

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 數學科

040413

多邊形上的切圓

學校名稱：國立中興高級中學

作者：  高二 陳國榮  高二 林威翰  高二 陳逸華  高二 陳忠晟	指導老師：  樊揚波  陳雅慧
---	-----------------------------

關鍵詞：算幾不等式、圓外切、面積和

# 多邊形上的切圓

## 摘要

以三角形，五邊形，七邊形各頂點為圓心畫圓，讓相鄰圓均外切，從 gsp 做圖時發現只有一組滿足的解，因此探討為何只有一組解，推論出這些圓面積和的公式；接著探索方向轉換成偶數邊形，得到每個偶數邊形上能滿足這些條件的圓有無限多組，其中想到另一問題，該如何求這些圓面積和的最小值？在討論的過程中，得到切圓面積和的公式在邊數為  $4k$  與  $4k+2$  ( $k \in N$ ) 時，規律不同，便將偶數邊形的邊數分成兩部分推論，並分別求得結果。

## 壹、研究動機

上網找資訊時，我們看到了有篇是在研究三角形中，如何放三個相切的圓可使其面積和為最大，若我們將三個圓圓心移至頂點，什麼條件可使相鄰兩圓相切，且是否為唯一解？又相切時，若非唯一解，則所有圓面積和最小值為多少？並希望能推廣至  $n$  邊形。

## 貳、研究目的

- 一、 探索以多邊形各頂點為圓心畫圓，並使其中圓心為相鄰頂點之兩圓外切，滿足以上要求的圓是否為唯一解？
- 二、 若唯一解，則面積和為多少？若無唯一解，面積和最小值能否求出？

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP、Word 等軟體

## 肆、研究過程或方法

分為奇數邊和偶數邊多邊形，其中偶數邊又分為  $4k+2$  與  $4k$  ( $k \in N$ ) 兩類 探討：

### 一、 奇數邊多邊形：

(一) 三角形：【附(圖一)，P13】

設三角形頂點為  $A_1, A_2, A_3$ ，且邊長  $\overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_1} = a_3$ ，

半周長  $S = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}$ ，三個圓圓半徑為  $r_1, r_2, r_3$ ，

$$\text{相鄰兩圓互相外切條件：} \begin{cases} r_1 + r_2 = a_1 \\ r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_1 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3) \\ r_2 = \frac{1}{2}(a_2 - a_3 + a_1) \\ r_3 = \frac{1}{2}(a_3 - a_1 + a_2) \end{cases}$$

則所求面積和為  $\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

$$\text{其中} \begin{cases} r_1^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_2a_3) \\ r_2^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 + 2a_2a_1 - 2a_3a_1) \\ r_3^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_3a_1 + 2a_3a_2 - 2a_1a_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi\left[\frac{3}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - \frac{1}{2}(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)\right]$$

(二) 五邊形：【附(圖二)，P14】

設五邊形頂點為  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ ，

且邊長  $\overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_4} = a_3, \overline{A_4A_5} = a_4, \overline{A_5A_1} = a_5$ ，

半周長  $S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2}$ ，五個圓圓半徑為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ ，

$$\text{相鄰兩圓互相外切條件：} \begin{cases} r_1 + r_2 = a_1 \\ r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_4 = a_3 \\ r_4 + r_5 = a_4 \\ r_5 + r_1 = a_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5) \\ r_2 = \frac{1}{2}(a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1) \\ r_3 = \frac{1}{2}(a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2) \\ r_4 = \frac{1}{2}(a_4 - a_5 + a_1 - a_2 + a_3) \\ r_5 = \frac{1}{2}(a_5 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4) \end{cases}$$

則所求面積和為  $\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2)$

$$\text{其中} \begin{cases} r_1^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_1a_4 + 2a_1a_5 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 \\ \quad - 2a_2a_5 - 2a_3a_4 + 2a_3a_5 - 2a_4a_5) \\ r_2^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_2a_5 + 2a_2a_1 - 2a_3a_4 + 2a_3a_5 \\ \quad - 2a_3a_1 - 2a_4a_5 + 2a_4a_1 - 2a_5a_1) \\ r_3^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2a_3a_4 + 2a_3a_5 - 2a_3a_1 + 2a_3a_2 - 2a_4a_5 + 2a_4a_1 \\ \quad - 2a_4a_2 - 2a_5a_1 + 2a_5a_2 - 2a_1a_2) \\ r_4^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2a_4a_5 + 2a_4a_1 - 2a_4a_2 + 2a_4a_3 - 2a_5a_1 + 2a_5a_2 \\ \quad - 2a_5a_3 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_2a_3) \\ r_5^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2a_5a_1 + 2a_5a_2 - 2a_5a_3 + 2a_5a_4 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 \\ \quad - 2a_1a_4 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_3a_4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2) \\
&= \pi\left[\frac{5}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) - \frac{3}{2}(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_1)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + a_4a_1 + a_5a_2)\right]
\end{aligned}$$

(三) 七邊形：【附(圖三)，P15】

設七邊形頂點為  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ ，

且邊長  $\overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_4} = a_3, \overline{A_4A_5} = a_4, \overline{A_5A_6} = a_5, \overline{A_6A_7} = a_6, \overline{A_7A_1} = a_7$ ,

半周長  $S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{2}$ ，七個圓圓半徑為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ ，

$$\text{相鄰兩圓互相外切條件：} \begin{cases} r_1 + r_2 = a_1 \\ r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_4 = a_3 \\ r_4 + r_5 = a_4 \\ r_5 + r_6 = a_5 \\ r_6 + r_7 = a_6 \\ r_7 + r_1 = a_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7) \\ r_2 = \frac{1}{2}(a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_1) \\ r_3 = \frac{1}{2}(a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_1 + a_2) \\ r_4 = \frac{1}{2}(a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_1 - a_2 + a_3) \\ r_5 = \frac{1}{2}(a_5 - a_6 + a_7 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4) \\ r_6 = \frac{1}{2}(a_6 - a_7 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5) \\ r_7 = \frac{1}{2}(a_7 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6) \end{cases}$$

則所求面積和為  $\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2)$

其中

$$\begin{cases}
r_1^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_1a_2 + a_1a_4 + a_1a_6 + a_2a_3 + a_2a_5 + a_2a_7 + a_3a_4 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_4a_7 + a_5a_6 + a_6a_7) \\
+ 2(a_1a_3 + a_1a_5 + a_1a_7 + a_2a_4 + a_2a_6 + a_3a_5 + a_3a_7 + a_4a_6 + a_5a_7)] \\
r_2^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_2a_3 + a_2a_5 + a_2a_7 + a_3a_4 + a_3a_6 + a_3a_1 + a_4a_5 + a_4a_7 + a_5a_6 + a_5a_1 + a_6a_7 + a_7a_1) \\
+ 2(a_2a_4 + a_2a_6 + a_2a_1 + a_3a_5 + a_3a_7 + a_4a_6 + a_4a_1 + a_5a_7 + a_6a_1)] \\
r_3^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_3a_4 + a_3a_6 + a_3a_1 + a_4a_5 + a_4a_7 + a_4a_2 + a_5a_6 + a_5a_1 + a_6a_7 + a_6a_2 + a_7a_1 + a_1a_2) \\
+ 2(a_3a_5 + a_3a_7 + a_3a_2 + a_4a_6 + a_4a_1 + a_5a_7 + a_5a_2 + a_6a_1 + a_7a_2)] \\
r_4^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_4a_5 + a_4a_7 + a_4a_2 + a_5a_6 + a_5a_1 + a_5a_3 + a_6a_7 + a_6a_2 + a_7a_1 + a_7a_3 + a_2a_1 + a_2a_3) \\
+ 2(a_4a_6 + a_4a_1 + a_4a_3 + a_5a_7 + a_5a_2 + a_6a_1 + a_6a_3 + a_7a_2 + a_1a_3)] \\
r_5^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_5a_6 + a_5a_1 + a_5a_3 + a_6a_7 + a_6a_2 + a_6a_4 + a_7a_1 + a_7a_3 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_4) \\
+ 2(a_5a_7 + a_5a_2 + a_5a_4 + a_6a_1 + a_6a_3 + a_7a_2 + a_7a_4 + a_1a_3 + a_2a_4)] \\
r_6^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_6a_7 + a_6a_2 + a_6a_4 + a_7a_1 + a_7a_3 + a_7a_5 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_5 + a_4a_3 + a_4a_5) \\
+ 2(a_6a_1 + a_6a_3 + a_6a_5 + a_7a_2 + a_7a_4 + a_1a_3 + a_1a_5 + a_2a_4 + a_3a_5)] \\
r_7^2 = \frac{1}{4}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \\
- 2(a_7a_1 + a_7a_3 + a_7a_5 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_1a_6 + a_2a_3 + a_2a_5 + a_3a_4 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_5a_6) \\
+ 2(a_7a_2 + a_7a_4 + a_7a_6 + a_1a_3 + a_1a_5 + a_2a_4 + a_2a_6 + a_3a_5 + a_4a_6)]
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2)$$

$$= \pi\left[\frac{7}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)\right]$$

$$- \frac{5}{2}(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_6 + a_6a_7 + a_7a_1)$$

$$+ \frac{3}{2}(a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + a_4a_6 + a_5a_7 + a_6a_1 + a_7a_2)$$

$$- \frac{1}{2}(a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6 + a_4a_7 + a_5a_1 + a_6a_2 + a_7a_3)]$$

(四) 結論：

同理可推出，當  $n = 2k + 1 (k \in N)$  時，所求之面積和一般式為

$$\pi \left[ \frac{n}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{2k+1-2j}{2} \sum_{i=1}^n a_i a_{i+j} \right], \text{ 其中 } a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

二、偶數邊多邊形：

(一)  $4k (k \in N)$  邊多邊形：

1. 四邊形：【附(圖四、五)，P16、17】

設四邊形頂點為  $A_1, A_2, A_3, A_4$ ，且邊長  $\overline{A_1 A_2} = a_1, \overline{A_2 A_3} = a_2, \overline{A_3 A_4} = a_3, \overline{A_4 A_1} = a_4$ ，

半周長  $S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$ ，四個圓圓半徑為  $r_1, r_2, r_3, r_4$

$$\text{相鄰兩圓互相外切條件：} \begin{cases} r_1 + r_2 = a_1 \\ r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_4 = a_3 \\ r_4 + r_1 = a_4 \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = S = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$\begin{aligned} \text{則所求面積和爲} & \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \\ & = \pi[(r_1 + r_2)^2 + (r_3 + r_4)^2 - 2(r_1 r_2 + r_3 r_4)] \cdots (1) \\ & = \pi[(r_1 + r_4)^2 + (r_3 + r_2)^2 - 2(r_1 r_4 + r_3 r_2)] \cdots (2) \end{aligned}$$

