中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030401

神奇的 k 值-畢氏數的完全解

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 武峻羽	廖達鵬
國二 王昱翔	林耀南

關鍵詞：多對一二次不定方程、多對多二次不定方程、畢氏數的完全解

神奇的 k 值—畢氏數的完全解

摘要

關於型如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2=\chi_4^2$的四元二次不定方程的正整數解的一般式，在各篇報告或各著作書上，基於不同的觀點，站在不同的角度去研究，各有各的結果公式，但經過詳細的檢查，都會發現一些漏解，當擴充到更多元時，漏解必然更多。本文透過第 47 屆利用銳角Δ、鈍角Δ及直角⊿擴充廣義畢氏定理的探討，擷取”平行線段”及其 k 值的概念，發展出一整套 N 元二次不定方程正整數解的一般式，並進一步擴展到型如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2=\chi_4^2+\chi_5^2$(簡稱三對二二次不定方程)的 m 對 n 元二次不定方程正整數解的一般式。

壹、 研究動機

畢氏定理$\chi^2+\gamma^2=z^2$的正整數解是$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$，其中 m, n 為任意正整數，這表示式涵蓋了所有的畢氏數解，而在一般數學刊物中談到勾股數的推廣時，總是把$\chi^2+\gamma^2+z^2=\omega^2$中的$\chi$, γ, z 分別當成長方體中的長, 寬, 高來做比喻，也因為受限於這個概念，我們在一本刊物從勾股定理談起中看到它的一般解為$\chi=mn$, $\gamma=m^2+mn$, $z=mn+n^2$, $\omega=m^2+mn+n^2$，其中 m, n 為任意正整數，這是中國數學家嚴鎮軍、盛立人所發現的，可是我們偶然發現(12, 15, 16, 25)這一組解並不在裡面，陸陸續續也有一些其他解被發現不在裡面，這強烈的引起我們的好奇，是否應該有一個更正確的一般解？於是請教老師並展開一連串的研究。

貳、 研究目的

一、 探討四元二次不定方程式$\chi^2+\gamma^2+z^2=\omega^2$的正整數完全解

二、 推廣到五、六、七、……元的二次不定方程式正整數完全解探討

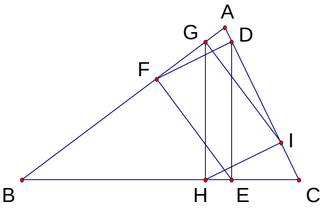
三、 探討 N 元二次不定方程式$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\cdots\cdots+\chi_{n-1}^2=\chi_n^2$的正整數完全解

四、 推廣到型如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\cdots+\chi_m^2=\chi_{m+1}^2+\chi_{m+2}^2+\cdots+\chi_{m+n}^2$，$m\geq n$的正整數完全解探討

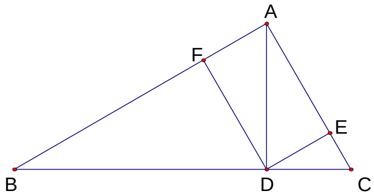
參、 研究過程

一、 在第四十七屆的全國中小學科展中，有一件作品為廣義的畢氏定理型式—$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+(\text{平行線段長})^2+\overline{AC}^2$探討。文中談及每一個△(不論是銳角、直角或鈍角△)都存在兩個依次垂直各邊的垂直△(順逆時針方向各一

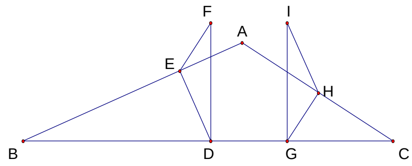
個)，如圖(1)～(3)，



圖(1)銳角△



圖(2)直角△



圖(2)鈍角△

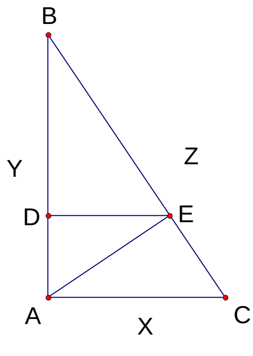
圖(1)中，△DEF 為順時針方向依次垂直△ABC 的三邊，△GHI 為逆時針方向依次垂直△ABC 的三邊。文中發現$\overline{GD}//\overline{BC}$且$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DC}^2=\overline{BC}^2$。

圖(2)中，△DFA 為順時針方向依次垂直△ABC 的三邊，△DEA 為逆時針方向依次垂直△ABC 的三邊。文中發現平行$\overline{BC}$的平行線段退化為 0，所以$\overline{BA}^2+0^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$。

圖(3)中，△DEF 為順時針方向依次垂直△ABC 的三邊，△GHI 為逆時針方向依次垂直ΔABC 的三邊。文中發現$\overline{FI}//\overline{BC}$且$\overline{BI}^2+\overline{IF}^2+\overline{FC}^2=\overline{BC}^2$。該文作者以$\overline{AB}=\ell$、$\overline{AC}=m$、$\overline{BC}=n$，利用所發現的“平行線段”，在各種類的三角形中，導出其畢氏數組。例如從正△中導出唯一的一組畢氏數組(2, 1, 2, 3)，從等腰△中取得(6, 7, 6, 11)、(24, 23, 24, 41)、(12, 1, 12, 17)⋯等，從直角△中，取得(20, 9, 12, 25)、(156, 25, 60, 169)⋯等，最後用三角函數推算出以ℓ、m、n 為三邊長的畢氏數組一般式$(\ell^2+m^2-n^2, 2\ell n, 2mn, \ell^2+m^2+n^2)$，這組一般式經檢討後發現，當$\ell=m+n$時，這個一般式就能轉換成嚴鎮軍與盛立人所發現的畢氏數組$(mn, m^2+mn, mn+n^2, m^2+mn+n^2)$，又當$\ell\neq m+n$時，就涵蓋了所有被遺漏掉的畢氏數。這在四元二次不定方程$\chi^2+\gamma^2+z^2=\omega^2$的整數解中應算完整，可是評審認為只有這$\ell, m, n$的三角形構想不太夠，作者應再往下延伸，例如在四邊形邊長ℓ, m, n, ρ中也要能找到類似的構圖才好。因此今年我們以此為題材，希望能往下再延伸。

二、從立體圖形中去尋求解答

首先我們觀察 “47 屆”科展作者之所以可以找到那組畢氏數一般解，是因為從直角△開始，如圖(4)，直角ΔABC 中，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$、$\overline{ED}\perp\overline{BA}$，很快的就能找到那條“平行線段”，又這直角△先天上就具有一個等式$\chi^2+\gamma^2=z^2$，我們費盡心思要在立體圖形中找到如同前文中的條件或類似條件，以便能在五元二次不定方程中找到整數解的一般式。敘述如下：



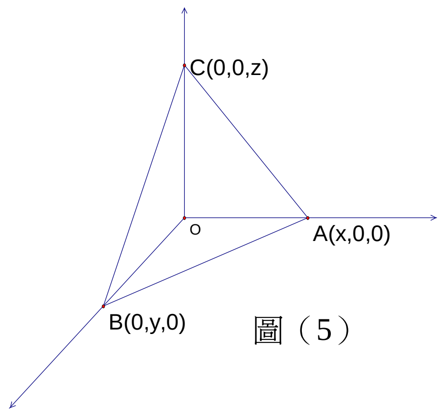
圖(4)

我們觀察到三維座標上也有一個類似$\chi^2+\gamma^2=z^2$的等式，如圖（5）

例如$(\Delta AOB面積)^2+(\Delta AOC面積)^2+(\Delta BOC面積)^2=(\Delta ABC面積)^2$

驗證如下：左式$=\left(\dfrac{\chi\gamma}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\chi z}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\gamma z}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}\left(\chi^2\gamma^2+\chi^2z^2+\gamma^2z^2\right)$$



圖（5）

而右式$(\Delta ABC面積)$應先計算ΔABC面積

如圖(6)，設$\overline{AB}=\sqrt{\chi^2+\gamma^2}=\sqrt{P}$

$$\overline{AC}=\sqrt{\chi^2+z^2}=\sqrt{Q}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\gamma^2+z^2}=\sqrt{R}$$

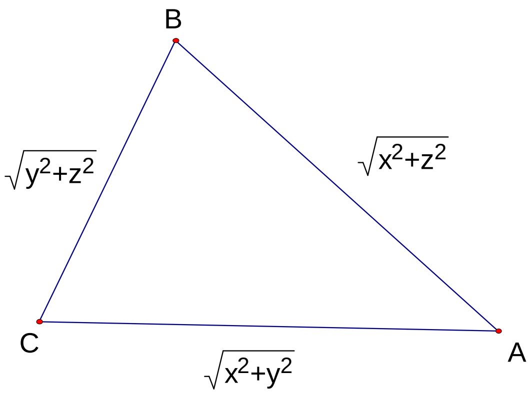
利用海龍公式

$$\Delta ABC面積=\sqrt{\frac{\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}}{2}\bullet\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{R}-\sqrt{P}}{2}\bullet\frac{\sqrt{P}+\sqrt{R}-\sqrt{Q}}{2}\bullet\frac{\sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left[\left(\sqrt{P}+\sqrt{Q}\right)^2-R\right]\bullet\left[R-\left(\sqrt{P}-\sqrt{Q}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(P+Q-R+2\sqrt{PQ}\right)\left(R-P-Q+2\sqrt{PQ}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(2\sqrt{PQ}\right)^2-\left(P+Q-R\right)^2}$$



圖（6）

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4PQ-\left(P^2+Q^2+R^2+2PQ-2QR-2PR\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2PQ+2PR+2QR-P^2-Q^2-R^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2\left(\chi^2+\gamma^2\right)\left(\chi^2+z^2\right)+2\left(\chi^2+\gamma^2\right)\left(\gamma^2+z^2\right)+2\left(\chi^2+z^2\right)\left(\gamma^2+z^2\right)-\left(\chi^2+\gamma^2\right)^2-\left(\gamma^2+z^2\right)^2-\left(\gamma^2+z^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2\chi^4+2\chi^2z^2+2\chi^2\gamma^2+2\gamma^2z^2+2\chi^2\gamma^2+2\chi^2z^2+2\gamma^4+2\gamma^2z^2+2\chi^2\gamma^2+2\chi^2z^2+2\gamma^2z^2-2z^4-\chi^4-2\chi^2\gamma^2-\gamma^4-\gamma^4-2\gamma^2z^2-z^4-\chi^4-2\chi^2z^2-z^4}$$

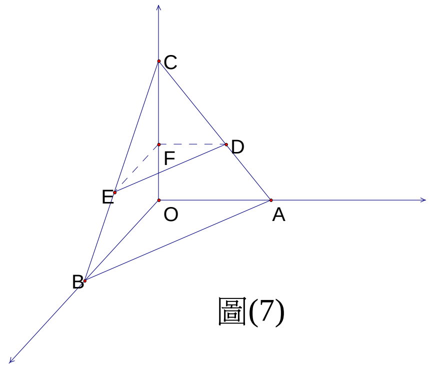
$$=\frac{1}{4}\sqrt{4\chi^2\gamma^2+4\gamma^2z^2+4\chi^2z^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\chi^2\gamma^2+\gamma^2z^2+\chi^2z^2}$$

我們發現右式

$$(\Delta ABC\text{面積})^2=\left[\frac{1}{2}\sqrt{\chi^2\gamma^2+\gamma^2z^2+\chi^2z^2}\right]^2=\frac{1}{4}\left(\chi^2\gamma^2+\gamma^2z^2+\chi^2z^2\right)=\text{左式}$$

，因此基本上以這四面體 OABC 的四面“面積”類比原畢氏定理中直角△的三邊長的“長度”，恰可形成對稱的類比。觀察圖（4）的直角△ABC 中有一條“平行線段”，希望在四面體 OABC 中也有一個類比的“平行面”，如圖（7），平面 DEF 平行平面 ABO，明顯的△DEF～△ABO，假設它們的對應邊縮放比為 k 倍（0<k<1）。



