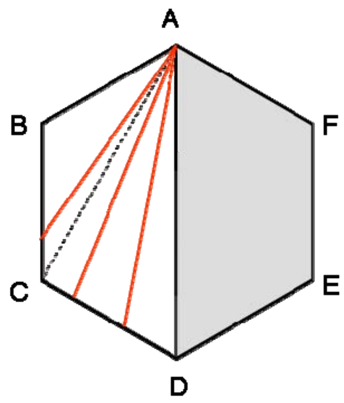


利用對稱性質，將 G 點對稱 $\overline{AD}$，我們可以找到另一點 H 點，或直接將 $\overline{DE}$ 作兩等分，找 $\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{DE}$。連接 $\overline{AC}$、$\overline{AG}$、$\overline{AD}$、$\overline{AH}$、$\overline{AE}$ 即爲所求。如右圖。



(三).八等分正六邊形

要將正六邊形八等分，須要有七條等分線，而且 $\overline{AD}$ 必爲其中一條，且左、右兩半邊各三條。又因 $\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$，所以有一條等分線會落在 $\triangle ABC$ 內，而另兩條會在 $\triangle ACD$ 內，我們猜想結果如右圖。



我們的目的就是要在 $\overline{CD}$ 上找兩點 G、H 點，使得

$\triangle AHG=\triangle AGD=\frac{1}{8}$ 正六邊形 $=\frac{1}{8}\times 3\triangle ACD$

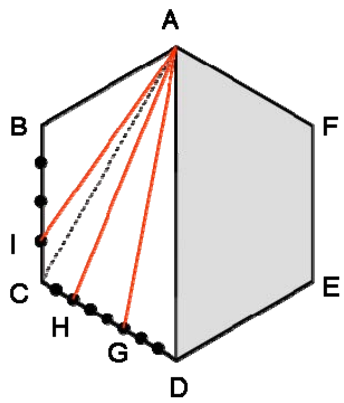
$=\frac{3}{8}\triangle ACD$，

也就是說，將 $\overline{CD}$ 作八等分，找 $\overline{HG}=\overline{DG}=\frac{3}{8}\overline{CD}$ 即可。也必須在 $\overline{BC}$ 上找一點 I 點，使得

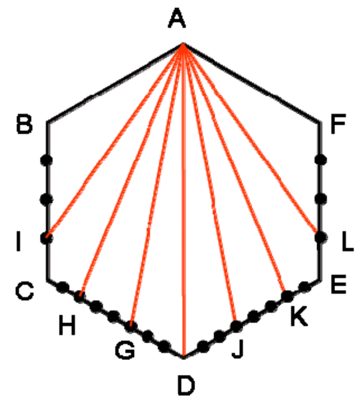
$\triangle ABI=\frac{1}{8}$ 正六邊形 $=\frac{1}{8}\times 6\triangle ABC=\frac{3}{4}\triangle ABC$

也就是說，將 $\overline{BC}$ 作四等分，找 $\overline{BI}=\frac{3}{4}\overline{BC}$ 即可。

如右圖。



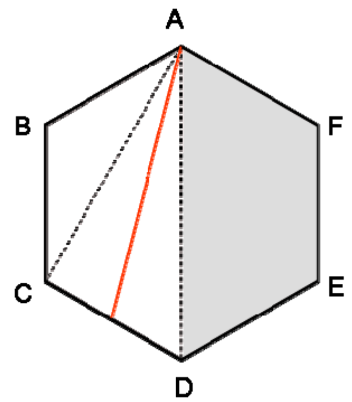
利用對稱性質，將 I、H、G 點分別對稱 $\overline{AD}$，我們可以找到另三點 L、K、J 點，或直接將 $\overline{DE}$ 作八等分，找 $\overline{DJ}=\overline{JK}=\frac{3}{8}\overline{DE}$，再將 $\overline{EF}$ 作四等分，找 $\overline{FL}=\frac{3}{4}\overline{EF}$。連接 $\overline{AI}$、$\overline{AH}$、$\overline{AG}$、$\overline{AD}$、$\overline{AJ}$、$\overline{AK}$、$\overline{AL}$ 即為所求。如右圖。



(四).三等分六邊形

要三等分正六邊形，需有兩條等分線，且考慮正六邊形會對稱於 $\overleftrightarrow{AD}$，所以左、右兩半邊各一條。

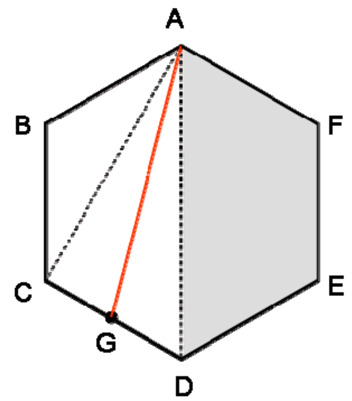
又因 $\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$ 我們猜想結果如右圖。



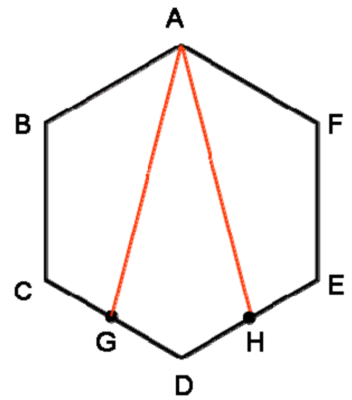
我們的目的就是要在 $\overline{CD}$ 上找一點 G 點，使得

$\triangle AGD=\frac{1}{6}$正六邊形$=\frac{1}{6}\times 3\triangle ACD=\frac{1}{2}\triangle ACD$，也就是說，將 $\overline{CD}$ 作兩等分，找 $\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{CD}$ 即可。

如右圖！



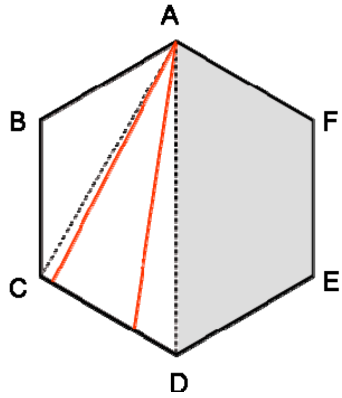
利用對稱性質，將 G 點對稱 $\overline{AD}$，我們可以找到另一點 H 點，或直接將 $\overline{DE}$ 作兩等分，找 $\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{DE}$。連接 $\overline{AG}$、$\overline{AH}$ 即為所求。如右圖。