(1) + (2)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & 2\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \\ & = \pi[a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_2^2 - 2(r_1 + r_3)(r_2 + r_4)] \\ & \geq \pi \left[ \sum_{i=1}^4 a_i^2 - 2 \cdot \left(\frac{S}{2}\right)^2 \right] * \text{註(一)} \end{aligned}$$

$$\text{則 } \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \geq \frac{\pi}{2} \left[ \sum_{i=1}^4 a_i^2 - \frac{1}{2} S^2 \right]$$

\*註(一)，令  $S$  為四邊形半周長，因為  $r_1, r_2, r_3, r_4 > 0$

$$\text{由算幾不等式 } \Rightarrow \frac{(r_1 + r_3) + (r_2 + r_4)}{2} \geq \sqrt{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4)}$$

等號成立的充要條件為：

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4 = \frac{1}{2} S, \text{ 又 } r_1 - r_3 = a_1 - a_2 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} S + a_1 - a_2 \right)$$

$$\text{同理可推得 } r_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} S + a_i - a_{i+1} \right), i = 1, 2, 3, 4$$

2. 八邊形：【附(圖六、七)，P18、19】

設八邊形頂點為  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ ，

且邊長

$$\overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_4} = a_3, \overline{A_4A_5} = a_4, \overline{A_5A_6} = a_5, \overline{A_6A_7} = a_6, \overline{A_7A_8} = a_7, \overline{A_8A_1} = a_8$$

$$\text{半周長 } S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{2}$$

八個圓圓半徑為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$

相鄰兩圓互相外切條件：

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 + r_2 = a_1 \\ r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_4 = a_3 \\ r_4 + r_5 = a_4 \\ r_5 + r_6 = a_5 \\ r_6 + r_7 = a_6 \\ r_7 + r_8 = a_7 \\ r_8 + r_1 = a_8 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = S = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8$$

所求面積和

$$\begin{aligned} & \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + r_8^2) \\ &= \pi[(r_1 + r_2)^2 + (r_3 + r_4)^2 + (r_5 + r_6)^2 + (r_7 + r_8)^2 - 2(r_1r_2 + r_3r_4 + r_5r_6 + r_7r_8)] \cdots (1) \\ &= \pi[(r_1 + r_4)^2 + (r_3 + r_6)^2 + (r_5 + r_8)^2 + (r_7 + r_2)^2 - 2(r_1r_4 + r_3r_6 + r_5r_8 + r_7r_2)] \cdots (2) \\ &= \pi[(r_1 + r_6)^2 + (r_3 + r_8)^2 + (r_5 + r_2)^2 + (r_7 + r_4)^2 - 2(r_1r_6 + r_3r_8 + r_5r_2 + r_7r_4)] \cdots (3) \\ &= \pi[(r_1 + r_8)^2 + (r_3 + r_2)^2 + (r_5 + r_4)^2 + (r_7 + r_6)^2 - 2(r_1r_8 + r_3r_2 + r_5r_4 + r_7r_6)] \cdots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow \\
& 4\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + r_8^2) \\
& = \pi[(r_1 + r_2)^2 + (r_3 + r_4)^2 + (r_5 + r_6)^2 + (r_7 + r_8)^2 + (r_8 + r_1)^2 + (r_2 + r_3)^2 + (r_4 + r_5)^2 + (r_6 + r_7)^2 \\
& \quad + (r_1 + r_4)^2 + (r_1 + r_6)^2 + (r_3 + r_6)^2 + (r_3 + r_8)^2 + (r_5 + r_8)^2 + (r_5 + r_2)^2 + (r_7 + r_2)^2 + (r_7 + r_4)^2 \\
& \quad - 2(r_1r_2 + r_3r_4 + r_5r_6 + r_7r_8 + r_1r_4 + r_3r_6 + r_5r_8 + r_7r_2 + r_1r_6 + r_3r_8 + r_5r_2 + r_7r_4 + r_1r_8 + r_3r_2 \\
& \quad + r_5r_4 + r_7r_6)] \\
& = \pi\{a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_7^2 + a_8^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 \\
& \quad + [(a_1 - a_2 + a_3)^2 + (a_6 - a_7 + a_8)^2 + (a_3 - a_4 + a_5)^2 + (a_8 - a_1 + a_2)^2 \\
& \quad + (a_5 - a_6 + a_7)^2 + (a_2 - a_3 + a_4)^2 + (a_7 - a_8 + a_1)^2 + (a_4 - a_5 + a_6)^2] \\
& \quad - 2(r_1 + r_3 + r_5 + r_7)(r_2 + r_4 + r_6 + r_8)\} \\
& \geq \pi\left\{\sum_{i=1}^8 a_i^2 + \sum_{i=1}^8 (a_{i-1} - a_i + a_{i+1})^2 - 2 \cdot \left(\frac{S}{2}\right)^2\right\} * \text{註(一)}, \text{其中 } a_{i+8p} = a_i, p \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, \dots, 8\} \\
& \geq \pi\left\{\sum_{i=1}^8 \sum_{l=0}^1 \left[\sum_{j=-l}^l (-1)^j a_{i+j}\right] - \frac{1}{2} S^2\right\}
\end{aligned}$$

$$\text{則 } \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + r_8^2) \geq \frac{\pi}{4} \left\{ \sum_{i=1}^8 \sum_{l=0}^1 \left[ \sum_{j=-l}^l (-1)^j a_{i+j} \right] - \frac{1}{2} S^2 \right\}$$

其中  $a_{i+8p} = a_i, p \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, \dots, 8\}$

\*註(一), 令  $S$  為八邊形半周長, 因為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8 > 0$   
由算幾不等式

$$\Rightarrow \frac{(r_1 + r_3 + r_5 + r_7) + (r_2 + r_4 + r_6 + r_8)}{2} \geq \sqrt{(r_1 + r_3 + r_5 + r_7)(r_2 + r_4 + r_6 + r_8)}$$

等號成立的充要條件為：

八邊形各邊邊長為  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$

$$\text{且 } r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = r_2 + r_4 + r_6 + r_8 = S/2 \dots\dots (1)$$

$$2(r_8 - r_4) = a_8 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 \dots\dots(2)$$

$$2(r_2 - r_6) = -a_8 + a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 \dots\dots(3)$$

$$(1)/2 + (2)/2 + (3) = 2(r_2 + r_8) =$$

$$\frac{a_8 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7}{2} + \frac{-a_8 + a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7}{2} + S/2$$



$$2(a_1 + a_8) - 2(r_2 + r_8)$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{7a_1 - 5a_2 + 3a_3 - a_4 - a_5 + 3a_6 - 5a_7 + 7a_8}{16}$$

$r_1, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$  同理可證

3. 結論：

同理可推出，當  $n = 4k (k \in N)$  時，所求之最小面積和為

$$\frac{\pi}{2k} \left[ \sum_{i=1}^{4k} \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{j=-l}^l (-1)^j a_{i+j} \right)^2 - \frac{1}{2} S^2 \right], \text{ 其中 } a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(二)  $4k + 2 (k \in N)$  邊多邊形：

1. 六邊形：【附(圖八、九)，P20、21】

設六邊形頂點為  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ，

且邊長  $\overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_4} = a_3, \overline{A_4A_5} = a_4, \overline{A_5A_6} = a_5, \overline{A_6A_1} = a_6$

半周長  $S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{2}$ ，六個圓圓半徑為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$

相鄰兩圓互相外切條件：

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = a_1 \\ r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_4 = a_3 \\ r_4 + r_5 = a_4 \\ r_5 + r_6 = a_5 \\ r_6 + r_1 = a_6 \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6 = S = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$$

所求面積和

$$\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2)$$

$$= \pi[(r_1 + r_2)^2 + (r_3 + r_4)^2 + (r_5 + r_6)^2 - 2(r_1r_2 + r_3r_4 + r_5r_6)] \cdots (1)$$

$$= \pi[(r_1 + r_4)^2 + (r_3 + r_6)^2 + (r_5 + r_2)^2 - 2(r_1r_4 + r_3r_6 + r_5r_2)] \cdots (2)$$

$$= \pi[(r_1 + r_6)^2 + (r_3 + r_2)^2 + (r_5 + r_4)^2 - 2(r_1r_6 + r_3r_2 + r_5r_4)] \cdots (3)$$

$$\begin{aligned}
& (1) + (2) + (3) \Rightarrow \\
& 3\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2) \\
& = \pi[(r_1 + r_2)^2 + (r_3 + r_4)^2 + (r_5 + r_6)^2 + (r_1 + r_6)^2 + (r_3 + r_2)^2 + (r_5 + r_4)^2 \\
& \quad + (r_1 + r_4)^2 + (r_3 + r_6)^2 + (r_5 + r_2)^2 - 2(r_1r_2 + r_3r_4 + r_5r_6 + r_1r_4 + r_3r_6 + r_5r_2 \\
& \quad + r_1r_6 + r_3r_2 + r_5r_4)] \\
& = \pi\{a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_2^2 + a_4^2 \\
& \quad + \frac{1}{2}[(a_1 - a_2 + a_3)^2 + (a_4 - a_5 + a_6)^2] \\
& \quad + \frac{1}{2}[(a_3 - a_4 + a_5)^2 + (a_6 - a_1 + a_2)^2] \\
& \quad + \frac{1}{2}[(a_5 - a_6 + a_1)^2 + (a_2 - a_3 + a_4)^2] \\
& \quad - 2(r_1 + r_3 + r_5)(r_2 + r_4 + r_6)\} \\
& \geq \pi[\sum_{i=1}^6 a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^6 (a_{i-1} - a_i + a_{i+1})^2 - 2 \cdot (\frac{S}{2})^2] * \text{註(一)}, \text{其中 } a_{i+6p} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, 6\}
\end{aligned}$$

$$\text{則 } \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2) \geq \frac{\pi}{3}[\sum_{i=1}^6 a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^6 (a_{i-1} - a_i + a_{i+1})^2 - \frac{1}{2}S^2]$$

$$\text{其中 } a_{i+6p} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

\*註(一)，令  $S$  為六邊形半周長，因為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 > 0$

$$\text{由算幾不等式} \Rightarrow \frac{(r_1 + r_3 + r_5) + (r_2 + r_4 + r_6)}{2} \geq \sqrt{(r_1 + r_3 + r_5)(r_2 + r_4 + r_6)}$$

