中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040415

過橋問題

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 張蒔曦 高二 賴德全	繆友勇 林世偉

關鍵詞：　過橋問題、最短時間、最佳方法

臺北市立建國高級中學九十六學年度科學展覽作品說明書內容

作品名稱：過橋問題

摘要

過橋問題是近代討論的一個數學問題，最早出現在 1981 年的益智遊戲書(參考資料一)，它引起一些數學家的興趣，但他們的研究主要是 2 人同時過橋的部分，對於 3 人及多人同時過橋的研究，討論的比較少，故我希望從數學的角度入手，探討一次 3 人、4 人過橋問題提出數學模式和最佳過橋方法。

壹、 研究動機

當數學課上到排列組合的應用時，我心中不斷思考著學習組合的意義何在，當我上網瀏覽時，偶然看到一個遊戲：有五個人在橋的一端，每個人都有個數字代表時間，一次移動 2 個人。遊戲的目的就是要讓其時間小於畫面左邊的時間。我突然發現過橋方法的數目是有限的，且可以用組合得出，故學習求出組合的數目便可尋找最好的過橋方法，之後便開始好奇人數更多的時候該怎麼解，於是就有了這個專題。

貳、 研究目的

一、對一次過橋 3 人的情況求出最短時間及最佳方法。

二、推廣到一次過橋 4 人的情況求出最短時間及最佳方法。

參、 研究設備及器材

電腦、紙、筆。

肆、 研究方法及過程

一、遊戲規則

在一個天黑的晚上，有 n 個人想要藉由一座橋從南岸過到北岸，而每個人的過橋時間都不一樣，橋一次可承受 3 人的重量。他們手上只有一盞燈，所以每次過去一定要有人拿燈回來。當 3 個人過橋時，走得快的人要配合走得慢的人，過橋時間時以走得慢的人的時間來計算，遊戲的目的是使得整個過橋的總時間縮到最短。

二、研究步驟

(一) 在所有可行的過橋方法中用邏輯思考刪去時間較慢的解；

(二) 比較剩下方法的所需時間大小；

(三) 一次過橋 3 人做完後，開始以同樣的邏輯研究一次過橋 3 人的情況。

(四) 繼續研究一次過橋 4 人的情況。

三、研究過程

(一) 一次 3 人過橋的情況

1. 2 移法-3、4 移法-3 與 6 移法-3

我們認爲當一次 3 人過橋時，有 3 個移動法，分別是：

2 移法-3： R[(1 ,n-1,n),1]

時間爲：$t_n + t_1$

4 移法-3： R[(1,2,r),1] + R[(n-2,n-1,n),2]

時間爲：$t_n + t_r + t_2 + t_1$

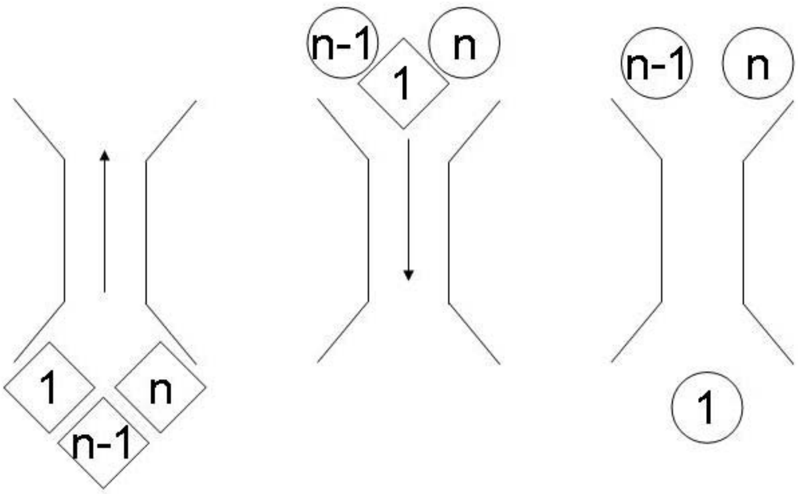
6 移法-3： R[(3,2,1),1] + R[(n-2,n-1,n),2] + R[(n-5,n-4,n-3),3]

時間爲：$t_n + t_{n-3} + 2t_3 + t_2 + t_1$

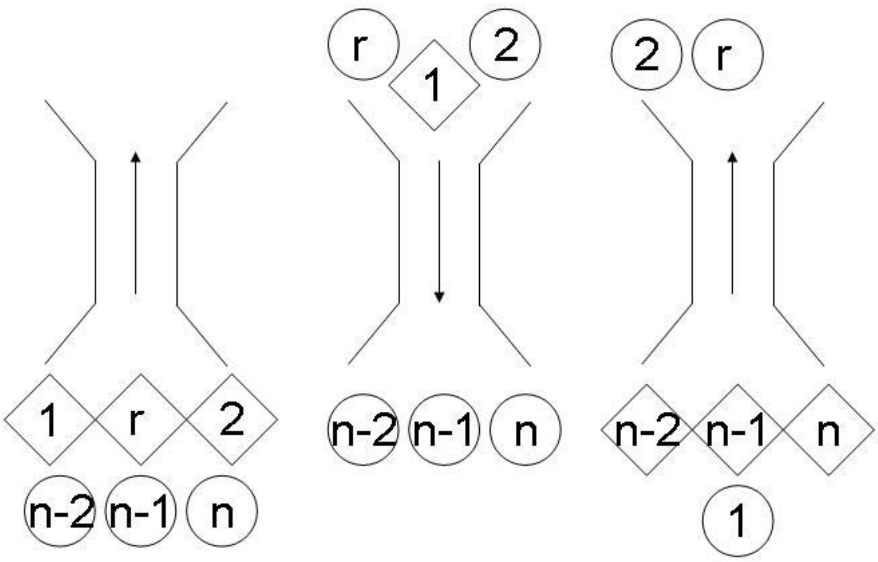
移法後的-3 代表一次 3 人過橋下的移動法。

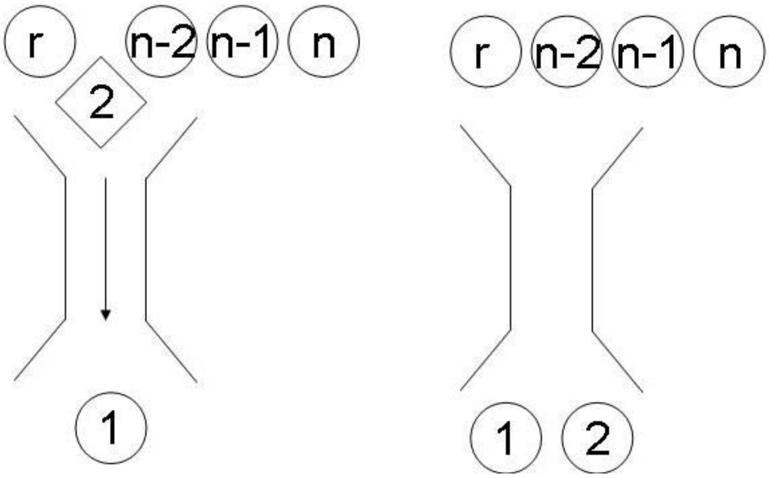
(菱形外框表示要過橋的人)