(五).五等分六邊形

要五等分正六邊形，需有四條等分線，且考慮正六邊形會對稱於$\overleftrightarrow{AD}$，所以左、右兩半邊各兩條。

又因$\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$我們猜想結果如右圖。



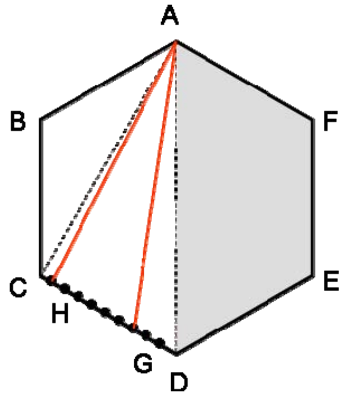
我們的目的就是要在$\overline{CD}$上找兩點G、H點，其中G點會使得

$\triangle AGD=\frac{1}{10}$正六邊形$=\frac{1}{10}\times 3\triangle ACD$

$=\frac{3}{10}\triangle ACD$，

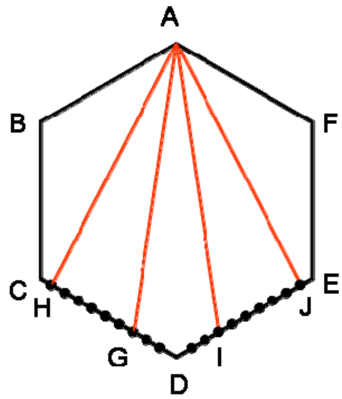
而由於$\triangle AHG=2\triangle AGD$，故將$\overline{CD}$作十等分，

找$\overline{DG}=\frac{3}{10}\overline{CD}$和$\overline{HG}=2\overline{GD}$即可。如右圖！



利用對稱性質，將H、G點分別對稱$\overline{AD}$，我們可以找到另兩點I、J點，或直接將$\overline{DE}$作十等分，

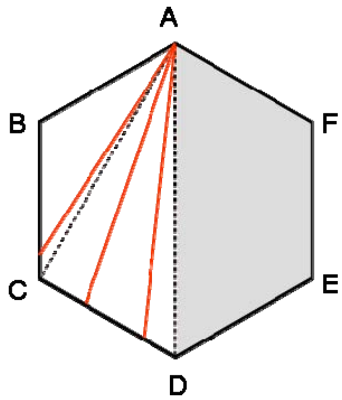
找$\overline{DI}=\frac{3}{10}\overline{DE}$和$\overline{IJ}=2\overline{DI}$，連接$\overline{AH}$、$\overline{AG}$、$\overline{AI}$、$\overline{AJ}$即爲所求。如右圖。



(六).七等分六邊形

要七等分正六邊形，需有六條等分線，且考慮正六邊形會對稱於$\overleftrightarrow{AD}$，所以左、右兩半邊都有三條。

又因$\frac{1}{6}>\frac{1}{7}$我們猜想結果如右圖。



我們的目的就是要在$\overline{CD}$上找兩點G、H點，其中G點會使得

$\triangle AGD=\frac{1}{14}$正六邊形$=\frac{1}{14}\times 3\triangle ACD$

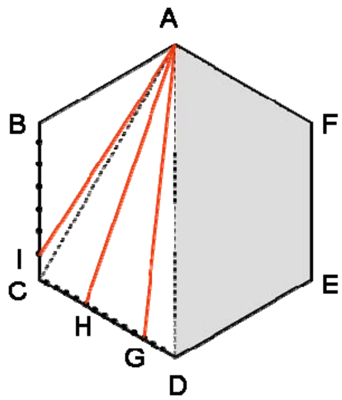
$=\frac{3}{14}\triangle ACD$，

而由於$\triangle AHG=2\triangle AGD$，故將$\overline{CD}$作十四等分，找$\overline{DG}=\frac{3}{14}\overline{CD}$和$\overline{HG}=2\overline{GD}$。而另一點$I$在$\overline{BC}$上，會使得

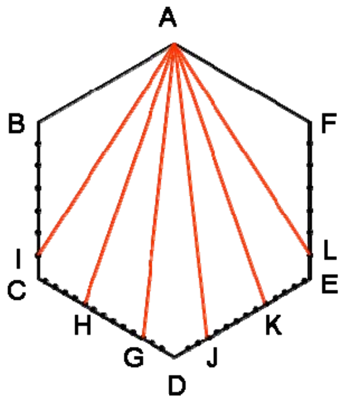
$\triangle ABI=\frac{1}{7}$正六邊形$=\frac{1}{7}\times 6\triangle ABC=\frac{6}{7}\triangle ABC$

也就是說，將$\overline{BC}$作七等分，找$\overline{BI}=\frac{6}{7}\overline{BC}$即可。

如右圖。



利用對稱性質，將 I、H、G 點分別對稱$\overline{AD}$，我們可以找到另三點 L、K、J 點，或直接將$\overline{DE}$作十四等分，找$\overline{DJ}=\frac{3}{14}\overline{DE}$和$\overline{JK}=2\overline{DJ}$，再將$\overline{EF}$作七等分，找$\overline{FL}=\frac{6}{7}\overline{EF}$。連接$\overline{AI}$、$\overline{AH}$、$\overline{AG}$、$\overline{AJ}$、$\overline{AK}$、$\overline{AL}$即爲所求。如右圖。



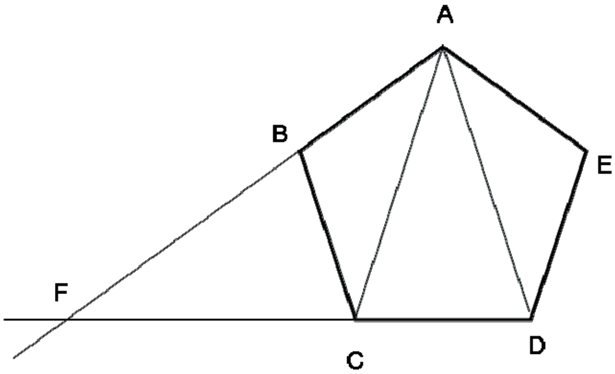
三、　　正五邊形面積等分問題

我們先思考一些有關正五邊形的性質問題：

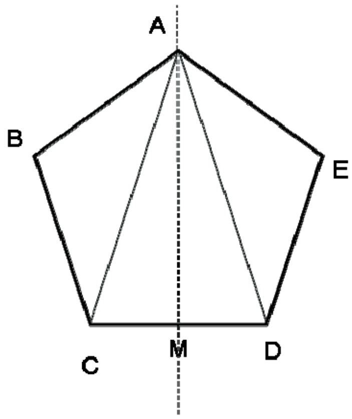
基本性質一：

若延長 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 相交於 F 點，因爲 $\angle FBC=\angle FCB=\angle ACD=\angle ADC=72°$ 且 $\overline{BC}=\overline{CD}$，

