

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

040414

由 G、K 的垂足三角形發現新心

學校名稱：臺北市立內湖高級中學

作者： 高二 陳柏傑	指導老師： 劉紹正
-------------------	------------------

關鍵詞： 垂足三角形、重心、近似重心

由 G 、 K 的垂足三角形發現新心

壹、摘要：

我們發現三角形重心之垂足三角形的近似重心，會落在原三角形的尤拉線上。由於此心未編錄在 *Encyclopedia of Triangle Centers-ETC* 中，於是我們將此發現傳給 Clark Kimberling，經確認後，此心於 08/05/31 編錄至 *ETC* 中，編號為 3363。在本文中，我們找到與此新心有關且未編錄在 *ETC* 中的某些點會共線，及某些線會平行之有趣性質。

貳、研究動機：

在高二學平面向量時，曾探討到三角形內部一點 P 到三邊距離平方和的極值問題，當它產生最小值時，這個點 P 就是近似重心 K 。因此嘗試尋找有關 K 的性質，發現 Lemoine 定理，即過 K 對三邊做垂足三角形時，此三角形的重心會和原三角形的近似重心重合。因此想藉由垂足三角形當作橋樑，去尋找與重心、近似重心及尤拉線等有關的性質。

參、研究目的：

1. 藉由此研究，發現新心，並進一步找到與新心相關的有趣性質。
2. 希望將所發現的心，提供 *ETC* 作為參考。

肆、參考文獻：

1. 在 Paul Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, 的內文中，學習到三角形重心坐標 (Barycentric coordinates) 的使用。
2. 在 C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)*, 的網站中，找到三角形心的定義，與至目前為止(2008/05)所編錄的 3363 個心，及如何查驗心是否在 *ETC* 中的方法。

伍、研究過程：

一、符號定義：

當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，重心 G 與近似重心 K 為同一點，當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，重心 G 、外心 O 與近似重心 K 均在底邊的中垂線上，較易觀察，因此本文不討論。爲了需要，引用重心坐標，其中 $P = (x:y:z)$ 表點 P 的重心坐標 *Barycentric coordinates*， $P = (x,y,z)$ 表點 P 的絕對重心坐標 *Absolute Barycentric coordinates*，即 $x+y+z=1$ 。至於點 P 的垂足三角形，在本文中是指，由點 P 對三角形的三邊作垂線，三垂足所成的三角形。其他使用的符號，定義如下：在 $\triangle ABC$ 中

1. $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$ 。

2. $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。

3. 外接圓半徑為 R ，內切圓半徑為 r 。

4. Δ 表三角形 ABC 的面積。

5. $\triangle ABC$ 之重心為 G ，近似重心為 K ，垂心為 H ，外心為 O 。

6. $S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ 、 $S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$ 、 $S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ 。

7. X_{373} 表 C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers* 中編號為 373 的心，其定義是重心的垂足三角形的重心。

8. P_G 表示點 P 之垂足三角形的重心，其餘依此類推。

9. P_{GK} 表示點 P_G 之垂足三角形的近似重心，其餘依此類推。

二、本文主要是將重心 G 與近似重心 K 對三邊作垂線，觀察其垂足所成三角形的心，有哪個心會和原三角形的重心及近似重心有相關的性質或和尤拉線有關的性質。過程如下：

1. 過重心對三邊做垂足三角形，發現其垂足三角形的近似重心會在原三角形的尤拉線上，如[定理一]。接著嘗試過重心對三邊做對稱而得三角形 $\triangle A'B'C'$ ，發現其近似重心亦會在原三角形的尤拉線上，因此試著將重心的垂足三角形沿三邊作等比例放縮，形成三角形 $\triangle G'_A G'_B G'_C$ ，發現其近似重心 G'_K 仍在原三角形的尤拉線上，如[定理二]。而且此縮放比例亦等於線段 $\overline{GG'_K}$ 與 $\overline{GG_K}$ 的比。並可由此結果推論出尤拉線上的點均滿足心的定義，亦均為某個依重心的垂足三角形比例放縮之三角形的近似重心，如[推論]。尤於此部份證明過程大致相似因此只證明垂足三角形的近似重心以及作等比例縮放後而得的三角形其近似重心仍會在尤拉線上。

2. 設重心 G 之垂足三角形的重心為 G_G 、近似重心為 G_K 。由 G_K 對原三角形的三邊作垂線，其垂足三角形所成的重心為 G_{KG} ，發現 G 、 G_G 、 G_{KG} 三點共線。設近似重心 K 之垂足三角形的近似重心為 K_K ，再由 K_K 對原三角形的三邊作垂線，其垂足三角形所成的重心為 K_{KG} ，發現 O 、 K 、 K_{KG} 三點共線及 K 、 K_K 連線平行原三角形的尤拉線。且上述兩線平行。如[定理三]。 G_G 為 ETC 中的 X_{373} ，而 G_K 、 G_{KG} 、 K_K 、 K_{KG} 均未編錄在 ETC 中。
(如附錄一)

陸、研究工具：

電腦軟體 GSP、Maple。

柒、研究結果：

一、首先證明重心的垂足三角形之近似重心在原三角形的尤拉線上[定理一]。接著證明將重心的垂足三角形依比例放縮，所形成的三角形，其近似重心仍在原三角形的尤拉線上[定理二及推論]。

[定理一]

$\triangle ABC$ 的重心 G ，分別對三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 作垂線，其垂足為 G_A, G_B, G_C ，則 $\triangle G_A G_B G_C$ 的近似重心 G_K ，在 $\triangle ABC$ 的尤拉線上。

< pf > 如圖一

$$G_A = (0, \frac{S_C + a^2}{3a^2}, \frac{S_B + a^2}{3a^2})$$

$$G_B = (\frac{S_C + b^2}{3b^2}, 0, \frac{S_A + b^2}{3b^2}) \quad (\text{如附錄二})$$

$$G_C = (\frac{S_B + c^2}{3c^2}, \frac{S_A + c^2}{3c^2}, 0)$$

$$\overline{G_B G_C}^2 = \frac{4\Delta^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{9b^2c^2}$$

