

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040423

多面體之外接球

學校名稱：國立臺南第一高級中學

| | |
|-------------------------|--------------|
| 作者： 高二 林天心 高二 盧立穎 | 指導老師： 蔡仲彬 |
|-------------------------|--------------|

關鍵詞： 外接球、多面體、外心

摘要：

研究各多面體在哪些條件下才會有外接球。我們探討出以下三種類型：

- 一、不需要檢驗法的，某些多面體是全部皆有外接球，如：四面體、圓錐、類圓錐（請參考：**肆、研究過程**中的定義）、圓柱。
- 二、有些是有兩種檢驗法，檢驗它是否有外接球，二種檢驗法，只須取其中一個檢驗即可，因為一個成立，另一個也就成立，只須選擇較易檢驗的即可，此種的有：**a-類三角柱**（請參考：**肆、研究過程**中的定義）、**a-六面體**。
- 三、還有一類是我們目前只找出一種檢驗法的，如：**b-類三角柱**（請參考：**肆、研究過程**中的定義）、類圓柱、**b-六面體**、四角錐。

以上的檢驗法，在數學上是屬於充分且必要的，若不滿足任一檢驗法，此多面體即沒有外接球。

壹、研究動機：

在某個巧合下，看到了一題數學題目，那題數學題便激發了我的靈感。那題是這樣的：在空間坐標系裡，證正四面體的外接球心公式（四個頂點的坐標相加除以4）。乍看之下，好像只是一題普通的證明題，但細想一下，有公式，那不就代表正四面體一定會有外接球？那除了正四面體之外的四面體是否會有外接球呢？這就引起我的好奇了，國中時證過，三角形一定會有外心，那空間中的立體圖形呢？我的腦子裡便開始思考，先從比較簡單的四面體來想，要如何才能使一個四面體有外接球呢？要如何才能使一個多面體能被剛好放入一個球中呢？

此時正好學到數學第三冊第二章：空間中的直線與平面，正可學以致用，將此時所學到的數學知識應用在此數學科展。

貳、研究目的：

- 一、探討出四面體在什麼條件下才能具有外接球。
- 二、推廣至其它多面體(如圓錐、六面體)

參、研究設備及器材：

紙、筆、電腦。

肆、研究過程

一、定義

爲了方便，我們將特殊情況之多面體定義如下：

(一) a-類三角柱：上下面爲二個三角形，側面皆爲四邊形，且上下面平行

(二) b-類三角柱：上下面爲二個三角形，側面皆爲四邊形

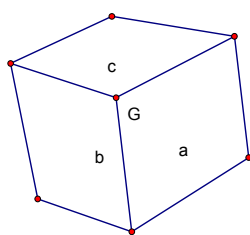
(三) 類圓錐：底面爲圓，頂點不一定要在過圓心垂直底面的直線上

(四) 類圓柱：上下二面皆是圓且平行，但圓大小不一定要相等

(五) 六面體：在研究中的六面體是每面皆爲四邊形的六面體

(六) a-六面體：上下面爲圓內接四邊形，且兩面平行

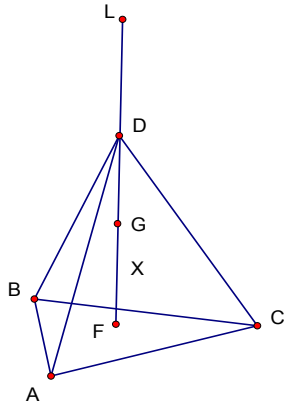
(七) b-六面體：共一點的三面皆爲圓內接四邊形，如圖：



註：G 爲共點，a b c 三平面爲圓內接四邊形

二、四面體與外接球之預備知識

引理A：四面體 $ABCD$ ， D 在直線 L 上， L 過三角形 ABC 的外心（設爲 F ）且垂直 ABC 平面，且 DF 要大於三角形 ABC 外心到頂點的距離，此球心在 F 與 D 點之間。



證：

L 上任意點到 ABC 三點等距(因過 ABC 外心且垂直 ABC 平面)

