

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040420

點分天下

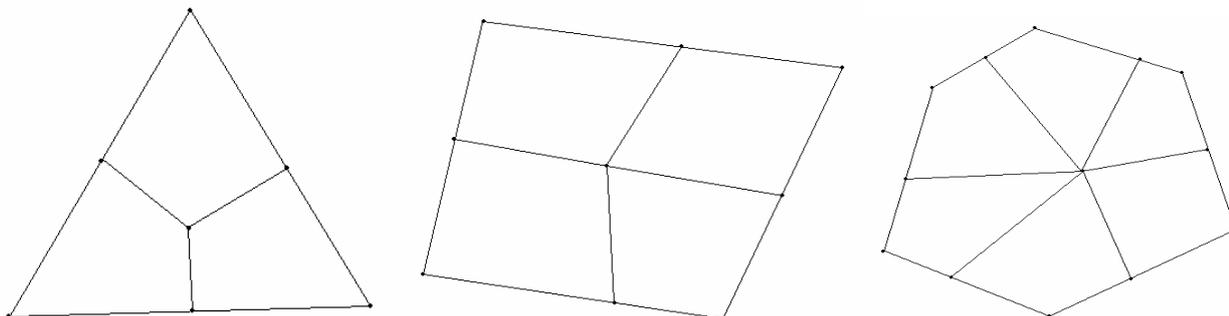
學校名稱：國立宜蘭高級中學

<p>作者：</p> <p>高二 許宸碩</p> <p>高二 陳泓志</p> <p>高二 張舜嵐</p>	<p>指導老師：</p> <p>戴武郎</p>
--	-------------------------

關鍵詞：面積等分點

壹、摘要

簡單的說，我們是要在三角形、四邊形或凸多邊形的內部找一點 P ，使得 P 連接到各邊上給定的點後，即可等分面積。概念如下圖：



不過由於多邊形難度較高，因此我們從三角形或四邊形開始。而邊上找的点則先由中點開始。

貳、研究動機

某天，老師在專題課時給我們歷屆的數學題目來做，結果其中有一題讓我們特別感興趣(82年 東區數學能力競賽)：

在已知三角形 ABC 之三邊 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 上分別取 D, E, F 三點，其中 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1, \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{2}{3}, \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{3}{2}$ 。試問在 $\triangle ABC$ 內部是否可以找到一點 P 使得 $\overline{PD}, \overline{PE}, \overline{PF}$ 三等分 $\triangle ABC$ 之面積？又若 P 點存在，則應如何決定其位置？

算出了這題目，我們開始想著：「如果三邊上的三點不是在這些位置，那面積等分點會在哪呢？」就這樣，我們開始研究這個題目。

參、研究目的

- 一、在任意三角形的內部找一點 P ，使 P 點至 $\triangle ABC$ 三個邊上給定的點之連線可等分三角形的面積。
- 二、除了三角形外，看四邊形、五邊形甚至多邊形有沒有此點。

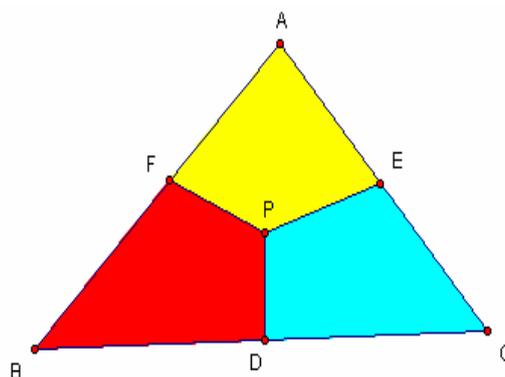
肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP、小畫家、MathType、Microsoft word

伍、研究過程或方法

我們將問題擴大到如此：

在 $\triangle ABC$ 之三邊 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 上分別取 D, E, F 三點，是否能在三角形內部找出一點 P ，使 $\overline{PD}, \overline{PE}, \overline{PF}$ 三等分 $\triangle ABC$ 之面積？



一、想法與預備定理

一開始，我們的想法很單純：尋找直線 $L_1 \parallel \overline{FD}$ 且 L_1 上任一點與 D 、 F 點連接所形成的四邊形(不管是凹是凸)面積為 $\frac{1}{3} \Delta ABC$ ，再找另一條直線 $L_2 \parallel \overline{DE}$ 且 L_2 上任一點與 D 、 E 點連接所形成的四邊形面積也是 $\frac{1}{3} \Delta ABC$ ，則這兩條直線的交點 P 正是我們所要求的。