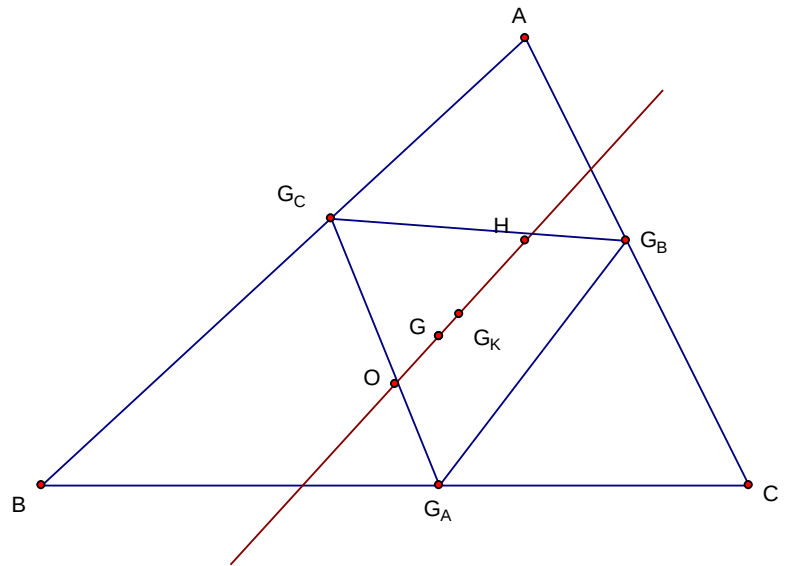
$$\overline{G_A G_C}^2 = \frac{4\Delta^2(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{9a^2c^2} \quad (\text{如附錄三})$$

$$\overline{G_A G_B}^2 = \frac{4\Delta^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{9a^2b^2}$$

則 $\triangle G_A G_B G_C$ 之近似重心 G_K 為

$$\begin{aligned} & \overline{G_B G_C}^2 \cdot G_A + \overline{G_A G_C}^2 \cdot G_B + \overline{G_A G_B}^2 \cdot G_C \\ &= (-4a^4 + 5b^4 + 5c^4 - 5a^2b^2 - 5a^2c^2 - 14b^2c^2 : 5a^4 - 4b^4 + 5c^4 - 5a^2b^2 - 5b^2c^2 - 14a^2c^2 \\ & : 5a^4 + 5b^4 - 4c^4 - 14a^2b^2 - 5a^2c^2 - 5b^2c^2) \end{aligned} \quad (\text{如附錄四})$$

而



圖一

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2(b^2+c^2-a^2) & b^2(a^2+c^2-b^2) & c^2(a^2+b^2-c^2) \\ -4a^4+5b^4+5c^4-5a^2b^2-5a^2c^2-14b^2c^2 & 5a^4-4b^4+5c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-14a^2c^2 & 5a^4+5b^4-4c^4-14a^2b^2-5a^2c^2-5b^2c^2 \end{vmatrix} = 0$$

故 G_K 在 $\triangle ABC$ 的尤拉線上。

註：此心於 08/05/31 編錄至 *ETC* 中，編號為 X_{3363} 。(如附錄五)

[定理二]

$\triangle ABC$ 的重心 G ，分別對三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 作垂線，其垂足為 G_A 、 G_B 、 G_C ，在

$\overline{GG_A}$ 、 $\overline{GG_B}$ 、 $\overline{GG_C}$ 上分別取點 G'_A 、 G'_B 、 G'_C ，使得 $\frac{\overline{GG'_A}}{\overline{GG_A}} = \frac{\overline{GG'_B}}{\overline{GG_B}} = \frac{\overline{GG'_C}}{\overline{GG_C}}$ ，則 $\triangle G'_A G'_B G'_C$ 的近似重心

G'_K ，在 $\triangle ABC$ 的尤拉線上。

< pf > 圖二

因 $\frac{\overline{GG'_A}}{\overline{GG_A}} = \frac{\overline{GG'_B}}{\overline{GG_B}} = \frac{\overline{GG'_C}}{\overline{GG_C}}$ ，若 $\alpha \in R$ ，則可設

$$G'_A = G_A + \alpha G = \left(\frac{\alpha}{3(\alpha+1)}, \frac{S_C + (\alpha+1)a^2}{3(\alpha+1)a^2}, \frac{S_B + (\alpha+1)a^2}{3(\alpha+1)a^2} \right)$$

$$G'_B = G_B + \alpha G = \left(\frac{S_C + (\alpha+1)b^2}{3(\alpha+1)b^2}, \frac{\alpha}{3(\alpha+1)}, \frac{S_A + (\alpha+1)b^2}{3(\alpha+1)b^2} \right)$$

$$G'_C = G_C + \alpha G = \left(\frac{S_B + (\alpha+1)c^2}{3(\alpha+1)c^2}, \frac{S_A + (\alpha+1)c^2}{3(\alpha+1)c^2}, \frac{\alpha}{3(\alpha+1)} \right)$$

$$\overline{G'_B G'_C}^2 = \frac{4\Delta^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{9b^2c^2(1+\alpha)^2}$$

$$\overline{G'_A G'_C}^2 = \frac{4\Delta^2(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{9a^2c^2(1+\alpha)^2}$$

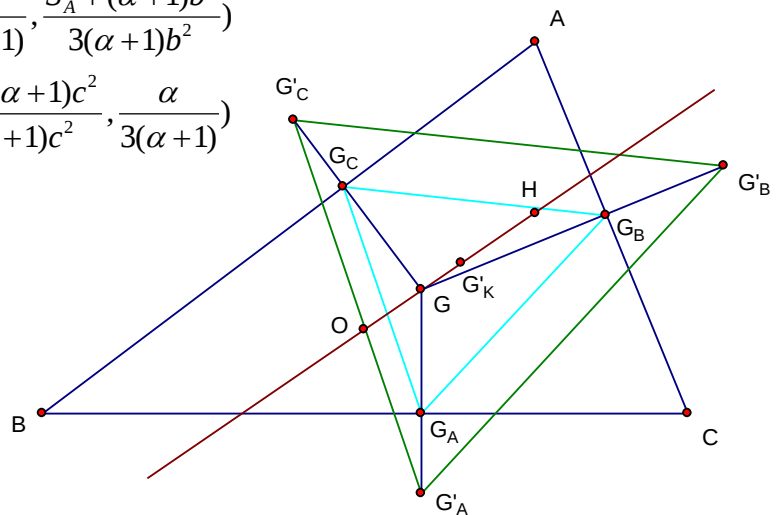
$$\overline{G'_A G'_B}^2 = \frac{4\Delta^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{9a^2b^2(1+\alpha)^2}$$