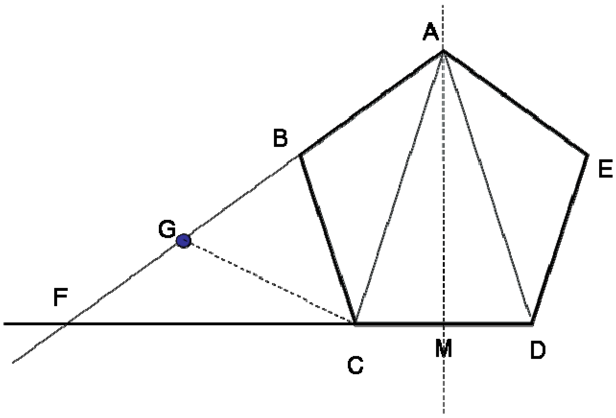
所以 $\triangle FBC \cong \triangle ACD$　(ASA 全等)



若做 $\overline{CD}$ 的中垂線，必經過 A 點和中點 M。且正五邊形會對稱於 $\overleftrightarrow{AM}$。



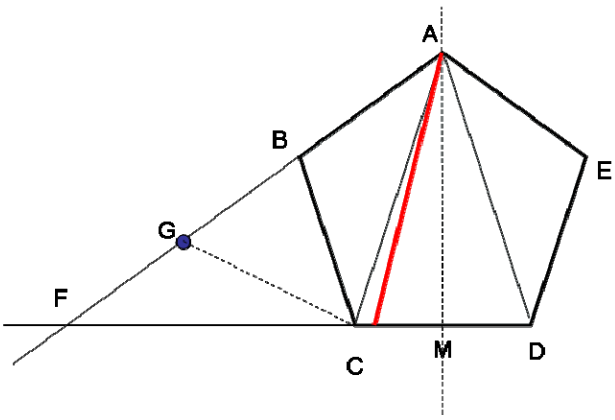
若找出 $\overline{BF}$ 中點 G，並連結 $\overline{CG}$，可以發現 $\triangle FGC=\triangle AMD$，也就是說 $\triangle AGC$ 面積和四邊形 $ABCM$ 面積相同。



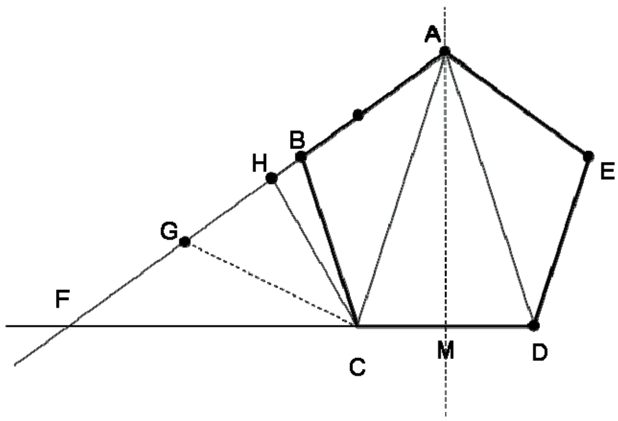
接下來我們就要利用上述兩個性質，來作正五邊形等分問題：

(一).三等分五邊形

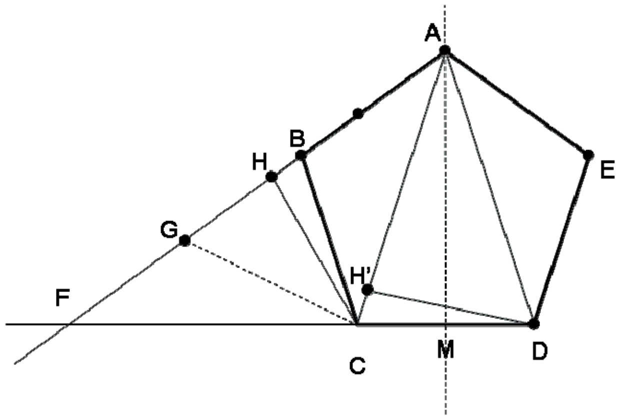
要將正五邊形三等分，會有兩條等分線，且因對稱關係，我們一樣只討論左半邊。但在這裡我們沒辦法確定等分線會在何處，我們只是依據「**將四邊形 *ABCM* 分成 2：1**」的想法，猜測結果如右圖！



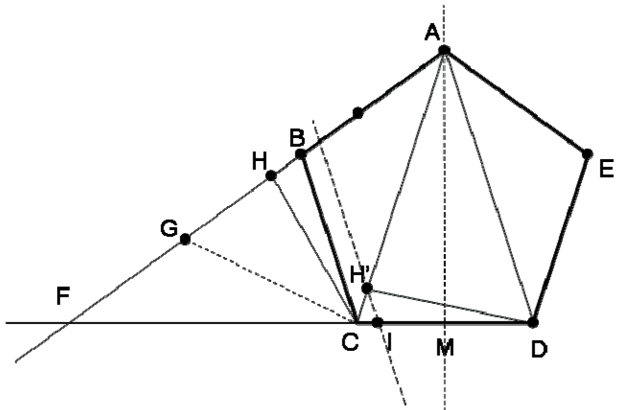
根據「**將四邊形*ABCM*分成 2：1**」的想法，也就是要將△AGC分成 2：1。即只需在$\overline{AG}$上找一點H，使得$\overline{AH}$：$\overline{HG}$＝2：1，如右圖。△AHC就是此正五邊形的$\frac{1}{3}$，也可以明顯的發現△AHC＞△ABC，也就是說，此等分線會在$\overline{CD}$上。



我們利用△FBC ≅ △ACD 這個性質，在$\overline{AC}$上找一點H'，使得$\overline{BH}$＝$\overline{CH'}$，如右圖！很明顯的，△HBC＝△CDH'，這時我們只需在$\overline{CD}$上找一點I，使得△CDH'＝△ACI，即爲所求。

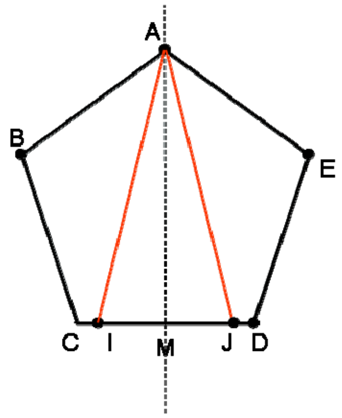


要使得△CDH'＝△ACI，只需達成$\frac{\overline{CH'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CI}}{\overline{CD}}$，也就是說，過$H'$點作平行$\overline{BC}$(或$\overline{AD}$)之直線，與$\overline{CD}$的交點$I$，即爲所求，如右圖。