圖(7)

並假設存在

$$(\text{OBEF面積})^2+(\text{OADF面積})^2+(\text{ABED面積})^2+(\Delta\text{DEF面積})^2=$$

$(\text{底面}\Delta\text{OAB面積})^2$，進而求出 k 值

在圖(7)中 $A(\chi,0,0), B(0,\gamma,0), C(0,0,z), O(0,0,0), D(k\chi,0,z(1-k)),$
$E(0,k\gamma,z(1-k)), F(0,0,z(1-k))$

代入 $(\text{OBEF})^2+(\text{OADF})^2+(\text{ABED})^2+(\Delta\text{DEF})^2=(\Delta\text{OAB})^2$

得 $\left(\frac{1}{2}k^2\chi\gamma\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\chi\gamma\right)^2$

$$\therefore [\chi z(1-k^2)]^2+[\gamma z(1-k^2)]^2+(\chi^2\gamma^2+\gamma^2z^2+\chi^2z^2)(1-k^2)^2+k^4\chi^2\gamma^2=\chi^2\gamma^2$$
$$\therefore (\chi^2z^2+\gamma^2z^2+\chi^2\gamma^2+\gamma^2z^2+\chi^2z^2)(1-k^2)^2+k^4\chi^2\gamma^2=\chi^2\gamma^2$$
$$\therefore (\chi^2\gamma^2+2\gamma^2z^2+2\chi^2z^2)(1-k^2)^2=\chi^2\gamma^2(1-k^4)$$
$$\therefore (\chi^2\gamma^2+2\gamma^2z^2+2\chi^2z^2)(1-k^2)=\chi^2\gamma^2(1+k^2)$$
$$\therefore (\chi^2\gamma^2+2\gamma^2z^2+2\chi^2z^2)-k^2(\chi^2\gamma^2+2\gamma^2z^2+2\chi^2z^2)=\chi^2\gamma^2+k^2\chi^2\gamma^2$$
$$\therefore 2\gamma^2z^2+2\chi^2z^2=k^2(2\chi^2\gamma^2+2\gamma^2z^2+2\chi^2z^2)$$
$$\therefore \frac{\gamma^2z^2+2\chi^2z^2}{\chi^2\gamma^2+\gamma^2z^2+\chi^2z^2}=k^2$$

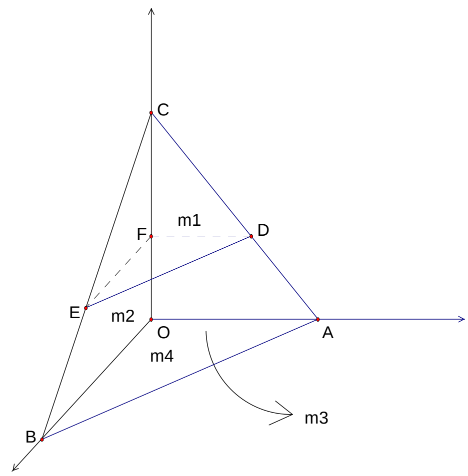
得 $k=\sqrt{\dfrac{\gamma^2 z^2+2\chi^2 z^2}{\chi^2\gamma^2+\gamma^2 z^2+\chi^2 z^2}}$

當找到 k 值之後接下來就可以去找五元二次不定方程的畢氏數了

如圖(8)，設 ΔAOC面積 $=m_1=\dfrac{1}{2}\chi z$

$$\Delta BOC\text{面積}=m_2=\frac{1}{2}\gamma z\ \ ABC\text{面積}=m_3=\frac{1}{2}\sqrt{\chi^2\gamma^2+\gamma^2 z^2+\chi^2 z^2}$$

$$\Delta AOB\text{面積}=m_4=\frac{1}{2}\chi\gamma$$



圖(8)

我們想利用這四個未知數 m_1, m_2, m_3, m_4 來表示一個五元二次不定方程式的解，方法如下:

1. 由前文假設存在那個平行平面△DEF 的情況下，取得 k 值

$$k=\sqrt{\frac{y^2z^2+x^2z^2}{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}}=\sqrt{\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}}$$

又△ABC 面積 $=m_3=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}$

2. 因為 $\overline{DF}//\overline{OA}$，如圖(8)，所以△CDF～△CAO，△CDF 為△CAO 的 k 倍縮小圖，

因此△CDF 面積 $=\dfrac{1}{k^2}$△CAO 面積，所以可推得

四邊形 AOFD 的面積 $=m_1\times\left(1-k^2\right)$

$$=m_1\times\left(1-\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}\right)$$

$$=m_1\times\frac{m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}$$

$$=\frac{m_1\bullet m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}$$

同理, BOFE 面積 $=m_2\times\left(1-k^2\right)=\dfrac{m_2\bullet m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}$

ABEO 面積$=m_3\times(1-k^2)=\dfrac{m_3\bullet m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}$

△DEF 面積$=m_4\times k^2=\dfrac{m_1^2\bullet m_4+m_2^2\bullet m_4}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}$

△AOB 面積$=m_4$

3. 計算並簡化畢氏數連比

(AOFD面積):(BOFE面積):(ABEO面積):(ΔDEF面積):(ΔAOB面積)

$$=\frac{m_1\bullet m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}:\frac{m_2\bullet m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}:\frac{m_3\bullet m_4^2}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}:\frac{m_1^2\bullet m_4+m_2^2\bullet m_4}{m_1^2+m_2^2+m_4^2}:m_4$$

$$=m_1m_4:m_2m_4:m_3m_4:m_1^2+m_2^2:m_1^2+m_2^2+m_4^2$$

此即為在立體圖概念下的畢氏數一般式，〝前四項的平方和等於第五項的平方〞

為了檢驗此立體圖形的畢氏數解，我們以 $x=4, y=3, z=2$ 帶入先取得 $m_1=3, m_2=4, m_3=\sqrt{61}, m_4=6$，再帶入該連比，得 $18:24:6\sqrt{61}:25:61$，

雖然$18^2+24^2+(6\sqrt{61})^2+25^2=61^2$是成立的，但第三項$6\sqrt{61}$不是整數，解決的方法是，所取的 x, y, z 一開始要先考慮使 m_3 (即△ABC 的面積)為有理數，例如取 x=2 ，y=1 ，z=3，則 $m_3=\frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{49}=\frac{7}{2}$ ，此時即可推出一組解為 12:6:14:45:49，看起來這個一般式有點難用，但顯然可以找出五元二次不定方程式的很多解，至於會不會像<u>嚴鎮軍</u>與<u>盛立人</u>所找到的四元二次不定方程式的解一樣，漏了一些解，那就說不定了。又我們拿這組解去和第四十七屆的四元二次不定方程式比較，外觀上不太像，不太連貫，因此我們也懷疑自己這個立體圖形導出的解的完整性，我們要另起爐灶。

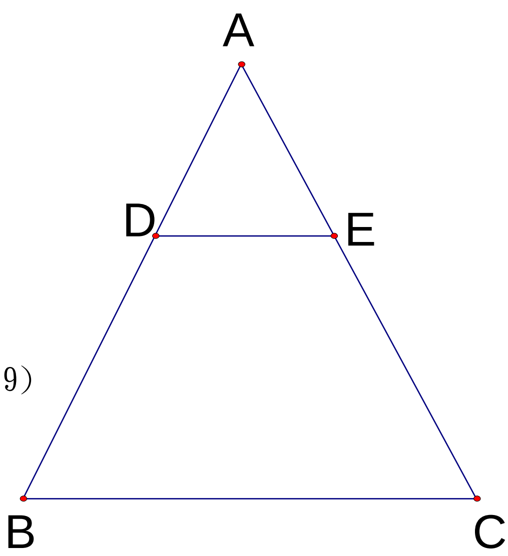
三、 從平面圖形尋求答案

1. 四元二次不定方程正整數解一般式的再確認

假設△ADE 是△ABC 的 k 倍縮小圖，如圖(9)，

其中 $\overline{DE}//\overline{BC}$，則

$\overline{AD}=k\overline{AB}, \overline{AE}=k\overline{AC}, \overline{DE}=k\overline{BC},$



圖(9)

$\therefore \overline{DB}=(1-k)\overline{AB}\,,\overline{EC}=(1-k)\overline{AC}$

為方便起見，我們取$\overline{AB}=\ell\,,\overline{AC}=m\,,\overline{BC}=n$

由廣義畢氏定理的概念(即存在$\overline{DE}$，使$\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2=\overline{BC}^2$)，

可得$(1-k)^2\ell^2+k^2n^2+(1-k)^2m^2=n^2$

$$(1-k)^2\left(\ell^2+m^2\right)=(1-k)n^2$$

$$(1-k)\left(\ell^2+m^2\right)=(1+k)n^2\,,k\neq 1$$

$$\frac{(1-k)}{(1+k)}=\frac{n^2}{\ell^2+m^2}$$

$$(-1)+\frac{2}{(1+k)}=\frac{n^2}{\ell^2+m^2}$$

$$\frac{2}{(1+k)}=\frac{\ell^2+m^2+n^2}{\ell^2+m^2}$$

$$\frac{1+k}{2}=\frac{\ell^2+m^2}{\ell^2+m^2+n^2}$$

$$\therefore 1+k=\frac{2\ell^2+2m^2}{\ell^2+m^2+n^2}$$

$\therefore k=\dfrac{\ell^2+m^2-n^2}{\ell^2+m^2+n^2}$，又$1-k=\dfrac{2n^2}{\ell^2+m^2+n^2}$

推得$\overline{DB}=(1-k)\ell=\dfrac{2n^2\ell}{\ell^2+m^2+n^2}$

$$\overline{DE}=kn=\frac{\left(\ell^2+m^2-n^2\right)\bullet n}{\ell^2+m^2+n^2}$$

$$\overline{EC}=\left(1-k^2\right)m=\frac{2n^2m}{\ell^2+m^2+n^2}$$

所以畢氏組為 $\overline{DB}:\overline{DE}:\overline{EC}:\overline{BC}$

$$=\frac{2n^2\ell}{\ell^2+m^2+n^2}:\frac{\left(\ell^2+m^2-n^2\right)\bullet n}{\ell^2+m^2+n^2}:\frac{2n^2m}{\ell^2+m^2+n^2}:n$$
$$=2n\ell:\left(\ell^2+m^2-n^2\right):2mn:\left(\ell^2+m^2+n^2\right)$$

這組解和第 47 屆科展的四元二次不定方程整數解的一般式一模一樣，真神奇，雖然我們的推導過程比他們簡化許多，但那也是從他們的推導過程得到的啟發。

2. 三元二次不定方程整數解一般式的再確認。

有了前文推得相同的解，增強了我們的信心，如果能夠以同樣的方法，回溯到三元二次不定方程整數解的推導法，就更能確認這新方法的有效性。

因為四元二次不定方程的整數解推導法使用〝三邊形〞，所以我們猜想三元二次不定方程整數解的推導法應該使用〝兩邊形〞，即同在一直線，如圖(10)，設 $\overline{AB}=\ell,\overline{BC}=m$ 那個 k 值的取得，要有點想像力，在 $\overline{BC}$ 上取一點 P，使 $\overline{PC}=k\overline{BC}$，$0<k<1$, 則 $\overline{BP}=(1-k)\overline{BC}$ ，這個 k 值能使我們將 $\overline{AB}$ 和 $\overline{PC}$ 折成如圖(12)的直角Δ，此時 $\overline{BA}^2+\overline{PC}^2=\overline{BP}^2$ ，

同樣的為了方便計算我們令 $\overline{AB}=\ell,\overline{BC}=m$, 所以 $\overline{PC}=km$, $0<k<1$

$\overline{PB}=(1-k)m$, 代入上式, 求 k 之值,

$$\ell^2+(km)^2=[(1-k)m]^2$$
$$\ell^2+k^2m^2=m^2-2km^2+k^2m^2$$
$$\ell^2=m^2-2km$$
$$\therefore k=\frac{m^2-\ell^2}{2m}, \text{又} 1-k=\frac{m^2+\ell^2}{2m}$$