則 $\triangle G'_A G'_B G'_C$ 之近似重心 G'_K 為

$$\overline{G'_B G'_C}^2 \cdot G'_A + \overline{G'_A G'_C}^2 \cdot G'_B + \overline{G'_A G'_B}^2 \cdot G'_C$$

$$\begin{aligned} &= ((-4a^4 + 5b^4 + 5c^4 - 5a^2b^2 - 5a^2c^2 - 14b^2c^2) + \alpha(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 8a^2b^2 - 8b^2c^2 - 8a^2c^2)) \\ &: (5a^4 - 4b^4 + 5c^4 - 5a^2b^2 - 5b^2c^2 - 14a^2c^2) + \alpha(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 8a^2b^2 - 8b^2c^2 - 8a^2c^2) \\ &: (5a^4 + 5b^4 - 4c^4 - 14a^2b^2 - 5a^2c^2 - 5b^2c^2) + \alpha(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 8a^2b^2 - 8b^2c^2 - 8a^2c^2)) \end{aligned}$$

而



圖二

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2(b^2+c^2-a^2) & b^2(a^2+c^2-b^2) & c^2(a^2+b^2-c^2) \\ -4a^4+5b^4+5c^4-5a^2b^2-5a^2c^2-14b^2c^2 & 5a^4-4b^4+5c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-14a^2c^2 & 5a^4+5b^4-4c^4-14a^2b^2-5a^2c^2-5b^2c^2 \end{vmatrix} = 0$$

且

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2(b^2+c^2-a^2) & b^2(a^2+c^2-b^2) & c^2(a^2+b^2-c^2) \\ 2(a^4+b^4+c^4)-8(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) & 2(a^4+b^4+c^4)-8(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) & 2(a^4+b^4+c^4)-8(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \end{vmatrix} = 0$$

故 G'_K 在 $\triangle ABC$ 的尤拉線上。

[推論]：

$$1. \text{若 } G'_A = G_A + \alpha G, G'_B = G_B + \alpha G, G'_C = G_C + \alpha G, \text{ 則 } \frac{\overline{GG'_A}}{\overline{GG_A}} = \frac{\overline{GG'_B}}{\overline{GG_B}} = \frac{\overline{GG'_C}}{\overline{GG_C}} = \frac{\overline{GG'_K}}{\overline{GG_K}} = \frac{1}{1+\alpha}。$$

$\langle pf \rangle$

$$G_A = (0, \frac{S_C + a^2}{3a^2}, \frac{S_B + a^2}{3a^2})$$

$$\begin{aligned} \overline{G_A G}^2 &= S_A(0 - \frac{1}{3})^2 + S_B(\frac{S_C + a^2}{3a^2} - \frac{1}{3})^2 + S_C(\frac{S_B + a^2}{3a^2} - \frac{1}{3})^2 \\ &= S_A(\frac{1}{3})^2 + S_B(\frac{S_C}{3a^2})^2 + S_C(\frac{S_B}{3a^2})^2 \end{aligned}$$

$$G'_A = G_A + \alpha G$$

$$= (\frac{\alpha}{3(\alpha+1)}, \frac{S_C + (\alpha+1)a^2}{3(\alpha+1)a^2}, \frac{S_B + (\alpha+1)a^2}{3(\alpha+1)a^2})$$

$$\begin{aligned} \overline{G'_A G}^2 &= S_A(\frac{\alpha}{3(\alpha+1)} - \frac{1}{3})^2 + S_B(\frac{S_C + (\alpha+1)a^2}{3(\alpha+1)a^2} - \frac{1}{3})^2 + S_C(\frac{S_B + (\alpha+1)a^2}{3(\alpha+1)a^2} - \frac{1}{3})^2 \\ &= S_A(\frac{-1}{3(\alpha+1)})^2 + S_B(\frac{S_C}{3(\alpha+1)a^2})^2 + S_C(\frac{S_B}{3(\alpha+1)a^2})^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{GG'_A}^2}{\overline{GG_A}^2} = \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^2$$

$$\frac{\overline{GG'_A}}{\overline{GG_A}} = \frac{1}{1+\alpha}$$

$$\begin{aligned} \overline{GG_K}^2 &= S_A(\frac{-4a^4+5b^4+5c^4-5a^2b^2-5a^2c^2-14b^2c^2}{6(a^4+b^4+c^4-4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2)} - \frac{1}{3})^2 \\ &\quad + S_B(\frac{5a^4-4b^4+5c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-14a^2c^2}{6(a^4+b^4+c^4-4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2)} - \frac{1}{3})^2 \\ &\quad + S_C(\frac{5a^4+5b^4-4c^4-14a^2b^2-5a^2c^2-5b^2c^2}{6(a^4+b^4+c^4-4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2)} - \frac{1}{3})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{GG'_K}^2 &= S_A \left(\frac{(-4a^4 + 5b^4 + 5c^4 - 5a^2b^2 - 5a^2c^2 - 14b^2c^2) + \alpha(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 8a^2b^2 - 8b^2c^2 - 8a^2c^2)}{6(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)(1+\alpha)} - \frac{1}{3} \right)^2 \\ &+ S_B \left(\frac{(5a^4 - 4b^4 + 5c^4 + 5a^2b^2 + 5b^2c^2 + 14a^2c^2) + \alpha(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 8a^2b^2 - 8b^2c^2 - 8a^2c^2)}{6(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)(1+\alpha)} - \frac{1}{3} \right)^2 \\ &+ S_C \left(\frac{(5a^4 + 5b^4 - 4c^4 + 14a^2b^2 + 5a^2c^2 + 5b^2c^2) + \alpha(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 8a^2b^2 - 8b^2c^2 - 8a^2c^2)}{6(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)(1+\alpha)} - \frac{1}{3} \right)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{GG'_K}^2}{\overline{GG_K}^2} = \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^2 \Rightarrow \frac{\overline{GG'_K}}{\overline{GG_K}} = \frac{1}{1+\alpha}$$