2 移法-3

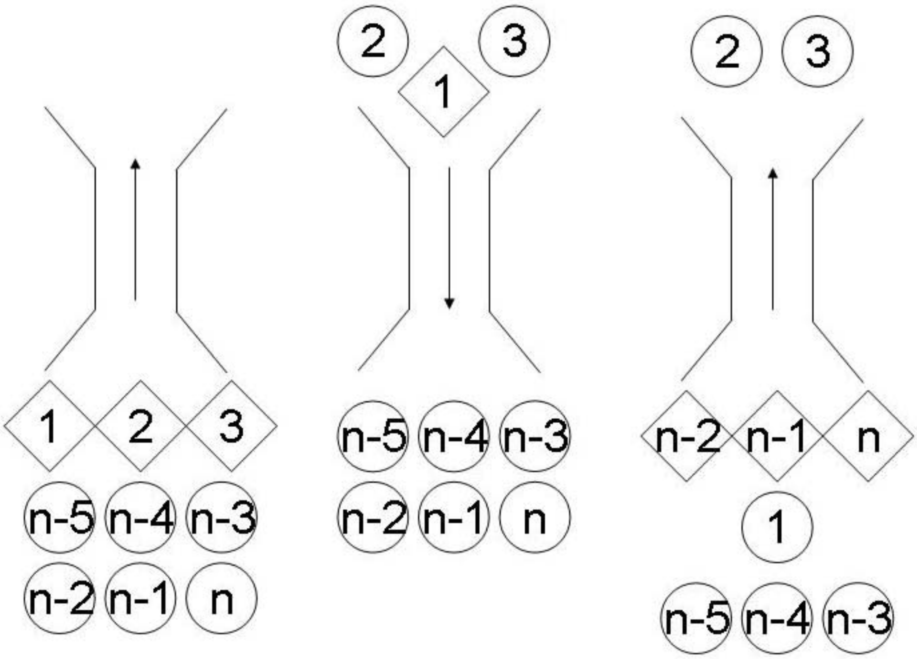


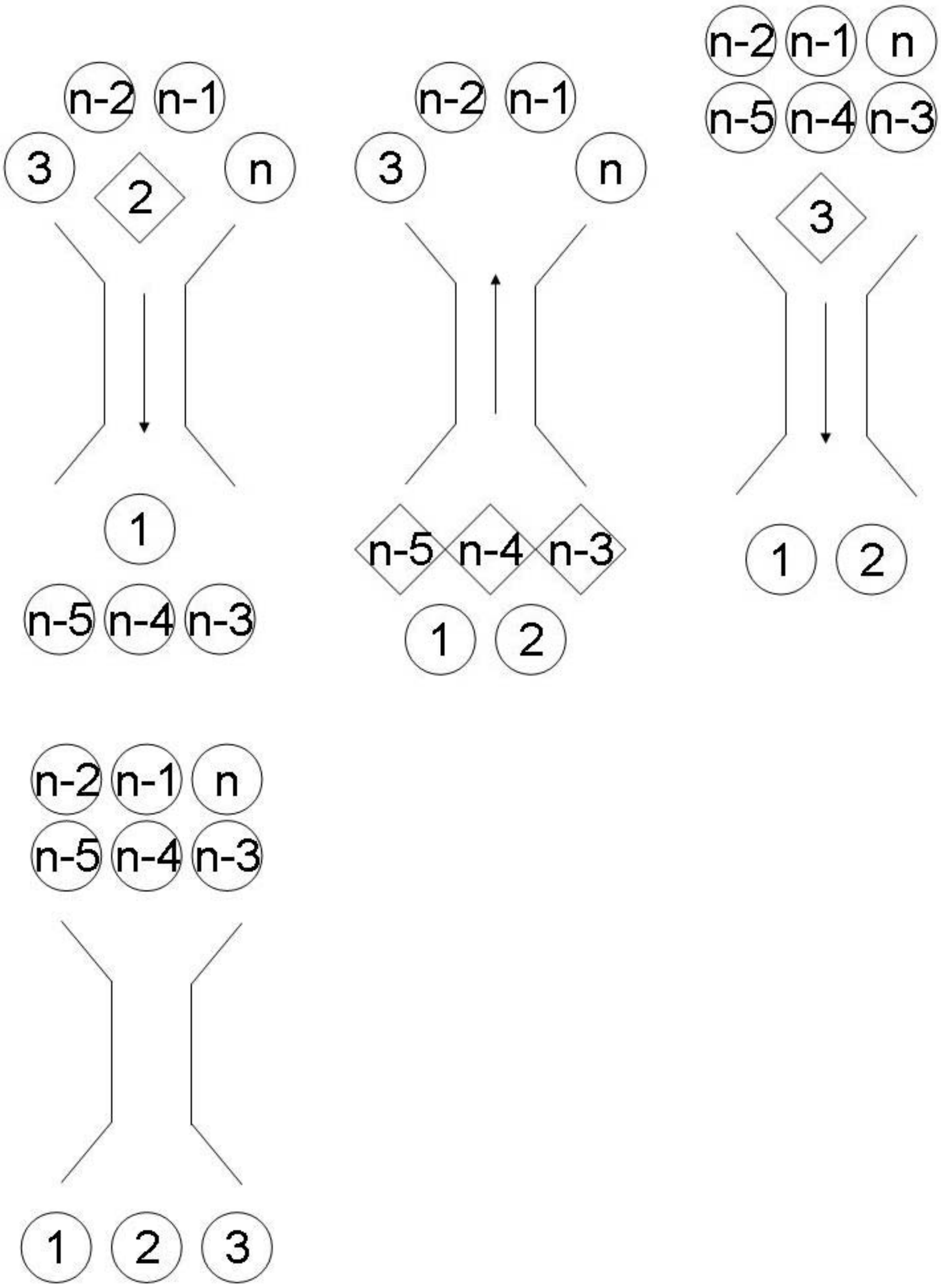
4 移法-3




r
n-2
n-1
n
2
1
r
n-2
n-1
n
1
2

6 移法-3


1
2
3
n-5
n-4
n-3
n-2
n-1
n
2
3
1
n-5
n-4
n-3
n-2
n-1
n
2
3
n-2
n-1
n
1
n-5
n-4
n-3