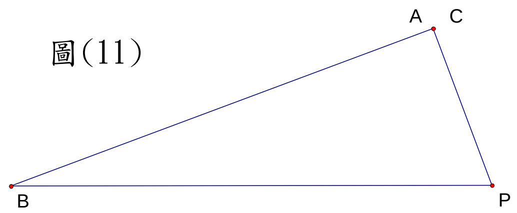
圖(10)

圖(11)

計算畢氏數的連比為

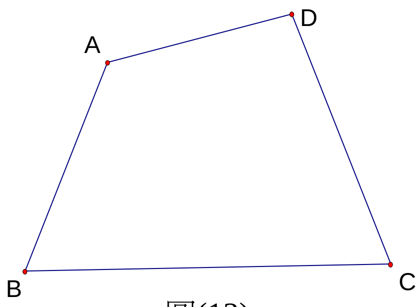
$\overline{AB}:\overline{PC}:\overline{PB}$ (因爲以 $\overline{PB}$ 爲斜邊)

$$=\ell:km:(1-k)m$$
$$=\ell:\frac{m^2-\ell^2}{2m}:\frac{m^2+\ell^2}{2m}$$
$$=2m\ell:(m^2-\ell^2):(m^2+\ell^2)$$



圖(12)

這就是著名的畢氏數組產生的一般式，我們終於找到了三元二次不定方程和四元二次不定方程尋找畢氏數時的一般式的關聯性了，就是那個神奇的〝k〞值。

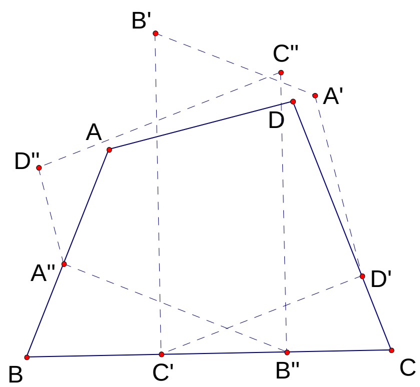


圖(13)

3. 五元二次不定方程整數解一般式的推導

給定一個四邊形，如圖(13)，希望能找到相關的“平行線段”及“k”值。尋找過程敘述如下：

(1) 如同第 47 屆科展作品中，使用垂直各邊的概念，以尺規作圖操作出逆時針的垂直四邊形 A’B’C’D’及順時針的 A″B″C″D″，如圖(14)，觀察平行線段的存在性，並利用 GSP 的計算功能，試圖找出一組五元二次不定方程的解，就算是近似值



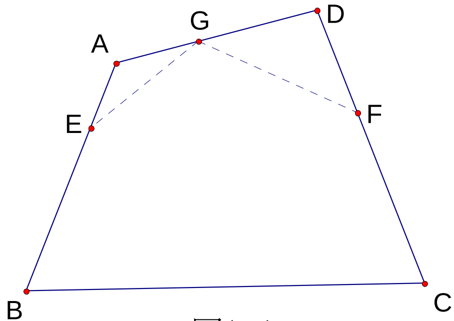
圖(14)

我們也試了好多好多回，但就是找不到，只得放棄。

(2)　我們也猜想一組 E，F，G 三點，各位在 $\overline{AB},\overline{CD},\overline{AD}$ 上，並使

$\overline{BE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GF}^2+\overline{FC}^2=\overline{BC}^2$，如圖(15)，試圖找出那個“k”值，其中

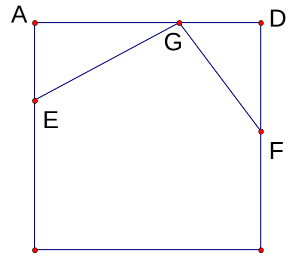
$\overline{AE}=\dfrac{1}{k}\overline{AB},\overline{DF}=\dfrac{1}{k}\overline{CD}$



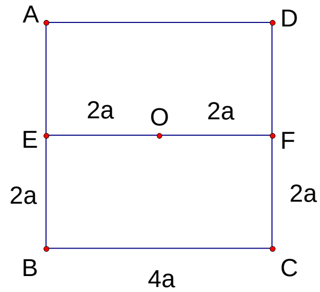
圖(15)

而 $\overline{AG}=\dfrac{1}{k}\overline{AD}$ 或 $\overline{DG}=(1-k)\overline{AD}$，但一直都不容易確定那 k 值。

(3)　直到有一天，組員想到在第 47 屆科展作品中不是有提到，正△存在唯一的一組畢氏數解(2,1,2,3)嗎？現在利用正方形，說不定也可以找到一組五元二次不定方程的整數解，並可窺見平行線段的可能位置。首先，如圖(16)分別在 $\overline{AB},\overline{DC},\overline{AD}$ 上各取一點 E,F,G，明顯的，不論 E,F,G 位在該線段的何處，$\overline{BE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GF}^2+\overline{FC}^2>\overline{BC}^2$，不可能左右兩邊會相等，因此我們猜想 G 點可能不在 $\overline{AD}$ 上，如圖(17)，取 O 點是正方形 ABCD 的中心點，E,F 各位於兩邊 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的中央，



圖(16)



圖(17)

則 $(2a)^2+(2a)^2+(2a)^2+(2a)^2=(4a)^2$，即

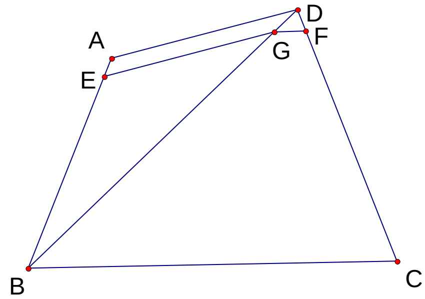
$\overline{BE}^2+\overline{EO}^2+\overline{OF}^2+\overline{FC}^2=\overline{BC}^2$ 會成立，更奇妙的是

$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{DF}:\overline{DC}=\overline{EO}:\overline{AD}=\overline{FO}:\overline{BC}=\dfrac{1}{2}$，比值固定為 $\dfrac{1}{2}$，且“平行線段”

$\overline{EO}//\overline{AD},\overline{OF}//\overline{BC}$ 似乎也存在著。

4. 我們找到了五元二次不定方程整數解一般式適用的圖形，如圖(18)，連 $\overline{DB}$，假設存在 k 值，使

$\overline{AE}=k\overline{AB},\overline{DF}=k\overline{DC},\ \overline{EG}=(1-k)\overline{AD},\overline{GF}=k\overline{BC}$，且



圖(18)

$$\overline{BE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GF}^2+\overline{FC}^2=\overline{BC}^2$$

則 $\left[(1-k)\overline{AB}\right]^2+\left[(1-k)\overline{AD}\right]^2+\left(k\overline{BC}\right)^2+\left[(1-k)\overline{DC}\right]^2=\overline{BC}^2$

$$(1-k)^2\overline{AB}^2+(1-k)^2\overline{AD}^2+(1-k)^2\overline{DC}^2=\overline{BC}^2-k^2\overline{BC}^2$$

$$(1-k)^2\left(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2\right)=\left(1-k^2\right)\overline{BC}^2$$

$$(1-k)\left(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2\right)=(1+k)\overline{BC}^2$$

$$\frac{1-k}{1+k}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}$$

$$-1+\frac{2}{1+k}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}$$

$$\frac{2}{1+k}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}+1=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}$$

$$\frac{1+k}{2}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}$$

得 $k=\dfrac{2\left(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2\right)}{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}-1=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2-\overline{DC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{DC}^2}$

又 $1-k=\dfrac{2\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{DC}^2}$

當找到了這個 k 值之後，我們就可以表示出五元二次不定方程的解了，為了簡化符號起見，設 $\overline{AB}=\ell,\overline{AD}=m,\overline{DC}=n,\overline{BC}=p$ ，

$$\begin{aligned}&\overline{BE}:\overline{EG}:\overline{GF}:\overline{FC}:\overline{BC}\\&=[(1-k)\ell]:[(1-k)m]:(kp):[(1-k)n]:p\end{aligned}$$

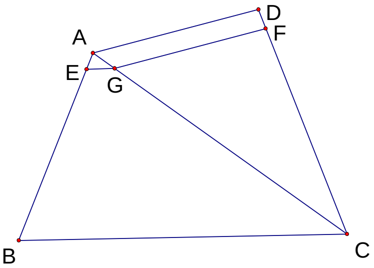
$$=\frac{2p^2\bullet\ell}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:\frac{2p^2\bullet m}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:\frac{\left(\ell^2+m^2+n^2-p^2\right)\bullet p}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:\frac{2p^2\bullet n}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:p$$

$$=\frac{2p\ell}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:\frac{2pm}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:\frac{\left(\ell^2+m^2+n^2-p^2\right)}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:\frac{2pn}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}:1$$

$$=2p\ell:2pm:\left(\ell^2+m^2+n^2-p^2\right):2pn:\left(\ell^2+m^2+n^2+p^2\right)$$

此即是五元二次不定方程整數解的一般通式。

說明：對於五元二次方程式 $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}=x_5^{\ 2}$，我們可以任用四個正整數(負整數也可以，只要不要造成某一比例項的值為零即可。)，代入前面的連比中，即可取得一組解，(也許要化簡)，例如我們取 $\ell=4, m=3, n=2$ 代入



圖(19)

$$2p\ell=2\times5\times4=40$$
$$2pm=2\times5\times3=30$$
$$\ell^2+m^2+n^2-p^2=4^2+3^2+2^2-5^2=16+9+4-25=4$$
$$2pn=2\times5\times2=20$$
$$\ell^2+m^2+n^2+p^2=4^2+3^2+2^2+5^2=16+9+4+25=54$$

得連比為　$40:30:4:20:54$

$=20:15:2:10:27$

檢查 $20^2+15^2+2^2+10^2=729=27^2$(成立)

我們也發現如圖(19)，連 $\overline{AC}$，同樣存在一個 k 值，使

$\overline{AE}=k\overline{AB}, \overline{AG}=k\overline{AC}, \overline{DF}=k\overline{DC}$, 此時 $\overline{EG}//\overline{BC}, \overline{GF}//\overline{AD}$, 且 $\overline{BE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GF}^2+\overline{FC}^2=\overline{BC}^2$ 成立

但是這個k值和前文圖(18)中的 k 值到底相不相同呢？我們非常好奇，計算如下：

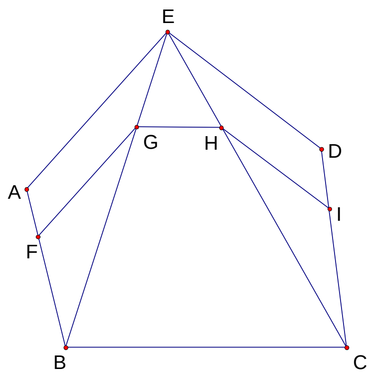
由 $\overline{AB}=\ell, \overline{AD}=m, \overline{DC}=n, \overline{BC}=p$

$\therefore \overline{BE}=(1-k)\ell, \overline{EG}=kp, \overline{GF}=(1-k)m, \overline{CF}=(1-k)n$

代入 $\overline{BE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GF}^2+\overline{FC}^2=\overline{BC}^2$

得 $(1-k)^2\ell^2+k^2p^2+(1-k)^2m^2+(1-k)^2n^2=p^2$

觀察這個式子並和前文圖(18)的式子比較，只有中間兩項對調，其餘各式皆相同，因此求得的 k 值一定相同，也就是



圖(20)

$k=\dfrac{\ell^2+m^2+n^2-p^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}$，當然所得的畢氏數連比僅是中間兩項互換，其餘各項都相同。

4.　　六元二次不定方程整數解一般式的探討

(1) 有了五元二次不定方程整數解一般式的探討經驗後，我們只要把多邊形的邊數增加一邊，即利用五邊形來研究即可，如圖(20)