2. 尤拉線上任一點 P ，均可找到一個三角形，如[定理二]中的 $\Delta G'_A G'_B G'_C$ ，其近似重心為 P 。

< pf >

設 $\frac{\overline{GP}}{\overline{GG_K}} = \frac{1}{1+\beta}$ ，則由上述推論(1)，取 $G'_A = G_A + \beta G$ 即可。

3. 尤拉線上的點均為心。

< pf >

由[定理二]中的 G'_K 滿足心的定義，及上述推論，可得尤拉線上的點均為心。

或者，因尤拉線上的點，除重心 G 外，其餘的點均可表為 $O + tG$ ，其中 t 為實數，亦可得知尤拉線上的點均為心。

二、將 K 對原三角形的三邊作垂線，其垂足三角形的近似重心為 K_K ，再將 K_K 對原三角形的三邊作垂線，其垂足三角形的重心為 K_{KG} 。我們發現 K_K 、 K 的連線平行 ΔABC 的尤拉線以及 O 、 K 、 K_{KG} 三點共線。又將 G 和 G_K 對原三角形的三邊作垂線，其垂足三角形所成的重心為 G_G 和 G_{KG} ，發現 G 、 G_G 、 G_{KG} 三點共線，且上述兩線平行。其中 G_G 為 ETC 中的 X_{373} ，而 K_K 、 K_{KG} 、 G_{KG} 均未編錄在 ETC 中。

[定理三]

由 ΔABC 的近似重心 K ，分別對三邊 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 作垂線，其垂足為 K_A, K_B, K_C ，設 $\Delta K_A K_B K_C$ 的近似重心為 K_K ，過 K_K 分別對三邊 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 作垂線，其垂足為 K_{A1}, K_{B1}, K_{C1} ，設 $\Delta K_{A1} K_{B1} K_{C1}$ 的重心為 K_{KG} 。

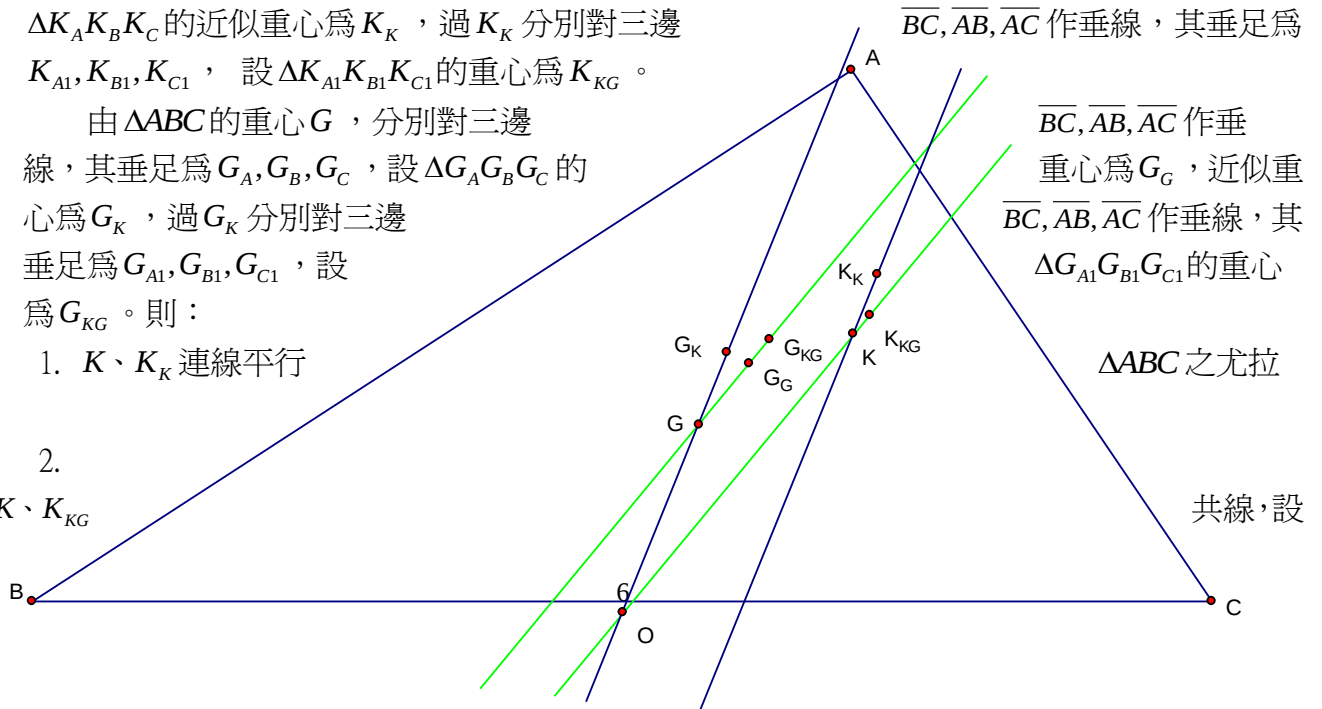
由 ΔABC 的重心 G ，分別對三邊 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 作垂線，其垂足為 G_A, G_B, G_C ，設 $\Delta G_A G_B G_C$ 的心為 G_K ，過 G_K 分別對三邊 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 作垂線，其垂足為 G_{A1}, G_{B1}, G_{C1} ，設為 G_{KG} 。則：

1. K 、 K_K 連線平行

線。

2.