等號成立的充要條件為：

$$2(r_1 - r_3) = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 \dots (1)$$

$$2(r_1 - r_5) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 \dots (2)$$

$$(1) + (2)$$

$$\Rightarrow 4r_1 - 2r_3 - 2r_5 = 2a_1 - 2a_2 - 2a_5 + 2a_6$$

$$\Rightarrow 6r_1 - S = 2a_1 - 2a_2 - 2a_5 + 2a_6$$

$$r_1 = \frac{5(a_1 + a_6) - 3(a_2 + a_5) + 1(a_3 + a_4)}{12}$$

$r_{2-6}$  依此類推

2. 十邊形：【附(圖十、十一)，P22、24】

設十邊形頂點為  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ ，

$$\begin{aligned} \text{且邊長 } \overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_4} = a_3, \overline{A_4A_5} = a_4, \overline{A_5A_6} = a_5, \overline{A_6A_7} = a_6 \\ \overline{A_7A_8} = a_7, \overline{A_8A_9} = a_8, \overline{A_9A_{10}} = a_9, \overline{A_{10}A_1} = a_{10} \end{aligned}$$

$$\text{半周長 } S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{2}$$

十個圓半徑為  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}$

相鄰兩圓互相外切條件：

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = a_1, r_2 + r_3 = a_2 \\ r_3 + r_4 = a_3, r_4 + r_5 = a_4 \\ r_5 + r_6 = a_5, r_6 + r_7 = a_6 \\ r_7 + r_8 = a_7, r_8 + r_9 = a_8 \\ r_9 + r_{10} = a_9, r_{10} + r_1 = a_{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 &= a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = S \\ &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8 + r_9 + r_{10} \end{aligned}$$

所求面積和

$$\begin{aligned} &\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 + r_{10}^2) \\ &= \pi[(r_1 + r_2)^2 + (r_3 + r_4)^2 + (r_5 + r_6)^2 + (r_7 + r_8)^2 + (r_9 + r_{10})^2 \\ &\quad - 2(r_1r_2 + r_3r_4 + r_5r_6 + r_7r_8 + r_9r_{10})] \cdots (1) \\ &= \pi[(r_1 + r_4)^2 + (r_3 + r_6)^2 + (r_5 + r_8)^2 + (r_7 + r_{10})^2 + (r_9 + r_2)^2 \\ &\quad - 2(r_1r_4 + r_3r_6 + r_5r_8 + r_7r_{10} + r_9r_2)] \cdots (2) \\ &= \pi[(r_1 + r_6)^2 + (r_3 + r_8)^2 + (r_5 + r_{10})^2 + (r_7 + r_2)^2 + (r_9 + r_4)^2 \\ &\quad - 2(r_1r_6 + r_3r_8 + r_5r_{10} + r_7r_2 + r_9r_4)] \cdots (3) \\ &= \pi[(r_1 + r_8)^2 + (r_3 + r_{10})^2 + (r_5 + r_2)^2 + (r_7 + r_4)^2 + (r_9 + r_6)^2 \\ &\quad - 2(r_1r_8 + r_3r_{10} + r_5r_2 + r_7r_4 + r_9r_6)] \cdots (4) \\ &= \pi[(r_1 + r_{10})^2 + (r_3 + r_2)^2 + (r_5 + r_4)^2 + (r_7 + r_6)^2 + (r_9 + r_8)^2 \\ &\quad - 2(r_1r_{10} + r_3r_2 + r_5r_4 + r_7r_6 + r_9r_8)] \cdots (5) \end{aligned}$$

(1) + (2) + (3) + (4) + (5)  $\Rightarrow$

$$5\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 + r_{10}^2)$$

$$= \pi\{a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_7^2 + a_9^2$$

$$+ (a_1 - a_2 + a_3)^2 + (a_4 - a_5 + a_6)^2$$

$$+ (a_3 - a_4 + a_5)^2 + (a_6 - a_7 + a_8)^2$$

$$+ (a_5 - a_6 + a_7)^2 + (a_8 - a_9 + a_{10})^2$$

$$+ (a_7 - a_8 + a_9)^2 + (a_{10} - a_1 + a_2)^2$$

$$+ (a_9 - a_{10} + a_1)^2 + (a_2 - a_3 + a_4)^2$$

$$+ \frac{1}{2}[(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5)^2 + (a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10})^2]$$

$$+ \frac{1}{2}[(a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9)^2 + (a_{10} - a_1 + a_2 - a_3 + a_4)^2]$$

$$+ \frac{1}{2}[(a_9 - a_{10} + a_1 - a_2 + a_3)^2 + (a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8)^2]$$

$$+ \frac{1}{2}[(a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7)^2 + (a_8 - a_9 + a_{10} - a_1 + a_2)^2]$$

$$+ \frac{1}{2}[(a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} + a_1)^2 + (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6)^2]$$

$$+ a_{10}^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 + a_8^2 - 2(r_1 + r_3 + r_5 + r_7 + r_9)(r_2 + r_4 + r_6 + r_8 + r_{10})\}$$

$$\geq \pi\left[\sum_{i=1}^{10} a_i^2 + \sum_{i=1}^{10} (a_{i-1} - a_i + a_{i+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} (a_{i-2} - a_{i-1} + a_i - a_{i+1} + a_{i+2})^2 - \frac{1}{2} S^2\right] * \text{註(一)}$$

其中  $a_{i+10p} = a_i, p \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$

$$= \frac{\pi}{5} \left\{ \sum_{i=1}^{10} \left[ \sum_{i=0}^1 \left( \sum_{j=-l}^l (-1)^j a_{i+j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=-2}^5 (-1)^j a_{i+j} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} S^2 \right\}$$

$$\text{則 } \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 + r_{10}^2)$$

$$\geq \frac{\pi}{5} \left[ \sum_{i=1}^{10} a_i^2 + \sum_{i=1}^{10} (a_{i-1} - a_i + a_{i+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} (a_{i-2} - a_{i-1} + a_i - a_{i+1} + a_{i+2})^2 - \frac{1}{2} S^2 \right]$$

其中  $a_{i+10p} = a_i, p \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$

\*註(一), 令  $S$  爲十邊形半周長, 因爲  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10} > 0$

由算幾不等式  $\Rightarrow$

$$\frac{(r_1 + r_3 + r_5 + r_7 + r_9) + (r_2 + r_4 + r_6 + r_8 + r_{10})}{2} \geq \sqrt{(r_1 + r_3 + r_5 + r_7 + r_9)(r_2 + r_4 + r_6 + r_8 + r_{10})}$$

等號成立的充要條件為：

$$2(r_1 - r_5) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} \quad --(1)$$

$$2(r_1 - r_7) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} \quad --(2)$$

$$2(r_1 - r_3) = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} \quad --(3)$$

$$2(r_1 - r_9) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 - a_9 + a_{10} \quad --(4)$$

$$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(4r_1 - r_3 - r_5 - r_7 - r_9) = 4a_1 - 4a_2 + 2a_3 - 2a_4 - 2a_7 + 2a_8 - 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\Rightarrow 10r_1 - S = 4a_1 - 4a_2 + 2a_3 - 2a_4 - 2a_7 + 2a_8 - 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{9(a_1 + a_{10}) - 7(a_2 + a_9) + 5(a_3 + a_8) - 3(a_4 + a_7) + 1(a_5 + a_6)}{20}$$

$r_{2-10}$ 以此類推

3. 結論：同理可推出，當  $n = 4k + 2 (k \in N)$  時，所求之最小面積和為

$$\frac{\pi}{2k+1} \left\{ \sum_{i=1}^{4k+2} \left[ \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{j=l}^l (-1)^j a_{i+j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=-k}^k (-1)^j a_{i+j} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} S^2 \right\},$$

其中  $a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

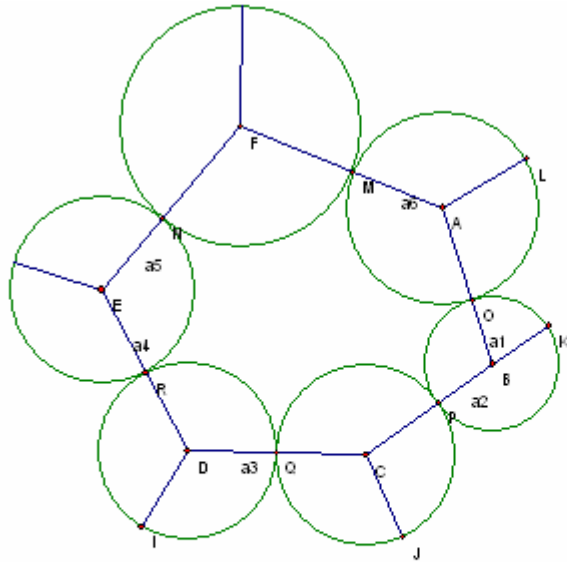
#### 伍、研究心得

我們分為奇數邊和偶數邊多邊形，其中偶數邊又分為  $4k + 2$  與  $4k (k \in N)$  兩類探討：

一、當邊數為奇數時，面積和為定值，一般式為：

$$\pi \left[ \frac{n}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{2k+1-2j}{2} \sum_{i=1}^n a_i a_{i+j} \right], \text{ 其中 } a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

二、當邊數為偶數時，面積和受半徑影響，觀察半徑增減情形與面積和關係如下：



因為要求出圓面積的最小和，所以把圓先分成兩組奇數組(A、C、E)與偶數組(B、D、F)因為各組只要其中一半徑加大一個量則同組的也會有相同的結果。然而要使得圓面積之和在一定長度的總半徑下達到最小，則兩組圓之半徑和必須相等，所以我們用算幾不等式，當兩組半徑和等於兩組半徑之乘積開根號時則得到兩組半徑和相等，也得到最小之圓面積和。

(一) 邊數  $n = 4k (k \in N)$  時，所求之最小面積和為：

$$\frac{\pi}{2k} \left[ \sum_{i=1}^{4k} \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{j=-l}^l (-1)^j a_{i+j} \right)^2 - \frac{1}{2} S^2 \right],$$

其中  $a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

(二) 邊數  $n = 4k + 2 (k \in N)$  時，所求之最小面積和為：

$$\frac{\pi}{2k+1} \left\{ \sum_{i=1}^{4k+2} \left[ \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{j=-l}^l (-1)^j a_{i+j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=-k}^k (-1)^j a_{i+j} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} S^2 \right\},$$

其中  $a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

(三) 當邊數  $n$  為偶數，且最小面積和成立時各圓半徑整理後為：

$$r_j = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k+1} (n+1-2k) (a_{j+k-1} + a_{n+j-k}), \text{ 其中 } a_{i+np} = a_i, p \in Z, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