設$\overline{AB}=\ell,\overline{AE}=m,\overline{ED}=n,\overline{DC}=p,\overline{BC}=q,\overline{BF}=(1-k)\ell,\overline{FG}=$
$(1-k)m,\overline{GH}=kq,\overline{HI}=(1-k)n,\overline{CI}=(1-k)p$

並設 $\overline{\mathrm{BF}}^2+\overline{\mathrm{FG}}^2+\overline{\mathrm{GH}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2+\overline{\mathrm{IC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$，我們要先去尋找$k$值

$(1-k)^2\ell^2+(1-k)^2m^2+k^2q^2+(1-k)^2n^2+(1-k)^2p^2=q^2$

$(1-k)^2\ell^2+(1-k)^2m^2+(1-k)^2n^2+(1-k)^2p^2=(1-k^2)q^2$

$(1-k)\ell^2+(1-k)m^2+(1-k)n^2+(1-k)p^2=(1+k)q^2$

$$\frac{1-k}{1+k}=\frac{q^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}$$

$$-1+\frac{2}{1+k}=\frac{q^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}$$

$$\frac{2}{1+k}=\frac{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2}$$

$$\frac{1+k}{2}=\frac{\ell^2+m^2+n^2+p^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}$$

得$k=\dfrac{2(\ell^2+m^2+n^2+p^2)}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}-1=\dfrac{\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}$

又$1\text{-}k=\dfrac{2q^2}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}$

有了k值及$1-k$值，我們就可以輕易的算出不定方程的整數解了。

$\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{FG}}:\overline{\mathrm{GH}}:\overline{\mathrm{HI}}:\overline{\mathrm{IC}}:\overline{\mathrm{BC}}$

$$=\frac{2q^2\ell}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}:\frac{2q^2m}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}:\frac{q(\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2)}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}:\frac{2q^2n}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}:\frac{2q^2p}{\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2}:\mathrm{q}$$

$=2\mathrm{q}\ell:2\mathrm{qm}:(\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2):2\mathrm{qn}:2\mathrm{qp}:\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2$

對於上述的連比我們來檢驗一下:

已知一個六元二次不定方程$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\chi_4^2+\chi_5^2=\chi_6^2$，我們想利用上述的連比快速的去找到一組整數解

做法:

a. 如圖(20)，隨意的指定$\overline{AB}=4,\overline{\mathrm{AE}}=3,\overline{\mathrm{ED}}=2,\overline{\mathrm{DC}}=5,\overline{\mathrm{BC}}=7$等各邊的邊長。即$\ell=4,\mathrm{m}=3,\mathrm{n}=2,\mathrm{p}=5,\mathrm{q}=7$

b. 代入連比公式

$$2q\ell:2qm:\left(\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2\right):2qn:2qp:\left(\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)$$

$=2\times7\times4:2\times7\times3:\left(4^2+3^2+2^2+5^2-7^2\right):2\times7\times2:2\times7\times5:\left(4^2+3^2+2^2+5^2+7^2\right)$

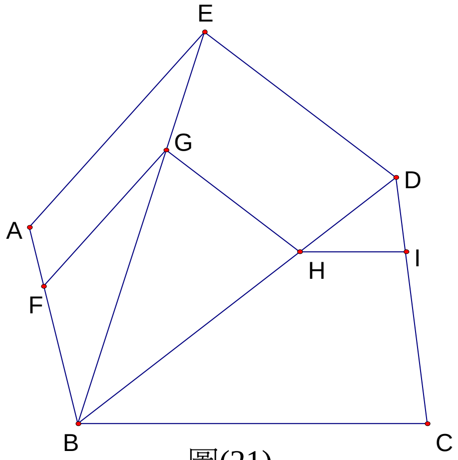
$=56:42:5:28:70:103$

c. 檢驗　$56^2+42^2+5^2+28^2+70^2$

$=3136+1764+25+784+4900=10609$

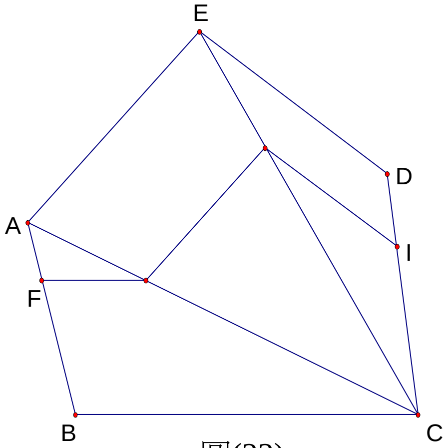
又$103^2=10609$成立

因此我們能很輕易的給定五邊形的任意五個邊長，再帶入連比中，進而取得一組六元二次不定方程的整數解。



圖(21)

(2)　觀察圖(21)，其中的對角線不一定要取$\overline{BE},\overline{CE}$，也可以取$\overline{BE},\overline{BD}$，如圖(21)，或取$\overline{CA},\overline{CE}$，如圖(22)，而其中的$\overline{FG},\overline{GH},\overline{HI}$等平行各三角形底邊的線段，皆為所謂的平行線段，當然若是一個如圖(20)的奇數邊形，我們以左右盡量對稱的畫法較美觀，也較不易弄錯。



圖(22)

(3)　反過來說，給定一組不定方程的整數解，(先都以正整數來討論)，我們可以反推出原來所對應的多邊形及其邊長，當然是取整數為原則。

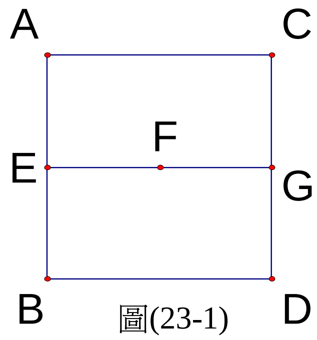
例如

a. 給定(1, 1, 1, 1, 2)

先求出$k=\dfrac{1}{2}$，是一個正四邊形 ABCD，

又$1-k=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

所以如圖(23-1)　，四邊長可取為(2, 2, 2, 2)



圖(23-1)

b. 給定(56, 42, 5, 28, 70, 103)

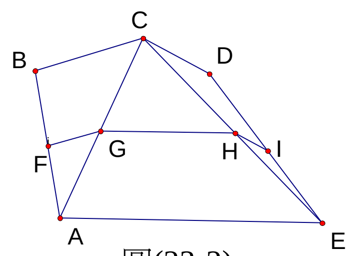
如圖(23-2)，原圖形是一個五邊形 ABCDE，畢氏數圖形為 AFGHIE，$\overline{AE}$　為最長邊，令

$\overline{AE}=\ell,\overline{BC}=m,\overline{CD}=n,\overline{DE}=p,\overline{EA}=q,\overline{AF}=56t,\overline{FG}=42t,\overline{GH}=5t,\overline{HI}=28t,\overline{IE}=70t,\overline{AE}=103t$　取 $k=\frac{5}{103}$，(其他的 k 值也可試)

由$\overline{AF}=(1-k)\overline{AB}$，得$56t=\ell$，將 k 值帶入，$\ell=4\times\frac{103t}{7}$，同理

$m=3\times\dfrac{103t}{7},n=2\times\dfrac{103t}{7},p=5\times\dfrac{103t}{7},q=103t$

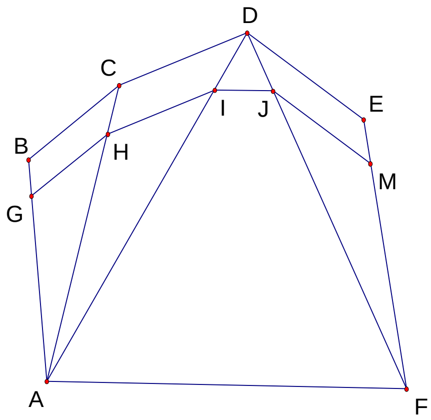
再取整數值$\ell=4,m=3,n=2,p=5,q=7$即為原來外圍五邊形的各邊長了。



圖(23-2)

5. 七元、八元、九元……N 元不定方程式整數解一般式的探討

(1) 七元不定方程式，如圖(24)



圖(24)

若 $\overline{AB}=\ell_1, \overline{BC}=\ell_2, \overline{CD}=\ell_3, \overline{DE}=\ell_4, \overline{EF},=\ell_5, \overline{AF}=\ell_6$

則 k 值=$\dfrac{\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}-\ell_6^{\ 2}}{\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}+\ell_6^{\ 2}}$

其整數連比為 $\overline{AG}:\overline{GH}:\overline{HI}:\overline{IJ}:\overline{JM}:\overline{MF}:\overline{AF}$

$=(1-k)\ell_1:(1-k)\ell_2:(1-k)\ell_3:k\ell_6:(1-k)\ell_4:(1-k)\ell_5:\ell_6$

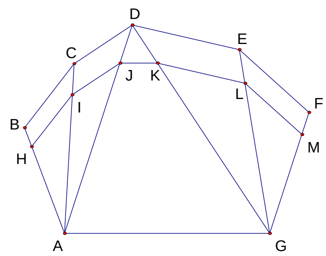
$=2\ell_1\ell_6:2\ell_2\ell_6:2\ell_3\ell_6:(\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}-\ell_6^{\ 2}):2\ell_4\ell_6:2\ell_5\ell_6$

$:(\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}+\ell_6^{\ 2})$

(2) 八元不定方程式，如圖(25)

若 $\overline{AB}=\ell_1, \overline{BC}=\ell_2, \overline{CD}=\ell_3, \overline{DE}=\ell_4, \overline{EF},=\ell_5, \overline{FG}=\ell_6, \overline{AG}=\ell_7$ 則 k 值

$=\dfrac{\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}+\ell_6^{\ 2}-\ell_7^{\ 2}}{\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}+\ell_6^{\ 2}+\ell_7^{\ 2}}$



圖(25)

其整數連比為 $\overline{AH}:\overline{HI}:\overline{IJ}:\overline{JK}:\overline{KL}:\overline{LM}:\overline{MG}:\overline{AG}$

$=(1-k)\ell_1:(1-k)\ell_2:(1-k)\ell_3:k\ell_7:(1-k)\ell_4:(1-k)\ell_5:(1-k)\ell_6:\ell_7$

$=2\ell_1\ell_7:2\ell_2\ell_7:2\ell_3\ell_7:(\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}+\ell_6^{\ 2}-\ell_7^{\ 2}):2\ell_4\ell_7:2\ell_5\ell_7$

$:2\ell_6\ell_7:(\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\ell_4^{\ 2}+\ell_5^{\ 2}+\ell_6^{\ 2}+\ell_7^{\ 2})$

(3) 歸納得 N+1 元不定方程式的整數解為

$2\ell_1\ell_n:2\ell_2\ell_n:2\ell_3\ell_n:\cdots\cdots:(\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\cdots\cdots+\ell_{n-1}^{\ \ 2}-\ell_n^{\ 2}):2\ell_{n-1}\ell_n:($
$\ell_1^{\ 2}+\ell_2^{\ 2}+\ell_3^{\ 2}+\cdots\cdots+\ell_{n-1}^{\ \ 2}+\ell_n^{\ 2})$

$$k\text{值}=\frac{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+\cdots+\ell_{n-1}^2-\ell_n^2}{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+\cdots+\ell_{n-1}^2+\ell_n^2}$$

6. 嚴、盛“解”和本文“解”的比較探討

觀察嚴、盛“解” $(mn, m^2+mn, mn+n^2, m^2+mn+n^2)$，我們發現他們企圖用兩個未知數 m, n 去表達四元二次不定方程 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的解，這種想法到底有無可能，或到底漏掉哪些解？請看下面我們的分析。

在之前大家看了嚴盛解之後，並不知道他漏了一些解，或許就算知道有漏

解，但也不知道漏掉哪些解，但從本文解$(2n\ell:\ell^2+m^2-n^2:2mn:\ell^2+m^2+n^2)$中，可以回答上述問題。說明如下:

嚴、盛“解”的 m,n 為任意正整數，本文“解”的ℓ,m,n亦為任意三個正整數，根據三一律，如$\ell<m+n,\ell=m+n,\ell>m+n$，共有三種狀況，我們發現嚴、盛“解”只是其中$\ell=m+n$這個狀況而已，未包含$\ell<m+n$,$\ell>m+n$這兩個狀況。

證明:

令$\ell=m+n$代入本文“解 ”

$$
\begin{aligned}
&2n\ell:(\ell^2+m^2-n^2):2mn:(\ell^2+m^2+n^2)\\
&=2n(m+n):(m^2+2mn+n^2+m^2-n^2):2mn:(m^2+2mn+n^2+m^2+n^2)\\
&=(2mn+2n^2):(2m^2+2mn):2mn:(2m^2+2mn+2n^2)\\
&=(mn+n^2):(m^2+mn):mn:(m^2+mn+n^2)
\end{aligned}
$$

成為嚴盛“解” $x=mn,y=m^2+mn,z=mn+n^2,w=m^2+mn+n^2$

因此我們可以確定嚴盛“解”漏掉$\ell>m+n$及$\ell<m+n$這兩部分的“解”，至於這兩部分的解有沒有涵蓋在本文“解”中，請再看下面探討。

7. 由任意給定的畢氏數解(以四元二次不定方程為例)反推出對應的ℓ,m,n三數的方法探討。

因為我們若想探討本文“解”是否有涵蓋$\ell>m+n$或$\ell<m+n$的狀況的話，我們應分成正反兩方向來探討，其中正向上，不難看出任意給定ℓ,m,n，不論 $\ell>m+n$或$\ell<m+n$都可代入本文解$\left(2n\ell,\ell^2+m^2-n^2,2mn,\ell^2+m^2+n^2\right)$中而取得一組解，(當然目前不可讓各項為零或負數)。反向上，對於任一組本文“解 ”，我們是否有方法找出它所對應的ℓ,m,n？並觀察這組ℓ,m,n是否包含$\ell\neq m+n$的情況，方法敘述如下：

我們發現在本文“解”中的兩項$\ell^2+m^2-n^2$與$\ell^2+m^2+n^2$只相差$2n^2$，而碰巧的是其他兩項$2\ell n,2mn$和這$2n^2$的連比經化簡後竟然成為$\ell:m:n$（$2\ell n:2mn:2n^2=\ell:m:n$）因此對於給定的任一組畢氏數解例如(四元)，只要做如上文的計算化簡，就能找到原來的ℓ,m,n，並觀察是$\ell=m+n$或$\ell\neq m+n$。例如:

$$
\begin{aligned}
&12:21:56:61\rightarrow 21:56:(61-12)=21:56:49=3:8:7,(3<8+7)\\
&21:12:56:61\rightarrow 12:56:(61-21)=12:56:40=3:14:10,(3<14+10)\\
&56:12:21:61\rightarrow 12:21:(61-56)=12:21:5,(12<21+5)\\
&56:21:12:61\rightarrow 21:12:(61-56)=21:12:5,(21>12+5)\\
&21:56:12:61\rightarrow 56:12:(61-21)=14:3:10,(14>3+10)
\end{aligned}
$$

由上述例子中可看出我們輪動前三項可得出很多組ℓ,m,n，這些ℓ,m,n包含

$\ell > m+n$或$\ell < m+n$若輪動不出$\ell = m+n$的情況時，這組本文解一定不包含在嚴盛解中，也就是嚴盛漏掉了這組解。

8. 給定任意 n 元二次不定方程式的畢氏數解，都可以找到對應的$\ell, m, n \cdots..$，為其外圍的多邊形邊長，以最簡整數比來表示。

舉例來說，五元二次不定方程式的解 $2p\ell : 2pm : 2pn : \ell^2+m^2+n^2-p^2 : \ell^2+m^2+n^2+p^2$

觀察$\ell^2+m^2+n^2-p^2$和$\ell^2+m^2+n^2+p^2$相差$2p^2$

因此化簡$2p\ell : 2pm : 2pn : 2p^2 = \ell : m : n : p$

例如 $22:16:14:5:31 \to 22:16:14:(31-5) = 22:16:14:26 = 11:8:7:13$

$22:16:5:14:31 \to 22:16:5:(31-14) = 22:16:5:17$

$22:5:14:16:31 \to 22:5:14:(31-16) = 22:5:14:15$

$5:16:14:22:31 \to 5:16:14:(31-22) = 5:16:14:9$

同理十元二次不定方程的一組解

(1)$6:12:18:24:30:36:42:48:41:95$

可推出 $\to 6:12:18:24:30:36:42:48:(95-41) = 1:2:3:4:5:6:7:8:9$爲其外圍的多邊形邊長比

(2)$18:18:18:18:18:18:36:36:77:95$

可推出 $\to 18:18:18:18:18:18:36:36:(95-77) = 1:1:1:1:1:1:2:2:1$爲其外圍的多邊形邊長比

四、 推廣型如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\cdots+\chi_m^2 = \chi_{m+1}^2+\chi_{m+2}^2+\cdots+\chi_{m+n}^2$ $m+n$元二次不定方程的畢氏數解探討

名詞定義：(1)二對一的二次方程式，如$\chi^2+\gamma^2 = Z^2$

(2)三對一的二次方程式，如$\chi^2+\gamma^2+Z^2 = \omega^2$

(3)四對一的二次方程式，如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\chi_4^2 = \chi_5^2$，其餘類推

(4)三對二的二次方程式，如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2 = \chi_4^2+\chi_5^2$

(5)三對三的二次方程式，如$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2 = \chi_4^2+\chi_5^2+\chi_6^2$，其餘類推

(6)m 對 n 的二次方程式，如

$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\cdots+\chi_m^2 =$
$\chi_{m+1}^2+\chi_{m+2}^2+\cdots+\chi_{m+n}^2$，$m \geq n$

1. 多對多二次不定方程的整數解形式猜想

之前的二對一整數解通式$(\ell^2-m^2)^2+(2\ell m)^2 = (\ell^2+m^2)^2$

三對一整數解通式$(\ell^2+m^2-n^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2 = (\ell^2+m^2+n^2)^2$

四對一整數解通式$$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2+(2np)^2 = (\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$$

……等，推測出多對一整數解通式為

$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_{n-1}^2-\alpha_n^2)^2+(2\alpha_1\alpha_n)^2+(2\alpha_2\alpha_n)^2+(2\alpha_{n-1}\alpha_n)^2=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_{n-1}^2+\alpha_n^2)^2$

，觀察此式中的首末兩項除了α_n外，其他皆同號，而式子中間插入$2\alpha_i\alpha_n$，$i=1,2,3,\cdots,n-1$。我們可以從這個角度大膽的去猜想多對多二次不定方程的整數解形式，以三對三為例，共需五個整數解符號，設為ℓ,m,n,p,q，首末兩項應皆類似$(\ell^2\pm m^2\pm n^2\pm p^2\pm q^2)^2$，因此首項有$2\times2\times2\times2$共 16 種變化，末項也應有 16 種變化，這樣搭配起來，總共應有 256 種變化，我們已一一列出放在附錄裡。

現舉一個例子如下：

$(\ell^2-m^2+n^2-p^2+q^2)^2+(2mn)^2+(2np)^2=$
$(\ell^2-m^2-n^2-p^2+q^2)^2+(2\ell n)^2+(2nq)^2$

這 256 種中有些經符號整理後會相同，有些不符合我們指定的三對三整數解的需

2. 三對二的不定方程畢氏數解探討(一)

因為三對二的畢氏數解探討僅需 4 個未知數ℓ,m,n,p符號變化共有8×8=64 種，左右兩式型如$(\ell^2\pm^2 m^2\pm n^2\pm p^2)^2$，首先我們從左式符號全是正號，右式符號逐一改變位置及數量，列如下表：

(1)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(2)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mn)^2+(2mp)^2$

(3)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2+(2np)^2$

(4)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2+(2np)^2$

(5)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2+(2mp)^2+(2np)^2$

(6)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2+(2np)^2$

(7)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2+(2mp)^2$

(8)$(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2$

(9)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mn)^2+(2mp)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(10)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2$

(11)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mp)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2np)^2$

(12)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mn)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2np)^2$

(13)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mn)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2np)^2$

(14)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2np)^2$

(15)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2$

(16)$(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mn)^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2$

(17)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(18)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mp)^2$

(19)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2$

(20)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2$

(21)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2mn)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mp)^2$

(22)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2$

(23)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2$

(24)$(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2mn)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2$

(25)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(26)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mn)^2$

(27)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2$

(28)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2$

(29)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2$

(30)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mn)^2$

(31)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2$

(32)$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2mp)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2$

(33)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2+(2mp)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(34)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mn)^2$

(35)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mp)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2mn)^2$

(36)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2$

(37)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2$

(38)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2$

(39)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2$

(40)$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2mp)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2$

(41)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(42)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mp)^2$

(43)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2$

(44)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2mn)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2mp)^2$

(45)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mp)^2$

(46)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2$

(47)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mp)^2$

(48)$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2mn)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2$

(49)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2+(2mp)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(50)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2$

(51)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2np)^2$

(52)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2np)^2$

(53)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell m)^2+(2np)^2$

(54)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2np)^2$

(55)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2$

(56)$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2mn)^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2=$

(57)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

(58)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mn)^2+(2np)^2$

(59)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2mn)^2+(2np)^2$

(60)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell n)^2=(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2mp)^2+(2np)^2$

(61)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2=(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2mp)^2+(2np)^2$

(62)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell n)^2=(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2mn)^2+(2np)^2$

(63)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2=(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2mn)^2+(2mp)^2$

(64)$(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2$

觀察上表，針對三對二來說，表中的 64 個式子，有些不合類型三對二，有些重複，有些可以替換，敘述如下:

甲:左右兩邊各一項且相同，可刪掉

(1),(10),(19),(28),(37),(46),(55),(64)

乙:左右兩邊為三對三，或四對一或五對一，而非三對二者，可刪除

(2),(3),(4),(5).(6).(7).(8).(9),(11),(12).(16).(17).(18).(20),(24),(25),(26),(27),(32),(33),(38),(39),(41),(45),(47),(49),(53),(54),(57),(58),(59),(60)

丙:左右為三對二與二對三者，可再刪除一半，有(13),(14),(15),(21),(22),(23),(28),(30),(31),(61),(62),(63)

經過甲、乙、丙刪除後，僅剩下(34),(35),(36),(40),(42),(43),(44),(48),(50),(51),(52),(56)共 12 式子，這意思是說當我們任意給定四個正整數 ℓ,m,n,p 代入上面的 12 個式子，我們最多可以找到 12 組三對二的二次不定方程式的畢氏數解，當然這 12 組中有可能經加減計算後會有些重複，但最多就這 12 組解，舉一個例子，敘述如下:

關於三對二的二次不定方程式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2+x_5^2$，其畢氏數解應有無限多組，但當我們要實際上找出其部分解時，我們可先指定一組 ℓ,m,n,p，如 $\ell=17,m=5,n=8,p=12$ 代入前文中的 12 個式子，有效率的同時把和(17,5,8,12)這四個數相關的最多 12 種三對二的畢氏數解全找出來。例如:

(34)得 $344^2+272^2+192^2=472^2+80^2$，四邊形，如圖(26)

(35)得 $344^2+170^2+120^2=394^2+80^2$，四邊形，如圖(27)

(36)得 $344^2+170^2+272^2=234^2+408^2$，四邊形，如圖(28)

(40)得 $344^2+120^2+192^2=56^2+408$,四邊形,如圖(29)

(42)得 $184^2+408^2+192^2=472^2+120^2$,四邊形,如圖(30)

(43)得 $184^2+170^2+408^2=394^2+272^2$,四邊形,如圖(31)