【引理】

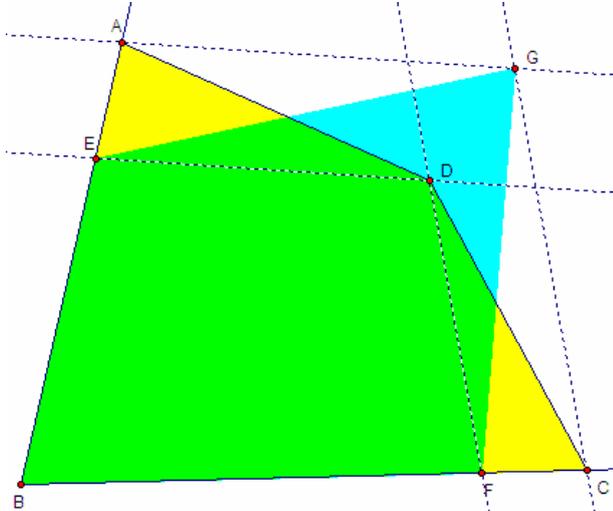
在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分別在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 邊或其延長線上，作 $\overline{AG} \parallel \overline{ED}$ 、 $\overline{CG} \parallel \overline{FD}$ ，則 $\square BEGF = \square ABCD$ 。

證明：

Case1： E 、 F 皆在邊上

因 $\Delta GED = \Delta AED$ ， $\Delta GDF = \Delta CDF$ (同底等高)

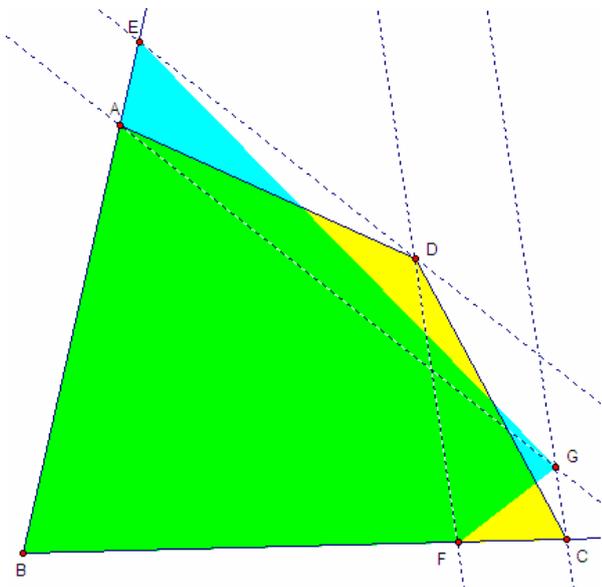
$\therefore \square BEGF = \square BEDF + \Delta GED + \Delta GDF = \square BEDF + \Delta AED + \Delta CDF = \square ABCD$ 。



Case2：其中一點在邊上，另一點在邊的延長線上(不失一般性，我們假設 E 在 \overline{AB} 的延長線上)

因 $\Delta GED = \Delta AED$ ， $\Delta GCF = \Delta GCD$ (同底等高)

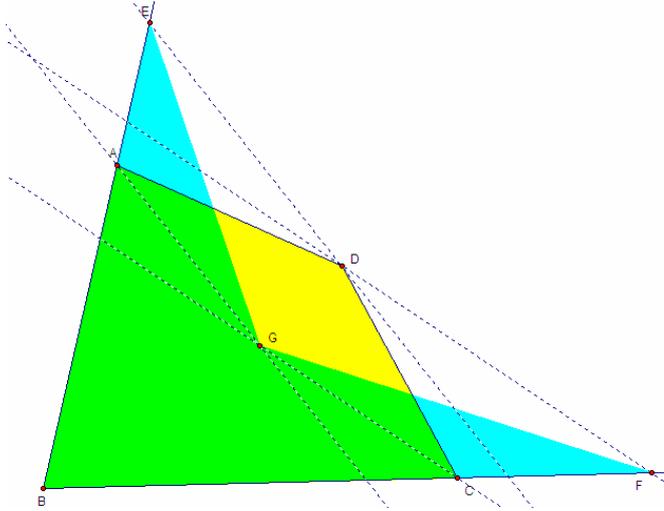
$\therefore \square BEGF = \text{五邊形 } BEDGC - \Delta GED - \Delta GCF = \text{五邊形 } BEDGC - \Delta AED - \Delta GCD = \square ABCD$ 。



Case3：兩點都在邊的延長線上

因 $\triangle GAE = \triangle GAD$ ， $\triangle GCF = \triangle GCD$ (同底等高)

$$\therefore \square BEGF = \square BAGC + \triangle GAE + \triangle GCF = \square BAGC + \triangle GAD + \triangle GCD = \square ABCD$$



狀況僅此三種，而三種狀況皆成立，所以引理成立。

二、找出三角形面積等分點

【定理一】

$\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 上的任意點， M_1 、 M_2 、 M_3 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 上的中點， G 為重心。