由 F 點往 D 方向移動 X 距離後(記此點為 G)， $GD < GA$

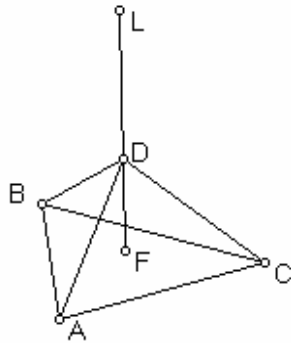
由 $GD < GA$ 且 $FD > FA$

知在 GF 線段中存在一點 P，使得 $PD = PA$

所以 $PD = PA = PB = PC$

此為球心

引理 B：四面體 ABCD，D 在直線 L 上，L 過三角形 ABC 的外心(設為 F)且垂直 ABC 平面，但 D 到 ABC 平面的最小距離小於三角形 ABC 外心到頂點的距離，則球心在 DF 射線上(但不在 DF 線段上)。



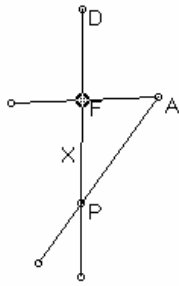
證：

L 到 ABC 三點等距(因過 ABC 外心且垂直 ABC 平面)

由於 $FD < FA$

球心不可能在 FD 射線上(FD 射線上任意點 O， $OD < OA$)

F 點向 DF 方向移動 X(設此點為 P)，如圖



註：此圖為上圖之簡圖，只取四點（ADFP）做討論

X 可以極大使得 PA 與 X 的比值縮得很小

相對地，使得 X 與 PA 相差漸小

可取得 X 使得 $X+FD>AP$

由 $X+FD>AP$ ， $FD<AF$

知 DF 射線上存在一點 P，使得 $PA=PB=PC=PD$

引理 C：

給定四面體一平面為 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ，且此平面上三點的外心為 (x_1, y_1, z_1)

則過此點且垂直此平面之直線方程式為 $x = x_1 + a_1t_1, y = y_1 + b_1t_1, z = z_1 + c_1t_1$

再給定任一個其他平面的外心與平面方程式

則得直線方程式 $(x = x_2 + a_2t_2, y = y_2 + b_2t_2, z = z_2 + c_2t_2)$

若二組 (x, y, z) 可以相等

即 $x_2 + a_2t_2 = x_1 + a_1t_1, y_2 + b_2t_2 = y_1 + b_1t_1, z_2 + c_2t_2 = z_1 + c_1t_1$

則此四面體有外接球，因為二條直線到一平面三點皆等距，所以交點至四點等距

若二組 (x, y, z) 無法相等

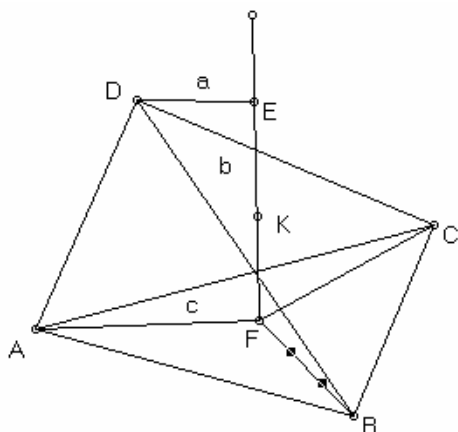
則無交點，也就是無外接球

引理 C 結論：

由於 $a_1, b_1, c_1, d_1, x_1, y_1, z_1, \dots$ 皆為已知，所以只需代入比對 t_1, t_2 之三列式子的關係，只要有一組不相符，則此四面體無外接球，若全部相符，則有外接球

三、據引理探討四面體

證出任一四面體皆有外接球
四面體外接球之證明一



註：F 為 ABC 外心，DE 垂直 EF，EF 垂直 ABC 平面

證：

(一)

參考上圖

(1) $a=c$ 時，球心在 b 之中點(K)