(44)得 $184^2+170^2+80^2=234^2+120^2$,四邊形,如圖(32)

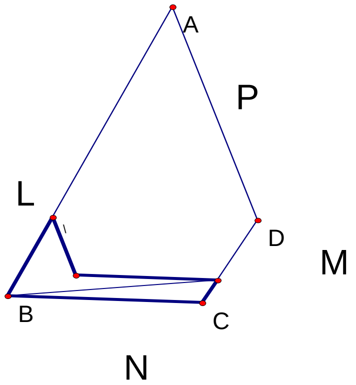
(48)得 $184^2+80^2+192^2=56^2+272^2$,四邊形,如圖(33)

(50)得 $106^2+272^2+408^2=472^2+170^2$,四邊形,如圖(34)

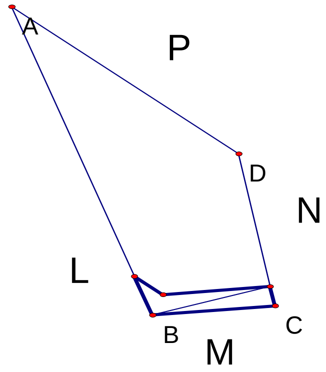
(51)得 $106^2+408^2+120^2=394^2+192^2$,四邊形,如圖(35)

(52)得 $106^2+272^2+80^2=234^2+192^2$,四邊形,如圖(36)

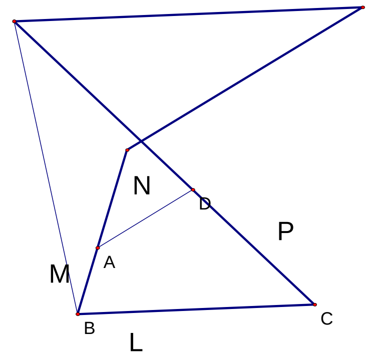
(56)得 $106^2+80^2+120^2=56^2+170^2$,四邊形,如圖(37)



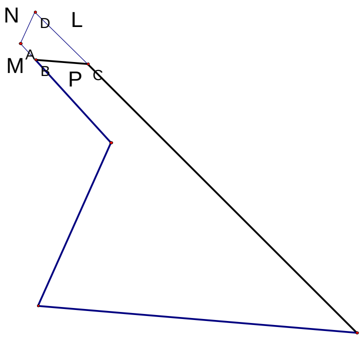
圖(25) k 爲正真分數



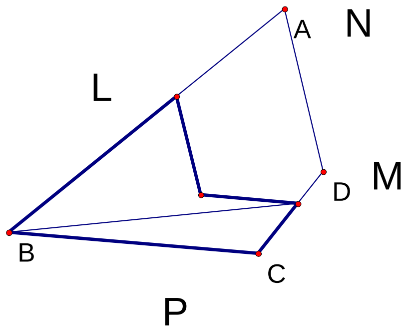
圖(26) k 爲正真分數



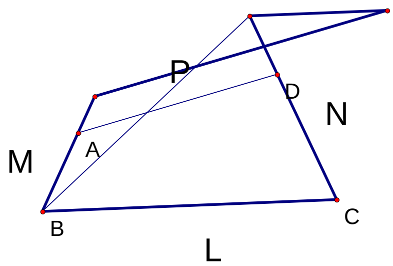
圖(27) k 爲正真分數



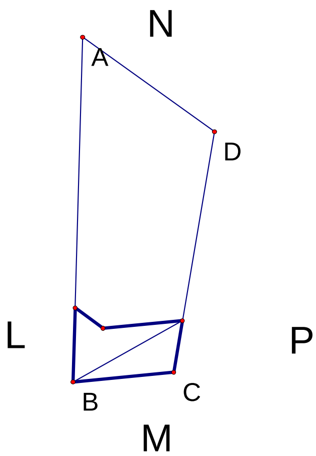
圖(29) k 爲正假分數



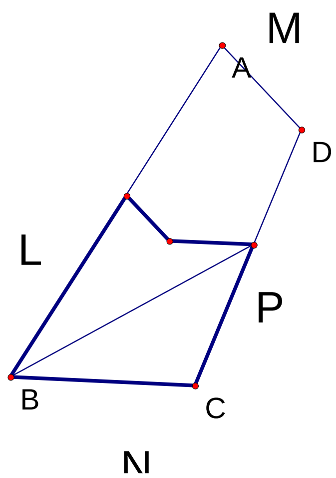
圖(30) k 爲正真分數



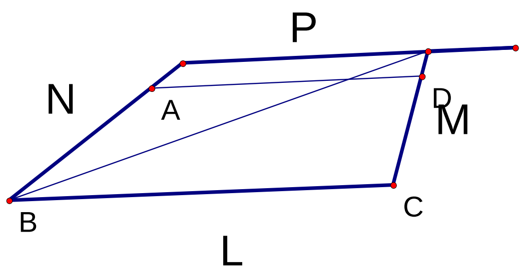
圖(31) k 爲負真分數



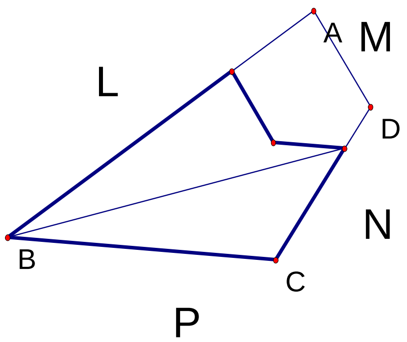
圖(32) k 爲正真分數



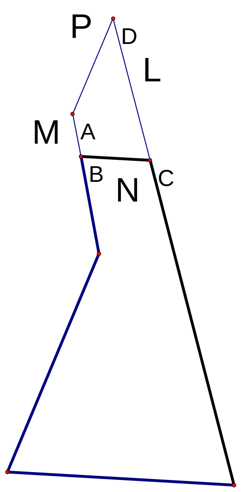
圖(33) k 爲正假分數



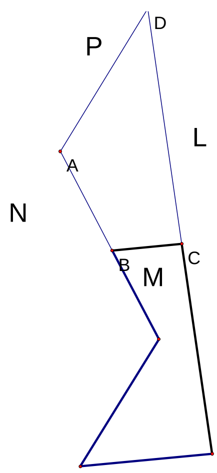
圖(34) k 爲負真分數



圖(35) k 爲正真分數



圖(36) k 爲正真分數

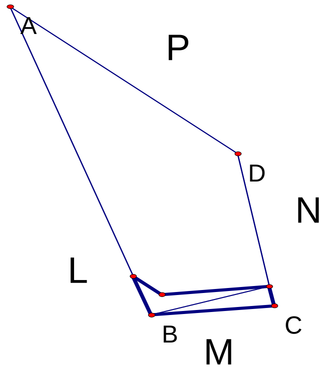


圖(37) k 爲正假分數

上述的十二個圖形的作圖法，我們選出三個介紹如下：

(1)　我們以 $L:M:N:P=17:5:8:12$ 在平面上任意畫出四邊形 ABCD 圖(26)，分析其三對二的方程式

是$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell n)^2+(2np)^2=(\ell^2-m^2+n^2+p^2)^2+(2mn)^2$，　觀察

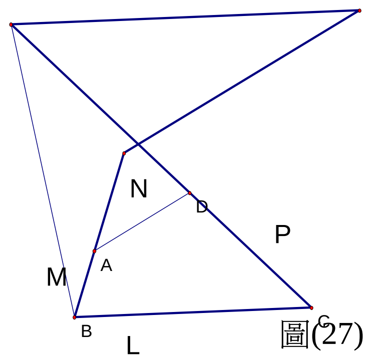


圖(26)

這個式子，右式當中有一個 2MN，且左右式的 2LN, 2NP, 2MN, 都有重複 N，所以底邊長為 N，相鄰邊長必須是 M，因為這兩個邊長所代表比例的都在畢氏數式的右邊，而右圖畢氏數圖形裡的對角線代表的是分開了三對二的邊長，其餘的兩平行邊長與 2LN 與 2NP 式可任意變動，所以決定一個三對二畢氏數圖形關鍵在於與底邊相鄰的邊長代表畢氏數解右式的解是哪一線段，如本圖(26)是 $\overline{CD}=M$ 的情形，當我們取得 k 值後，即可將此畢氏數圖形畫出來。

(2)　我們以 L:M:N:P=17:5:8:12 在平面上任意畫出四邊形 ABCD 圖(27)，分析其三對二的方程式

是$(\ell^2-m^2-n^2+p^2)^2+(2\ell \mathrm{m})^2+(2\mathrm{m}p)^2=(\ell^2+m^2-n^2+p^2)^2+(2mn)^2$，　觀察

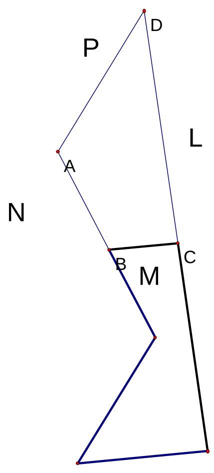


圖(27)

這個式子，右式當中有一個 2MN，且左右式的 2LM, 2MP, 2MN, 都有重複 M，所以底邊長為 M，相鄰邊長必須是 N，因為這兩個邊長所代表比例的都在畢氏數式的右邊，而右圖畢氏數圖形裡的對角線代表的是分開了三對二的邊長，其餘的兩平行邊長與 2LM 與 2MP 式可任意變動，所以決定一個畢氏數圖形關鍵在於與底邊相鄰的邊長代表畢氏數解右式的解是哪一線段，如本圖(27)是 N 的情形。當我們取得 k 值後，即可將此畢氏數圖形畫出來。

(3)　我們以 L:M:N:P=17:5:8:12 在平面上任意畫出四邊形 ABCD 圖(28)，分析其三對二的方程式

是$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\mathrm{mn})^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2+(2\ell \mathrm{m})^2$，



圖(37)

觀察這個式子，右式當中有一個 2LM，且左右式的 2MN, 2MP, 2LM, 都有重複 M，所以底邊長為 M，相鄰邊長必須是 L，因為這兩個邊長所代表比例的都在畢氏數式的右邊，而右圖畢氏數圖形裡的對角線代表的是分開了三對二的邊長，其餘的兩平行邊長與 2MN 與 2MP 式可任意變動，所以決定一個畢氏數圖形關鍵在於與底邊相鄰的邊長代表畢氏數解右式的解是哪一線段，如本圖(28)是 M 的情形。當我們取得 k 值後，即

可將此畢氏數圖形畫出來。不過像右圖我們因為代入的數字關係，所以 k 是負假分數，但是並沒有影響，只是畢氏數圖形跑到外面去了。

3. 三對二的不定方程畢氏數解探討(二)

觀察前段敘述，似乎是說我們需要 12 個公式才可以涵蓋所有三對二不定方程的畢氏數解，事實上不是這樣，我們仍然只需要一個公式即可涵蓋三對二不定方程的所有畢氏數解，說明如下:

先任取四數$\ell = 191, m = 26, n = 59, p = 73$代入三對二的公式(34)，

$$(\ell^2 - m^2 - n^2 + p^2)^2 + (2\ell n)^2 + (2np)^2 = (\ell^2 - m^2 + n^2 + p^2)^2 + (2mn)^2$$

得$37653^2 + 22538^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3068^2$，再反過來打亂(37653, 22538, 8614, 44615, 3068)成為(22538, 8614, 37653, 3068, 44615)要去逆推原來的ℓ, m, n, p四數，觀察前三數中的 37653，和後兩數中的 44615，利用輾轉相除法取得最大公因數(37653, 44615) $= 59$，再將$59 \times 2 = 118$拿去遍除其餘的三數 22538, 8614, 3068，得商依序為 191, 73, 26，因此推得原四數 $\ell = 59, m = 191, n = 73, p = 26$，雖然這四數次序和原本所取得的四數 $\ell = 191, m = 26, n = 59, p = 73$對應次序不同，但可以看出來那很可能只是輪動而已，也就是說也許我們輪動ℓ, m, n, p這四個數(共$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$組)並逐一代入三對二的 12 公式會發現每一個公式都能產生同樣的畢氏數，實驗如下:

(一)ℓ=191,m=26,n=59,p=73	(二)ℓ=191,m=26,n=73,p=59
1. $37653^2 + 22538^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3068^2$	1. $33957^2 + 27886^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3796^2$
2. $37653^2 + 9932^2 + 3796^2 = 39005^2 + 3068^2$	2. $33957^2 + 9932^2 + 3068^2 = 35309^2 + 3796^2$
3. $37653^2 + 9932^2 + 22538^2 = 35309^2 + 27886^2$	3. $33957^2 + 9932^2 + 27886^2 = 39005^2 + 22538^2$
4. $37653^2 + 3796^2 + 8614^2 = 26995^2 + 27886^2$	4. $33957^2 + 3068^2 + 8614^2 = 26995^2 + 22538^2$
5. $33957^2 + 27886^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3796^2$	5. $37653^2 + 22538^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3068^2$
6. $33957^2 + 9932^2 + 27886^2 = 39005^2 + 22538^2$	6. $37653^2 + 9932^2 + 22538^2 = 35309^2 + 27886^2$
7. $33957^2 + 9932^2 + 3068^2 = 35309^2 + 3796^2$	7. $37653^2 + 9932^2 + 3796^2 = 39005^2 + 3068^2$
8. $33957^2 + 3068^2 + 8614^2 = 26995^2 + 22538^2$	8. $37653^2 + 3796^2 + 8614^2 = 26995^2 + 27886^2$
9. $28347^2 + 22538^2 + 27886^2 = 44615^2 + 9932^2$	9. $28347^2 + 27886^2 + 22538^2 = 44615^2 + 9932^2$
10. $28347^2 + 27886^2 + 3796^2 = 39005^2 + 8614^2$	10. $28347^2 + 22538^2 + 3068^2 = 35309^2 + 8614^2$
11. $28347^2 + 22538^2 + 3068^2 = 35309^2 + 8614^2$	11. $28347^2 + 27886^2 + 3796^2 = 39005^2 + 8614^2$
12. $28347^2 + 3068^2 + 3796^2 = 26995^2 + 9932^2$	12. $28347^2 + 3796^2 + 3068^2 = 26995^2 + 9932^2$
(三)ℓ=191,m=59,n=73,p=26	(四)ℓ=191,m=59,n=26,p=73
1. $28347^2 + 27886^2 + 3796^2 = 39005^2 + 3796^2$	1. $37653^2 + 9932^2 + 3796^2 = 39005^2 + 3068^2$
2. $28347^2 + 22538^2 + 3068^2 = 33957^2 + 3796^2$	2. $37653^2 + 22538^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3068^2$
3. $28347^2 + 22538^2 + 27886^2 = 44615^2 + 9932^2$	3. $37653^2 + 22538^2 + 9932^2 = 35309^2 + 27886^2$
4. $28347^2 + 3068^2 + 3796^2 = 26995^2 + 9932^2$	4. $37653^2 + 8614^2 + 3796^2 = 26995^2 + 27886^2$
5. $37653^2 + 3796^2 + 3796^2 = 39005^2 + 3068^2$	5. $28347^2 + 27886^2 + 3796^2 = 39005^2 + 8614^2$
6. $37653^2 + 22538^2 + 9932^2 = 33957^2 + 27886^2$	6. $28347^2 + 22538^2 + 27886^2 = 44615^2 + 9932^2$
7. $37653^2 + 22538^2 + 8614^2 = 44615^2 + 3068^2$	7. $28347^2 + 22538^2 + 3068^2 = 35309^2 + 8614^2$

8. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$	8. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$
9. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$	9. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$
10. $33957^2+9932^2+3068^2=33957^2+3796^2$	10. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$
11. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$	11. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$
12. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+225382^2$	12. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$
(五)ℓ=191,m=73,n=26,p=59	(六)ℓ=191,m=73,n=59,p=26
1. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$	1. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$
2. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$	2. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$
3. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$	3. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$
4. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$	4. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$
5. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$	5. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$
6. $28347^2+27886^2+22358^2=44615^2+9932^2$	6. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$
7. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$	7. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$
8. $28347^2+3796^2+30684^2=26995^2+9932^2$	8. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$
9. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$	9. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$
10. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$	10. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$
11. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$	11. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$
12. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$	12. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$
(七)ℓ=26,m=191,n=59,p=73	(八)ℓ=26,m=191,n=73,p=59
1. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$	1. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$
2. $37653^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$	2. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$
3. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$	3. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$
4. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$	4. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$
5. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$	5. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$
6. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$	6. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$
7. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$	7. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$
8. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$	8. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$
9. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$	9. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$
10. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$	10. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$
11. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$	11. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$
12. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$	12. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$
(九)ℓ=26,m=73,n=191,p=59	(十)ℓ=26,m=59,n=191,p=73
1. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$	1. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$
2. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$	2. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$
3. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$	3. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$
4. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$	4. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$
5. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$	5. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$
6. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$	6. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$

7. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$	7. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$
8. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$	8. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$
9. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$	9. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$
10. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$	10. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$
11. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$	11. $37653^2+9932^2+22538^2=35309+27886^2$
12. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$	12. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$
(十一)ℓ=26,m=59,n=73,p=191	(十二)ℓ=26,m=73,n=59,p=191
1. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$	1. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$
2. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$	2. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$
3. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$	3. $28347^2+3796^2+3796^2=26995^2+9932^2$
4. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$	4. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$
5. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+222538^2$	5. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$
6. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$	6. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$
7. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$	7. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$
8. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$	8. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$
9. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$	9. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$
10. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$	10. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$
11. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$	11. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$
12. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$	12. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$
(十三)ℓ=59,m=191,n=73,p=26	(十四)ℓ=59,m=191,n=26,p=73
1. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$	1. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$
2. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$	2. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$
3. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$	3. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$
4. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$	4. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$
5. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$	5. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$
6. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$	6. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$
7. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$	7. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$
8. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$	8. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$
9. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$	9.$33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$
10. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$	10. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$
11. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$	11. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$
12. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$	12. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$
(十五)ℓ=59,m=73,n=191,p=26	(十六)ℓ=59,m=73,n=26,p=191
1. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$	1. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$
2. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$	2. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$
3. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$	3. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$
4. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$	4. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$
5. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$	5. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$

6. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$ 7. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$ 8. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$ 9. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$ 10. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$ 11. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$ 12. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$	6. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$ 7. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$ 8. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$ 9. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$ 10. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$ 11. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$ 12. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$
(十七)ℓ=59,m=26,n=191,p=73 1. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$ 2. $28347^2+3068^2+3796^2=26995^2+9932^2$ 3. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$ 4. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$ 5. $33957^2+8614+27886^2=44615^2+3796^2$ 6. $33957^2+3068^2+8614^2=26995^2+22538^2$ 7. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$ 8. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$ 9. $37653^2+22538^2+8614^2=44615^2+3068^2$v 10. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$ 11. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$ 12. $37653^2+9932^2+3796^2=39005^2+3068^2$	(十八)ℓ=59,m=26,n=73,p=191 1. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$ 2. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$ 3. $33957^2+3796^2+8614^2=26995^2+22538^2$ 4. $33957^2+9932^2+27886^2=39005^2+22538^2$ 5. $28347^2+22538^2+27886^2=44615^2+9932^2$ 6. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$ 7. $28347^2+3068^2+22538^2=26995^2+9932^2$ 8. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$ 9. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$ 10. $37653^2+22538^2+3796^2=35309^2+27886^2$ 11. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$ 12. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$
(十九)ℓ=73,m=59,n=26,p=191 1. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$ 2. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$ 3. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$ 4. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$ 5. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$ 6. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$ 7. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$ 8. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$ 9. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$ 10. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$ 11. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$ 12. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$	(二十)ℓ=73,m=59,n=191,p=26 1. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$ 2. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$ 3. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$ 4. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$ 5. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$ 6. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$ 7. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$ 8. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$ 9. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$ 10. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$ 11. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$ 12. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$
(二一)ℓ=73,m=191,n=59,p=26 1. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$ 2.$33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$ 3. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$ 4. $33957^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$	(二二)ℓ=73,m=191,n=26,p=59 1. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$ 2. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$ 3. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$ 4. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$

5. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$	5. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$
6. $28347^2+27886^2+3796^2=39005^2+8614^2$	6. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$
7. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$	7. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$
8. $28347^2+22538^2+3068^2=35309^2+8614^2$	8. $33957^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$z
9. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$	9. $37653^2+8614^2+3796^2=26995^2+27886^2$
10. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$	10. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$
11. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$	11. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$
12. $37653^2+22538^2+9932^2=35309^2+27886^2$	12. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$
(二三)ℓ=73,m=26,n=59,p=191	(二四)ℓ=73,m=26,n=191,p=59
1. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$	1. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$
2. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$	2. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$
3. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$	3. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$
4. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$	4. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$
5. $28347^2+27886^2+22538^2=44615^2+9932^2$	5. $37653^2+8614^2+22538^2=44615^2+3068^2$
6. $28347^2+3796^2+27886^2=39005^2+8614^2$	6. $37653^2+3796^2+8614^2=26995^2+27886^2$
7. $28347^2+3796^2+3068^2=26995^2+9932^2$	7. $37653^2+3796^2+9932^2=39005^2+3068^2$
8. $28347^2+3068^2+22538^2=35309^2+8614^2$	8. $37653^2+9932^2+22538^2=35309^2+27886^2$
9. $33957^2+8614^2+27886^2=44615^2+3796^2$	9. $33957^2+27886^2+8614^2=44615^2+3796^2$
10. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$	10. $33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$
11.$33957^2+8614^2+3068^2=26995^2+22538^2$	11. $33957^2+27886^2+9932^2=39005^2+22538^2$
12. $37653^2+3068^2+9932^2=35309^2+3796^2$	12. $37653^2+9932^2+3068^2=35309^2+3796^2$

觀察上述實驗，我們可以清楚的看見這 12 個公式中的任一個都能產生相同的畢氏數解，因此只需要一個公式即可涵蓋三對二不定方程的所有解。

4. 關於五對一的二次不定方程再探討

觀察前文(41)式

$(\ell^2-m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell m)^2+(2\ell p)^2+(2mn)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

也許你會認為你又發現了另外一組五對一的表示式，且你會想說是不是之前的本文解可能也有漏解，但事情不是這樣。

在本文解 $(\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2)^2+(2\ell q)^2+(2mq)^2+(2nq)^2+(2pq)^2$
$=(\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2)^2$ 中應已經涵蓋(41)式所產生的任一解，說明如下：

，如果我們先找四個數字代入第(41)式，如$\ell=7, m=5, n=4, p=3$得到

$31^2+70^2+42^2+40^2+24^2=99^2$，我們可在本文解中找到一組 ℓ', m', n', p', q'，

代入本文解的畢氏數表示中，得到相同的 $31^2+70^2+42^2+40^2+24^2=99^2$ 這個式子，說明如下：

使用以前的速求解法，便可得到五種連比，而他們只是排列次序不同而已，其實同解。

(1) $70:42:40:24:(99-31)=35:21:20:12:34$，帶入以前的方程式得
$1054^2+2380^2+1428^2+1360^2+816^2=3366^2$ 連比為$31:70:42:40:24:99$

(2) $42:40:24:31:(99-70)=42:40:24:31:29$，帶入以前的方程式得
$4060^2+2436^2+2320^2+1392^2+1798^2=5742^2$連比為$70:42:40:24:31:99$

(3) $40:24:31:70:(99-42)=40:24:31:70:57$，帶入以前的方程式得
$4788^2+4560^2+2736^2+3534^2+7980^2=11286^2$連比為$42:40:24:31:70:99$