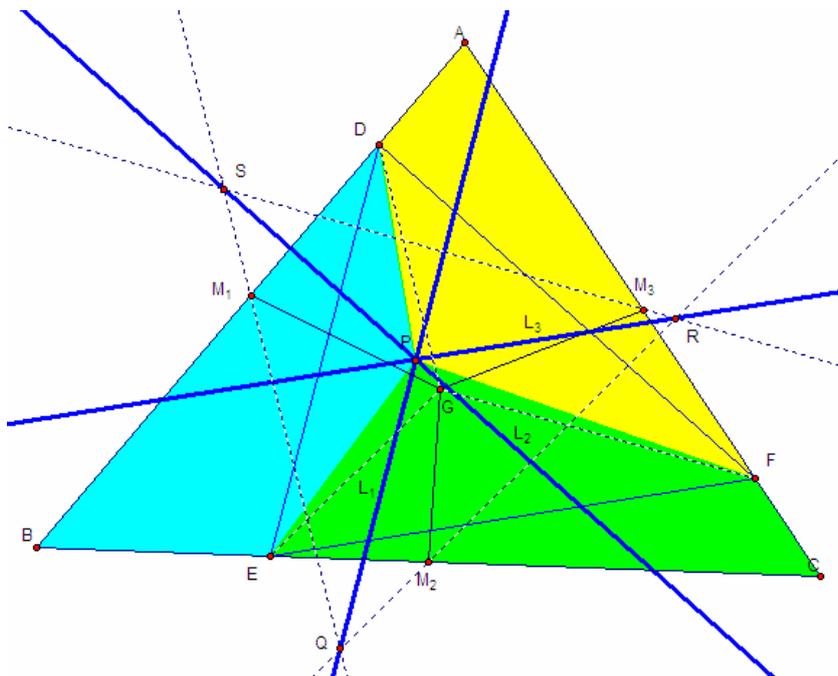
1. 作 $\overline{M_1Q} \parallel \overline{GD}$ ， $\overline{M_2Q} \parallel \overline{GE}$ ，兩者交於 Q 點；

2. 過 Q 作 $L_1 \parallel \overline{DE}$ ；

3. 同理，作 $\overline{M_2R} \parallel \overline{GE}$ ， $\overline{M_3R} \parallel \overline{GF}$ ，兩者交於 R 點 (Q 、 M_2 、 R 在同一條直線上)

過 R 作 $L_2 \parallel \overline{EF}$ ， L_1 、 L_2 交於 P 點。

則 $\square ADPF = \square BEPD = \square CFPE = \frac{1}{3} \triangle ABC$ 。(另外，用同樣方法作出 L_3 ，則 L_3 一樣通過 P 點)



證明：

由引理可得知 $\square M_1BM_2G = \square BEQD$

因 $L_1 \parallel \overline{DE} \Leftrightarrow \triangle PED = \triangle QED$ ， $\therefore \square BEPD = \triangle BED + \triangle PED = \triangle BED + \triangle QED = \square BEQD$

$= \square M_1BM_2G = \frac{1}{3} \triangle ABC$ 。

同理可推得 $\square CM_2GM_3 = \square CFRE = \square CFPE = \frac{1}{3} \triangle ABC$ ，

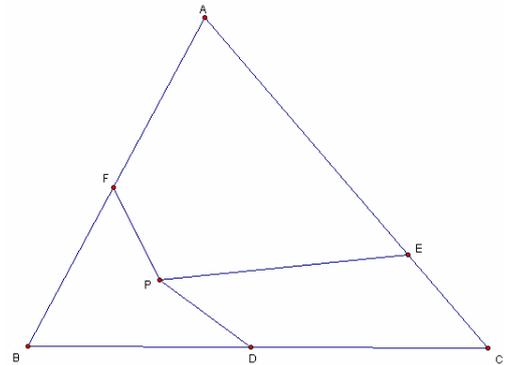
最後， $\square ADPF = \triangle ABC - \square BEQD - \square CFPE = \frac{1}{3} \triangle ABC$ 。a

所以， $\square ADPF = \square BEPD = \square CFPE = \frac{1}{3} \triangle ABC$ 。

三、三等分面積的推廣形式

我們將問題延伸成如此：

如右圖，有一 $\triangle ABC$ ， D 、 E 、 F 為 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 上的任意點，現在我們在內部找一點 P ，使 $\square AEPF : \square BDPF : \square CDPE = \alpha : \beta : \gamma$



【引理一】(右下圖)：

如圖， Q 點為 \overline{BC} 上給定的點，

$\overline{BM_1} : \overline{BC} = \alpha : \beta$

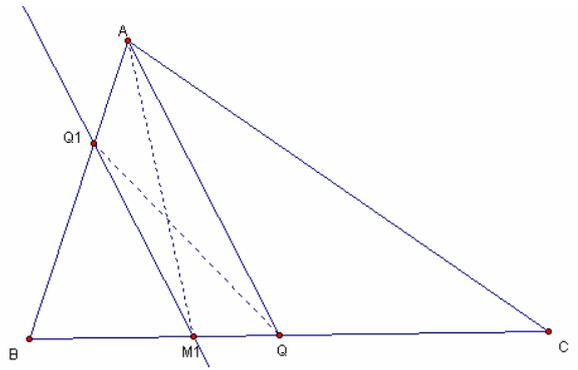
作 $\overline{M_1Q_1} \parallel \overline{AQ}$ 交 \overline{AB} 於 Q_1 ，