(2) $a=0$ 時，參考引理 A、B，存在一點球心

(3) $\sqrt{b^2+c^2} > a > c$ ，球心在 EK 上

(4) $\sqrt{b^2+a^2} > c > a$ ，球心在 KF 上

(5) 若 $c > \sqrt{b^2+a^2}$ ，設 $c = \sqrt{b^2+a^2} + p$ ， p 為正數

設 M 為 EF 射線上一點，但不在 EF 上，FM 為 $x \Rightarrow DM^2 = a^2 + (b+x)^2$

$AM^2 = c^2 + x^2$ 代入 $c = \sqrt{b^2+a^2} + p$

使之相等， $a^2 + (b+x)^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{b^2+a^2}p + p^2$

$(b+x)^2 = b^2 + 2\sqrt{b^2+a^2}p + p^2$

因為 x 為正數

$x = -b + \sqrt{b^2 + 2\sqrt{b^2+a^2}p + p^2}$

因為 $\sqrt{b^2 + 2\sqrt{b^2+a^2}p + p^2} > \sqrt{b^2} = b$ (p 為正數)

x 存在且唯一 (a, b, p 為定值)

(6) $a > \sqrt{b^2 + c^2}$ 作法同上

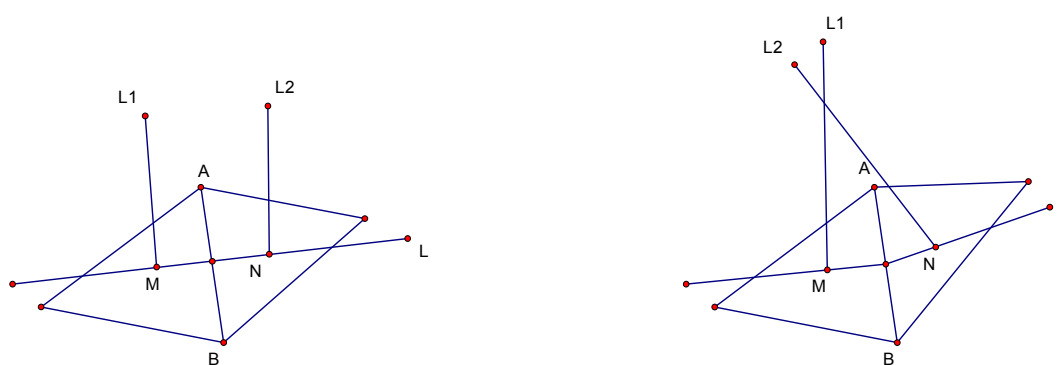
(二)

任一四面體皆無法脫出上述(一)之規定，上述之六種形式皆存在且唯一的解，所以任一四面體皆有外接球

由以上之證明，以及引理D，知四面體中，四條過三角形之外心且垂直四個平面的直線交於一點

四面體外接球之證明二

第二種證明法



說明：左圖為四面體之相鄰二面之展開圖，圖中L線為共邊(AB)之中垂線，M、N為二個三角形之外心，L1垂直ABM所屬之平面，L2垂直ABN所屬之平面，右圖為二個三角形延AB所折出的圖。

證：

取四面體的任二相鄰面攤開，對公共邊AB作中垂線L，則此二個三角形之外心(M、N)在L直線上，由於ABMN在尚未折疊時，四點共平面，所以L1、L2在同一平面上（垂直於同一平面之二垂直線必在同一平面上），由於AB垂直MN，所以當AB為折線時，L1、L2還是在同一平面上，平面上的二直線，除了平行之外必有交點，而此二直線平行的條件為此二面之夾角為180 or 0度，因為四面體的任二面不可能夾180 or 0度，所以此二直線必有一交點，且此交點到此四面體的四頂點等距，即為球心。