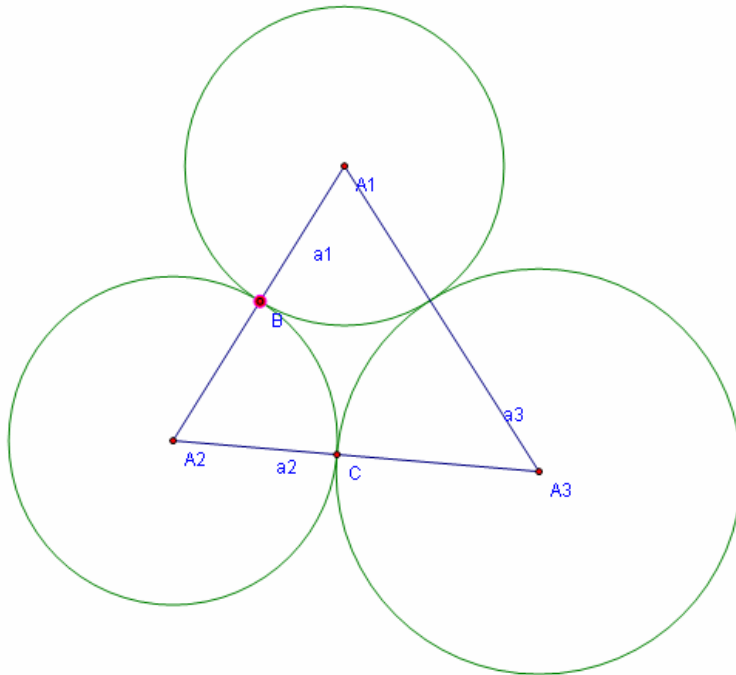
#### 陸、討論

- 一、我們發現此條件下的作法，要使面積和最大，之中某些圓會趨近於一點(即圓心)，因此無法討論面積和之極大值，則是否須修改上述條件，使其出現極大值？
- 二、既然平面中多邊形可作出外切鄰圓面積和為最小值，能否推廣至空間中多面體亦具有相同情況，即由各頂點為球心作球，使相鄰兩球外切，其體積和是否有極值？

#### 柒、參考資料及其他

- 1.中華民國第 32 屆中小學科展第二名作品：【在一已知三角形嵌入三個圓何時圓面積和最大】
- 2.高中課本第四冊【圓與球面】

(圖一)【三角形】



a1 = 5.55公分  
a2 = 6.29公分  
a3 = 6.21公分

⊙A1B的面積 = 23.48 公分<sup>2</sup>

⊙A2B的面積 = 24.92 公分<sup>2</sup>

⊙A3C的面積 = 37.96 公分<sup>2</sup>

(⊙A1B的面積)+(⊙A2B的面積)+(⊙A3C的面積) = 86.36 公分<sup>2</sup>

$$\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2) \cdot 3}{4} = 81.72 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3}{2} = 54.23 \text{ 公分}^2$$

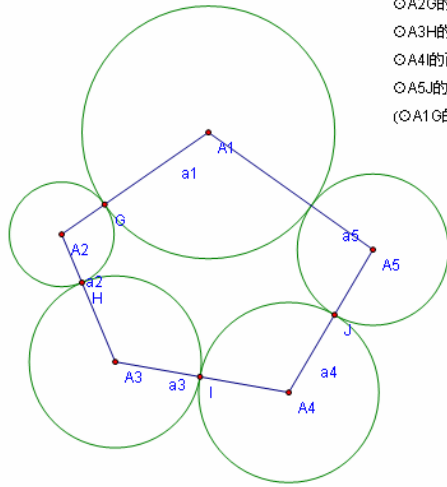
$$\left( \frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2) \cdot 3}{4} - \frac{a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3}{2} \right) \cdot \pi = 86.36 \text{ 公分}^2$$



(圖二)【五邊形】

a1 = 3.71公分  
 a2 = 2.87公分  
 a3 = 3.65公分  
 a4 = 3.44公分  
 a5 = 4.19公分

⊙A1G的面積 = 21.59 公分<sup>2</sup>  
 ⊙A2G的面積 = 3.70 公分<sup>2</sup>  
 ⊙A3H的面積 = 10.01 公分<sup>2</sup>  
 ⊙A4J的面積 = 10.98 公分<sup>2</sup>  
 ⊙A5J的面積 = 7.75 公分<sup>2</sup>  
 (⊙A1G的面積)+(⊙A2G的面積)+(⊙A3H的面積)+(⊙A5J的面積)+(⊙A4J的面積) = 54.02 公分<sup>2</sup>



$$\frac{(a1^2+a2^2+a3^2+a4^2+a5^2) \cdot 5}{4} = 80.91 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{(a1 \cdot a2 + a2 \cdot a3 + a3 \cdot a4 + a4 \cdot a5 + a5 \cdot a1) \cdot 3}{2} = 95.47 \text{ 公分}^2$$

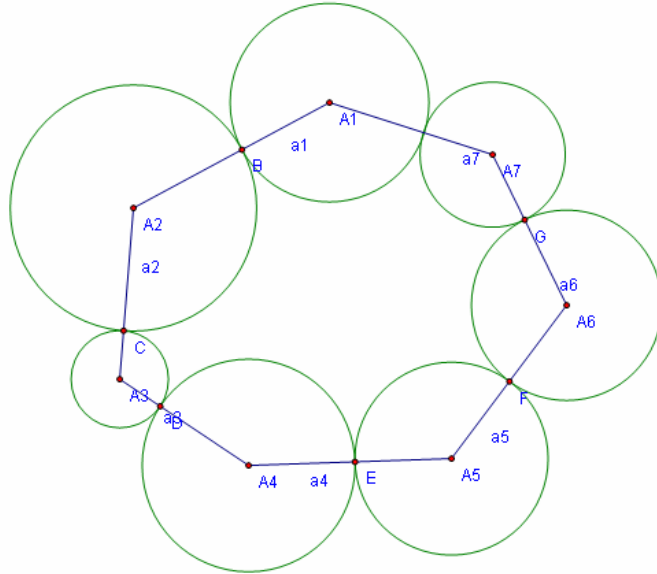
$$\frac{a1 \cdot a3 + a2 \cdot a4 + a3 \cdot a5 + a4 \cdot a1 + a5 \cdot a2}{2} = 31.76 \text{ 公分}^2$$

$$\left( \left( \frac{(a1^2+a2^2+a3^2+a4^2+a5^2) \cdot 5}{4} - \frac{(a1 \cdot a2 + a2 \cdot a3 + a3 \cdot a4 + a4 \cdot a5 + a5 \cdot a1) \cdot 3}{2} \right) + \frac{a1 \cdot a3 + a2 \cdot a4 + a3 \cdot a5 + a4 \cdot a1 + a5 \cdot a2}{2} \right) \cdot \pi = 54.02 \text{ 公分}^2$$

(圖三)【七邊形】

$a_1 = 4.30$ 公分  
 $a_2 = 3.32$ 公分  
 $a_3 = 2.99$ 公分  
 $a_4 = 3.92$ 公分  
 $a_5 = 3.70$ 公分  
 $a_6 = 3.24$ 公分  
 $a_7 = 3.31$ 公分

$\odot A_1B$ 的面積 = 11.57 公分<sup>2</sup>  
 $\odot A_2B$ 的面積 = 17.76 公分<sup>2</sup>  
 $\odot A_3C$ 的面積 = 2.78 公分<sup>2</sup>  
 $\odot A_4D$ 的面積 = 13.26 公分<sup>2</sup>  
 $\odot A_5E$ 的面積 = 10.91 公分<sup>2</sup>  
 $\odot A_6F$ 的面積 = 10.64 公分<sup>2</sup>  
 $\odot A_7G$ 的面積 = 6.18 公分<sup>2</sup>



$$(\odot A_1B \text{的面積}) + (\odot A_2B \text{的面積}) + (\odot A_3C \text{的面積}) + (\odot A_4D \text{的面積}) + (\odot A_5E \text{的面積}) + (\odot A_6F \text{的面積}) + (\odot A_7G \text{的面積}) = 73.10 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) \cdot 7}{4} = 155.66 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_6 + a_6 \cdot a_7 + a_7 \cdot a_1) \cdot 5}{2} = 218.41 \text{ 公分}^2$$

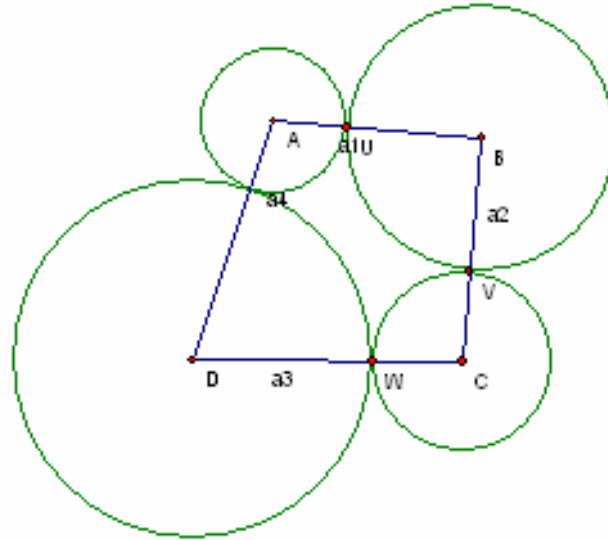
$$\frac{(a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_5 + a_4 \cdot a_6 + a_5 \cdot a_7 + a_6 \cdot a_1 + a_7 \cdot a_2) \cdot 3}{2} = 130.20 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_5 + a_3 \cdot a_6 + a_4 \cdot a_7 + a_5 \cdot a_1 + a_6 \cdot a_2 + a_7 \cdot a_3}{2} = 44.18 \text{ 公分}^2$$

$$\left( \left( \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) \cdot 7}{4} - \frac{(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_6 + a_6 \cdot a_7 + a_7 \cdot a_1) \cdot 5}{2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_5 + a_4 \cdot a_6 + a_5 \cdot a_7 + a_6 \cdot a_1 + a_7 \cdot a_2) \cdot 3}{2} \right) - \frac{a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_5 + a_3 \cdot a_6 + a_4 \cdot a_7 + a_5 \cdot a_1 + a_6 \cdot a_2 + a_7 \cdot a_3}{2} \cdot \pi = 73.10 \text{ 公分}^2$$