則 $\triangle BQQ_1$ 面積 $= \frac{\alpha}{\beta} \triangle ABC$ 。

證明：

因為 $\triangle BAM_1 = \frac{\alpha}{\beta} \triangle ABC$

且 $\triangle AQ_1M_1 = \triangle QQ_1M_1$ (同底等高)



$\therefore \triangle BQQ_1 = \triangle BQ_1M_1 + \triangle QQ_1M_1 = \triangle BQ_1M_1 + \triangle AQ_1M_1 = \triangle BAM_1 = \frac{\alpha}{\beta} \triangle ABC$ 。

【引理二】(右圖)：

如圖， Q 點為 \overline{BC} 上給定的點， $\overline{BM_1} : \overline{BC} = \alpha : \beta$

作 $\overline{M_1Q_1} \parallel \overline{AQ}$ 交 \overline{AB} 於 Q_1 ，則 $\triangle BQQ_1$ 面積 $= \frac{\alpha}{\beta} \triangle ABC$ 。

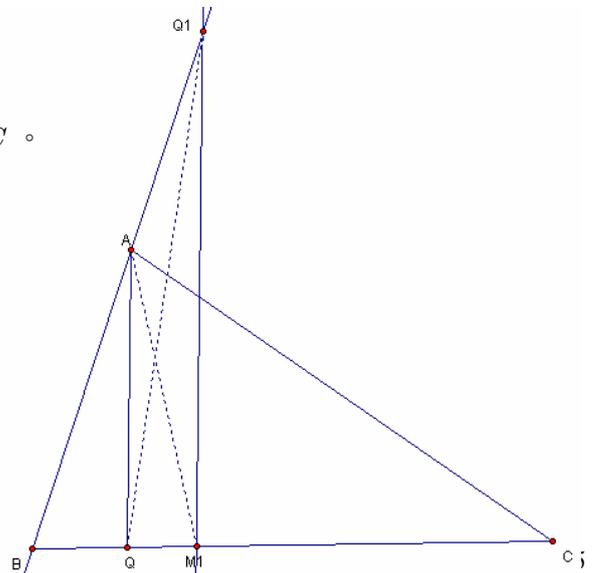
證明：

已知 $\triangle BAM_1 = \frac{\alpha}{\beta} \triangle ABC$ (同高時面積比等於底長比)

$\triangle AQM_1 = \triangle AQQ_1$ (同底等高)

$\therefore \triangle BQQ_1 = \triangle BAQ + \triangle AQQ_1 = \triangle BAQ + \triangle AQM_1$