我們定義一去一回爲一次**移動**，符號爲 R[(x,y,z),u]，代表 x, y, z 過橋，u 回來。我們可以把移動歸納成兩類，分別是：

第一類移動：回來的人在過去的人之中。

第二類移動：回來的人不在過去的人之中。

第二類移動可分爲：

1-第二類移動：回來的人最後一次過橋到對岸是用第一類移動過橋

2-第二類移動：回來的人最後一次過橋到對岸是用第二類移動過橋

假設存在 2-第二類移動，則之前必有 1-第二類移動和第一類移動，寫出得到：

$$R[(1,r,s),1] + R[(j,k,h),r] + R[(o,p,q),j] \quad (q > p > o > h > k > j > s > r)$$

時間爲：$t_1 + t_s + t_r + t_j + t_h + t_q$

取 j=1 減少時間：

R[(1,r,s),1] + R[(1,k,h),r] + R[(o,p,q),1]　時間為： $2t_1 + t_s + t_r + t_h + t_o$

但由參考資料三，我們知道回來的人要是對岸走最快的人：

R[(1,r,s),1] + R[(1,k,h),1] + R[(o,p,q),r]　時間為： $2t_1 + t_s + t_r + t_h + t_o$

改良後時間不變，卻能方便討論。

由上可知，若過橋方法中有 2-第二類移動，則將其全部轉換成第一類移動和 1-第二類移動。

假設有一移動為 R[(h,m,n),r]，h < m < n 中，若 m < n-1，則將 m 和 m+1 對調，移動變為 R[(h,m+1,n),r]，若原本 m+1 的時間被省略，則對調後時間不變；若原本 m+1 的時間被計算，則對調後時間減少，所以時間皆不增加。

經過以上變換，可知所有 1-第二類移動皆為 R[(n, n-1, n-2),r]的形式。

僅用第一類移動的移法為 R[(n,m,1),1]，n > m，由以上討論，可改寫為 R[(n,n-1,1),1]，由於總共過橋 2 人，故稱 2 移法-3

1 個第一類移動加上 1 個 1-第二類移動的移法，表示為 R[(r,p,1),1]+ R[(n,m,h),p]，其中 n>m>h。由以上討論知 m=n-1, h=n-2 時間最短，改寫為 R[(r,p,1),1]+ R[(n,n-1,n-2),p]，令 p=2 減少時間，改寫得 R[(r,2,1),1]+ R[(n,n-1,n-2),2]，此即為 4 移法-3。

1 個第一類移動加上 2 個 1-第二類移動的移法，表示為 R[(3,2,1),1]+ R[(n,n-1,n-2),2]+ R[(m,m-1,m-2),3]，其中 n-2>m，由後面討論會知道 2 個 1-第二類移動相鄰排列，亦即 m=n-3 可減短時間，得 R[(3,2,1),1]+R[(n,n-1,n-2),2]+ R[(n-3,n-4,n-5),3]，此即為 6 移法-3。

為方便起見，我們視移動方法中的 t_1, t_2, t_3 為往返項，其餘的為過橋項。

2. 移動的說明圖

用編號 1,2….n 表示 n 個人，且 $t_1 < t_2 < t_3 \ldots\ldots < t_n$，將每個人最後一次過橋的情況分類，將該次過橋時間有被計算到的編號畫"O"，沒被計算到的畫"X"，由此畫出一個說明圖。

下面列出三種移法的說明圖：

2 移法-3　R[(1, n - 1, n),1]

1	2	3	…	n-1	n
				×	○

4 移法-3　$R[(1,2,r),1]+R[(n-2,n-1,n),2]$

1	2	3	…	r	…	n-2	n-1	n
				○		×	×	○

6 移法-3　$R[(3,2,1),1]+R[(n-2,n-1,n),2]+R[(n-5,n-4,n-3),3]$

1	2	3	…	n-5	n-4	n-3	n-2	n-1	n
				×	×	○	×	×	○

3. 說明圖的性質

假設存在 XO 與 O 相鄰，且排在 O 前面的情況，如下圖：

1	2	3	4	5	6	7	8
					×	○	○

時間為：t_7+t_8

則將其調整為

1	2	3	4	5	6	7	8
					○	×	○

時間為：t_6+t_8

可得 O 必排在 XO 之前。

同理可證，XO 必排在 XXO 之前。

下面是一個 13 人過橋的例子：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			×	○	×	○	○	×	×	○	×	○

時間為：$t_5+t_7+t_8+t_{11}+t_{13}$

排列 XXO 和 XO 得到

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			×	○	×	○	○	×	○	×	×	○

時間為：$t_5+t_7+t_8+t_{10}+t_{13}$

排列 O 和 XO 得到

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			○	×	○	×	○	×	○	×	×	○

時間為：$t_4+t_6+t_8+t_{10}+t_{13}$

明顯地，排列後的過橋項時間減短，而往返項時間不變，故總過橋時間縮短。

綜合所有討論得知，在時間最短的限制下，O 排在前面編號、XO 中間，XXO 最後的順序，是必然發生的。

4. 固定 XXO 數，尋求最佳方法

透過例子討論。假定 14 人時僅有 2 個 XXO(排在最後)，示意如下：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
× × ○ × × ○

原本 4~8 人的方法是無法確定的。但 XXO 數固定後，能選擇的方法便十分有限。固定 XXO 數後，可以有 2 種過橋方法，將 2 個過橋方法的說明圖畫出。

第一種過橋方法

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
× ○ × ○ × ○ × × ○ × × ○

第二種過橋方法

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
○ ○ × ○ × ○ × × ○ × × ○

比較兩者移動 3~14 的過橋時間，由於 XO 即爲 2 移法-3，兩種方法皆用 2 移法-3 移動 5,6,7,8，因此只比較 3,4,9,10,11,12,13,14。