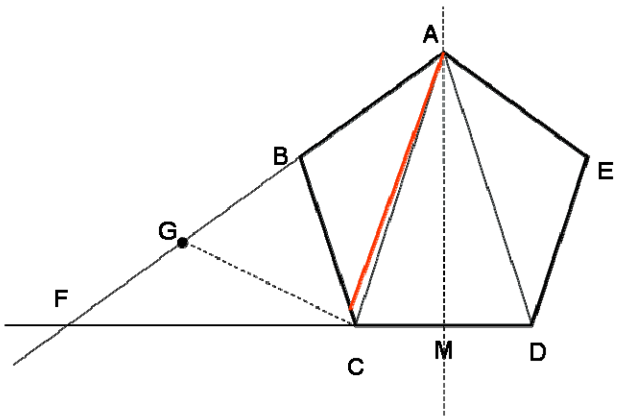
最後，將I點對$\overleftrightarrow{AM}$做對稱，得到J點，連接$\overline{AI}$和$\overline{AJ}$即爲所求！

如右圖。

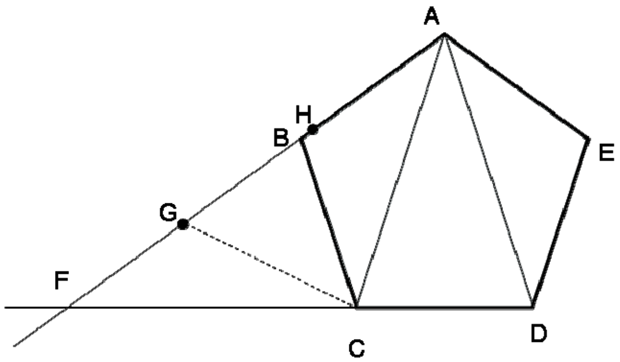


(二).四等分五邊形

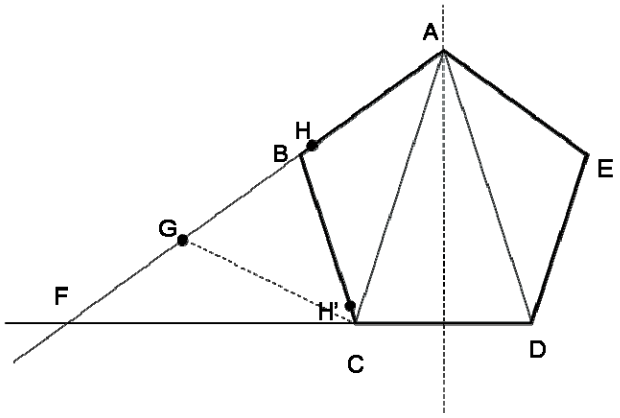
要將正五邊形四等分，會有三條等分線，且因對稱關係，我們一樣只討論左半邊。但在這裡我們沒辦法確定等分線會在何處，我們只是依據「**將四邊形 *ABCM* 分成 1：1**」的想法，猜測結果如右圖！(其中 $\overline{AM}$ 爲其一條等分線)



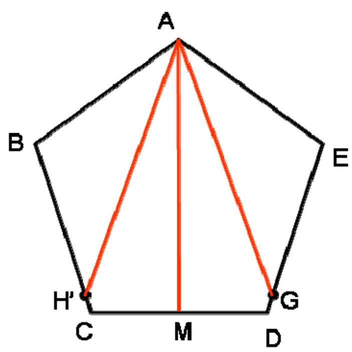
根據「**將四邊形*ABCM*分成 1：1**」的想法，也就是要將△*AGC*分成 1：1。即只需在 $\overline{AG}$ 上找一點*H*，使得 $\overline{AH}：\overline{HG}=1：1$，如右圖。△*AHC* 就是此正五邊形的$\frac{1}{4}$，也可以明顯的發現△*AHC*＜△*ABC*，也就是說，此等分線會在 $\overline{BC}$ 上。



只需在 $\overline{BC}$ 上找一點 *H’*，使得△*HAC*＝△*ABH’*即可，要達成這目的，就作 $\overline{AH}=\overline{BH'}$，*H’*點即爲所求，如右圖。



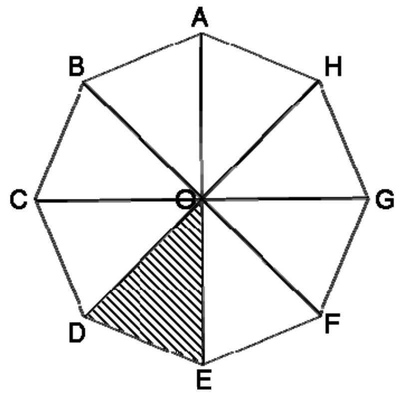
最後，將*H’*點對$\overleftrightarrow{AM}$做對稱，得到*G*點，連接 $\overline{AH'}$和 $\overline{AG}$，加上 $\overline{AM}$ 即爲所求！如右圖。



四、　　正 $2k$邊形面積等分問題(以正八邊形爲例)

對於正多邊形來說，當邊數爲偶數邊相對於邊數是奇數邊時，有更好的對稱性質。也就是，以頂點爲出發點畫此正 $2k$ 邊形的對稱軸時，會經過中心且會將此圖形均分爲 $\frac{1}{2k}$ 等分，並各頂點到此中心的距離相等！例如：

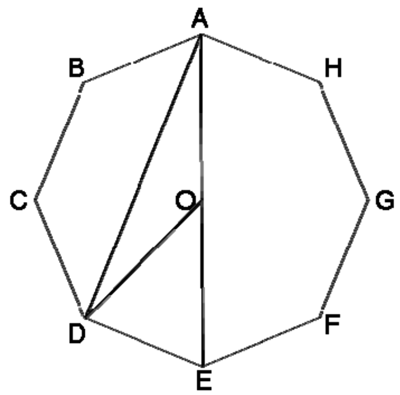
基本性質一：
若將正八邊形的四條對角線連結起來，可以將此八邊形等分爲八個全等三角形。也就是說斜線部分面積佔正八邊形的 $\frac{1}{8}$，如右圖。



且因各頂點到此中心的距離相等的關係，當由一頂點出發，加上其對稱點及其對稱點的鄰點，所形成三角形之面積，也就剛好佔全部的 $2\times\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}$ ，例如：