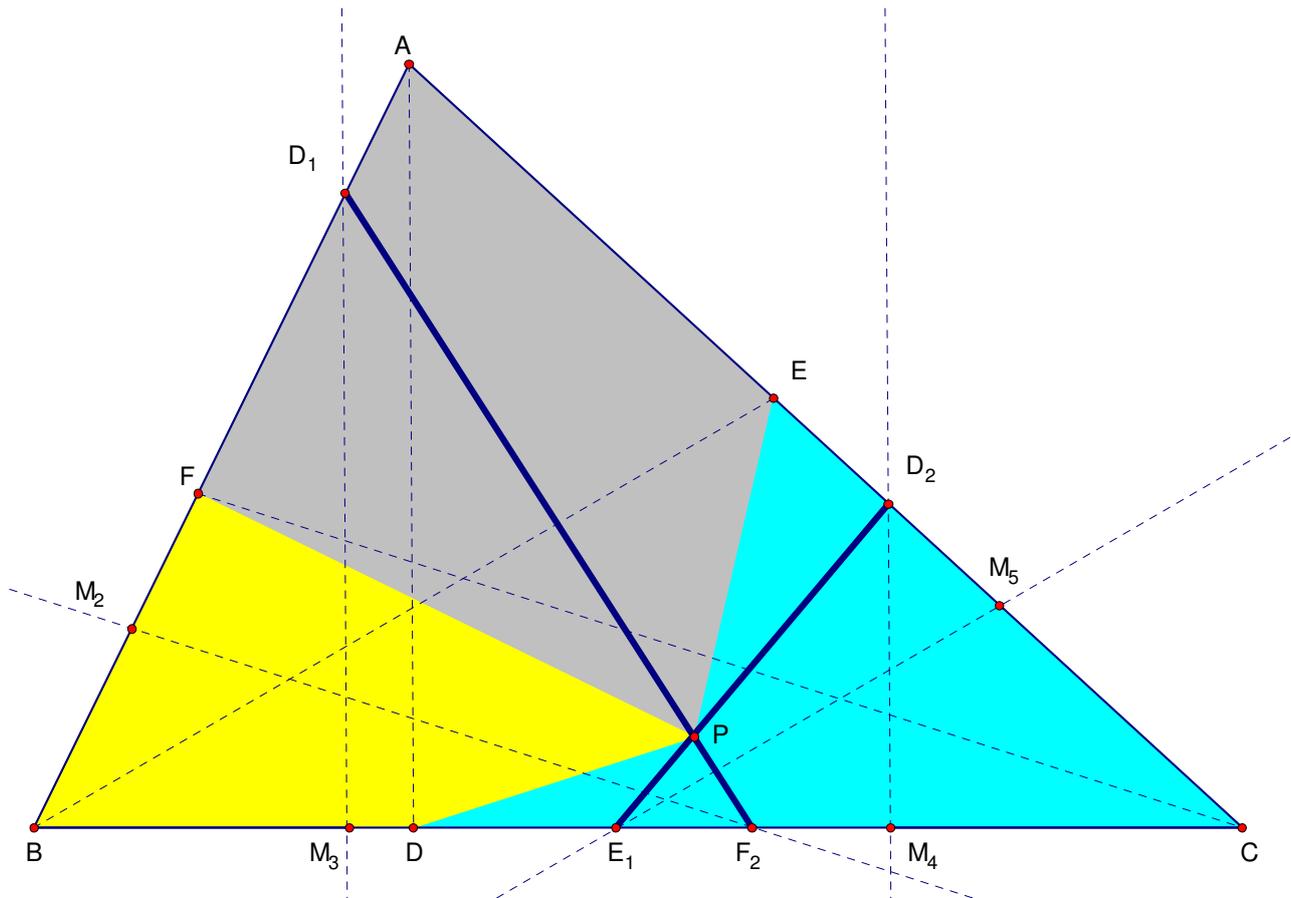
$= \triangle BAM_1 = \frac{\alpha}{\beta} \triangle ABC$ 。



利用這兩個引理，我們可得到下列推廣的面積等分點：

【定理二】

1. 以 B 為中心，作分點 M_2 、 M_3 ，使 $\overline{BM_2} : \overline{AB} = \overline{BM_3} : \overline{BC} = \beta : \alpha + \beta + \gamma$ 。
 2. 再以 C 為中心，作分點 M_4 、 M_5 ，使 $\overline{CM_4} : \overline{BC} = \overline{CM_5} : \overline{AB} = \gamma : \alpha + \beta + \gamma$ 。
 3. 連 \overline{AD} ，過 M_3 、 M_4 作 $\overline{D_1M_3}$ 、 $\overline{D_2M_4} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{D_1M_3}$ 交 \overline{AB} 於 D_1 ， $\overline{D_2M_4}$ 交 \overline{CA} 於 D_2 。
 4. 連 \overline{CF} ，過 M_2 作 $\overline{F_2M_2} \parallel \overline{CF}$ ， $\overline{F_2M_2}$ 交 \overline{BC} 於 F_2 。
 5. 連 \overline{BE} ，過 M_5 作 $\overline{E_1M_5} \parallel \overline{BE}$ ， $\overline{E_1M_5}$ 交 \overline{BC} 於 E_1 。
 6. 連 $\overline{D_1F_2}$ 、 $\overline{D_2E_1}$ ，兩線交於 P 點。
- 則 $\square AEPF : \square BDPF : \square CDPE = \alpha : \beta : \gamma$ 。



證明：

$$\text{由引理知 } \triangle BDD_1 = \triangle BFF_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \triangle ABC \Rightarrow \triangle DFD_1 = \triangle DFF_2 \Rightarrow \overline{DF} \parallel \overline{D_1F_2}$$

$$\triangle CEE_1 = \triangle CDD_2 = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \triangle ABC \Rightarrow \triangle D_2E_1E = \triangle D_2E_1D \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{D_2E_1}$$

所以， $\triangle DFP = \triangle DFD_1 = \triangle DFF_2$ 。

$$\text{也就是說 } \square BDPF = \triangle BDF + \triangle DFP = \triangle BDF + \triangle DFF_1 = \triangle BDD_1 = \triangle BFF_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \triangle ABC。$$

$$\text{同理，我們可得知 } \square CDPE = \triangle CEE_1 = \triangle CDD_2 = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \triangle ABC$$

$$\text{最後， } \square AEPF = \triangle ABC - \square BDPF - \square CDPE = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \triangle ABC，\text{得証。}$$