(圖四)【四邊形-1】



$$a_1 = 3.24 \text{公分}$$

$$a_2 = 3.50 \text{公分}$$

$$a_3 = 4.21 \text{公分}$$

$$a_4 = 3.94 \text{公分}$$

$$a_1 + a_3 = 7.45 \text{公分}$$

$$a_2 + a_4 = 7.45 \text{公分}$$

$$\odot AU \text{的面積} = 4.12 \text{公分}^2$$

$$\odot BU \text{的面積} = 13.78 \text{公分}^2$$

$$\odot CV \text{的面積} = 6.25 \text{公分}^2$$

$$\odot DW \text{的面積} = 24.57 \text{公分}^2$$

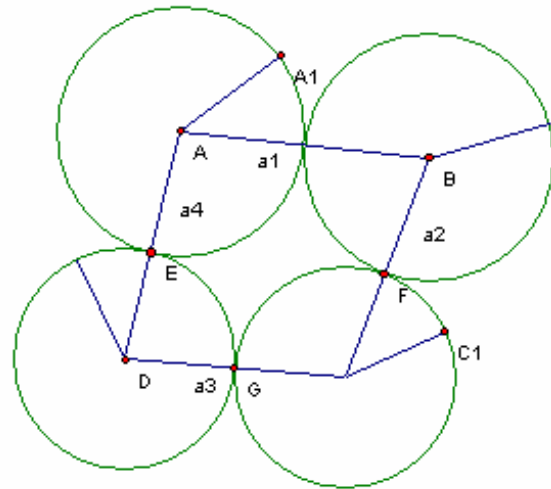
$$(\odot AU \text{的面積}) + (\odot BU \text{的面積}) + (\odot CV \text{的面積}) + (\odot DW \text{的面積}) = 48.71 \text{公分}^2$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 56.00 \text{公分}^2$$

$$\frac{(a_1 + a_3)^2}{2} = 27.72 \text{公分}^2$$

$$\frac{\left( (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + \frac{(a_1 + a_3)^2}{2} \right) \cdot \pi}{2} = 44.42 \text{公分}^2$$

(圖五)【四邊形-2】



$$a_1 = 3.83 \text{公分}$$

$$a_2 = 3.60 \text{公分}$$

$$a_3 = 3.37 \text{公分}$$

$$a_4 = 3.59 \text{公分}$$

$$a_1 + a_3 = 7.20 \text{公分}$$

$$a_2 + a_4 = 7.20 \text{公分}$$

$$\odot AE \text{的面積} = 11.44 \text{公分}^2$$

$$\odot BF \text{的面積} = 11.54 \text{公分}^2$$

$$\odot CG \text{的面積} = 8.92 \text{公分}^2$$

$$\odot DE \text{的面積} = 8.92 \text{公分}^2$$

$$(\odot AE \text{的面積}) + (\odot BF \text{的面積}) + (\odot CG \text{的面積}) + (\odot DE \text{的面積}) = 40.82 \text{公分}^2$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 51.92 \text{公分}^2$$

$$\frac{(a_1 + a_3)^2}{2} = 25.93 \text{公分}^2$$

$$\frac{\left( (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) - \frac{(a_1 + a_3)^2}{2} \right) \cdot \pi}{2} = 40.83 \text{公分}^2$$

