

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳團隊合作獎

040404

三角形到四面體之鑲嵌

學校名稱：國立新竹高級中學

作者： 高二 翁志齊 高二 林裕仁	指導老師： 張世標
-------------------------	--------------

關鍵詞：軌跡、最小值、平行截面

摘 要

在此作品中，我們探討一些三角形、四邊形乃至四面體的鑲嵌問題(意指內切或內接幾何圖形)，主要成果如下。

給定一三角形，我們指定跟它內接的三角形的形狀，而證出內接指定形狀三角形的「外、重、垂、內、旁」諸心之軌跡皆為線段，且能用尺規作出這些三角形之最小者。相對地，給定四面體並選取其某一面，我們證出「有一面平行於此面並內接於此四面體」的正四面體的重心軌跡為四次平面曲線，並求出諸正四面體邊長最小值。

其次，我們導出四邊形的內切橢圓所形成的(廣義)Gergonne 點的軌跡是圓錐曲線的一部分，並利用平行截線分解出三角形的內切橢圓中心軌跡及 Gergonne 點軌跡之幾何結構。

最後，我們以連續變動的平行平面來截一四面體，套用前述結果，可看出和此四面體相切的橢圓之中心軌跡及 Gergonne 點軌跡的一些幾何結構。

壹、研究動機：

曾解一題：「給定一三角形，以尺規作其一內接正三角形」，亦見關於內接正三角形之文獻([6])，另閱一文討論三角形之內切橢圓，覺諸文所談皆屬「鑲嵌圖形於三角形內」，遂欲對之復加討論，亦望論及四面體。

貳、研究目的：

了解三角形內切或內接一些我們熟悉之圖形(主要者為指定形狀之三角形、橢圓)之性質(如最大值或最小值、特殊點軌跡)，並對四邊形、四面體作類似討論。

參、研究器材：

GSP、Cabri3D、Mathematica

肆、研究過程：

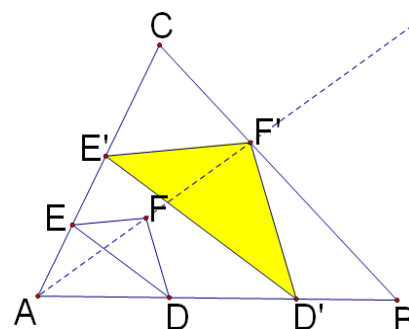
以「鑲嵌」為主題，此部分含4章，其中或分小節。可堪玩味者，解四面體之問題時，甚倚重於三角形相關問題之研究成果。

一、三角形之內接指定形狀三角形

由[6]知，一三角形之內接正三角形之重心軌跡在一直線上，且此直線與原三角形之尤拉線垂直。而[6]中亦論及諸內接正三角形邊長之最小值。

我們問：給一三角形，並對內接三角形指定形狀，如何作出內接指定形狀三角形，而諸三角形之五心軌跡是否皆在直線上？又於何處產生最小內接指定形狀三角形呢？

作圖法：如右圖，給一 $\triangle ABC$ ，分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上取兩點 D 、 E ，並取適當點 F ，使 $\triangle DEF$ 之形狀符合預先指定者。連接 \overline{AF} ，設其交直線 \overline{BC} 於 F' ，過 F' 分別作直線平行於 \overline{FD} 、 \overline{FE} ，且分別交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 D' 、 E' ，則 $\triangle D'E'F'$ 即為 $\triangle ABC$ 之內接指定形狀三角形。



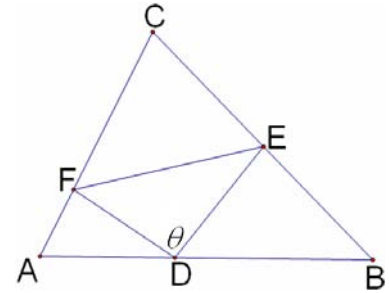
證明：由相似三角形比例關係可證。

(一---1)重心軌跡

接著，我們想探討重心之軌跡。如右圖，給一 $\triangle ABC$ ，並指定內接三角形 $\triangle DEF$ 之形狀，滿足

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} = \text{定值 } r \text{ 且 } \angle EDF = \text{定值 } \theta。$$