四、四邊形的面積等分點

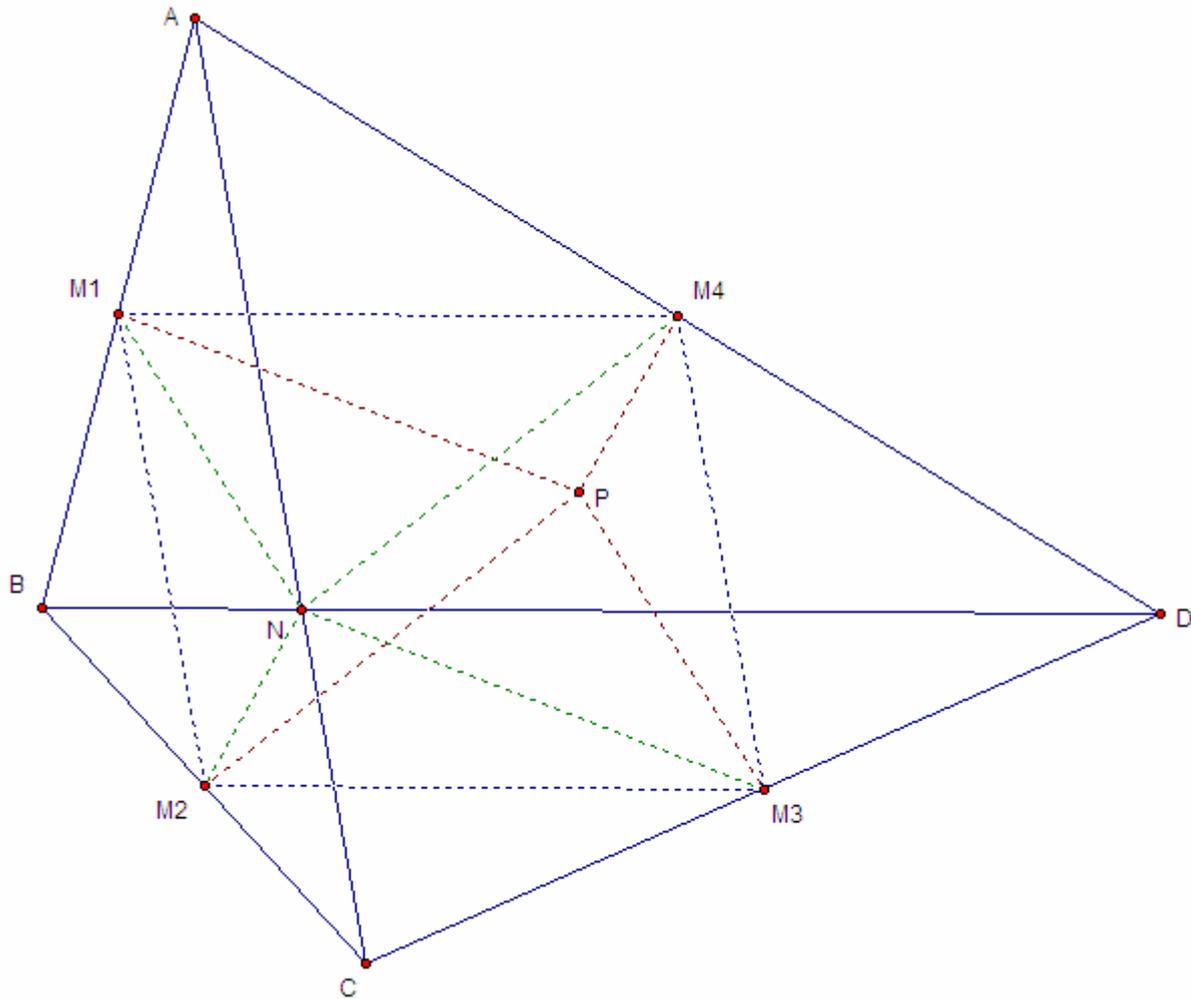
另外，利用前面的方法，我們找到了四邊形中點對應的面積等分點，如下：

【定理三】

平面上已知 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 中點，設 N 為 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交點，從 M_1 點作平行 $\overline{NM_3}$ 且等長之線段，設 P 點為其端點，則 P 滿足：

$\overline{NM_4} = \overline{M_2P}$ ， $\overline{NM_1} = \overline{M_3P}$ ， $\overline{NM_2} = \overline{M_4P}$ ， $\overline{NM_3} = \overline{M_1P}$ ，且 P 為面積等分點。

即 $\square AM_1PM_4 = \square BM_2PM_3 = \square CM_2PM_3 = \square DM_3PM_4 = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。



證明：

因 $\overline{NM_3} = \overline{M_1P}$ 且 $\overline{M_2M_1} = \overline{M_3M_4} \Rightarrow \overline{NM_4} = \overline{NM_3} + \overline{M_3M_4} = \overline{M_2P}$ ，即 $\triangle NM_4PM_2$ 為平行四邊形。

因 $\overline{PM_1} = \overline{M_3N}$ ， $\overline{PM_4} = \overline{M_2N}$ ， $\overline{M_4M_1} = \overline{M_3M_2} \Rightarrow \triangle NM_2M_3 \cong \triangle PM_1M_4$ (SSS)