O 、 K 、 K_{KG}



此線為 L_1 。

3. G 、 G_G 、 G_{KG} 共線，設此線為 L_2 。

4. $L_1 // L_2$ 。

< pf >

圖三

1.

$$\begin{aligned}
 K_K &= \left(\frac{4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \frac{-a^4 + 4b^4 - c^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \right. \\
 &\quad \left. , \frac{-a^4 - b^4 + 4c^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \right) \\
 K_K - K &= \left(\frac{4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right. \\
 &\quad : \frac{-a^4 + 4b^4 - c^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\
 &\quad : \left. \frac{-a^4 - b^4 + 4c^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \\
 &= (2a^4 - b^4 - c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + 2b^2c^2 : -a^4 + 2b^4 - c^4 - a^2b^2 + 2a^2c^2 - b^2c^2 \\
 &\quad : -a^4 - b^4 + 2c^4 + 2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) \\
 &= O - G
 \end{aligned}$$

因 $\overline{KK_K}$ 與 $\triangle ABC$ 的尤拉線有相同的無限遠點，故平行。

2.

$$\begin{aligned}
K_{KG} &= (\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1) \\
&= \left(\frac{b^8 + c^8 - a^6 b^2 - 3a^2 b^6 - 2b^6 c^2 - 2b^2 c^6 - c^2 a^6 - 3c^6 a^2}{12b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \right. \\
&\quad + \frac{3a^4 b^4 + 2b^4 c^4 + 3c^4 a^4 + 16a^4 b^2 c^2 + 11b^4 c^2 a^2 + 11c^4 a^2 b^2}{12b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \\
&\quad , \frac{c^8 + a^8 - b^6 c^2 - 3b^2 c^6 - 2c^6 a^2 - 2c^2 a^6 - a^2 b^6 - 3a^6 b^2}{12a^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \\
&\quad + \frac{3b^4 c^4 + 2c^4 a^4 + 3a^4 b^4 + 16b^4 c^2 a^2 + 11c^4 a^2 b^2 + 11a^4 b^2 c^2}{12b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \\
&\quad , \frac{a^8 + b^8 - c^6 a^2 - 3c^2 a^6 - 2a^6 b^2 - 2a^2 b^6 - b^2 c^6 - 3b^6 c^2}{12a^2 b^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \\
&\quad \left. + \frac{3c^4 a^4 + 2a^4 b^4 + 3b^4 c^4 + 16c^4 a^2 b^2 + 11a^4 b^2 c^2 + 11b^4 c^2 a^2}{12b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \right) \\
&\text{又} \left| \begin{array}{ccc} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2(b^2 + c^2 - a^2) & b^2(c^2 + a^2 - b^2) & c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{array} \right| = 0
\end{aligned}$$

故 O, K, K_{KG} 共線, 設此線為 L_1

3.

$$\begin{aligned}
G_G = X_{373} &= \left(\frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 6b^2c^2 - c^4}{18b^2c^2}, \frac{-a^4 + a^2b^2 + 6a^2c^2 + b^2c^2 - c^4}{18a^2c^2}, \frac{-a^4 + 6a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{18a^2b^2} \right) \\
G_{KG} &= (\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2) \\
&= \left(\frac{-5b^8 - 5c^8 + 5a^6b^2 + 19a^2b^6 + 26b^6c^2 + 26b^2c^6 + 5c^2a^6 + 19c^6a^2}{36b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)} \right. \\
&\quad + \frac{19a^4b^4 + 58b^4c^4 + 19c^4a^4 - 16a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2}{36b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)} \\
&\quad + \frac{-5c^8 - 5a^8 + 5b^6c^2 + 19b^2c^6 + 26c^6a^2 + 26c^2a^6 + 5a^2b^6 + 19a^6b^2}{36a^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)} \\
&\quad + \frac{19b^4c^4 + 58c^4a^4 + 19a^4b^4 - 16b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2 - 43a^4b^2c^2}{36a^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)} \\
&\quad + \frac{-5a^8 - 5b^8 + 5c^6a^2 + 19c^2a^6 + 26a^6b^2 + 26a^2b^6 + 5b^2c^6 + 19b^6c^2}{36a^2b^2(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)} \\
&\quad \left. + \frac{19c^4a^4 + 58a^4b^4 + 19b^4c^4 - 16c^4a^2b^2 - 43a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2}{36a^2b^2(a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2)} \right) \\
&\quad \times \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 6b^2c^2 - c^4}{18b^2c^2} & \frac{-a^4 + a^2b^2 + 6a^2c^2 + b^2c^2 - c^4}{18a^2c^2} & \frac{-a^4 + 6a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{18a^2b^2} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array} \right| = 0
\end{aligned}$$

故 G, G_G, G_{KG} 共線, 設此線為 L_2

4.

$$\begin{aligned}
K - K_{KG} &= \left(\frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 - c^4}{b^2c^2} : \frac{-a^4 + a^2b^2 + b^2c^2 - c^4}{a^2c^2} : \frac{-a^4 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2} \right) \\
&= G - G_G = \left(\frac{-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 + c^4}{b^2c^2} : \frac{a^4 - a^2b^2 - b^2c^2 + c^4}{a^2c^2} : \frac{a^4 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2}{a^2b^2} \right)
\end{aligned}$$

因 L_1 與 L_2 有相同的無限遠點, 故 $L_1 // L_2$

註： G_{KG} 、 K_{KG} 、 K_K 滿足三角形心的條件，但這三心不在目前(2008/05)的 *ETC* 中。
(如附錄一 之 2,3,4)

捌、結論：

1. 將重心對三邊做垂足三角形，此垂足三角形的近似重心會落在原三角形的尤拉線上。
2. 若將重心的垂足三角形的三個頂點沿重心對三邊的垂線作等比例縮放，所得之三角形的近似重心亦落在原三角形的尤拉線上。
3. (1) 尤拉線上任一點 P ，均可找到一個點，其垂足三角形的近似重心為 P 。
(2) 尤拉線上的點均為心。
4. (1) K 、 K_K 連線平行 $\triangle ABC$ 之尤拉線。
(2) O 、 K 、 K_{KG} 共線，設此線為 L_1 。
(3) G 、 G_G 、 G_{KG} 共線，設此線為 L_2 。
(4) $L_1 \parallel L_2$ 。