$$m \overline{AA_1} + m \overline{CC_1} = 3.59 \text{公分}$$

$$m \overline{BB_1} + m \overline{DD_1} = 3.60 \text{公分}$$

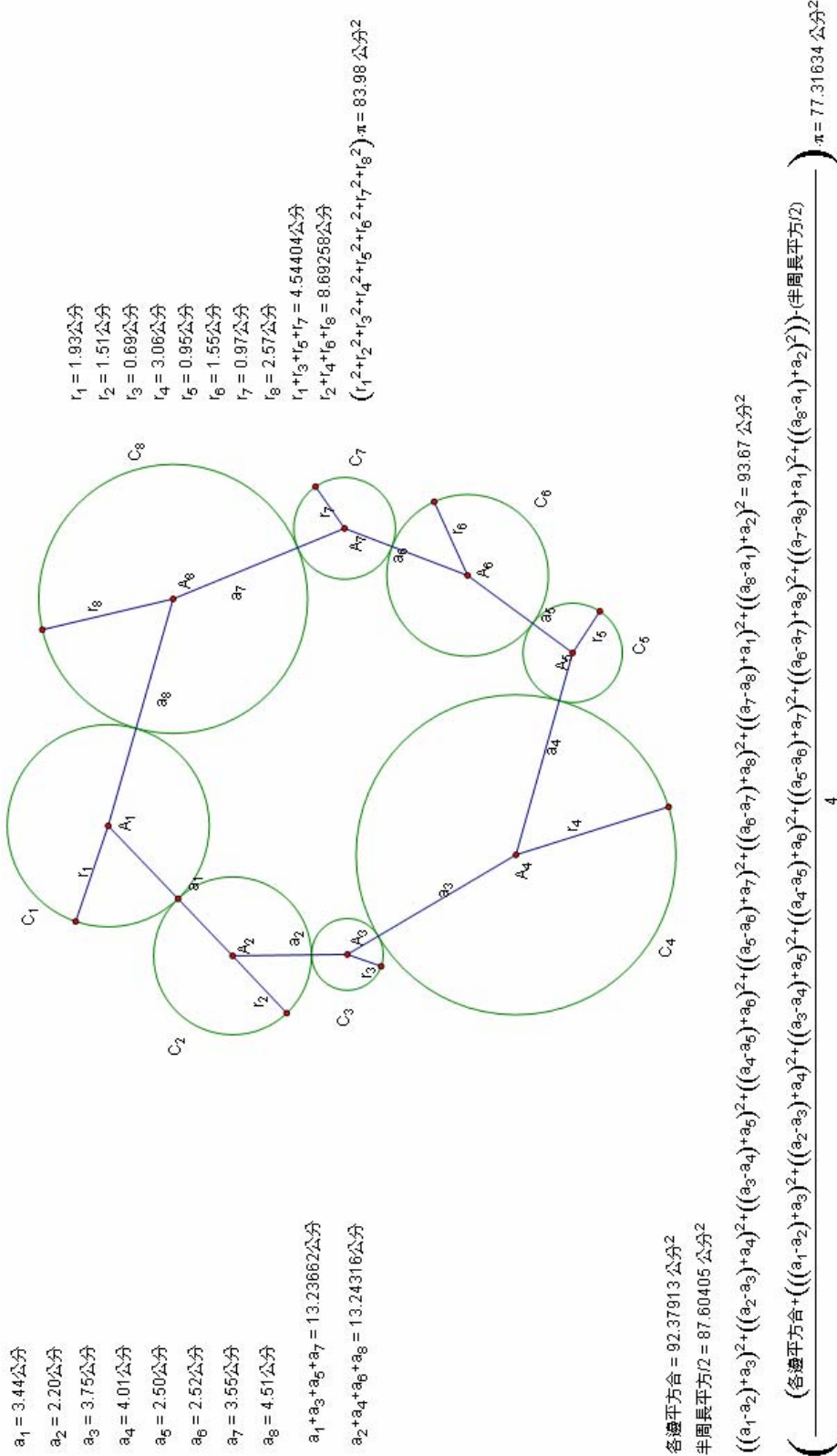
$$m \overline{AA_1} = 1.91 \text{公分}$$

$$m \overline{BB_1} = 1.92 \text{公分}$$

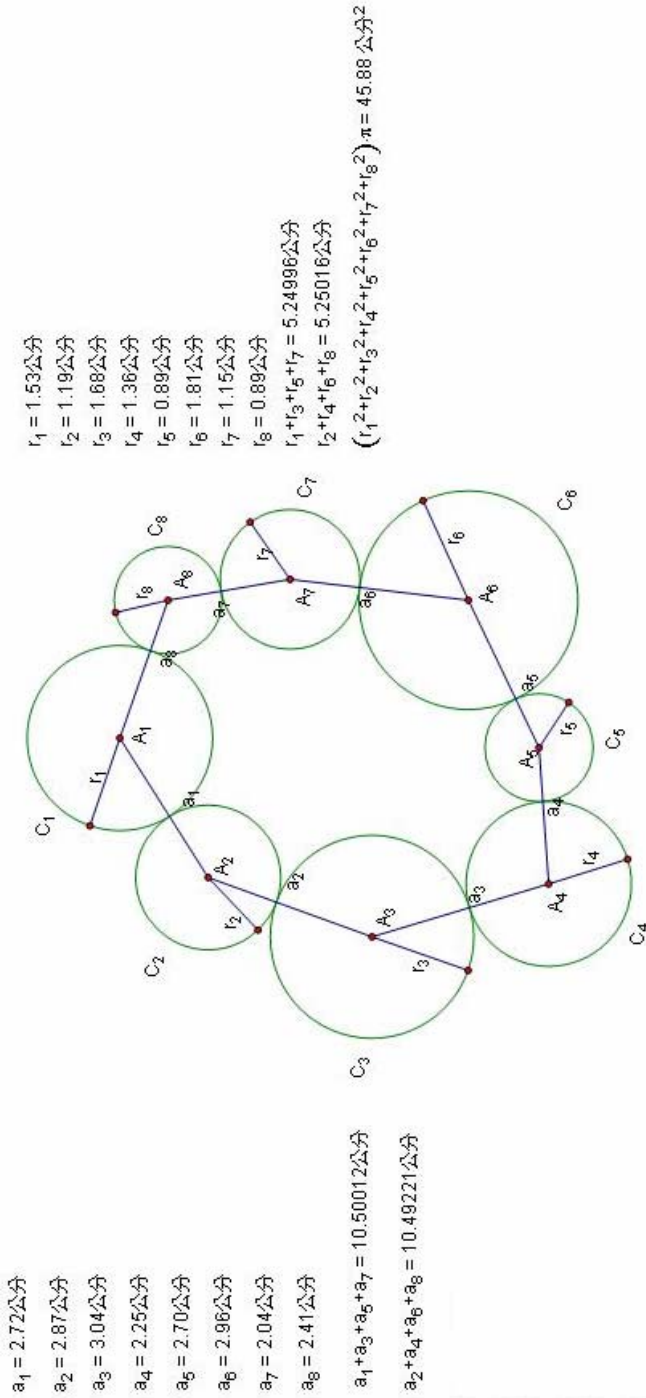
$$m \overline{CC_1} = 1.69 \text{公分}$$

$$m \overline{DD_1} = 1.69 \text{公分}$$

(圖六)【八邊形-1】



【圖七】【八邊形-2】

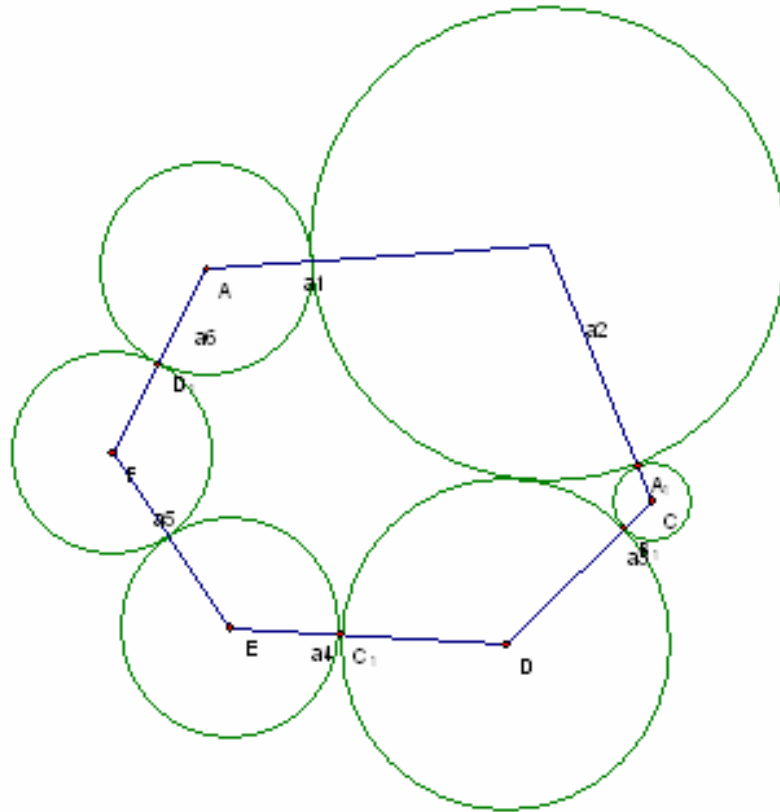


各邊平方合 = 55.96707 公分<sup>2</sup>  
 半周長平方/2 = 55.12621 公分<sup>2</sup>

$$((a_1 - a_2) + a_3)^2 + ((a_2 - a_3) + a_4)^2 + ((a_3 - a_4) + a_5)^2 + ((a_4 - a_5) + a_6)^2 + ((a_5 - a_6) + a_7)^2 + ((a_6 - a_7) + a_8)^2 + ((a_7 - a_8) + a_1)^2 + ((a_8 - a_1) + a_2)^2 = 57.48 \text{ 公分}^2$$

$$\left( \frac{\text{各邊平方合} + (((a_1 - a_2) + a_3)^2 + ((a_2 - a_3) + a_4)^2 + ((a_3 - a_4) + a_5)^2 + ((a_4 - a_5) + a_6)^2 + ((a_5 - a_6) + a_7)^2 + ((a_6 - a_7) + a_8)^2 + ((a_7 - a_8) + a_1)^2 + ((a_8 - a_1) + a_2)^2)}{4} \right) \pi = 45.80125 \text{ 公分}^2$$

(圖八)【六邊形-1】



- a1 = 5.31公分
- a2 = 4.27公分
- a3 = 3.16公分
- a4 = 4.27公分
- a5 = 3.26公分
- a6 = 3.18公分
- a1+a3+a5 = 11.73公分
- a2+a4+a6 = 11.73公分
- ⊙A1的面積 = 8.37 公分<sup>2</sup>
- ⊙B1的面積 = 42.41 公分<sup>2</sup>
- ⊙C1的面積 = 1.13 公分<sup>2</sup>
- ⊙D1的面積 = 20.62 公分<sup>2</sup>
- ⊙E1的面積 = 9.15 公分<sup>2</sup>
- ⊙F1的面積 = 7.56 公分<sup>2</sup>
- (⊙A1的面積)+(⊙B1的面積)+(⊙C1的面積)+(⊙D1的面積)+(⊙E1的面積)+(⊙F1的面積) = 89.23 公分<sup>2</sup>

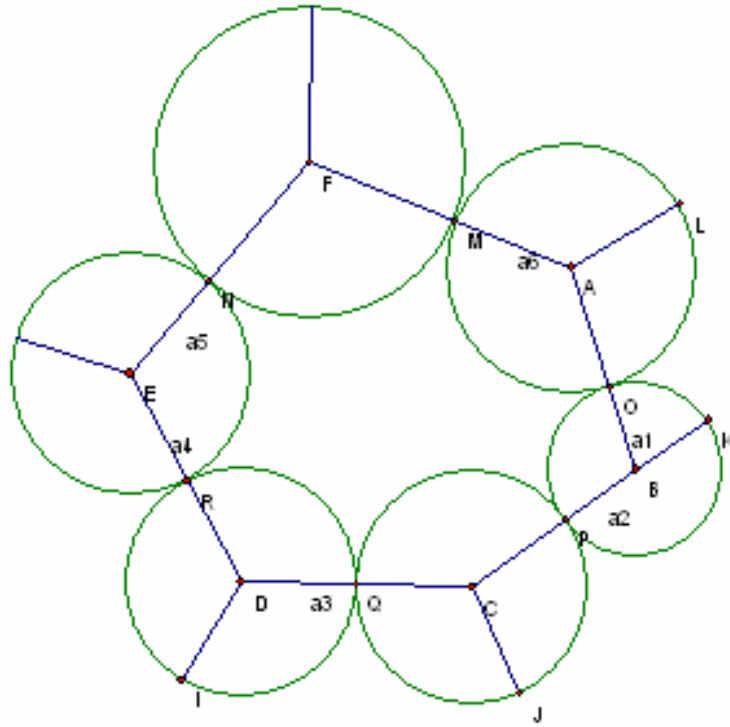
$$a1^2+a2^2+a3^2+a4^2+a5^2+a6^2 = 95.39 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{(a1+a3+a5)^2}{2} = 68.76 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{((a1-a2)+a3)^2+((a2-a3)+a4)^2+((a3-a4)+a5)^2+((a4-a5)+a6)^2+((a5-a6)+a1)^2+((a6-a1)+a2)^2}{2} = 51.17 \text{ 公分}^2$$

$$\frac{\left( \left( (a1^2+a2^2+a3^2+a4^2+a5^2+a6^2) + \frac{((a1-a2)+a3)^2+((a2-a3)+a4)^2+((a3-a4)+a5)^2+((a4-a5)+a6)^2+((a5-a6)+a1)^2+((a6-a1)+a2)^2}{2} \right) \cdot \frac{(a1+a3+a5)^2}{2} \right) \pi}{3} = 81.48 \text{ 公分}^2$$