基本性質二：
考慮△ADE和△ODE，可以發現△ODE 爲正八邊形的 $\frac{1}{8}$，而相對的△ADE爲正八邊形的 $\frac{1}{4}$

(因爲O是 $\overline{AE}$ 的中點)



接下來，當我們在思考 n 等分的問題時，由於對稱性問題，

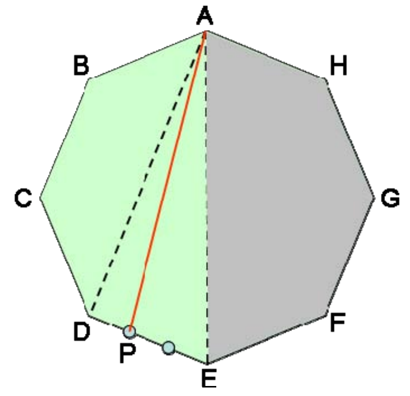
當 n 爲偶數時，我們須想如何將 $\frac{1}{k}$ 轉換成 $\frac{1}{n}$ ？藉由運算可以清楚的知道 $\frac{1}{k}\times\frac{k}{n}=\frac{1}{n}$ ，也就是說，將其邊等分 n 等分，取其第 k 個等分點(從對稱點數)連接頂點，即可得到第一條等分線。

當 n 爲奇數時，我們只須想如何將 $\frac{1}{k}$ 轉換成 $\frac{1}{2n}$ ？藉由運算可以清楚的知道 $\frac{1}{k}\times\frac{k}{2n}=\frac{1}{2n}$ ，也就是說，將其邊等分 $2n$ 等分，取其第 k 個等分點(從對稱點數)連接頂點，即可得到第一條等分線。

例如一：將正八邊形作六等分，先找第一條等分線

要在 $\overline{DE}$ 上找一點P點，使得$\triangle APE = \frac{1}{6}$正八邊形$= \frac{1}{6} \times 4 \triangle ADE = \frac{2}{3} \triangle ADE$，也就是說，將 $\overline{DE}$ 作三等分，找 $\overline{PE} = \frac{2}{3}\overline{DE}$ 即可。如右圖！

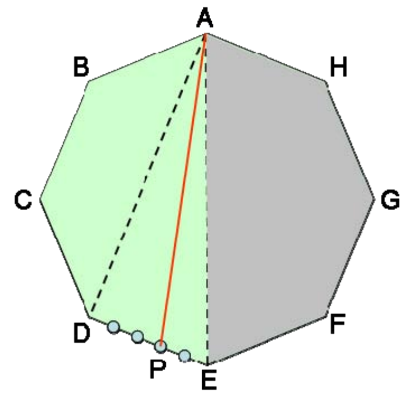
(也就是，將 $\overline{DE}$ 6 等分找第 4 個等分點)



例如二：將正八邊形五等分，找第一條等分線

我們的目的就是要在 $\overline{DE}$ 上找一點P點，使得$\triangle APE = \frac{1}{10}$正八邊形$= \frac{1}{10} \times 4 \triangle ADE = \frac{2}{5} \triangle ADE$，也就是說，將 $\overline{DE}$ 作五等分，找 $\overline{PE} = \frac{2}{5}\overline{DE}$ 即可。如右圖！

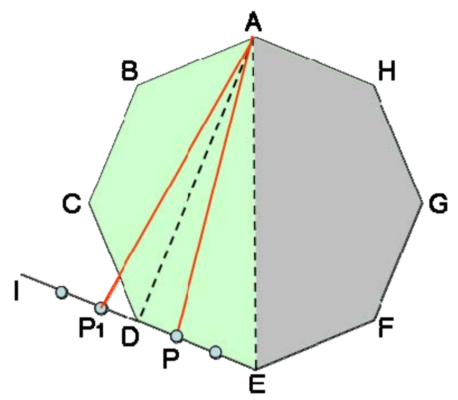
(也就是，將 $\overline{DE}$ 10 等分找第 4 個等分點)



問題就變成如何將正多邊形等分成此面積或此面積的兩倍(看頂點與對稱點連線是否爲其一等分線，也就是偶數等分還是奇數等分)？首先，先想如何複製面積或 2 倍面積，只要我們將底邊長複製或 2 倍長，就可以達到這件事情了。所以我們需要延伸底邊，進而複製長度或 2 倍長。(爲什麼是複製 2 倍長度呢？)

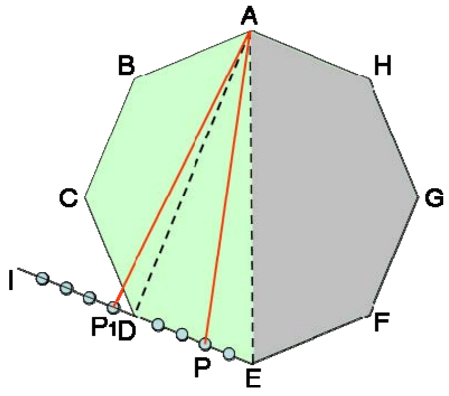
例如一：將正八邊形六等分，複製長度

延伸$\overrightarrow{DE}$，作 $\overline{ID} = \overline{DE}$ ，並將 $\overline{ID}$ 作三等分，取第一個等分點P_1，因爲 $\overline{PE} = \overline{PP_1}$ ，所以$\triangle AP_1P = \triangle APE = \frac{1}{6}$正八邊形，如右圖。



例如二：將正八邊形五等分，變成 2 倍長

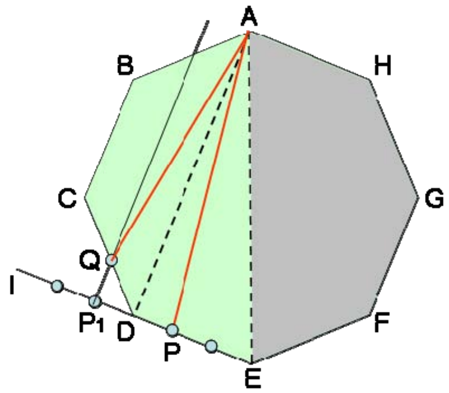
延伸$\overrightarrow{DE}$，作$\overline{ID}=\overline{DE}$，並將$\overline{ID}$作五等分，取第一個等分點$P_1$，因為 $2\overline{PE}=\overline{PP_1}$，所以$\triangle AP_1P=2\triangle APE=\frac{1}{5}$正八邊形，如右圖。



不難發現有些點會不在正多邊形邊長上，問題就變成如何在邊長上找一個點，使得面積相同呢？這時利用「同底等高」的想法，過此點畫對於對稱點鄰點與頂點連線的平行線，即可解決此問題。