玖、未來展望：

1. 希望能找到更多與 K_K 、 G_G 、 K_{KG} 、 G_{KG} 等心，相關的有趣性質。
2. 能提供更多的心給 *ETC* 作為參考。

拾、附錄：

一、設 $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, 令 $f(a, b, c) = \alpha$, 若 P 為三角形之心, 則 P 須滿足下列三個條件:

(1). Homogeneity: $f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c)$

(2). Bisymmetry: $f(a, b, c) = f(a, c, b)$

(3). Cyclicity: $f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b) = \alpha : \beta : \gamma$

1. $G_K = (\alpha : \beta : \gamma) = (-5a^4 + 4b^4 + 4c^4 - a^2b^2 - 10b^2c^2 - c^2a^2 : -5b^4 + 4c^4 + 4a^4 - b^2c^2 - 10c^2a^2 - a^2b^2 : -5c^4 + 4a^4 + 4b^4 - c^2a^2 - 10a^2b^2 - b^2c^2)$

令 $f(a, b, c) = \alpha = -5a^4 + 4b^4 + 4c^4 - a^2b^2 - 10b^2c^2 - c^2a^2$

(1) $f(ta, tb, tc) = t^4(-5a^4 + 4b^4 + 4c^4 - a^2b^2 - 10b^2c^2 - c^2a^2) = t^4 f(a, b, c)$

(2) $f(a, b, c) = -5a^4 + 4b^4 + 4c^4 - a^2b^2 - 10b^2c^2 - c^2a^2$

$f(a, c, b) = -5a^4 + 4c^4 + 4b^4 - a^2c^2 - 10b^2c^2 - b^2a^2$

$f(a, b, c) = f(a, c, b)$

(3) $f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$

$= -5a^4 + 4b^4 + 4c^4 - a^2b^2 - 10b^2c^2 - c^2a^2$

$: -5b^4 + 4c^4 + 4a^4 - b^2c^2 - 10c^2a^2 - a^2b^2$

$: -5c^4 + 4a^4 + 4b^4 - c^2a^2 - 10a^2b^2 - b^2c^2$

$= \alpha : \beta : \gamma$

$$2. K_K = (\alpha : \beta : \gamma)$$

$$= (4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 : -a^4 + 4b^4 - c^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 \\ : -a^4 - b^4 + 4c^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

$$\text{令 } f(a, b, c) = \alpha = 4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$(1). f(ta, tb, tc) = t^4(4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2) \\ = t^4 f(a, b, c)$$

$$(2). f(a, b, c) = 4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$f(a, c, b) = 4a^4 - c^4 - b^4 + a^2c^2 + a^2b^2 + 2c^2b^2$$

$$f(a, b, c) = f(a, c, b)$$

$$(3). f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

$$= 4a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 : -a^4 + 4b^4 - c^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 \\ : -a^4 - b^4 + 4c^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \\ = \alpha : \beta : \gamma$$

$$3. K_{KG} = (\alpha : \beta : \gamma)$$

$$= (b^8 + c^8 - a^6b^2 - 3a^2b^6 - 2b^6c^2 - 2b^2c^6 - c^2a^6 - 3c^6a^2 + 3a^4b^4 + 2b^4c^4 + 3c^4a^4 + 16a^4b^2c^2 \\ + 11b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2 : c^8 + a^8 - b^6c^2 - 3b^2c^6 - 2c^6a^2 - 2c^2a^6 - a^2b^6 - 3a^6b^2 + 3b^4c^4 + 2c^4a^4 \\ + 3a^4b^4 + 16b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2 + 11a^4b^2c^2 : a^8 + b^8 - c^6a^2 - 3c^2a^6 - 2a^6b^2 - 2a^2b^6 - b^2c^6 \\ - 3b^6c^2 + 3c^4a^4 + 2a^4b^4 + 3b^4c^4 + 16c^4a^2b^2 + 11a^4b^2c^2 + 11b^4c^2a^2)$$

$$\text{令 } f(a, b, c) = \alpha = b^8 + c^8 - a^6b^2 - 3a^2b^6 - 2b^6c^2 - 2b^2c^6 - c^2a^6 - 3c^6a^2 + 3a^4b^4 + 2b^4c^4 + 3c^4a^4 \\ + 16a^4b^2c^2 + 11b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2$$

$$(1). f(ta, tb, tc) = t^8(b^8 + c^8 - a^6b^2 - 3a^2b^6 - 2b^6c^2 - 2b^2c^6 - c^2a^6 - 3c^6a^2 + 3a^4b^4 + 2b^4c^4 + 3c^4a^4 \\ + 16a^4b^2c^2 + 11b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2) \\ = t^8 f(a, b, c)$$

$$(2). f(a, b, c) = b^8 + c^8 - a^6b^2 - 3a^2b^6 - 2b^6c^2 - 2b^2c^6 - c^2a^6 - 3c^6a^2 + 3a^4b^4 + 2b^4c^4 + 3c^4a^4 \\ + 16a^4b^2c^2 + 11b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2$$

$$f(a, c, b) = c^8 + b^8 - a^6c^2 - 3a^2c^6 - 2c^6b^2 - 2c^2b^6 - b^2a^6 - 3b^6a^2 + 3a^4c^4 + 2c^4b^4 + 3b^4a^4 \\ + 16a^4c^2b^2 + 11c^4b^2a^2 + 11b^4a^2c^2$$

$$f(a, b, c) = f(a, c, b)$$

$$(3). f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

$$= b^8 + c^8 - a^6b^2 - 3a^2b^6 - 2b^6c^2 - 2b^2c^6 - c^2a^6 - 3c^6a^2 + 3a^4b^4 + 2b^4c^4 + 3c^4a^4 + 16a^4b^2c^2 \\ + 11b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2 : c^8 + a^8 - b^6c^2 - 3b^2c^6 - 2c^6a^2 - 2c^2a^6 - a^2b^6 - 3a^6b^2 + 3b^4c^4 + 2c^4a^4 \\ + 3a^4b^4 + 16b^4c^2a^2 + 11c^4a^2b^2 + 11a^4b^2c^2 : a^8 + b^8 - c^6a^2 - 3c^2a^6 - 2a^6b^2 - 2a^2b^6 - b^2c^6 \\ - 3b^6c^2 + 3c^4a^4 + 2a^4b^4 + 3b^4c^4 + 16c^4a^2b^2 + 11a^4b^2c^2 + 11b^4c^2a^2 \\ = \alpha : \beta : \gamma$$