考慮複數座標，令 $A(0+0i)$ $B(a+0i)$ $C(b+ci)$ ；又設 $D(am+0i)$ 及 $E(a+(b-a)n+cn i)$ 。



$$\text{由 } \overline{DF} = \overline{DE} \times (\cos \theta + i \sin \theta)r = (a + (b-a)n - am + cn i) \times (\cos \theta + i \sin \theta)r$$

$$\text{得 } F(am + r[a + (b-a)n - am]\cos \theta - rcn \sin \theta, r[a + (b-a)n - am]\sin \theta + rcn \cos \theta)$$

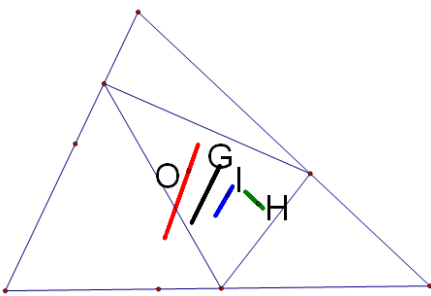
又點 F 在直線 $cx - by = 0$ 上，代入遂得

$$n = a \frac{b \sin \theta - c \cos \theta + (c \cos \theta - b \sin \theta - \frac{1}{r}c)m}{ab \sin \theta - ac \cos \theta - b^2 \sin \theta - c^2 \sin \theta}，\text{乃 } m \text{ 之一次式，又 } D(am, 0), E(a + (b-a)n, cn)，$$

$$F(am + r[a + (b-a)n - am]\cos \theta - rcn \sin \theta, r[a + (b-a)n - am]\sin \theta + rcn \cos \theta)，$$

故 D 、 E 、 F 之座標皆可表為 m 之一次式，從而 $\triangle DEF$ 之重心可用 m 之一次式表示，故其重心軌跡在一直線上。

(一---2)外心、垂心、內心、旁心軌跡



如右圖，我們用GSP作其重心 G (黑色)、外心 O (紅色)、垂心 H (綠色)、內心 I (藍色)軌跡。

仔細觀察，其軌跡頗似在直線上，遂作以下證明。

外心：由引理([7])知 $\sin 2D\overline{DO} + \sin 2E\overline{EO} + \sin 2F\overline{FO} = \vec{0}$ 。因 $\triangle DEF$ 之形狀已定，故 $\sin 2D$ 、 $\sin 2E$ 、 $\sin 2F$ 皆為定值，又 D 、 E 、 F 之座標皆可用 m 之一次式表示，故外心座標亦然，遂見其軌跡必在一直線上。

垂心：既然重心、外心座標皆可用 m 之一次式表示，則考慮尤拉線可知垂心座標亦然，故其軌跡亦在一直線上。

內心：由 $\overline{EFDI} + \overline{DFEI} + \overline{DEFI} = \vec{0}$ 及 $\triangle DEF$ 之形狀已定，則仿外心軌跡之理，可知內心軌跡必在一直線上。

旁心：同理可證。

雖有上述結果，惜乎未察其軌跡直線之方向有無幾何特徵。由[6]，我們知，當指定之形狀為正三角形時，其重心軌跡垂直於原三角形之尤拉線。然則，

我們問：當指定之形狀不為正三角形時，其重心軌跡與原三角形之尤拉線有無關係呢？

經連串之計算可得其重心軌跡之方向向量為

$$r \sin \theta \left(\frac{3ab - 3b^2 - c^2}{c}, a - 2b \right) + (1 - 2r \cos \theta)(a, 0) + (r^2 - 1)(b, c),$$

其中向量 $\left(\frac{3ab - 3b^2 - c^2}{c}, a - 2b \right)$ 與原 $\triangle ABC$ 之尤拉線互相垂直；而若 $\triangle ABC$ 為正三角形，

$(1 - 2r \cos \theta)(a, 0) + (r^2 - 1)(b, c) = (0, 0)$ 。可惜者，此分析侷於表面，尚待深耕。

(一---3)最小值

復次，我們要探討 $\triangle DEF$ 之邊長最小值。

因 $\overrightarrow{DE} = (a + (b - a)n - am, cn)$

$$= \left(\begin{array}{l} ac \frac{-b \cos \theta - c \sin \theta + (b \cos \theta + c \sin \theta + \frac{1}{r}(a - b))m}{ab \sin \theta - ac \cos \theta - b^2 \sin \theta - c^2 \sin \theta}, \\ ac \frac{b \sin \theta - c \cos \theta + (c \cos \theta - b \sin \theta - \frac{1}{r}c)m}{ab \sin \theta - ac \cos \theta - b^2 \sin \theta - c^2 \sin \theta} \end{array} \right)$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{DE}|^2 = \left(\frac{ac}{ab \sin \theta - ac \cos \theta - b^2 \sin \theta - c^2 \sin \theta} \right)^2$$