又知 M_2 、 M_3 為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 中點

$$\therefore \triangle PM_1M_4 = \triangle NM_2M_3 = \frac{1}{4} \triangle CBD$$

所以 $\square AM_1PM_4 = \triangle AM_1M_4 + \triangle M_1M_4P = \triangle AM_1M_4 + \triangle CM_2M_3 = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。

同理， $\square BM_2PM_3 = \square CM_2PM_3 = \square DM_3PM_4 = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。

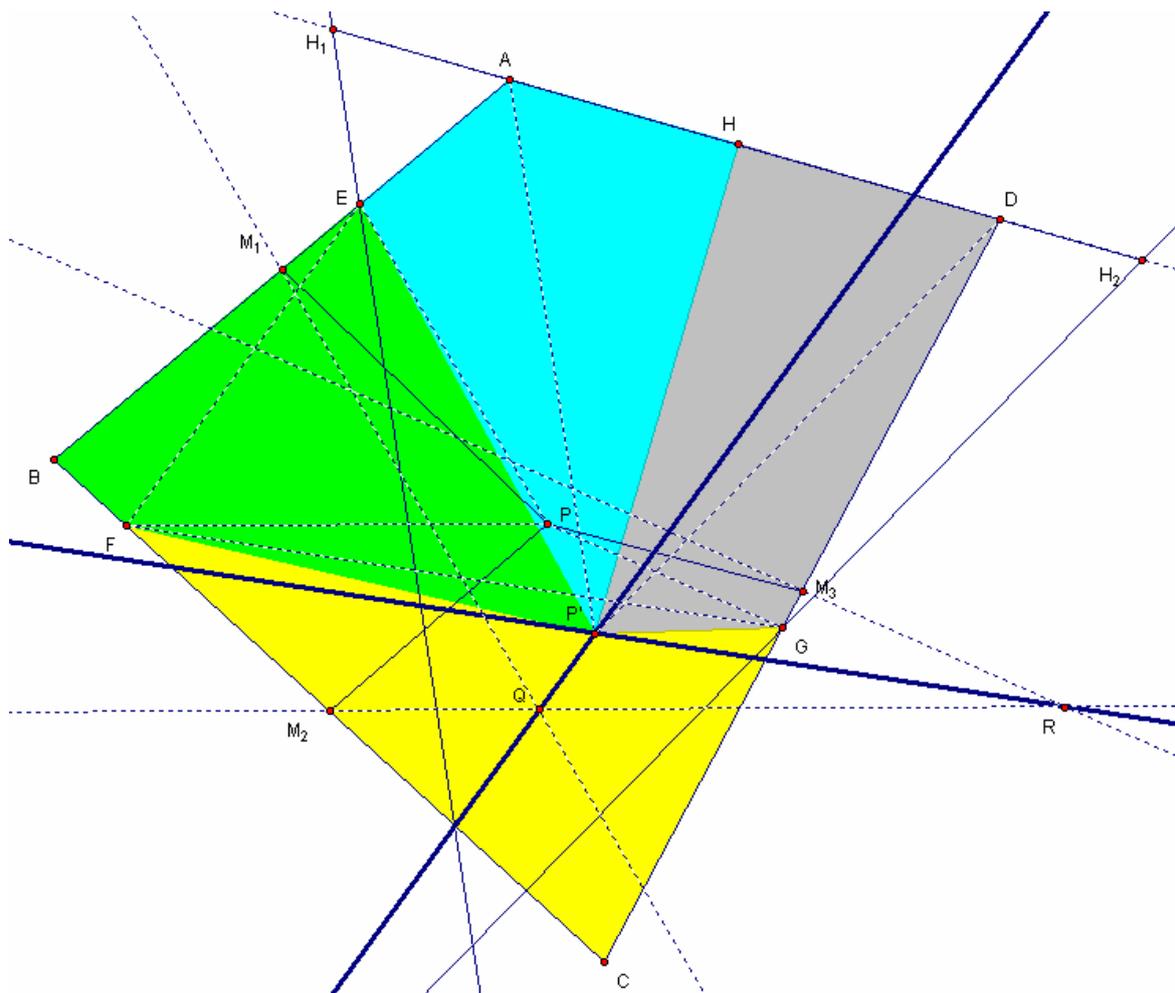
利用定理三及引理，我們可以得到任意點的四邊形面積等分點作法。

【定理四】

設 M_1 、 M_2 、 M_3 為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 邊上中點， E 、 F 、 G 為 $\square ABCD$ 中 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 邊上任意點。則

1. 可找到一點 P' ，使得 $\square EBF P' = \square GCF P' = \frac{1}{4} \square ABCD$

2. 可在 \overline{AD} 上找一點 H ，使得 $\square GDHP' = \square EAHP' = \frac{1}{4} \square ABCD$