(圖九)【六邊形-2】

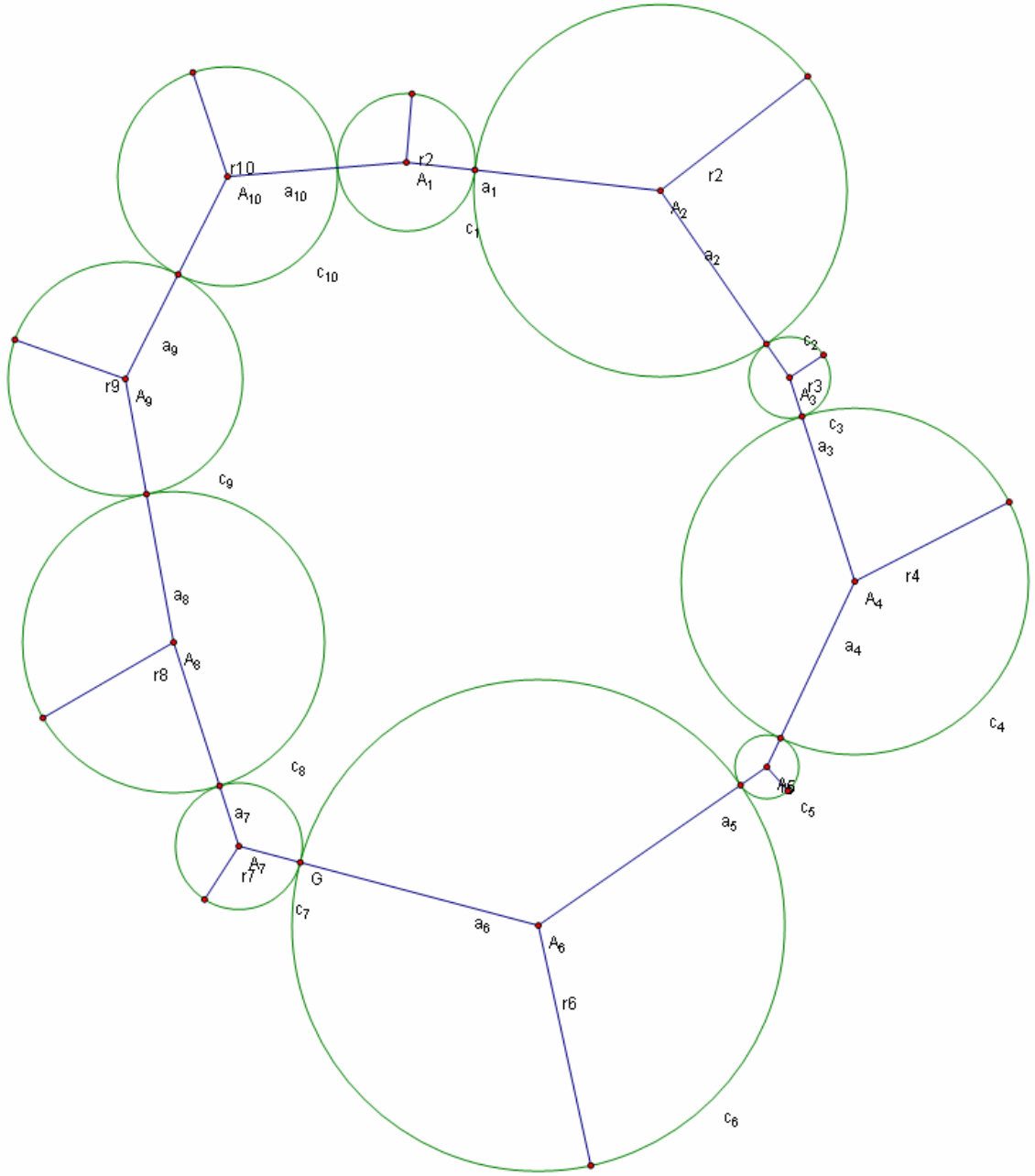


- $a_6 = 4.36$ 公分
- $a_2 = 3.13$ 公分
- $a_4 = 3.66$ 公分
- $a_2 + a_6 + a_4 = 11.14$ 公分
- $a_1 = 3.28$ 公分
- $a_5 = 4.28$ 公分
- $a_3 = 3.57$ 公分
- $a_1 + a_5 + a_3 = 11.13$ 公分
- $m \overline{FG} = 2.41$ 公分
- $m \overline{EH} = 1.86$ 公分
- $m \overline{DI} = 1.78$ 公分
- $m \overline{CJ} = 1.79$ 公分
- $m \overline{BK} = 1.34$ 公分
- $m \overline{AL} = 1.94$ 公分
- $m \overline{FG} + m \overline{BK} + m \overline{DI} = 5.53$ 公分
- $m \overline{EH} + m \overline{CJ} + m \overline{AL} = 5.60$ 公分
- $\odot FM$ 的面積 = 18.32 公分<sup>2</sup>
- $\odot EN$ 的面積 = 10.92 公分<sup>2</sup>
- $\odot AD$ 的面積 = 11.86 公分<sup>2</sup>
- $\odot BP$ 的面積 = 5.61 公分<sup>2</sup>
- $\odot CQ$ 的面積 = 10.08 公分<sup>2</sup>
- $\odot DR$ 的面積 = 9.97 公分<sup>2</sup>
- $(\odot FM$ 的面積) $+$  $(\odot EN$ 的面積) $+$  $(\odot AD$ 的面積) $+$  $(\odot BP$ 的面積) $+$  $(\odot CQ$ 的面積) $+$  $(\odot DR$ 的面積) = 66.76 公分<sup>2</sup>
- $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 83.99$ 公分<sup>2</sup>
- $\frac{(a_2 + a_6 + a_4)^2}{2} = 62.09$ 公分<sup>2</sup>
- $\frac{((a_1 - a_2) + a_3)^2 + ((a_2 - a_3) + a_4)^2 + ((a_3 - a_4) + a_5)^2 + ((a_4 - a_5) + a_6)^2 + ((a_5 - a_6) + a_1)^2 + ((a_6 - a_1) + a_2)^2}{2} = 41.84$ 公分<sup>2</sup>

$$\left( \frac{\left( (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + \frac{((a_1 - a_2) + a_3)^2 + ((a_2 - a_3) + a_4)^2 + ((a_3 - a_4) + a_5)^2 + ((a_4 - a_5) + a_6)^2 + ((a_5 - a_6) + a_1)^2 + ((a_6 - a_1) + a_2)^2}{2} \right)}{3} \right) \cdot \pi = 66.76 \text{ 公分}^2$$



(圖十)【十邊形-1】



$a_1 = 4.77$ 公分	$c_1$ 的面積 = 5.19 公分 <sup>2</sup>	圓面積相加 = 202.91 公分 <sup>2</sup>
$a_2 = 4.24$ 公分	$c_2$ 的面積 = 38.05 公分 <sup>2</sup>	半周長平方/2 = 246.20 公分 <sup>2</sup>
$a_3 = 4.00$ 公分	$c_3$ 的面積 = 1.82 公分 <sup>2</sup>	
$a_4 = 3.83$ 公分	$c_4$ 的面積 = 32.94 公分 <sup>2</sup>	各邊邊長平方相加 = 201.85 公分 <sup>2</sup>
$a_5 = 5.19$ 公分	$c_5$ 的面積 = 1.12 公分 <sup>2</sup>	
$a_6 = 5.78$ 公分	$c_6$ 的面積 = 66.26 公分 <sup>2</sup>	$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 22.19$ 公分
$a_7 = 4.00$ 公分	$c_7$ 的面積 = 4.40 公分 <sup>2</sup>	$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 22.20$ 公分
$a_8 = 5.00$ 公分	$c_8$ 的面積 = 24.91 公分 <sup>2</sup>	
$a_9 = 4.24$ 公分	$c_9$ 的面積 = 15.02 公分 <sup>2</sup>	
$a_{10} = 3.34$ 公分	$c_{10}$ 的面積 = 13.19 公分 <sup>2</sup>	

$$((a_1 \cdot a_2) + a_3)^2 + ((a_2 \cdot a_3) + a_4)^2 + ((a_3 \cdot a_4) + a_5)^2 + ((a_4 \cdot a_5) + a_6)^2 + ((a_5 \cdot a_6) + a_7)^2 + ((a_6 \cdot a_7) + a_8)^2 + ((a_7 \cdot a_8) + a_9)^2 + ((a_8 \cdot a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 \cdot a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} \cdot a_1) + a_2)^2 = 210.22 \text{ 公分}^2$$

$$\begin{aligned} & (((a_1 \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5)^2 + (((a_2 \cdot a_3) + a_4) \cdot a_5) + a_6)^2 + (((a_3 \cdot a_4) + a_5) \cdot a_6) + a_7)^2 + (((a_4 \cdot a_5) + a_6) \cdot a_7) + a_8)^2 + (((a_5 \cdot a_6) + a_7) \cdot a_8) + a_9)^2 + (((a_6 \cdot a_7) + a_8) \cdot a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 \cdot a_8) + a_9) \cdot a_{10}) + a_1)^2 \\ & + (((a_8 \cdot a_9) + a_{10}) \cdot a_1) + a_2)^2 + (((a_9 \cdot a_{10}) + a_1) \cdot a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} \cdot a_1) + a_2) \cdot a_3) + a_4)^2 = 211.09 \text{ 公分}^2 \end{aligned}$$

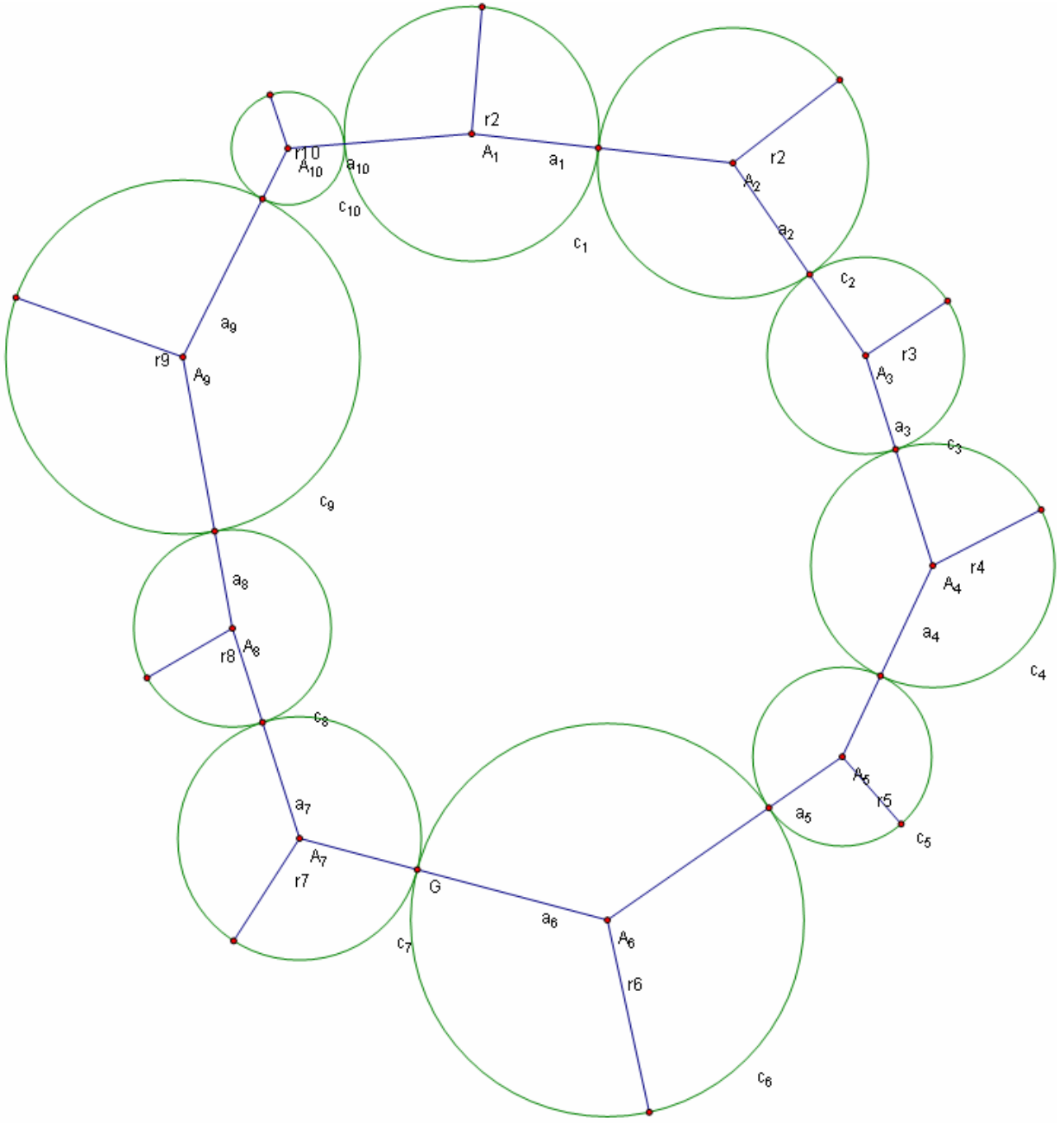
$$\frac{((((a_1 \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5)^2 + (((a_2 \cdot a_3) + a_4) \cdot a_5) + a_6)^2 + (((a_3 \cdot a_4) + a_5) \cdot a_6) + a_7)^2 + (((a_4 \cdot a_5) + a_6) \cdot a_7) + a_8)^2 + (((a_5 \cdot a_6) + a_7) \cdot a_8) + a_9)^2 + (((a_6 \cdot a_7) + a_8) \cdot a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 \cdot a_8) + a_9) \cdot a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 \cdot a_9) + a_{10}) \cdot a_1) + a_2)^2 + (((a_9 \cdot a_{10}) + a_1) \cdot a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} \cdot a_1) + a_2) \cdot a_3) + a_4)^2}{2} = 105.55 \text{ 公分}^2$$