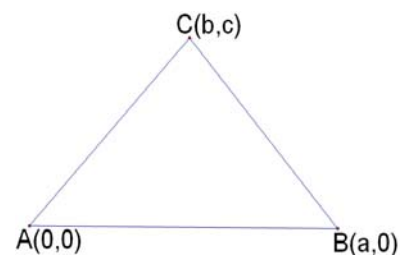
$$\times \left\{ (b^2 + c^2 + \frac{2}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta) + \frac{1}{r^2}(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab))m^2 \right. \\ \left. + 2(-b^2 - c^2 + \frac{1}{r}(-ab \cos \theta - ac \sin \theta + b^2 \cos \theta + c^2 \cos \theta))m + (-b \cos \theta - c \sin \theta)^2 \right. \\ \left. + (b \sin \theta - c \cos \theta)^2 \right\}$$

配方可得，

$$\text{當 } m = \frac{(b^2 + c^2) + \frac{1}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta)}{(b^2 + c^2) + \frac{2}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta) + \frac{1}{r^2}(a^2 - 2ab + b^2 + c^2)} \dots\dots (*)$$

時，其內接指定形狀三角形獲最小邊長。

見(*)式頗繁而雜，我們遂思尋覓 m 之幾何特徵，並希冀以尺規作出產生最小值處。



在(*)式中，

$$\begin{aligned}
 & ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta \\
 &= (\overline{ABAC} \cos \angle A - \overline{AC}^2) \cos \theta + 2\Delta ABC \text{面積} \sin \theta \\
 &= -\overline{ACBC} \cos \angle C \cos \theta + \overline{ACBC} \sin \angle C \sin \theta \\
 &= -\overline{ACBC} \cos(\theta + C),
 \end{aligned}$$

代回(*)式得 $m = \frac{\overline{AC}(\overline{AC} - \frac{1}{r}\overline{BC} \cos(\theta + C))}{\overline{AC}^2 - \frac{2}{r}\overline{ACBC} \cos(\theta + C) + \frac{1}{r^2}\overline{BC}^2}$ 。

我們將原 ΔABC 伸縮變形如右圖，於是

$$m = \frac{\overline{AC}(\overline{AC} - \frac{1}{r}\overline{BC} \cos(\theta + C))}{X^2}$$