將兩者的時間列出，得到 $t_{14}+t_{11}+t_4+2t_3+t_2+2t_1$，第二種過橋方法的花費時間則是 $t_{14}+t_{11}+t_4+t_3+2t_2+2t_1$。這顯示第二種過橋方法的總時間比第一種快。

將其推廣，我們的策略即是：討論 k 個 XXO 數時，能達到的極短時間，再比較不同 XXO 數的最佳過橋方法的時間。

下圖爲 n 人過橋、k 個 XXO 數的最佳過橋方法：

1 2 ... r-1 r r+1 r+2 ... p-1 p p+1 p+2 p+3 ... q-2 q-1 q q+1 q+2 q+3 ... n
○ ○ × ○ × ○ × × ○ × × ○ × × ○ ○

其中 r 之後的移動爲 2 移法-3 的 XO，p 之後的移動爲 6 移法-3 的 XXOXXO (p 爲最後一個 2 移法-3 之末)，q 以後則爲 4 移法-3 中的 XXO。

下面用 r(O) 表示 r 爲 O 的最後一個編號。設 r(O)的過橋方法，達到總時間的最小值，則其時間必不小於 r-2(O)的過橋時間。考慮 r-1 , r , q , q+1 , q+2 , q+3 , q+4 , q+5 八個人，r(O)的過橋方法，移動他們的時間爲 $t_{q+5}+t_{q+2}+t_r+t_{r-1}+2t_2+2t_1$；r+2(O)的過橋方法，則爲 $t_{q+5}+t_{q+2}+t_r+2t_3+t_2+2t_1$。比較後得到：

$t_{r-1}\leq 2t_3-t_2$

同理，r+2(O)的過橋時間，亦不小於 r(O)的過橋時間：

$2t_3-t_2\leq t_{r+1}$

將 2 式合併，得到

$t_{r-1} \le 2t_3 - t_2 \le t_{r+1}$……(1)

討論 r 的奇偶性，若 k 爲奇數(k 爲 XXO 數)，則必有奇數個 4 移法-3，而 n 決定 4 移法-3 的前段從何處開始，因此 n+k 的奇偶性與 r 相同。所以(1)式的 r 最多有 2 個解，且這 2 個解的過橋時間相同。

下面給出一個 n=17，k=3 的例子

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
		○	○	×	○	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○

如圖，當 n 爲奇數時，1,2,3 會在最後一起過橋，故此圖從 4 開始標 O。又 k=3，代表 4 移法-3，也就是 O 的個數爲奇數。所以 r 的奇偶性與 n+k 相同。

5. 比較不同 XXO 數下的最佳方法

我們透過上面的不等式決定 r 的值，而這個值在一般情況下不變，於是我們便可在確定 r 的值之後，比較不同 XXO 數的最佳過橋方法，以求得整個過橋問題的解。

我們先討論 k 爲偶數的情況。再與 k 爲奇數的情況比較。

下圖是 k 爲偶數時，k 個 XXO 的過橋方法：

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	...	p-1	p	p+1	p+2	p+3	...	q-2	q-1	q	q+1	q+2	q+3	...	n
			○	○	×	○		×	○	×	×	○		×	×	○	×	×	○		○

r 之後爲 XO，p 之後爲 XXO，p= n-3k。

假設某個 k 達到過橋時間的最小值，則其時間不大於 k+2 個 XXO 時的最佳過橋方法的過橋時間。比較 p , p-1 , p-2 , p-3 , p-4 , p-5 六人的過橋時間，得到

$$t_p + t_{p-2} + t_{p-4} + 3t_1 \le t_p + t_{p-3} + 2t_3 + t_2 + t_1$$

移項後得到

$$t_{p-2} - t_{p-3} + t_{p-4} \le 2t_3 + t_2 - 2t_1$$

同理，其時間亦不大於 k-2 個 XXO 時的最佳過橋方法的過橋時間，可得

$$2t_3 + t_2 - 2t_1 \le t_{p+4} - t_{p+3} + t_{p+2}$$

將 2 式合併，得到

$t_{p-2} - t_{p-3} + t_{p-4} \le 2t_3 + t_2 - 2t_1 \le t_{p+4} - t_{p+3} + t_{p+2}$……(2)

假設 p 的最小解爲 p_0，則由下式可知，p_0+8 不符合(2)式。

$$t_{(p_0+8)-2} - t_{(p_0+8)-3} + t_{(p_0+8)-4} = t_{p_0+6} - t_{p_0+5} + t_{p_0+4}$$
$$> t_{p_0+4} > t_{p_0+4} - t_{p_0+3} + t_{p_0+2} > 2t_3 + t_2 - 2t_1$$

因爲 p= n-3k，且 k 爲偶數，所以 p 最多有 2 組解，且 2 組解的時間相同。

若 k 爲奇數，重覆相同的討論，亦能得到(2)式的結論。

到此，一般情況的討論已經結束。首先，分別在 k 爲奇或偶數的情況決定 r 和 p，最後比較兩者的最短時間。

然而，這個方法有 2 種不適用的情況：第一種是(2)式決定的 k 值，小於 r 所決定的 4 移法-3 數目的情況，第二種是(2)式決定的 p 值小於 r 的情況。

6. 特殊情況(一)：k 值小於 4 移法-3 數

當 r 所定的 4 移法-3 數大於 k 決定的 XXO 數時，因 r 值代表 4 移法-3 的數目，同時也代表 XXO 數的下限(因一個 4 移法-3 會產生一個 XXO)，當 XXO 數小於 4 移法-3 數時，r 將無法維持原來的值，但之前關於 r 值的判斷式仍然成立，也就是說新的 r 仍然要盡可能的大才會使過橋時間減短，這也意味著沒有 6 移法-3 的存在，這時 k 值改變，所根據的不等式亦將發生變化，說明如下：

下圖是第一種特殊情況的過橋方法：

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	...	p-1	p	p+1	p+2	p+3	...	n
			○	○	×	○		×	○	×	×	○		○

基於相同的理由，先討論 k 爲偶數的情況。假設某個 k 的過橋時間最小，則其花費時間不大於 k+2 和 k-2 個 XXO 的過橋時間。比較 k 與 k+2 個 XXO 的過橋方法，僅 p , p-1 , p-2 , p-3, p-4 , p-5 , r+1 , r+2 有差異，比較後得到

$$t_p + t_{p-2} + t_{p-4} + t_{r+2} + 4t_1 \leq t_p + t_{p-3} + t_{r+2} + t_{r+1} + 2t_2 + 2t_1$$