(4) $24:31:70:42:(99-40)=24:31:70:42:59$，帶入以前的方程式得
$4720^2+2832^2+3658^2+8260^2+4956^2=11682$連比為$40:24:31:70:42:99$

(5) $31:70:42:40:(99-24)=31:70:42:40:75$，帶入以前的方程式得
$3600^2+4650^2+10500+6300^2+6000^2=14850^2$連比為$24:31:70:42:40:99$

5. m 對 n 的二次不定方程的畢氏數解產生式歸納

(1)三對一

若$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2=\chi_4^2$為三對一的二次不定方程，則可以用$\ell,m,n$的代數式表示其畢氏數解的產生式為

$(\ell^2+m^2-n^2)^2+(2\ell n)^2+(2mn)^2=(\ell^2+m^2+n^2)^2$，其中$\ell,m,n$為任意正整數。

反之，若a,b,c,d是三對一的二次不定方程一組解，則可輪動a,b,c，如$b:c:(d-a)$或$a:c:(d-b)$或$a:b:(d-c)$而得到三種ℓ,m,n的組合，使每一種組合都可產生a,b,c,d這組解。

(2)四對一

若$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\chi_4^2=\chi_5^2$為四對一的二次不定方程，則可以用$\ell,m,n,p$的代數式來表示其畢氏數解的產生式為

$(\ell^2+m^2+n^2-p^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2+(2np)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2)^2$

，其中ℓ,m,n,p任意正整數。

反之，若a,b,c,d,e是四對一的二次不定方程一組解，則可以輪動a,b,c,d，如$b:c:d:(e-a)$或$a:c:d:(e-b)$或$a:b:d:(e-c)$或$a:b:c:(e-d)$等四種ℓ,m,n,p組合，使每一種組合都可產生a,b,c,d,e這組解。

(3)n 對一

若$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\cdots\cdots+\chi_n^2=\chi_{n+1}^2$為 n 對一的二次不定方程式，則可以用$\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4\cdots\ell_n$等 n 個代數式表示其畢氏數解的產生式為

$$({\ell_1}^2+{\ell_2}^2+{\ell_3}^2+\cdots-{\ell_n}^2)^2+(2\ell_1\ell_n)^2+(2\ell_2\ell_n)^2+\cdots+(2\ell_{n-1}\ell_n)^2=$$

$$({\ell_1}^2+{\ell_2}^2+{\ell_3}^2+\cdots+{\ell_n}^2)^2$$

反之，若$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}$是 n 對一的二次不定方程一組解，則可以輪動$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$。如$a_2 : a_3 : a_4 \cdots : a_n : (a_{n+1} - a_1)$或
$a_1 : a_3 : a_4 \cdots : a_n : (a_{n+1} - a_2)$或……等 n 條$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \cdots \ell_n$使每一種組合都可產生$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}$這組解

(4)三對二

若$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \chi_4^2 + \chi_5^2$為三對二的二次不定方程，則可以用$\ell, m, n, p$的代數式表示其畢氏數解的產生式為

$$(\ell^2 + m^2 - n^2 - p^2)^2 + (2\ell n)^2 + (2mn)^2 = (\ell^2 + m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2np)^2$$

，只要一式即可。

反之，若a, b, c, d, e是三對二的二次不定方程一組解，則可以用前文找公因數方法逆推出一組ℓ, m, n, p，再輪動這ℓ, m, n, p依序帶入前文的 12 個畢氏數產生式，會發現每一個產生式都有機會出現原來這組a, b, c, d, e的解。也就是說我們可以找到 12 個ℓ, m, n, p的四邊形，用以產生a, b, c, d, e 這組解。

(5)三對三

若如$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \chi_4^2 + \chi_5^2 + \chi_6^2$為三對三的二次不定方程，則可以用$\ell, m, n, p, q$的代數式表示其畢氏數解的產生式為

$$(\ell^2 + m^2 - n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2\ell n)^2 + (2mn)^2 = (\ell^2 + m^2 + n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2np)^2 + (2nq)^2$$

，只要一式即可。

反之，若a, b, c, d, e, f是三對三的二次不定方程一組解，可以用前文找公因數方法，逆推出一組ℓ, m, n, p, q，再輪動這ℓ, m, n, p, q依序帶入 15 個畢氏數產生式，也就是我們有 15 個ℓ, m, n, p, q組成的五邊形，都可產生a, b, c, d, e, f這組解。

(6)四對二

同理，畢氏數產生式為

$$(\ell^2 + m^2 + n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2\ell p)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2 = (\ell^2 + m^2 + n^2 + p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$$

。

反之，有 20 個畢氏數產生式，可逆推出指定的一組解。

(7)四對三

同理，畢氏數產生式為

$$(\ell^2 + m^2 + n^2 - p^2 - q^2 - r^2)^2 + (2\ell p)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2 = (\ell^2 + m^2 + n^2 + p^2 - q^2 - r^2)^2 + (2pq)^2 + (2pr)^2$$

(8)四對四

同理，畢氏數產生式為

$$(\ell^2+m^2+n^2-p^2-q^2-r^2-s^2)^2+(2\ell p)^2+(2mp)^2+(2np)^2=$$
$$(\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2-r^2-s^2)^2+(2pq)^2+(2pr)^2+(2ps)^2$$

。

反之，有 70 個畢氏數產生式，可逆推出指定的一組解。

(9)五對二

同理，畢氏數產生式為

$$(\ell^2+m^2+n^2+p^2-q^2-r^2)^2+(2\ell q)^2+(2mq)^2+(2nq)^2+$$
$$(2pq)^2=(\ell^2+m^2+n^2+p^2+q^2-r^2)^2+(2qr)^2$$

。

反之，有 30 個畢氏數產生式，可逆推出指定的一組解。

(10) m 對 n

由左右式括號內正負號的位置，可推出一個畢氏數產生式為

$$\left({\ell_1}^2+{\ell_2}^2+\cdots+{\ell_m}^2-{\ell_{m-1}}^2-{\ell_{m-2}}^2-\cdots-{\ell_{m-n}}^2\right)^2+\left(2{\ell_1}^2{\ell_{m+1}}^2\right)^2+$$

$$\left(2{\ell_2}^2{\ell_{m+1}}^2\right)^2+\cdots+\left(2{\ell_m}^2{\ell_{m+1}}^2\right)^2=\left({\ell_1}^2+{\ell_2}^2+\cdots+{\ell_m}^2+{\ell_{m-1}}^2-\right.$$

$$\left.{\ell_{m-2}}^2-\cdots-{\ell_{m-n}}^2\right)^2+\left(2{\ell_{m+1}}^2{\ell_{m+2}}^2\right)^2+\left(2{\ell_{m+1}}^2{\ell_{m+3}}^2\right)^2+\cdots+$$

$$\left(2{\ell_{m+1}}^2{\ell_{m+n}}^2\right)^2$$

反之，當

$m\neq n$ 時，有 $m\times C_{n-1}^{m+n-1}$ 個；當 $m=n$ 時，有 $m\times C_{n-1}^{m+n-1}\div 2$ 個畢氏數產生式，可逆推出指定的一組解。

由上式的歸納，得到一個結論，關於 m 對 n 的二次不定方程的畢氏數解產生式

肆、 結論

1. 關於 N+1 元二次不定方程的正整數解，我們可以在平面上畫出一個凸 N 邊多邊形，習慣上我們以最長邊當底邊(或第 n 邊)，當 N 是奇數時，此 N 邊形剛好可以被對角線左右對稱分割，當 N 是偶數時，有一邊多或少一條對角線。

此時存在一個 k 值，0<k<1 或-1<k<0，$k=\dfrac{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+\cdots+\ell_{n-1}^2-\ell_n^2}{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+\cdots+\ell_{n-1}^2+\ell_n^2}$，造成一組平行線段，使這些平行線段長和底邊長的連比為

$$2\ell_1\ell_n:2\ell_2\ell_n:2\ell_3\ell_n:\cdots:\left(\ell_1^2+\ell_2^2+\cdots+\ell_{n-1}^2-\ell_n^2\right):\cdots:2\ell_{n-1}\ell_n:$$

$\left(\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+\cdots+\ell_{n-1}^2+\ell_n^2\right)$，其前 N 項平方和等於最後一項的平方，此即為 N 對一的二次不定方程的正整數解一般式。

2. 一個凸 N 邊多邊形的對角線分割可有很多種(都以最長邊當底邊)，每一種分割法造成的整數解連比只是比例項中的某些項調動位置而已，其實都是同一組解。

3. 對於任意一組 N 元二次不定方程的正整數解，我們可以由取得 k 值後，逆推，推出原來所在的 N-1 邊形。

4. 當推廣到三對二的二次不定方程(形如$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2+x_5^2$)，其畢氏數解共有十二種形式，也就是說有十二種 k 值，分別對應十二種畢氏數解的圖形。例如其中一為$(\ell^2+m^2-n^2-p^2)^2+(2\text{mn})^2+(2mp)^2=(\ell^2-m^2-n^2-p^2)^2$ $+(2\ell\text{m})^2$，而 k 值=$\dfrac{\ell^2+m^2-n^2-p^2}{\ell^2-m^2-n^2-p^2}$，圖形如圖(37)，其中若 K 值為正分數，則畢氏數線段在原四邊形的內部，反之若 K 值為負分數，則畢氏數線段跑到原四邊形的外部。

5. 關於 m 對 n 的二次不定方程式的正整數解一般式

(1)當 $m\neq n$ 時，有 $m\times C_{n-1}^{m+n-1}$ 個畢氏數產生式，且各有各自的 k 值；

(2)當 $m=n$ 時，有 $m\times C_{n-1}^{m+n-1}\div 2$ 個畢氏數產生式，且各有各自的 k 值

又其中一個畢氏數產生式可寫成

$$\left(\ell_1{}^2+\ell_2{}^2+\cdots+\ell_m{}^2-\ell_{m-1}{}^2-\ell_{m-2}{}^2-\cdots-\ell_{m-n}{}^2\right)^2+\left(2\ell_1{}^2\ell_{m+1}{}^2\right)^2+\left(2\ell_2{}^2\ell_{m+1}{}^2\right)^2+\cdots+\left(2\ell_m{}^2\ell_{m+1}{}^2\right)^2=\left(\ell_1{}^2+\ell_2{}^2+\cdots+\ell_m{}^2+\ell_{m-1}{}^2-\ell_{m-2}{}^2-\cdots-\ell_{m-n}{}^2\right)^2+\left(2\ell_{m+1}{}^2\ell_{m+2}{}^2\right)^2+\left(2\ell_{m+1}{}^2\ell_{m+3}{}^2\right)^2+\cdots+\left(2\ell_{m+1}{}^2\ell_{m+n}{}^2\right)^2$$

，其 k 值為$\dfrac{\left(\ell_1{}^2+\ell_2{}^2+\cdots+\ell_m{}^2-\ell_{m-1}{}^2-\ell_{m-2}{}^2-\cdots-\ell_{m-n}{}^2\right)}{\left(\ell_1{}^2+\ell_2{}^2+\cdots+\ell_m{}^2+\ell_{m-1}{}^2-\ell_{m-2}{}^2-\cdots-\ell_{m-n}{}^2\right)}$。

伍、 參考資料

1. 第四十七屆的全國中小學科展“廣義的畢氏定理”
2. 黃家禮 2001 年 10 月　幾何明珠　P1-9 頁　九章出版社
3. 盛立人、顏鎮軍　2001 年 2 月　從勾股定理談起　P40-41 九章出版社
4. 朱浩緯　1998 年　從畢氏定理談起　第 38 屆全國科展

【評語】030401

1. 由畢氏數推廣到更多元二次不定方程正整數解，主題目標明確。與國中教材銜接。

2. 利用平面幾何的知識求得一些正整數解，靈活運用國中所學數學。

3. 解說表達不夠順暢。

4. 所得結論沒有嚴密證明。事實上，只有求得一些特別形式的解，而非一般解。