以尺規找出產生最小值處。

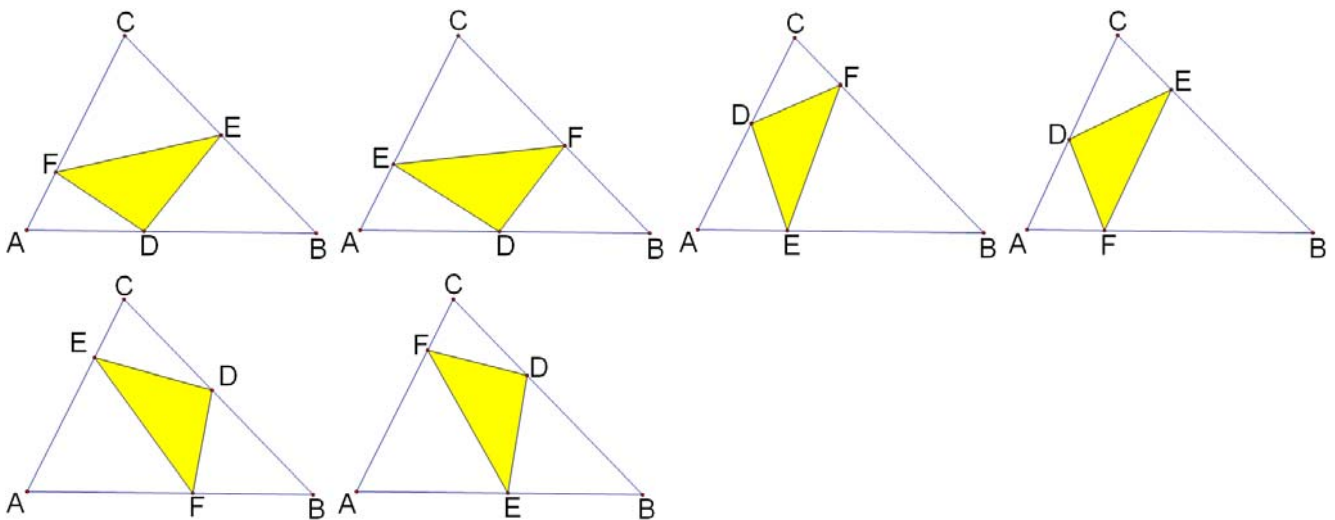
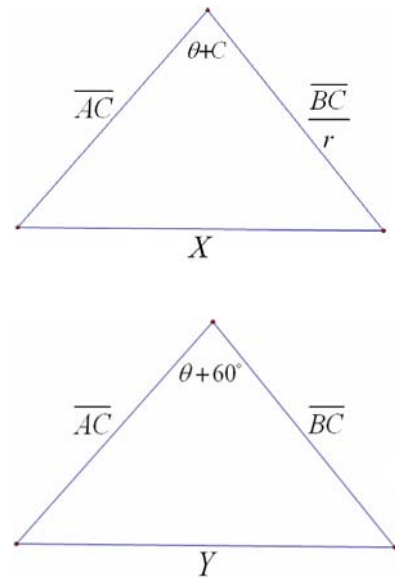
特別地，當指定形狀為正三角形時，

$$m = \frac{\overline{AC}(\overline{AC} - \overline{BC} \cos(\theta + 60^\circ))}{Y^2}$$

在[6]中，雖知當 $m = \frac{1}{2} \frac{b^2 + c^2 + \sqrt{3}ac + ab}{b^2 + c^2 + \sqrt{3}ac - ab}$ 時內接正三角形獲

最小值，然彼尙未言及此 m 值之幾何特徵。

再者，對一三角形所作之內接指定形狀三角形有如下圖之 6 種情況，而前面所論僅為其一，我們希望能在「給定三角形三邊長」之情況下從此 6 種中快速找出最小值。



我們復加計算，發現 $|\overrightarrow{DE}|^2$ 之最小值為

$$\left(\frac{ac}{ab \sin \theta - ac \cos \theta - b^2 \sin \theta - c^2 \sin \theta} \right)^2 \cdot \left[\left[(b^2 + c^2) + \frac{2}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta) + \frac{1}{r^2}(a^2 - 2ab + b^2 + c^2) \right] [b^2 + c^2] - \left[(b^2 + c^2) + \frac{1}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta) \right]^2 \right] \\ \left. \right/ \left((b^2 + c^2) + \frac{2}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta) + \frac{1}{r^2}(a^2 - 2ab + b^2 + c^2) \right),$$

仿前面作法，可再將其化簡為

$$\left(\frac{2\Delta_{ABC} \text{面積}}{ACBC \sin(\theta + C)} \right)^2 \frac{(\overline{AC}^2 - \frac{2}{r} \overline{ACBC} \cos(\theta + C) + \frac{1}{r^2} \overline{BC}^2) \overline{AC}^2 - (\overline{AC}^2 - \frac{1}{r} \overline{ACBC} \cos(\theta + C))^2}{\overline{AC}^2 - \frac{2}{r} \overline{ACBC} \cos(\theta + C) + \frac{1}{r^2} \overline{BC}^2} \\ = \left(\frac{2\Delta_{ABC} \text{面積}}{ACBC \sin(\theta + C)} \right)^2 \frac{\frac{1}{r^2} \overline{AC}^2 \overline{BC}^2 (1 - \cos^2(\theta + C))}{\overline{AC}^2 - \frac{2}{r} \overline{ACBC} \cos(\theta + C) + \frac{1}{r^2} \overline{BC}^2} = \frac{(2\Delta_{ABC} \text{面積})^2}{\frac{1}{r^2} (\overline{AC}^2 - \frac{2}{r} \overline{ACBC} \cos(\theta + C) + \frac{1}{r^2} \overline{BC}^2)} \\ = \frac{(2\Delta_{ABC} \text{面積})^2}{r^2 X^2}.$$