移項後得到

$$t_{p-2} - t_{p-3} + t_{p-4} - t_{r+1} \leq 2t_2 - 2t_1$$

上式乍看之下有 r 與 p，兩個未知數，但由於之前提到 6 移法-3 在此情況下不存在，故 p 和 r 存在關係如下：

$$\frac{n-p}{3} + f(n) = r$$

其中 $f(n) = \begin{cases} 3, 當n是奇數 \\ 2, 當n是偶數 \end{cases}$

故上述不等式可改寫成：

$$t_{p-2} - t_{p-3} + t_{p-4} - t_{\frac{n-p}{3}+f(n)+1} \leq 2t_2 - 2t_1$$

同理可得

$$2t_2 - 2t_1 \leq t_{p+4} + t_{p+2} - t_{p+3} - t_{\frac{n-p}{3}+f(n)-1}$$

將 2 式合併，得到

$$t_{p-2} - t_{p-3} + t_{p-4} - t_{\frac{n-p}{3}+f(n)+1} \leq 2t_2 - 2t_1 \leq t_{p+4} - t_{p+3} + t_{p+2} - t_{\frac{n-p}{3}+f(n)-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

假設最小解為 p_0，則將 p_0+8 代入(3)的左式，得到

$$t_{p_0+6} - t_{p_0+5} + t_{p_0+4} - t_{\frac{n-(p_0+8)}{3}+f(n)+1}$$
$$> t_{p_0+4} - t_{p_0+3} + t_{p_0+2} - t_{\frac{n-p_0}{3}+f(n)-1} > 2t_2 - 2t_1$$

所以最多得到八組解，又 $p = n-3k$，故在 k 為偶數的情況下只有 2 組解，而這 2 組解的時間相等。k 為奇數時的討論亦同。

7. 特殊情況(二)：(2)式決定的 p 小於 r

第二種情況中沒有 2 移法-3 的存在，用下圖表示此情況的的過橋方法：

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	r+3	r+4	r+5	r+6	...	n-2	n-1	n
			○	○	×	×	○	×	×	○		×	×	○

此時 $r = n-3k$。假設某個 k 使得過橋時間最小，比較 k 與 k+1 個 XXO 的過橋方法，僅 r , r-1 , r-2 三人的時間有差異，比較後得到

$$t_r + t_{r-1} + t_{r-2} + 3t_2 + 3t_1 \leq t_r + 4t_3 + 2t_2 + 2t_1$$

移項後得到

$$t_{r-1} + t_{r-2} \leq 4t_3 - t_2 - t_1$$

同理可得

$$4t_3 - t_2 - t_1 \leq t_{r+2} + t_{r+1}$$

將 2 式合併，得到

$$t_{r-1} + t_{r-2} \leq 4t_3 - t_2 - t_1 \leq t_{r+2} + t_{r+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

假設 r_0 爲最小解，則 r_0+4 代入(4)的左邊得到 $t_{r_0+3}+t_{r_0+2}>t_{r_0+2}+t_{r_0+1}\geq 4t_3-t_2-t_1$。

所以上式最多有 4 個解，又 r = n–3k，故最多有 2 組解，而 2 組解的總時間相等。

然而，p 值從大於 r 變成小於 r 時會有不理想的狀況，如圖：

1 2 ... r-1 r p-1 p p+1 p+2 p+3 ... n-2 n-1 n

○ ○ × ○ × × ○ × × ○

此時沒有判斷式可以判斷 k 是否要增加，故應該先計算正常狀況(也就是圖示)的最短時間，再計算第二種特殊狀況所花的時間，最後進行比較得到最佳過橋方法。

到此，特殊情況的討論已經結束，首先用(1)式決定 r 值，接著用(2)式決定 k 值。此時對 k 值分類：

(1) k < r 所決定的 4 移法-3 數時，爲第一種特殊情況，用(3)式判斷。此時仍須與第二種特殊情況作比較。。

(2) k 值所決定的 p < r 時，爲第二種特殊情況，用(4)式判斷。此時仍須與正常情況的最佳解作比較。

(3) 其它情況即爲一般情況，此時亦須與第二種特殊情況的最佳解作比較，以決定它的最短時間。

以下舉一個例子說明：假設有 20 個人要過橋，他們的時間分別是：

2 , 8 , 14 , 16 , 17 , 18 , 25 , 26 , 28 , 30 ,31 , 34 , 35 , 39 , 40 , 42 , 43 , 46 , 47 , 50

(1) 當 k 爲偶數時，依據(1)式，以及 n+k 爲偶數，得 r=6。

由(2)式，以及 p = n-3k，得 p= 8, 14。

當 p=8 時，k=4；p=14 時，k=2，皆不大於 r 值所預測的 k=4。因此 2 種情況皆爲第一種特殊情況。

用(3)式重求 p 值，代入 n=20 得到 p=14，由 p 與 r 的關係，得 r=4，故總時間爲：

$$(t_{20}+t_3+t_2+t_1)+(t_{17}+t_4+t_2+t_1)+(t_{14}+t_1)+(t_{12}+t_1)+(t_{10}+t_1)+(t_8+t_1)$$
$$+(t_6+t_1)+t_2=t_{20}+t_{17}+t_{14}+t_{12}+t_{10}+t_8+t_6+t_4+t_3+3t_2+7t_1=324$$

((2)當 k 爲奇數時，判別式(1)(2)仍相同，故 r=7，p=11，且 p=11 時，k=3，小於 r 所決定的 k=5，符合第一種特殊情況。

用(3)式重求 p 值，得 p=11。由 p 與 r 的關係，得到 r=5，故總時間爲：

$$(t_{20}+t_3+t_2+t_1)+(t_{17}+t_4+t_2+t_1)+(t_{14}+t_5+t_2+t_1)+(t_{11}+t_1)+(t_9+t_1)$$
$$+(t_7+t_1)+t_2=t_{20}+t_{17}+t_{14}+t_{11}+t_9+t_7+t_5+t_4+t_3+4t_2+6t_1=310$$

由於 310<324，故當 k 爲奇數時，r=5、p=11，最短時間爲 310。

但之前討論到，無論如何需要使用到第二種特殊狀況的判斷式

$t_{r-1}+t_{r-2}\ \leq\ 4t_3-t_2-t_1\ \leq\ t_{r+2}+t_{r+1}$

將往返項代入得到 r=8,9,10，但皆超過原本的 r 值 6，故第二種特殊狀況不可能有最佳過橋方法。

(二)一次 4 人過橋的情況

1. 移法及說明圖

套用 3 人過橋時，說明圖的定義，表示 4 人過橋時的 4 個移法，分別是：

3 移法-4：R[(1,n-2,n-1,n),1]