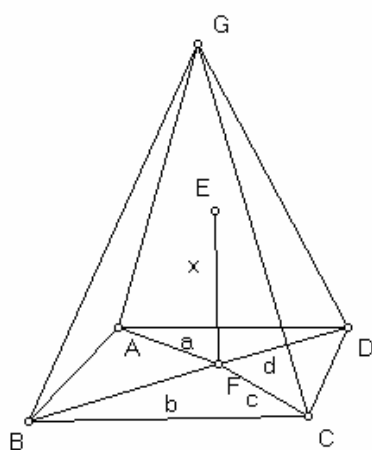
伍、研究結果

由以上之證明，可得知空間中的所有四面體皆有外接球。

陸、討論

一、 四角錐之外接球討論：

(一) 底面四邊形必為圓內接四邊形，且球心必在過四邊形圓心且垂直四邊形平面之直線上



證：

設四邊形四個頂點為 ABCD，球心為 E，E 對四邊形作投影點 F (F 為 ABCD 四邊形之外接圓圓心)，EF 設為 x，F 到四邊形四個頂點距離依序為 a，b，c，d

$$EA^2 = a^2 + x^2, EB^2 = b^2 + x^2, EC^2 = c^2 + x^2, ED^2 = d^2 + x^2$$

因為 EA = EB = EC = ED

$$\text{所以 } a^2 = b^2 = c^2 = d^2$$

a，b，c，d 為正數，所以 a = b = c = d (得證)