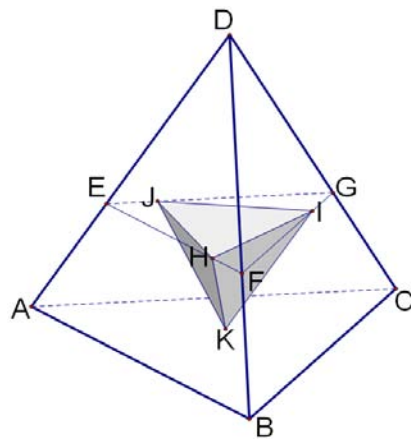
於是，可如願地將 $|\overrightarrow{DE}|^2$ 之最小值快速求出。

二、四面體之內接正四面體

將平面的情形加以延伸，

我們問：給一四面體，如何作出其內接正四面體？又內接正四面體之重心軌跡如何？再者，何時產生內接正四面體邊長之最小值？

作圖法：如右圖，給四面體 $ABCD$ ，分別在 \overline{AD} 、 \overline{BD} 、 \overline{CD} 上找 EFG 三點，且 ΔHIJ 為 ΔEFG 之內接正三角形，取適當點 K 使四面體 $HIJK$ 為正四面體，連接 \overline{DK} 交底面 ABC 於 K' ，過 K' 分別作直線與 \overline{KH} 、 \overline{KI} 、 \overline{KJ} 平行，且分別交平面 ABD 、 BCD 、 ACD 於 H' 、 I' 、 J' ，則正四面體 $H'I'J'K'$ 即符所求。(註：為避線條繁複，圖中並未畫出 K' 及四面體 $H'I'J'K'$ 。)



證明：由相似三角形可證。

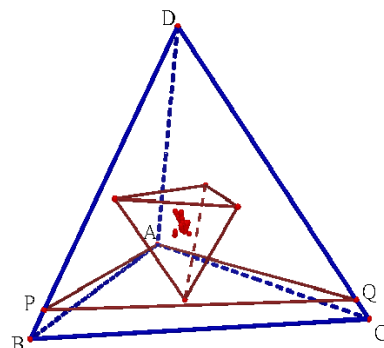
在上面的作圖法中，若我們將平面 EFG 平行移動，得到新平面 $E''F''G''$ ，所作之四面體 $H'I'J''K''$ 也跟著平行移動得 $H''I''J''K''$ ，由三角形相似形比例可得 $DH H''$ 、 $DI I''$ 、 $DJ J''$ 三點分別共線，故 $DK K''$ 三點共線。由 $DK K''$ 共線知，連接 \overline{DK} 、 $\overline{DK''}$ 和底面 ABC 之交點都是 K' ，又 $\overline{KH} \parallel \overline{KH''}$ 、 $\overline{KI} \parallel \overline{KI''}$ 、 $\overline{KJ} \parallel \overline{KJ''}$ ，故過 K' 分別作與 $\overline{KH''}$ 、 $\overline{KI''}$ 、 $\overline{KJ''}$ 平行之直線，且分別交平面 ABD 、 BCD 、 ACD 於三點，而這三點很明顯地就是 $H'I'J'$ 。

上述結果表示，因平面可平行移動，所以我們可讓平面過 A 點，而不影響其所作之內接正四面體，這讓我們更能看清楚內接正四面體之重心軌跡，也有助於計算邊長最小值。

(二---1)、內接正四面體之重心軌跡

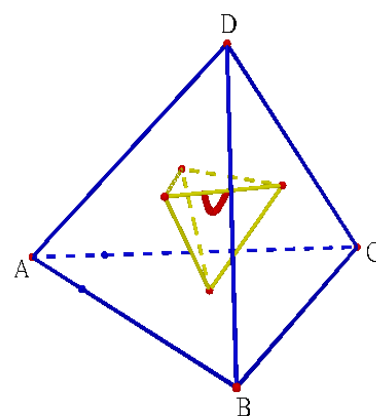
據前所述，一三角形之內接正三角形之重心軌跡在一直線上。於是，

我們問：一四面體之內接正四面體其重心軌跡是否在一平面上？



於是我們利用 Cabri 3D 作重心軌跡如右圖，仔細觀察，其重心軌跡不在同一平面上，而形成空間之一區域。

爲了研究重心軌跡，我們選取底面 ABC ，令內接正四面體之一面與其平行，而觀察此時內接正四面體之重心軌跡 Γ 。我們發現，由「 ΔABC 內接正三角形之重心軌跡爲一直線」再加以分析，可知 Γ 爲一平面曲線，且將 Γ 對平面 ABC 投影即爲 ΔABC 內接正三角形之重心軌跡。