說明圖　××○

時間爲：$t_n + t_1$

6 移法-4：R[(1,2,r-1,r),1] + R[(n-3,n-2,n-1,n),2]

說明圖　×○　××　×○

時間爲：$t_n + t_r + (t_1 + t_2)$

9 移法-4：R[(1,2,3,r),1] + R[(n-3,n-2,n-1,n),2] + R[(n-7,n-6,n-5,n-4),3]

說明圖　○　××　×○　×××　○

時間爲：$t_n + t_{n-4} + t_r + (t_1 + t_2 + t_3)$

12 移法-4：

R[(1,2,3,4),1] + R[(n-3,n-2,n-1,n),2] + R[(n-7,n-6,n-5,n-4),3] + R[(n-11,n-10,n-9,n-8),4]

說明圖　××　×○　××　×○　×　××○

時間爲：$t_n + t_{n-4} + t_{n-8} + (t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

下圖爲 n=25 的過橋方法

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

○×○××○ × × ○ × × × ○ × × × ○ × × × ○

2. 固定 XXXO 數，尋求最佳方法

假設下圖是 n 人過橋、k 個 XXXO 數的最佳方法組合：

1 2 … r-1 r r+1 r+2 … j-1 j j+1 j+2 j+3 … p-2 p-1 p p+1 p+2 p+3 p+4 … q … n-3 n-2 n-1 n

○○× ○ ×○× × ○ × ×○× × × ○ ○ × × ×○

其中 r 之前爲 O，j 之前爲 XO，p 之前爲 XXO，p+1 之後皆爲 XXXO，且 p=n-4k。由於 XXXO 的前後順序，對總時間不造成影響。因此，定義 q 之前爲 12 移法的 XXXO，q+1 之後爲 6 移法與 9 移法中的 XXXO。

下面將過橋的移動分成 7 種，分別是：

	一	二	三	四	五	六	七
j (XO)	1	1	0	0	1	1	0
p (XXO)	1	0	0	1	1	0	1
q (12 移法)	1	1	1	1	0	0	0

其中 **1 代表存在，0 代表不存在**。像第一類的情況，即代表 j, p, q 都存在的情況。

因 r 不存在的情況已包含於判斷式中，故不討論 r

下面的討論，將用 **r(O)** 表示 **O 的末端爲 r**，用 **j(XO)** 表示 **XO 的末端爲 j**，**p(XXO)** 表示 **XXO 的末端爲 p**。

下面將在固定 k 個 XXO 數的情況下，分別討論七類情況的最佳過橋方法。

第一類情況：(j,p,q)=(1,1,1)

假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	...	j-1	j	j+1	j+2	j+3	...	p-2	p-1	p	p+1	p+2	p+3	p+4	...	q	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	○		×	○	×	×	○		×	×	○	×	×	×	○		○		×	×	×	○

(1) r 的取值

因爲此情況的最佳過橋方法是 r (O)，所以它的總時間，會比 r-2 (O) 、r+2 (O) 的情況都要小。

r-2 (O)：○○ ×○×○×○

r (O)：　○○ ○○×○×○

r+2 (O)：○○ ○○○○×○

下面列出時間有改變的部份

r-2 (O)　$t_r + t_{r+2} + 2(t_1 + t_2) + 2(t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

r (O)　$t_{r\text{-}1} + t_r + 2(t_1 + t_2 + t_3) + t_{r+2} + (t_1 + t_2) + (t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

r+2 (O)　$t_{r\text{-}1} + t_r + t_{r+1} + t_{r+2} + 4(t_1 + t_2 + t_3)$

由 r (O) 總時間最短的條件，得出

$t_{r\text{-}1} \le 2t_4 - t_3 \le t_{r+1}$

(2) j 的取值

因此情況的最佳過橋方法是 j (XO)，所以它的總時間，會比 j-6 (XO) 、j+6 (XO) 的情況都要小。

j+6 (XO)：×○×○×○×○×○×○×○××○

j (XO)：×○×○×○×○××○××○××○

j-6 (XO)：×○××○××○××○××○××○

下面列出時間有改變的部份

j+6 (XO)：$t_{j\text{-}4} + t_{j\text{-}2} + t_j + t_{j+2} + t_{j+4} + t_{j+6} + 6(t_1 + t_2)$

j (XO)：$t_{j\text{-}4} + t_{j\text{-}2} + t_j + 3(t_1 + t_2) + t_{j+3} + t_{j+6} + 2t_1 + (t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

j-6 (XO)：$t_{j\text{-}3} + t_j + t_{j+3} + t_{j+6} + 4t_1 + 2(t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

由 j (XO)總時間最短的條件，得出

$t_{j-4} - t_{j-3} + t_{j-2} \ \leq\ 2t_4 + t_3 - 2t_2 \ \leq\ t_{j+2} - t_{j+3} + t_{j+4}$

(3) k 的取值

設 n=3a+m, m=2,3,4

$$k=\frac{j-r}{2}+2(r-m)=\frac{j+3r-4m}{2}$$

(4) p 的取值

因爲此情況的最佳過橋方法是 p (XXO)，所以它的總時間，會比 p-12 (XXO) 、p+12 (XXO) 的情況都要小。

p-12(XXO)：××○×××○×××○×××○×××○×××○×××○×××○
p (XXO)：××○××○××○××○××○×××○×××○×××○×××○
p+12 (XXO)：××○××○××○××○××○××○××○××○××○×××○

下面列出時間有改變的部份

p-12 (XXO)： $t_{p-8}+t_{p-4}+t_p+t_{p+4}+t_{p+8}+t_{p+12}+2(t_1+t_2+t_3+2t_4)$

p (XXO)： $t_{p-9}+t_{p-6}+t_{p-3}+t_p+4t_1+t_{p+4}+t_{p+8}+t_{p+12}+(t_1+t_2+t_3+2t_4)$

p+12 (XXO)： $t_{p-9}+t_{p-6}+t_{p-3}+t_p+t_{p+3}+t_{p+6}+t_{p+9}+t_{p+12}+8t_1$

由 p (XXO)總時間最短的條件，得出

$t_{p-9}-t_{p-8}+t_{p-6}-t_{p-4}+t_{p-3} \leq 2t_4+t_3+t_2-3t_1 \leq t_{p+3}-t_{p+4}+t_{p+6}-t_{p+8}+t_{p+9}$