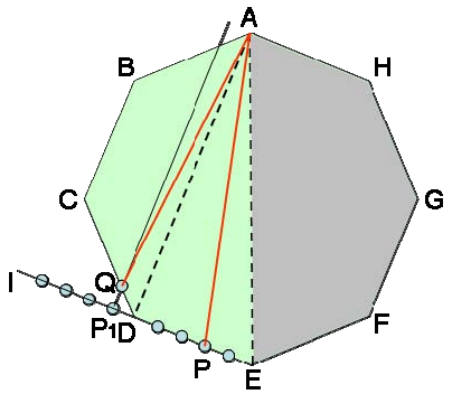
例如一：將正八邊形六等分，畫平行線

接下來，只須在$\overline{CD}$上找一點 Q，使得$\triangle AP_1D=\triangle AQD$即可。過 P_1 點作$\overline{AD}$(或$\overline{BC}$)平行線，交$\overline{CD}$於 Q，連接$\overline{AQ}$，如右圖。



例如二：將正八邊形五等分，畫平行線

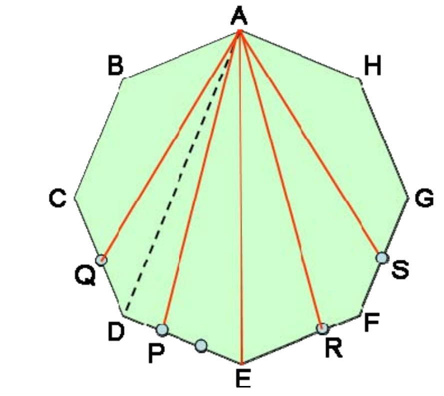
接下來，只須在$\overline{CD}$上找一點 Q，使得$\triangle AP_1D=\triangle AQD$即可。過 P_1 點作$\overline{AD}$(或$\overline{BC}$)平行線，交$\overline{CD}$於 Q，連接$\overline{AQ}$，如右圖。



最後，將所有在左半邊找到的點，對稱到右半邊即可完成 n 等份問題！

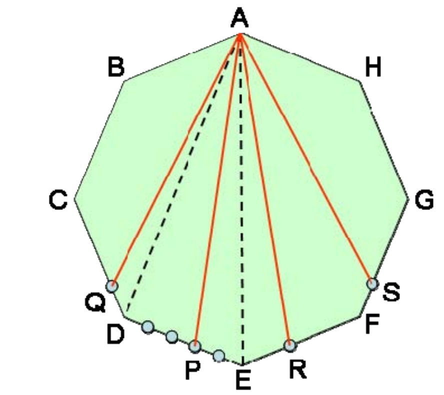
例如一：將正八邊形六等分，作最後的對稱

利用對稱性質，將 P、Q 兩點對稱 $\overline{AE}$ ，我們可以找到另兩點 R、S，連接 $\overline{AR}$ 、 $\overline{AS}$ 即爲所求。如右圖。



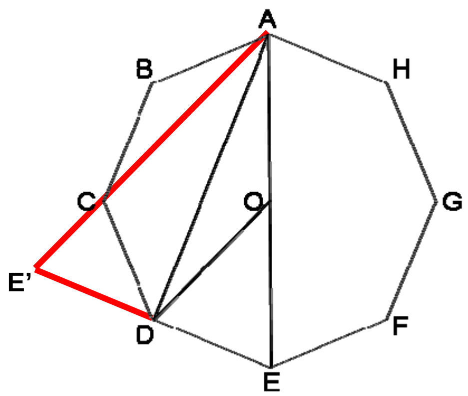
例如二：將正八邊形作五等分，作最後的對稱

利用對稱性質，將 P、Q 兩點對稱 $\overline{AE}$ ，我們可以找到另兩點 R、S，連接 $\overline{AR}$ 、 $\overline{AS}$ 即爲所求。如右圖。



在上述研究過程中，我們提到“為何要複製長度 2 倍呢？”那是因爲我們等分的圖形爲正八邊形，原因如下：

$\triangle ADE$爲正八邊形的$\frac{1}{4}$，而 $\overline{AE}$ 爲對稱軸，也就是說，$\triangle ADE$佔此正八邊形左半邊的$\frac{1}{2}$，那當延長 $\overline{DE}$ ，使得 $\overline{EE'} = 2\overline{DE}$ 時，也做到了 $\triangle AEE' = \frac{1}{2}$ 正八邊形！



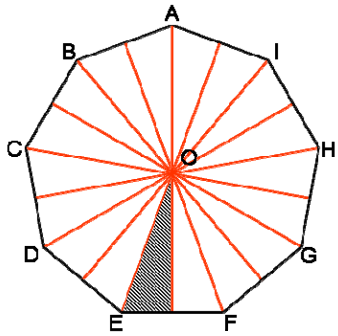
根據上面說明，當將$\triangle AEE'$作等分的同時，也就是將正八邊形的左半邊作等分，換句話說：我們將**等分正八邊形左半邊問題轉換成了等分三角形問題**，最後只需要將等分點利用「同底等高」的觀念將等分點移至正八邊形邊上即可！

同理當今天我們要等分正 $2k$ 邊形時，我們須延長$\frac{1}{2} \div \frac{1}{k} = \frac{k}{2}$倍，將半邊圖形轉換成三角形後，再來進行面積等分問題，最後將等分點移至邊長上即可完成！

五、 正 $2k+1$ 邊形面積等分問題(以正九邊形爲例)

對於正 $2k+1$ 邊形來說，也就是，以頂點及對邊中點連線點畫此正 $2k+1$ 邊形的對稱軸時，會經過中心且會將此圖形均分爲 $\frac{1}{2k+1}$ 等分！例如：

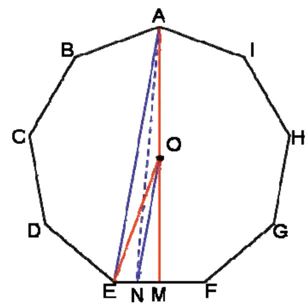
若將正九邊形的九條對稱軸連結起來，可以將此九邊形等分爲十八個全等三角形。也就是說斜線部分面積佔正九邊形的 $\frac{1}{18}$ ，如右圖。