$$4.G_{KG} = (\alpha : \beta : \gamma)$$

$$= (-5b^8 - 5c^8 + 5a^6b^2 + 19a^2b^6 + 26b^6c^2 + 26b^2c^6 + 5c^2a^6 + 19c^6a^2 + 19a^4b^4 + 58b^4c^4 + 19c^4a^4 \\ - 16a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2 : -5c^8 - 5a^8 + 5b^6c^2 + 19b^2c^6 + 26c^6a^2 + 26c^2a^6 + 5a^2b^6 + 19a^6b^2 \\ + 19b^4c^4 + 58c^4a^4 + 19a^4b^4 - 16b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2 - 43a^4b^2c^2 : -5a^8 - 5b^8 + 5c^6a^2 + 19c^2a^6 + 26a^6b^2 \\ + 26a^2b^6 + 5b^2c^6 + 19b^6c^2 + 19c^4a^4 + 58a^4b^4 + 19b^4c^4 - 16c^4a^2b^2 - 43a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2)$$

$$\text{令 } f(a, b, c) = \alpha = -5b^8 - 5c^8 + 5a^6b^2 + 19a^2b^6 + 26b^6c^2 + 26b^2c^6 + 5c^2a^6 + 19c^6a^2 + 19a^4b^4 + 58b^4c^4 \\ + 19c^4a^4 - 16a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2$$

$$(1) f(ta, tb, tc) = t^8(-5b^8 - 5c^8 + 5a^6b^2 + 19a^2b^6 + 26b^6c^2 + 26b^2c^6 + 5c^2a^6 + 19c^6a^2 + 19a^4b^4 + 58b^4c^4 \\ + 19c^4a^4 - 16a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2) \\ = t^8 f(a, b, c)$$

$$(2) f(a, b, c) = -5b^8 - 5c^8 + 5a^6b^2 + 19a^2b^6 + 26b^6c^2 + 26b^2c^6 + 5c^2a^6 + 19c^6a^2 + 19a^4b^4 + 58b^4c^4 \\ + 19c^4a^4 - 16a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2$$

$$f(a, c, b) = -5c^8 - 5b^8 + 5a^6c^2 + 19a^2c^6 + 26c^6b^2 + 26c^2b^6 + 5b^2a^6 + 19b^6a^2 + 19a^4c^4 + 58c^4b^4 \\ + 19b^4a^4 - 16a^4c^2b^2 - 43c^4b^2a^2 - 43b^4a^2c^2$$

$$f(a, b, c) = f(a, c, b)$$

$$(3) f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

$$= -5b^8 - 5c^8 + 5a^6b^2 + 19a^2b^6 + 26b^6c^2 + 26b^2c^6 + 5c^2a^6 + 19c^6a^2 + 19a^4b^4 + 58b^4c^4 + 19c^4a^4 \\ - 16a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2 : -5c^8 - 5a^8 + 5b^6c^2 + 19b^2c^6 + 26c^6a^2 + 26c^2a^6 + 5a^2b^6 + 19a^6b^2 \\ + 19b^4c^4 + 58c^4a^4 + 19a^4b^4 - 16b^4c^2a^2 - 43c^4a^2b^2 - 43a^4b^2c^2 : -5a^8 - 5b^8 + 5c^6a^2 + 19c^2a^6 + 26a^6b^2 \\ + 26a^2b^6 + 5b^2c^6 + 19b^6c^2 + 19c^4a^4 + 58a^4b^4 + 19b^4c^4 - 16c^4a^2b^2 - 43a^4b^2c^2 - 43b^4c^2a^2 \\ = \alpha : \beta : \gamma$$

由上述檢驗知

G_K 、 G_{KG} 、 K_{KG} 、 K_K 符合Homogeneity，Bisymmetry，Cyclicity

故 G_K 、 G_{KG} 、 K_{KG} 、 K_K 均為Center

$$5. \triangle ABC \text{ 中 } (a, b, c) = (6, 9, 13)$$

$$\text{若 } P = (ax:by:cz) \text{ 且 } x + y + z = 1$$

$$\text{令 } k = \frac{2\Delta ABC}{ax + by + cz}$$

則檢驗的值是 kx

$$G_K \text{ 的 } kx = 1.602164244530 \text{ (已於5/29被編錄至ETC)}$$

$$K_K \text{ 的 } kx = 0.310524995543$$

$$G_{KG} \text{ 的 } kx = 1.586282939294$$

$$K_{KG} \text{ 的 } kx = 0.855503614878$$

但皆不在ETC中(2008/05)

二、若 $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, 且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$

則 P 到三邊垂足

$$P_A = (0, \frac{S_C \alpha + a^2 \beta}{a^2}, \frac{S_B \alpha + a^2 \gamma}{a^2})$$

$$P_B = (\frac{S_C \beta + b^2 \alpha}{b^2}, 0, \frac{S_A \beta + b^2 \gamma}{b^2})$$

$$P_C = (\frac{S_B \gamma + c^2 \alpha}{c^2}, \frac{S_A \gamma + c^2 \beta}{c^2}, 0)$$

$\langle pf \rangle$

$$A = (1, 0, 0) \quad B = (0, 1, 0) \quad C = (0, 0, 1) \quad D = (0, \frac{\beta}{\beta + \gamma}, \frac{\gamma}{\beta + \gamma})$$

作 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\overline{PP_A} \perp \overline{BC}$