我們又問： Γ 是否為圓錐曲線？

建立座標系，設 $A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $C(b,c,0)$ $D(d,e,f)$ ， ΔHIJ 爲 ΔABC 之內接正三角形，又已知 ΔHIJ 之重心軌跡在一直線上，可設 ΔHIJ 之重心 $G(Am + A', Bm + B', 0)$ ，其中 m 爲變數，其餘皆爲常數。找 K 點，使四面體 $H'I'J''K''$ 爲一正四面體，則 $K(Am + A', Bm + B', -\frac{\sqrt{6}}{3} |\overline{HI}|)$ 。計算 $|\overline{HI}|$ ，並將其簡記爲 $\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}$ ， α 、 β 、 γ 皆可視爲常數。

連接 \overline{DK} ，交底面 ABC 於 K' ，則可設 $K'(Am + A', Bm + B', f + (-\frac{\sqrt{6}}{3}|\overline{HI}| - f)t)$ 。

又平面 $ABC : z = 0$ ，故 $f + (-\frac{\sqrt{6}}{3}|\overline{HI}| - f)t = 0$ ，於是

$$t = \frac{f}{\frac{\sqrt{6}}{3}|\overline{HI}| + f} = \frac{f}{\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} + f}。$$

將 K' 向上沿著平面 ABC 之法向量方向走 $\frac{\sqrt{6}}{4}|\overline{HI}|t$ 長度單位，可得其內接正四面體之重心座標為

$$G'(Am + A', Bm + B', \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{f\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} + f}) = G'(Am + A', Bm + B', C \frac{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} + D})$$

既已知 G' 之軌跡在一平面上，我們不妨在此平面上建立局部座標系，以 $(A', B', C \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} + D})$ 為

其原點，以 $(A, B, 0)$ 之方向為其 x 軸方向， $(0, 0, 1)$ 為新的 y 軸方向，則在局部座標系之 xy 平面

上， G' 之坐標為 $(\frac{m}{\sqrt{A^2 + B^2}}, C \frac{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} + D})$ ，令 $\sqrt{A^2 + B^2} = \lambda$ ，則

$$y = C \frac{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} + D} = C \frac{\sqrt{\alpha \lambda^2 x^2 + \beta \lambda x + \gamma}}{\sqrt{\alpha \lambda^2 x^2 + \beta \lambda x + \gamma} + D}，$$

整理可得

$$(C - y)^2 (\alpha \lambda^2 x^2 + \beta \lambda x + \gamma) = D^2 y^2。$$

由此加以觀察可知， Γ 不為圓錐曲線，而是四次曲線。

(二---2) 「固定選取面」的內接正四面體之邊長的最小或最大值

※所謂「選取面」是指選取一平面，使內接正四面體之某一面與之平行。

我們分情況討論：

<情況一> 選取面與四面體某一面平行時：

給一四面體 $ABCD$ ，考慮其內接正四面體中有一面與底面 ABC 平行者。作兩個 $\triangle ABC$ 之內接正三角形，其邊長分別為 x 、 y ，再分別作此種內接正四面體。由相似形比例可得兩內

接正四面體之邊長分別為 $\frac{xd}{d + \frac{\sqrt{6}}{3}x}$ 、 $\frac{yd}{d + \frac{\sqrt{6}}{3}y}$ ，其中 d 為 D 至平面 ABC 之距離。

$$\text{由 } \frac{xd}{d + \frac{\sqrt{6}}{3}x} - \frac{yd}{d + \frac{\sqrt{6}}{3}y} = \frac{(x-y)d^2}{(d + \frac{\sqrt{6}}{3}x)(d + \frac{\sqrt{6}}{3}y)}$$

即知若 $x < y$ ，則 $\frac{xd}{d + \frac{\sqrt{6}}{3}x} < \frac{yd}{d + \frac{\sqrt{6}}{3}y}$ 。故若我們取 x 為 ΔABC 之內接最小正三角形之邊長，