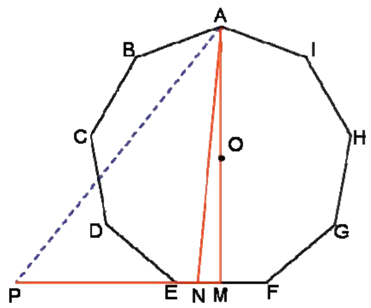
而正 $2k+1$ 邊形和正 $2k$ 邊形最大的不同在於正 $2k$ 邊形的中心到兩端點等距離，而正 $2k+1$ 邊形的中心到兩端點沒有等距離，也就是說，若將上圖中的△AOE 面積不等於斜線面積！那也就不知道△AOE 佔全部的幾分之幾？

於是，我們去思考“能不能像正 $2k$ 邊形一樣，將此正 $2k+1$ 邊形轉換成一個等面積三角形呢？”藉著這個想法(以九邊形爲例)去進行討論：

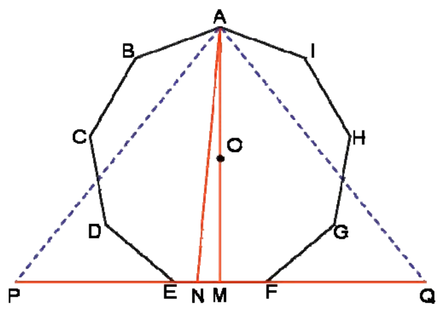
因爲目前只知道△OEM 面積爲 $\frac{1}{18}$ 的正九邊形面積。於是，思考如何在 $\overline{EM}$ 上找一點 N 點，使得△ANM＝△OEM？也就是，使得 $\frac{\overline{AO}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{EN}}{\overline{NM}}$ ！這只需要“過 O 點畫作 $\overline{AE}$ 的平行線，與 $\overline{EM}$ 的交點，就是所要的 N 點！



當△ANM＝△OEM＝$\frac{1}{18}$ 的正九邊形，接下來我們只需在 $\overrightarrow{MN}$ 上找一點 P，使得 $\overline{MP}=9\,\overline{MN}$ (因爲 $\frac{1}{2}\div\frac{1}{18}=9$)，這時的△$APM$＝$\frac{1}{2}$ 的正九邊形！

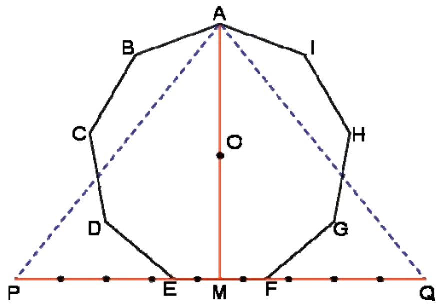


接著，利用 P 點對稱於 $\overline{AM}$ ，找到 Q 點，則△APQ＝2△APM＝正九邊形！完成所求！這代表要將正九邊形 n 等分，只要將△APQ 作 n 等分，再利用「同底等高」的觀念，將等分點位移到正九邊形的邊上即可！

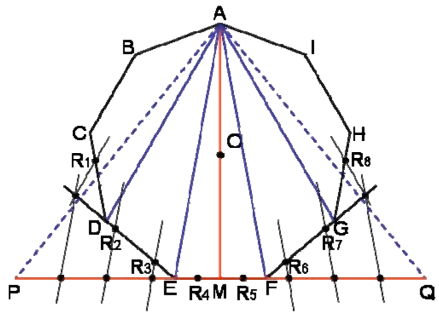


利用上面的作法，對於正 $2k+1$ 邊形作 n 等分時，都先將其轉換成一個等面積三角形，再對此三角形作面積等分找等分點，最後再將這些等分點移至正 $2k+1$ 邊形的邊上！只要將頂點和這些點作連線，即完成了將此正 $2k+1$ 邊形 n 等分的問題了！
以正九邊形 9 等分爲例：

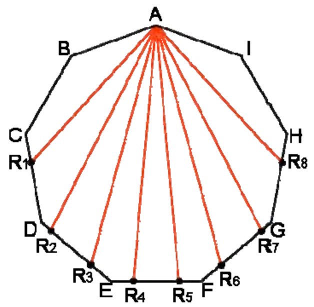
完成$\triangle APQ=2\triangle APM=$正九邊形後，要 9 等分，先將 $\overline{PQ}$ 作 9 等分，找到 8 個等分點！如右圖！



接下來，利用與正 $2k$ 邊形同樣的想法(同底等高)，這 8 個等分點位移到正九邊形的邊上，得到 R_1、R_2、R_3、R_4、R_5、R_6、R_7、R_8！



最後，連接 $\overline{AR_1}$、$\overline{AR_2}$、$\overline{AR_3}$、$\overline{AR_4}$、$\overline{AR_5}$、$\overline{AR_6}$、$\overline{AR_7}$、$\overline{AR_8}$，即將此正九邊形 9 等分！



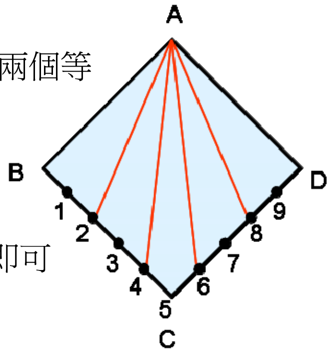
伍、 研究結果與結論

以下將我們研究結果分別論述如下:

一、 正四邊形

欲分割 n 等分，將頂點對面之兩邊分為 n 等分，由一邊開始每兩個等分點取一點，再與頂點連接即可。

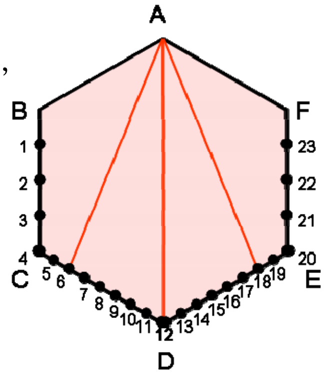
以五等分為例，在右圖中以 A 點為出發點，將 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 分為五等分，由 B 點開始取第 2、4、6、8 等分點，並與 A 點連接即可將四邊形 5 等分。