(二) 四角錐底面是圓內接四邊形則一定有外接球

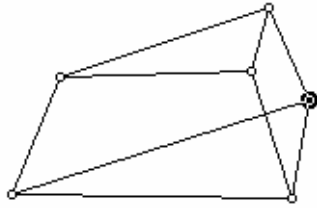
證：

作一直線垂直 ABCD 平面且過四邊形圓心，參考四面體外接球之證明一

(三) 由上述二點知，四角錐底面是圓內接四邊形 \Leftrightarrow 四角錐有外接球

二、五面體之外接球討論：

(一) 上下面為二個三角形，側面皆為四邊形，上下面平行

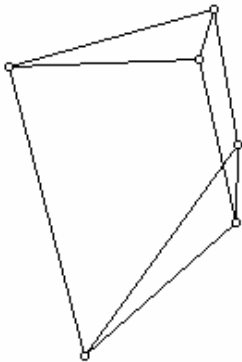


有球體之條件為：二個三角形之外心連線須垂直二平面

證：

球心必在垂直於三角形平面又過外心的直線上，所以要同時在二個三角形的過外心又垂直於三角形平面的直線上

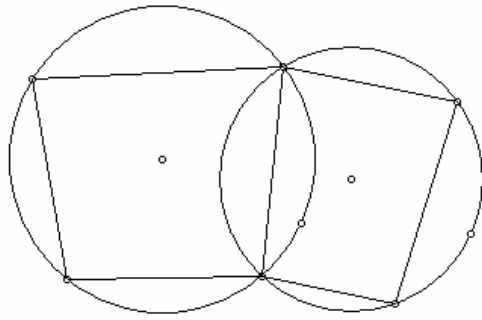
(二) 上下面為二個三角形，側面皆為四邊形，上下面不平行



條件：有二側面為圓內接四邊形

證：

取兩相鄰之四邊形展開

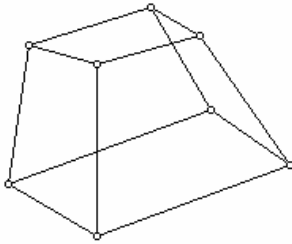


取公共邊之中垂線，作法同四面體外接球之證明二

三、六面體之外接球討論：

六面體目前先探討一種，各面皆為四邊形

(一) 上下二面平行且上下二面皆為圓內接四邊形

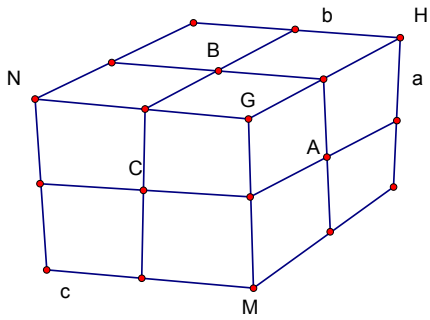


條件：上下二面之外接圓圓心連線垂直於二面
證明同五面體之討論（一）

(二) 每面皆是四邊形的六面體，上下面不一定要平行
條件：有一組共一點的三面皆為圓內接四邊形

證：

取共點三面 a ， b ， c ，四邊心圓心為 A ， B ， C



a 平面的外接圓圓心對與 b 面的共邊 (GH)，與 c 面的共邊 (GM) 作垂線，因為都為圓內接四邊形，所以此二線是二邊中垂線，同理 b、c 平面各作出二條線，a、b 面有共同一邊，又各有一中垂線過此邊中點，以此二中垂線得一平面設為 m，m 垂直 a、b 兩面，同理 a、c 面，c、b 面得 n，t，此三平面必交於一點，此點即為球心

四、類圓錐與圓柱之外接球討論

類圓錐：

參考四面體外接球之證明一，圓錐可得證皆有外接球

類圓柱：

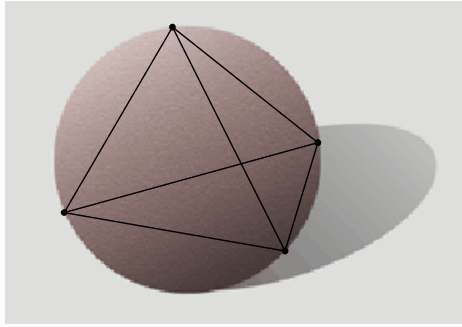
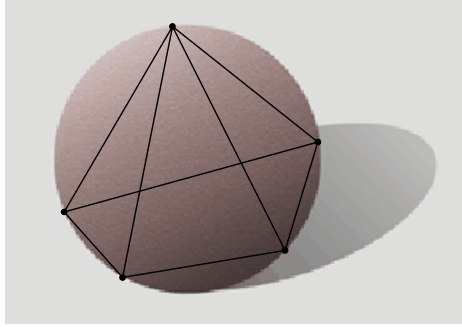
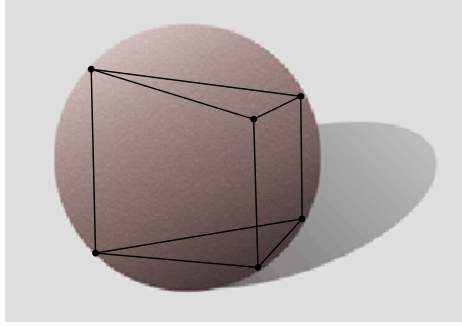
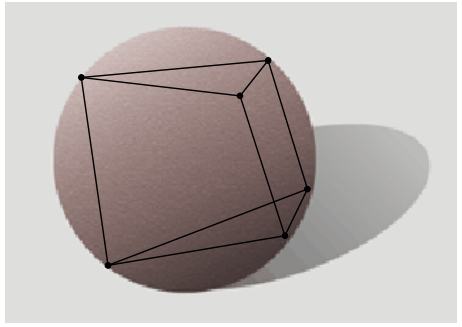
(一) 圓柱必有外接球 (顯然)

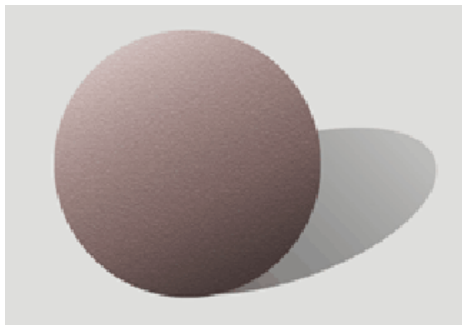
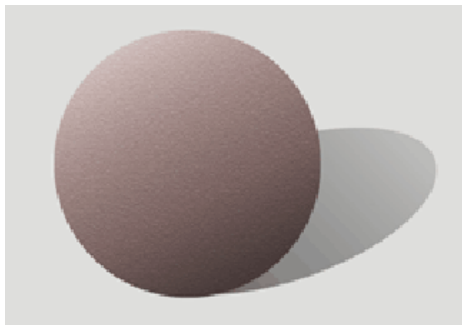
(二) 上下圓平行，大小不一定要相等，二圓心相連線垂直二圓，即有外接球
證明參考五面體之外接球討論 (一)