第二類情況：(j,p,q)=(1,0,1)

假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	...	j-1	j	j+1	j+2	j+3	j+4	...	q-3	q-2	q-1	q	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	○		×	○	×	×	×	○		×	×	×	○		×	×	×	○

(1) r 的取值：同第一類情況

$t_{r-1} \ \leq\ 2t_4 - t_3 \ \leq\ t_{r+1}$

(2) j 的取值：

因爲此情況的最佳過橋方法是 j (XO)，所以它的總時間，會比 j-4 (XO) 、j+4 (XO) 的情況都要小。

j-4 (XO)：×○×××○×××○×××○
j (XO)：×○×○×○×××○×××○
j+4 (XO)：×○×○×○×○×○×××○

下面列出時間有改變的部份

j-4 (XO)：$t_j + t_{j+4} + 2(t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

j (XO)：$t_{j-2} + t_j + 2(t_1 + t_2) + t_{j+4} + (t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

j+4 (XO)：$t_{j-2} + t_j + t_{j+2} + t_{j+4} + 4(t_1 + t_2)$

由 j (XO)總時間最短的條件，得出

$t_{j-2} \le 2t_4 + t_3 - t_2 - t_1 \le t_{j+2}$

第三類情況：(j,p,q)=(0,0,1)
假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	r+3	r+4	...	q-3	q-2	q-1	q	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	×	×	○		×	×	×	○		×	×	×	○

(1) r 的取值
r-4 (O)：○×××○×××○×××○
r (O)：○○○○○×××○×××○
r+4 (O)：○○○○○○○○○×××○

下面列出時間有改變的部份

r-4 (O)：$t_r + t_{r+4} + 6(t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$

r (O)：$t_{r-3} + t_{r-2} + t_{r-1} + t_r + 4(t_1 + t_2 + t_3) + t_{r+4} + 3(t_1 + t_2 + t_3 + 2t_4)$ \
r+4 (O)：$t_{r-3} + t_{r-2} + t_{r-1} + t_r + t_{r+1} + t_{r+2} + t_{r+3} + t_{r+4} + 8(t_1 + t_2 + t_3)$

由 r (O)總時間最短的條件，得出

$t_{r-3} + t_{r-2} + t_{r-1} \le 6t_4 - t_3 - t_2 - t_1 \le t_{r+1} - t_{r+2} + t_{r+3}$

第四類情況：(j,p,q)=(0,1,1)
假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	r+3	...	p-2	p-1	p	p+1	p+2	p+3	p+4	...	q	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	×	○		×	×	○	×	×	×	○		○		×	×	×	○

(1) r 的取值：

r-3 (O)：○××○××○××○

r (O)： ○○○○××○××○

r+3(O)：○○○○○○○○××○

下面列出時間有改變的部份

r-3 (O)： $2t_1 + 4(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_4)$

r (O)： $t_1 + t_{r-2} + t_{r-1} + 3(t_1 + t_2 + t_3) + 2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_4)$

r+3 (O)： $t_{r-1} + t_{r-2} + t_{r+1} + t_{r+2} + 6(t_1 + t_2 + t_3)$

由 r (O)總時間最短的條件，得出

$$t_{r-2} + t_{r-1} \leq 4t_4 - t_3 - t_2 - t_1 \leq t_{r+1} + t_{r+2}$$

(2) p 的取值：同第一類情況

$$t_{p-9} - t_{p-8} + t_{p-6} - t_{p-4} + t_{p-3} \leq 2t_4 + t_3 + t_2 - 3t_1 \leq t_{p+3} - t_{p+4} + t_{p+6} - t_{p+8} + t_{p+9}$$

第五類情況：(j,p,q)=(1,1,0)

假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	...	j-1	j	j+1	j+2	j+3	...	p-2	p-1	p	p+1	p+2	p+3	p+4	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	○		×	○	×	×	○		×	×	○	×	×	×	○		×	×	×	○

(1) j 與 r 的關係：

j=2k-3r+4m (n=3a+m, m=2,3,4)

(2) j 與 r 的取值：

r-2 (O), j+6 (XO)：○×○×○×○……×○×○×○×○×○×○×○××○

r (O), j (XO)： ○○○×○×○……×○×○×○×○××○ ××○××○

r+2 (O), j-6 (XO)：○○○○○×○……×○××○ ××○××○ ××○××○

下面列出時間有改變的部份：

r-2 (O), j+6 (XO)： $t_{r-2} + t_r + t_{r+2} + t_{j-4} + t_{j-2} + t_j + t_{j+2} + t_{j+4} + t_{j+6} + 8(t_1 + t_2)$

r (O),j (XO)： $t_{r-3} + t_{r-2} + t_r + t_{r+2} + t_{j-4} + t_{j-2} + t_j + t_{j+3} + t_{j+6} + 2(t_1 + t_2 + t_3) + 4(t_1 + t_2) + 2t_1$

r+2 (O), j-6 (XO)： $t_{r-3} + t_{r-2} + t_{r-1} + t_r + t_{r+2} + t_{j-3} + t_j + t_{j+3} + t_{j+6} + 4(t_1 + t_2 + t_3) + 4t_1$

由 r (O), j (XO) 總時間最短的條件，得出

$$t_{j-4} - t_{j-3} + t_{j-2} - t_{r+1} \le 2t_3 - 2t_2 \le t_{j+4} - t_{j+3} + t_{j+2} - t_{r-1}$$

第六類情況：(j,p,q)=(1,0,0)

假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	...	j-1	j	j+1	j+2	j+3	j+4	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	○		×	○	×	×	×	○		×	×	×	○

(1) r 的取值：

設 n=3a+m, m=2,3,4, 並設 9 移法的個數爲 t ,

則 $t = \dfrac{6k + m - n}{3}$

$r = a+m = \dfrac{6k + 4m - n}{3}$

(2) j 的取值：j=n-4k (k 爲 XXXO 數)

r+2 (O), j-4 (XO)：○○○○○×××○×××○×××○

r (O), j (XO)：○○○×○×○×○×××○×××○

r-2 (O), j+4 (XO)：○×○×○×○×○×○×○×××○

下面列出時間有改變的部份：

r+2 (O), j-4 (XO)： $t_{r-3} + t_{r-2} + t_{r-1} + t_r + t_{r+2} + 4(t_1 + t_2 + t_3)$

r (O), j (XO)： $t_{r-3} + t_{r-2} + t_r + t_{r+2} + t_{r+4} + 2(t_1 + t_2 + t_3) + 3(t_1 + t_2)$

r-2 (O), j+4 (XO)： $t_{r-2} + t_r + t_{r+2} + t_{r+4} + t_{r+6} + t_{r+8} + 6(t_1 + t_2)$