二、 正六邊形

欲分割 n 等分，將頂點不相鄰之四邊分別分為 n、$2n$、$2n$、n 等分，由一邊開始每 6 個等分點取一點，再與頂點連接即可。

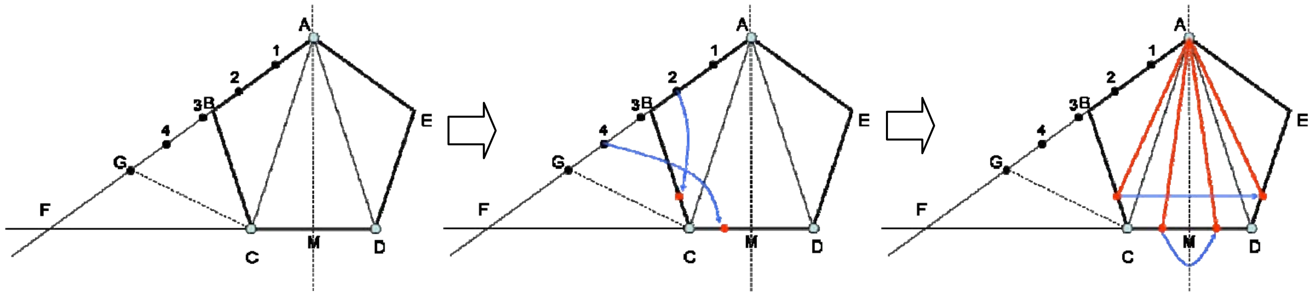
以四等分為例，在右圖中以 A 點為出發點，依序將 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、分為 4、8、8、4 等分，由 B 點開始取第 6、12、18 等分點，並與 A 點連接即可將五邊形 4 等分。



三、 正五邊形

欲分割n等分，先將 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 延伸交於F點，取 $\overline{BF}$ 之中點G。再將 $\overline{AG}$ 作n等分，由A點開始每兩個等分點取一點等分點，若等分點在 $\overline{AB}$ 上，利用四等分五邊形的方法，將等分點移至 $\overline{BC}$ 上；若等分點不在 $\overline{AB}$ 上，即利用三等分五邊形的方法，將等分點移至 $\overline{CD}$ 上，最後對 $\overleftrightarrow{AM}$ 做對稱即可得到另外的等分點，與A點作連結即可。

以五等分為例：



四、　正 $2k$ 邊形

在我們將一正 $2k$ 邊形 n 等分時，依據下列步驟即可完成：

(1) 連接一頂點與其對稱點的對角線當作我們的對稱軸。

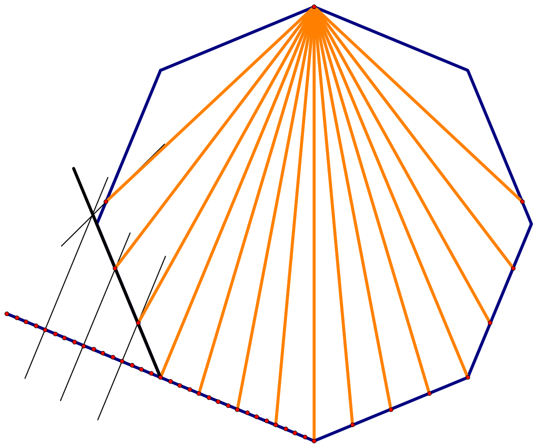
(2) 將對稱點的鄰邊，依當 n 爲偶數時，將其邊等分 n 等分，取其第 k 個等分點(從對稱點數)連接頂點，即可得到第一條等分線。當 n 爲奇數時，將其邊等分 $2n$ 等分，取其第 k 個等分點(從對稱點數)連接頂點，即可得到第一條等分線。

(3) 延伸底邊，進而複製長度或 2 倍長，看需要幾條等分線就找幾點。

(4) 利用這些點作對稱點鄰點與頂點連線的平行線，找出與邊的交點。若交點在延長線上，則再對下一個點與頂點連線做平行線，再找與八邊形邊的交點。

(5) 做對稱，並與頂點連線，這就是我們要的結果。

以正八邊形 16 等分爲例，如下圖：



五、　正 $2k+1$ 邊形

在我們將一正 $2k+1$ 邊形 n 等分時，依據下列步驟即可完成：

(1) 利用此正 $2k+1$ 邊形的兩對稱軸，找出中心！

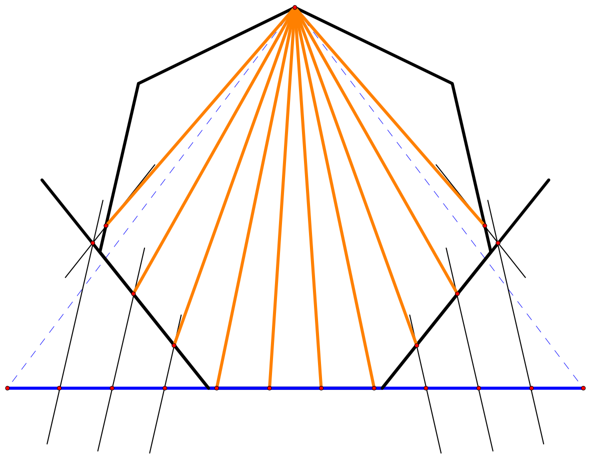
(2) 過此中心找作對稱點鄰點與頂點連線的平行線，找出與邊的交點。

(3) 將對邊中點與此交點所形成的線段，分別向左向右延伸 $2k+1$ 倍長，即可得到一個與此正 $2k+1$ 邊形等面積之三角形。

(4) 正 $2k+1$ 邊形作 n 等分時，先對此三角形作面積等分找等分點。

(5) 最後，利用「同底等高」的觀念，畫平行線將等分點移至正 $2k+1$ 邊形的邊上。

以正七邊形 11 等分爲例：



陸、 討論

根據上述研究，其實讓我們發現等分正多邊形問題，看似困難，卻以一個簡單的圖形轉換『將一個正多邊形，若是偶數邊，將其左、右兩半邊分別轉換成等面積的三角形；若是奇數邊，直接將其轉換成一個等面積的大三角形。』其對三角形作等分，並藉由「同底等高」的觀念，去畫平行線將等分點移至正多邊形的邊上，就完成了我們等分正多邊形的工作。這讓我們體驗到數學思考的美妙之處！

但承如我們研究動機所言，在做切蛋糕時，大多數蛋糕呈圓形狀，

對一個圓形而言，我們如何從圓周上一點對此圓形做 n 等分呢？

雖說圓形可以看成一個正無限多邊形，但終究不是一個正多邊形！是否也存在一個簡單的方法來達到這個目的呢？或許這次研究未能解決此問題，這也提供我們一個接下去研究的方向！希望假以時日可以爲此問題提供解答！

柒、 參考資料及其他

國中數學翰林版第四冊正多邊形性質

國中數學翰林板第四冊全等與平行線段

【評語】030402

1. 題目簡單，有趣，結論明確。

2. 解說表達流暢，團隊合作佳。

3. 正五邊形面積等分問題處理方式有創意。

4. 所用數學技巧淺易，與國中教材銜接。惟學術性、實用性價值低。

5. 最後的討論，顯出作者對圖 n 等份的作圖問題尚未了解。