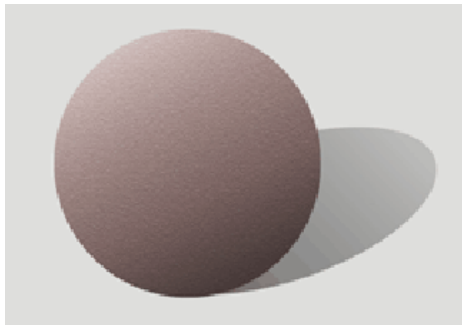
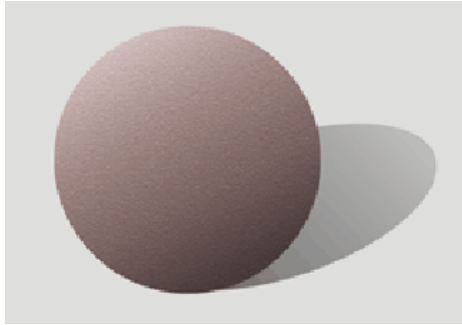
柒、結論

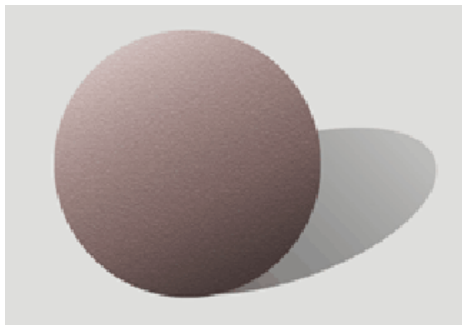
註：以下的多面體與外接球的條件皆是充分且必要，意即 \Leftrightarrow

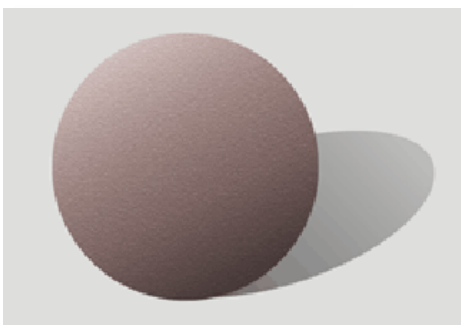
各多面體有外接球之條件

| 名稱 | 圖形 | 判別條件 | |
|-------------------------------|---|------------------|-------------|
| 四面體 |  | 全部皆有外接球 | |
| 四角錐 |  | 底面是圓內接四邊形 | |
| 類三角柱 上下面平行 以下兩者只須成立一個即可 |  | 二個三角形之外心連線須垂直二平面 | 有二側面為圓內接四邊形 |
| 類三角柱 |  | 有二側面為圓內接四邊形 | |

| | | |
|-----|---|------------|
| 圓柱 |  | 全部皆有外接球 |
| 類圓柱 |  | 二圓心相連線垂直二圓 |

| | | |
|-----|---|---------|
| 圓錐 |  | 全部皆有外接球 |
| 類圓錐 |  | 全部皆有外接球 |

| | | |
|--------------------------------------|---|-------------------------------|
| <p>六面體 上下二面不一定 平行</p> |  | <p>有一組共一點的三面皆 為圓內接四邊形</p> |
|--------------------------------------|---|-------------------------------|

| | | | |
|--|---|---|--|
| <p>六面體 上下二面平行 以下<u>只須成立一</u> <u>個即可</u></p> |  | <p>有一組共一 點的三面皆 為圓內接四 邊形</p> | <p>上下二面 為圓內接 四邊形，且 外心連線 垂直於二 面</p> |
|--|---|---|--|

捌、參考資料及其他

高級中學數學課本第三冊。

【評語】 040423

- 1)本作品能用較簡易的工具進行模擬，確實具有創意，然建議作者可引用幾何作圖軟體進行實驗，並據以觀察。
- 2)本作品之主要工具在於三角形重心垂線是否共點，作者似應專注在以此工具為主題，發展多面體外接圓存在性的研究。