$$\begin{aligned} & \text{各邊邊長平方相加} + (((a_1 \cdot a_2) + a_3)^2 + ((a_2 \cdot a_3) + a_4)^2 + ((a_3 \cdot a_4) + a_5)^2 + ((a_4 \cdot a_5) + a_6)^2 + ((a_5 \cdot a_6) + a_7)^2 + ((a_6 \cdot a_7) + a_8)^2 + ((a_7 \cdot a_8) + a_9)^2 + ((a_8 \cdot a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 \cdot a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} \cdot a_1) + a_2)^2) + \\ & \frac{((((a_1 \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5)^2 + (((a_2 \cdot a_3) + a_4) \cdot a_5) + a_6)^2 + (((a_3 \cdot a_4) + a_5) \cdot a_6) + a_7)^2 + (((a_4 \cdot a_5) + a_6) \cdot a_7) + a_8)^2 + (((a_5 \cdot a_6) + a_7) \cdot a_8) + a_9)^2 + (((a_6 \cdot a_7) + a_8) \cdot a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 \cdot a_8) + a_9) \cdot a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 \cdot a_9) + a_{10}) \cdot a_1) + a_2)^2 + (((a_9 \cdot a_{10}) + a_1) \cdot a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} \cdot a_1) + a_2) \cdot a_3) + a_4)^2}{2} \\ & = 517.61 \text{ 公分}^2 \end{aligned}$$

$$\left( \begin{aligned} & \text{各邊邊長平方相加} + ((a_1 \cdot a_2) + a_3)^2 + ((a_2 \cdot a_3) + a_4)^2 + ((a_3 \cdot a_4) + a_5)^2 + ((a_4 \cdot a_5) + a_6)^2 + ((a_5 \cdot a_6) + a_7)^2 + ((a_6 \cdot a_7) + a_8)^2 + ((a_7 \cdot a_8) + a_9)^2 + ((a_8 \cdot a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 \cdot a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} \cdot a_1) + a_2)^2) + \\ & \frac{((((a_1 \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5)^2 + (((a_2 \cdot a_3) + a_4) \cdot a_5) + a_6)^2 + (((a_3 \cdot a_4) + a_5) \cdot a_6) + a_7)^2 + (((a_4 \cdot a_5) + a_6) \cdot a_7) + a_8)^2 + (((a_5 \cdot a_6) + a_7) \cdot a_8) + a_9)^2 + (((a_6 \cdot a_7) + a_8) \cdot a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 \cdot a_8) + a_9) \cdot a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 \cdot a_9) + a_{10}) \cdot a_1) + a_2)^2 + (((a_9 \cdot a_{10}) + a_1) \cdot a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} \cdot a_1) + a_2) \cdot a_3) + a_4)^2}{2} \end{aligned} \right) \cdot (\text{半周長平方}/2) = 271.41 \text{ 公分}^2$$

$$\left( \begin{aligned} & \text{各邊邊長平方相加} + (((a_1 \cdot a_2) + a_3)^2 + ((a_2 \cdot a_3) + a_4)^2 + ((a_3 \cdot a_4) + a_5)^2 + ((a_4 \cdot a_5) + a_6)^2 + ((a_5 \cdot a_6) + a_7)^2 + ((a_6 \cdot a_7) + a_8)^2 + ((a_7 \cdot a_8) + a_9)^2 + ((a_8 \cdot a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 \cdot a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} \cdot a_1) + a_2)^2) + \\ & \frac{((((a_1 \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5)^2 + (((a_2 \cdot a_3) + a_4) \cdot a_5) + a_6)^2 + (((a_3 \cdot a_4) + a_5) \cdot a_6) + a_7)^2 + (((a_4 \cdot a_5) + a_6) \cdot a_7) + a_8)^2 + (((a_5 \cdot a_6) + a_7) \cdot a_8) + a_9)^2 + (((a_6 \cdot a_7) + a_8) \cdot a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 \cdot a_8) + a_9) \cdot a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 \cdot a_9) + a_{10}) \cdot a_1) + a_2)^2 + (((a_9 \cdot a_{10}) + a_1) \cdot a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} \cdot a_1) + a_2) \cdot a_3) + a_4)^2}{2} \end{aligned} \right) \cdot (\text{半周長平方}/2) \cdot \pi = 170.53 \text{ 公分}^2$$

(圖十一)【十邊形-2】



$a_1 = 4.77$ 公分	$c_1$ 的面積 = 16.77 公分 <sup>2</sup>	$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 22.19$ 公分
$a_2 = 4.24$ 公分	$c_2$ 的面積 = 18.93 公分 <sup>2</sup>	$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 22.20$ 公分
$a_3 = 4.00$ 公分	$c_3$ 的面積 = 10.03 公分 <sup>2</sup>	
$a_4 = 3.83$ 公分	$c_4$ 的面積 = 15.38 公分 <sup>2</sup>	圓面積相加 = 170.47 公分 <sup>2</sup>
$a_5 = 5.19$ 公分	$c_5$ 的面積 = 8.27 公分 <sup>2</sup>	半周長平方/2 = 246.20 公分 <sup>2</sup>
$a_6 = 5.78$ 公分	$c_6$ 的面積 = 39.97 公分 <sup>2</sup>	
$a_7 = 4.00$ 公分	$c_7$ 的面積 = 15.33 公分 <sup>2</sup>	各邊邊長平方相加 = 201.85 公分 <sup>2</sup>
$a_8 = 5.00$ 公分	$c_8$ 的面積 = 10.07 公分 <sup>2</sup>	
$a_9 = 4.24$ 公分	$c_9$ 的面積 = 32.41 公分 <sup>2</sup>	
$a_{10} = 3.34$ 公分	$c_{10}$ 的面積 = 3.29 公分 <sup>2</sup>	

$$((a_1 a_2) + a_3)^2 + ((a_2 a_3) + a_4)^2 + ((a_3 a_4) + a_5)^2 + ((a_4 a_5) + a_6)^2 + ((a_5 a_6) + a_7)^2 + ((a_6 a_7) + a_8)^2 + ((a_7 a_8) + a_9)^2 + ((a_8 a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} a_1) + a_2)^2 = 210.22 \text{ 公分}^2$$

$$\begin{aligned} & (((a_1 a_2) + a_3) a_4) + a_5)^2 + (((a_2 a_3) + a_4) a_5) + a_6)^2 + (((a_3 a_4) + a_5) a_6) + a_7)^2 + (((a_4 a_5) + a_6) a_7) + a_8)^2 + (((a_5 a_6) + a_7) a_8) + a_9)^2 + (((a_6 a_7) + a_8) a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 a_8) + a_9) a_{10}) + a_1)^2 \\ & + (((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2 = 211.09 \text{ 公分}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{((((a_1 a_2) + a_3) a_4) + a_5)^2 + (((a_2 a_3) + a_4) a_5) + a_6)^2 + (((a_3 a_4) + a_5) a_6) + a_7)^2 + (((a_4 a_5) + a_6) a_7) + a_8)^2 + (((a_5 a_6) + a_7) a_8) + a_9)^2 + (((a_6 a_7) + a_8) a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 a_8) + a_9) a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2}{2} = 105.55 \text{ 公分}^2$$

$$\begin{aligned} & \text{各邊邊長平方相加} + (((a_1 a_2) + a_3)^2 + ((a_2 a_3) + a_4)^2 + ((a_3 a_4) + a_5)^2 + ((a_4 a_5) + a_6)^2 + ((a_5 a_6) + a_7)^2 + ((a_6 a_7) + a_8)^2 + ((a_7 a_8) + a_9)^2 + ((a_8 a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} a_1) + a_2)^2) + \\ & \frac{((((a_1 a_2) + a_3) a_4) + a_5)^2 + (((a_2 a_3) + a_4) a_5) + a_6)^2 + (((a_3 a_4) + a_5) a_6) + a_7)^2 + (((a_4 a_5) + a_6) a_7) + a_8)^2 + (((a_5 a_6) + a_7) a_8) + a_9)^2 + (((a_6 a_7) + a_8) a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 a_8) + a_9) a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2}{2} \\ & = 517.61 \text{ 公分}^2 \end{aligned}$$

$$\left( \begin{aligned} & \text{各邊邊長平方相加} + (((a_1 a_2) + a_3)^2 + ((a_2 a_3) + a_4)^2 + ((a_3 a_4) + a_5)^2 + ((a_4 a_5) + a_6)^2 + ((a_5 a_6) + a_7)^2 + ((a_6 a_7) + a_8)^2 + ((a_7 a_8) + a_9)^2 + ((a_8 a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} a_1) + a_2)^2) + \\ & \frac{((((a_1 a_2) + a_3) a_4) + a_5)^2 + (((a_2 a_3) + a_4) a_5) + a_6)^2 + (((a_3 a_4) + a_5) a_6) + a_7)^2 + (((a_4 a_5) + a_6) a_7) + a_8)^2 + (((a_5 a_6) + a_7) a_8) + a_9)^2 + (((a_6 a_7) + a_8) a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 a_8) + a_9) a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2}{2} \\ & \cdot \frac{(((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2}{2} \end{aligned} \right) \cdot (\text{半周長平方}/2) = 271.41 \text{ 公分}^2$$

$$\left( \begin{aligned} & \text{各邊邊長平方相加} + (((a_1 a_2) + a_3)^2 + ((a_2 a_3) + a_4)^2 + ((a_3 a_4) + a_5)^2 + ((a_4 a_5) + a_6)^2 + ((a_5 a_6) + a_7)^2 + ((a_6 a_7) + a_8)^2 + ((a_7 a_8) + a_9)^2 + ((a_8 a_9) + a_{10})^2 + ((a_9 a_{10}) + a_1)^2 + ((a_{10} a_1) + a_2)^2) + \\ & \frac{((((a_1 a_2) + a_3) a_4) + a_5)^2 + (((a_2 a_3) + a_4) a_5) + a_6)^2 + (((a_3 a_4) + a_5) a_6) + a_7)^2 + (((a_4 a_5) + a_6) a_7) + a_8)^2 + (((a_5 a_6) + a_7) a_8) + a_9)^2 + (((a_6 a_7) + a_8) a_9) + a_{10})^2 + (((a_7 a_8) + a_9) a_{10}) + a_1)^2 + (((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2}{2} \\ & + \frac{(((a_8 a_9) + a_{10}) a_1) + a_2)^2 + (((a_9 a_{10}) + a_1) a_2) + a_3)^2 + (((a_{10} a_1) + a_2) a_3) + a_4)^2}{2} \end{aligned} \right) \cdot (\text{半周長平方}/2) \cdot \pi = 170.53 \text{ 公分}^2$$

【評語】 040413

- 1) 本作品表面上包含幾何、代數及不等式。然而作者未能夠將這三件事物作融會貫通的數學結合，幾何、代數及不等式三者依然各自表述，看不出進行本作品有何意義。
- 2) 數學思維貴於精簡。本作品倒轉過來將精簡的幾何圖形轉換成人類無法閱讀的代數式子，將高度的智慧結晶(一目瞭然的幾何圖形)引導到蠻荒世界(作者無法判斷式子當中是否有錯誤)，有偏離數學科展之原意。