【作法】：

由定理一，令 P 為四邊形內部一點，符合 $\square BM_1 P M_2 = \square CM_2 P M_3 = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。

1. P' 點作法

- (1) 作 $\overline{M_1 Q} \parallel \overline{PE}$ 、 $\overline{M_2 Q} \parallel \overline{PF}$ ，兩者交於 Q 點
- (2) 過 Q 作 $L_1 \parallel \overline{EF}$
- (3) 作 $\overline{M_3 R} \parallel \overline{PG}$ 、 $\overline{M_2 R} \parallel \overline{PF}$ (M_2 、 Q 、 R 在同一條線上)，兩者交於 R 點
- (4) 過 R 作 $L_2 \parallel \overline{FG}$
- (5) L_1 、 L_2 交於 P' ，則 P' 即為所求

2. H 點作法

- (1) 作 $\overline{EH_1} \parallel \overline{P'A}$ 交 \overline{AD} 於 H_1 、 $\overline{GH_2} \parallel \overline{P'D}$ 交 \overline{AD} 於 H_2
 (2) 取 $\overline{H_1H_2}$ 中點 H ，則 H 即為所求

證明：

因 $\overline{M_1Q} \parallel \overline{PE}$ 、 $\overline{M_2Q} \parallel \overline{PF}$ ，由最前面的引理可得知 $\square EBFQ = \square M_1BM_2Q = \frac{1}{4} \square ABCD$

因 $L_1 \parallel \overline{EF} \Leftrightarrow \triangle P'EF = \triangle QEF \Leftrightarrow \square EBFQ = \square EBFQ = \frac{1}{4} \square ABCD$

同理，我們可得知 $\square GCFP' = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。

因 $\overline{P'A} \parallel \overline{EH_1} \Leftrightarrow \triangle P'AE = \triangle P'AH_1$ ， $\overline{P'D} \parallel \overline{GH_2} \Leftrightarrow \triangle P'DG = \triangle P'DH_2$

H 為 $\overline{H_1H_2}$ 中點 $\Leftrightarrow \triangle P'HH_1 = \triangle P'HH_2$

$\therefore \triangle P'HH_1 = \triangle P'AH + \triangle P'AH_1 = \triangle P'AH + \triangle P'AE = \square EAHP'$

$\triangle P'HH_2 = \triangle P'DH + \triangle P'DH_2 = \triangle P'DH + \triangle P'DG = \square GDHP'$

$\therefore \triangle P'HH_1 = \triangle P'HH_2 \Rightarrow \square EAHP' = \square GDHP' = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。

$\therefore \square EAHP' = \square EBFQ = \square GCFP' = \square GDHP' = \frac{1}{4} \square ABCD$ 。

【推論】當 E 、 G 為中點時，則 $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ 。

證明：

因 M_3 為 \overline{CD} 中點 $\Rightarrow \triangle CP'M_3 = \triangle DP'M_3$

又 $\square CFP'M_3 = \square DHP'M_3$

$\Rightarrow \triangle CFP' = \square CFP'M_3 - \triangle CP'M_3 = \square DHP'M_3 - \triangle DP'M_3 = \triangle DHP'$

同理， $\triangle BFP' = \triangle AHP'$

$\therefore \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{\triangle AHP'}{\triangle AHP' + \triangle DHP'} = \frac{\triangle BFP'}{\triangle BFP' + \triangle CFP'} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ ，得証。

陸、研究結果

一、平面上三角形面積等分點 P 的找法。(定理一)

二、三角形的特殊等分方法(定理二)

三、四邊形四邊中點的面積等分點 P 的向量性質：

$$\overline{EP} = \overline{NG}, \overline{FP} = \overline{HN}, \overline{GP} = \overline{NE}, \overline{HP} = \overline{NF} \text{ (定理三)}$$

四、四邊形四任意點時面積等分點的作法(定理四)

五、當四邊形取二對邊中點，二對邊任意點時，任意點符合 $\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}$

柒、討論與展望

我們希望可以找到五邊形、六邊形……至凸多邊形的邊上中點所對應的面積等分點。只要我們可以找到，那麼我們便可以用最前面的引理及平行線的想法來作出任意點的面積等分點。

另外，如同定理二，我們希望能找到四邊形的特殊等分法。

捌、參考資料及其他

[1]民國 82 年東區數學能力競賽試題

[2]龍騰高級中學數學課本 第三冊

[3]網路：<http://www.mathland.idv.tw/jsp-all/equalare.htm>

【評語】 040420

- 1) 作品說明書當中以正方形符號來代表四邊形，是非常不妥當的表示法。即使用文字「四邊形」三字來取代該符號都不會添加如此的混亂思考。
- 2) 本題材為幾何作圖題，極具動態幾何展示性，本作品應該從這個角度來進行探討。