令 $\overline{BE} = x$, 則 $\overline{CE} = a - x$

$$b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$\text{則 } E = (0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2})$$

$$\text{又 } \overline{DP_A} : \overline{P_A E} = \alpha : \beta + \gamma$$

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} (0, \frac{\beta}{\beta + \gamma}, \frac{\gamma}{\beta + \gamma}) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} (0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2}) \\ &= (0, \frac{S_C \alpha + a^2 \beta}{a^2}, \frac{S_B \alpha + a^2 \gamma}{a^2}) \end{aligned}$$

同理可得 P_B 、 P_C

三、若 $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

且 $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$

則

$$\overline{PQ}^2 = S_A(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + S_B(\beta_1 - \beta_2)^2 + S_C(\gamma_1 - \gamma_2)^2$$

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$\langle pf \rangle$ 如下圖四

過 P, Q 做平行線分別平行 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 且交於 R 點

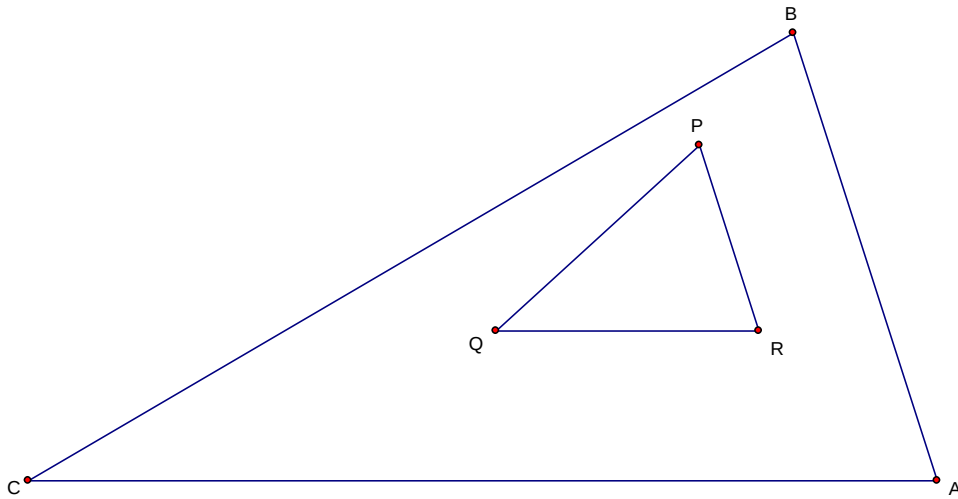
$$\frac{\overline{PR}}{\overline{AB}} = h, \frac{\overline{QR}}{\overline{AC}} = k$$

則 $R = P + h(A - B) = Q + k(A - C)$

$$\Rightarrow R = (\alpha_1 + h)A + (\beta_1 - h)B + \gamma_1 C = (\alpha_2 + k)A + \beta_2 B + (\gamma_2 - k)C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + h = \alpha_2 + k \\ \beta_1 - h = \beta_2 \\ \gamma_1 = \gamma_2 - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h - k = \alpha_2 - \alpha_1 \\ h = \beta_1 - \beta_2 \\ k = \gamma_2 - \gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= (hc)^2 + (kb)^2 - 2(hc)(kb)c \cos A \\ &= (\beta_1 - \beta_2)^2 c^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)^2 b^2 - 2(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_2 - \gamma_1)bc \cos A \\ &= (S_A + S_B)(\beta_1 - \beta_2)^2 + (S_A + S_C)(\gamma_2 - \gamma_1)^2 - 2(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_2 - \gamma_1)S_A \\ &= S_A(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + S_B(\beta_1 - \beta_2)^2 + S_C(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \end{aligned}$$



圖四

四、若 $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, 且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$

則 $\Delta A'B'C'$ 的 $P = \alpha A' + \beta B' + \gamma C'$

五、ETC中關於 X_{3363} 的介紹：

$X_{3363} = X_6$ of pedal triangle of X_2

Trilinears $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$,

where $f(a,b,c) = bc(-4a^4 + 5b^4 + 5c^4 - 5a^2b^2 - 14b^2c^2 - 5c^2a^2)$

Barycentrics $af(a,b,c) : bf(b,c,a) : cf(c,a,b)$

X_{3363} is the symmedian point of the pedal triangle of the centroid. A second construction uses the midpoint X_{597} of the symmedian point and centroid and the midpoint X_{115} of the two Fermat points, X_{13} and X_{14} ; specifically, X_{3363} is the point in the which the line $X_{115} X_{597}$ meets the Euler line. May 29, 2008

X_{3363} lies on these lines : 2,3 115,597

拾壹、參考資料：

- 1.Eric Weisstein , MathWorld
<http://mathworld.wolfram.com/EulerLine.html> , 2007
- 2.R.Honsberger , *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry* , Math. Assoc. America , 1995.
- 3.Paul Yiu , *Introduction to the Geometry of the Triangle* , Department of Mathematical Sciences. Florida Atlantic University , 2001.
- 4.Paul Yiu , *A tour of Triangle Geometry* , Department of Mathematical Sciences. Florida Atlantic University , 2001.
- 5.C. Kimberling , *Encyclopedia of Triangle Centers* , available at
<http://faculty.evansville.edu/ck6/Encyclopedia/ETC.html>.
- 6.Eric Weisstein , Math world
<http://mathworld.wolfram.com/SymmedianPoint.html>
- 7.C. Kimberling , Ceva Collineations, *Forum Geom.*,7(2007) 67-72.
- 8.C. Kimberling , Fixed Points and Fijed Lines of Ceva Collineations, *Forum Geom.*,7(2007) 159-16

【評語】 040414

- 1) 參考資料所列的全部是英文文獻，當中不應該使用中文標點符號。
- 2) 「尤拉線上的點均為心」出現於作品說明書 p. 6 及 p. 9。
這句話正確嗎？
- 3) 數學研究動機起源於「興趣」。本研究顯然對於「三角形的心」頗有興趣。當「心」的數字不超過 10 個時，他們的特殊性可由「稀有」二字來形容。當「心」的數字超過 3000 時，似乎不再稀有，累積下來的煩瑣也不會吸引人們對「心」原本的好奇。請仔細反省整個研究方向的意義所在，問問：三角形的心有趣嗎？