由 r (O), j (XO)總時間最短的條件，得出

$$t_{j-2} - t_{r+1} \le 2t_3 - t_2 - t_1 \le t_{j+2} - t_{r-1}$$

第七類情況：(j,p,q)=(0,1,0)

假設下圖是此情況的最佳過橋方法

1	2	...	r-1	r	r+1	r+2	r+3	...	p-2	p-1	p	p+1	p+2	p+3	p+4	...	n-3	n-2	n-1	n
			○	○	×	×	○		×	×	○	×	×	×	○		×	×	×	○

(1) r 的取值：

2(r-m)=k

(2) p 的取值：p=n-4k

r-3 (O), p+24 (XXO)：○××○××○ (××○)*16×××○

r (O), p (XXO)：○○○○××○ (××○)*8 (×××○)*6 ×××○

r+3 (O), p-24 (XXO)：○○○○○○○(×××○)*12×××○

由 r (O), p (XXO) 總時間最短的條件，得出

$$t_{p-21} - t_{p-20} + t_{p-18} - t_{p-16} + t_{p-15} + t_{p-9} - t_{p-8} + t_{p-6} - t_{p-4} + t_{p-3} - t_{r+1} - t_{r+2}$$
$$\leq 3t_3 + 3t_2 - 6t_1 \leq$$
$$t_{p+3} - t_{p+4} + t_{p+6} - t_{p+8} + t_{p+9} + t_{p+15} - t_{p+16} + t_{p+18} - t_{p+20} + t_{p+21} - t_{r-1} - t_{r-2}$$

伍、研究結果

一、對於 n 人過橋，一次 3 人過橋的情況，我們得到一些原則：

(一) 移動的方法有 2 移法-3、4 移法-3 及 6 移法-3。

(二) 在非特例且 XXO 數奇偶性相同的情況下，最佳過橋方法中，最後一個 4 移法-3 前段的人(稱爲 r)不變，可經由判斷式(1)得到 r 的值。

(三) 因爲 r 值不變，故可改變 k 值來比較時間大小。無論 k 的奇偶性爲何，都可用(2)式求出 p，在 r 之前爲 4 移法-3 前段，r+1 之後到 p 爲 2 移法-3，p+1 之後則爲 4 移法-3 後段及 6 移法-3。

(四) 研究過程中，我們發現 2 個特殊情況，第一個情況是 r>k 時，此時 r 值產生改變，且沒有 6 移法-3。此情況可用(3)式求出 p 的值，因爲 6 移法-3 不存在，故 p 和 r 存在下列關係：

$$\frac{n-p}{3} + f(n) = r$$

$$\text{其中} f(n) = \begin{cases} 3, \text{當}n\text{是奇數} \\ 2, \text{當}n\text{是偶數} \end{cases}$$

進而求出 r 的值，由這 2 個值可決定最佳方法及最短時間。

(五) 第二個特殊情況是當 p 小於 r 時，此時 r 值亦會改變而 2 移法-3 將不存在，此情況可求出 r 值,此時的 r 值將符合 p 的定義,故在 r 之前用四移法前段,r+1 之後使用 6 移法-3 和 4 移法-3 後段，由 4 移法-3 前段數目等於後段數目可求出最佳方法和最短時間。

二、對於 n 人過橋，一次 4 人過橋的情況，我們得到一些原則：

(一) 最佳過橋方法由 3 移法-4、6 移法-4、9 移法-4 和 12 移法-4 組成

(二) 我們將一次四人過橋問題分爲 7 種情況，每種情況各有判斷式解出各情況的最佳過橋方法，最後比較時間得到最佳過橋方法。

(三) 在每種情況中，還需考慮 k 取模 3 的值和 r 值的奇偶性，也就是說要先找出 k 模 3 各同餘系的最佳過橋方法，並針對 r 的奇偶性算出過橋時間，比較後得到該情況的最佳過橋方法。

陸、討論

研究這個題目的基本邏輯是找出時間最短的移法，再組合和比較這些移法，前者可由一開始的証明得出，排列這些移法的依據主要是在同樣的最好的比較方法是調整 XXO 的數目來比較。然而在解出一次 3 人和 4 人過橋的問題後，我們發現兩者決定 r 值的判斷式有密切的關係，如果將前者所有往返項的下標加 1(即 t_2 ->t_3)就會與後者完全相同，這讓我好奇在一次更多人過橋的情況下這個原則是否成立。如果成立的話，也許將成爲研究後續問題的好方法。

然而，我們認爲在一次 k 人過橋問題中最佳解的形式都是相同的，用示意圖表示即是從(n 對 k-1 同餘)+1 開始畫 O，到某個點後變爲 XO，依此類推，最後至多變爲 XX…XXO，而 X 的數目爲 k-1。

在一次 3 人的過橋問題中，我們發現 r 的值在正常狀況下是不會變動的，推廣到以後應會有更多在正常狀況下不會變動的值，這在比較不同 k 值的過橋方法有相當大的幫助。但相對地特殊情況也變得更複雜，未來的問題可能會集中在特殊情況的討論上。

柒、結論

藉由找出花費時間最短的移法，再找出這些移法的排列順序，和比較過橋方法時間的判斷式，用所給出的判斷式我們可以解出

一、一次 3 人過橋時的最短時間
二、一次 3 人過橋時，最短時間的過橋方法
三、一次 4 人過橋時的最短時間
四、一次 4 人過橋時，最短時間的過橋方法

捌、參考資料及其它

一、Levmore, S. X. and Cook, E. E. (1981). Super Strategies for Puzzles and Games Doubleday. Garden City, NY.

二、Rote, G. (2002). Crossing the Bridge at Night. Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science 78: 241-246.

三、Sniedovich, M. (2002, June). The Bridge and Torch Problem. From http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/bridge/.

【評語】040415

1)作者能針對常見的過橋問題引進較具結構化的分析方法來計算最短時間是個創新的想法。

2)作品說明書中符號過於複雜，建議將其簡化，並適度放寬每人過橋時間皆不同的限制，做爲進一步研究之構思。