則對應之內接正四面體邊長亦為最小。於是我們得到以下結論：

與四面體其中一面平行的所有內接正四面體中，欲找出最小或最大邊長，只要在所平行的面內找出具有最小或最大邊長之內接之正三角形即可。

<情況二> 選取面與四面體任一面皆「不」平行時：

如右圖，給一四面體 $ABCD$ ，建立直角座標系，

令 $A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $C(b,c,0)$ $D(d,e,f)$ $E(a+(d-a)s, es, fs)$ $F(b+(d-b)t, et, ft)$ ，

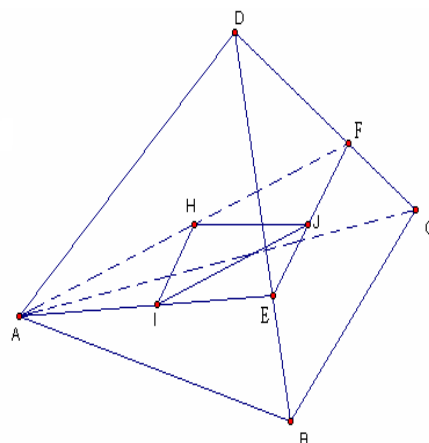
平面 AEF 之法向量 $\vec{n} = \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}$ (方向為上)

ΔHIJ 為 ΔAEF 之內接正三角形，

令 ΔHIJ 之重心 $G(G_x, G_y, G_z)$ ，取

$$K \text{ 點} = G \text{ 點} - \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

則此時四面體 $HIJK$ 為一正四面體。



連接 \overline{DK} ，交底面 $ABC : z=0$ 於 K' ，可設

$$K'(d + \left[G_x - \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}_x}{|\vec{n}|} - d \right] q, e + \left[G_y - \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}_y}{|\vec{n}|} - e \right] q, f + \left[G_z - \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}_z}{|\vec{n}|} - f \right] q)。$$

因底面 $ABC : z=0$ ，故 $f + \left[G_z - \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}_z}{|\vec{n}|} - f \right] q = 0$ ，可得 $q = \frac{f}{f - G_z + \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}_z}{|\vec{n}|}}$ 。

由相似形可知內接正四面體邊長為 $|\overrightarrow{HI}| q = \frac{|\overrightarrow{HI}| f}{f - G_z + \frac{\sqrt{6}}{3} |\overrightarrow{HI}| \frac{\vec{n}_z}{|\vec{n}|}}$ ，

由於 $|\overrightarrow{HI}|$ 、 G_z 過於複雜，我們回想前面對「 ΔABC 之內接正三角形 ΔDEF 」之討論：

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{DE}|^2 &= \left(\frac{ac}{ab \sin \theta - ac \cos \theta - b^2 \sin \theta - c^2 \sin \theta} \right)^2 \\
&\times \left\{ \left(b^2 + c^2 + \frac{2}{r}(ab \cos \theta + ac \sin \theta - b^2 \cos \theta - c^2 \cos \theta) + \frac{1}{r^2}(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab) \right) m^2 \right. \\
&+ 2\left(-b^2 - c^2 + \frac{1}{r}(-ab \cos \theta - ac \sin \theta + b^2 \cos \theta + c^2 \cos \theta) \right) m + (-b \cos \theta - c \sin \theta)^2 \\
&\left. + (b \sin \theta - c \cos \theta)^2 \right\} \\
&= \left(\frac{2\Delta ABC \text{面積}}{ACBC \sin(C + 60^\circ)} \right)^2 \\
&\left[(\overline{AC}^2 - 2\overline{ACBC} \cos(C + 60^\circ) + \overline{BC}^2) m^2 - 2(\overline{AC}^2 - \overline{ACBC} \cos(C + 60^\circ)) m + \overline{AC}^2 \right]
\end{aligned}$$

同理，在 $\triangle AEF$ 之內接正 $\triangle HIJ$ 中，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{HI}|^2 &= \left(\frac{2\Delta AEF \text{面積}}{AF EF \sin(F + 60^\circ)} \right)^2 \\
&\left[(\overline{AF}^2 - 2\overline{AF EF} \cos(F + 60^\circ) + \overline{EF}^2) m^2 - 2(\overline{AF}^2 - \overline{AF EF} \cos(F + 60^\circ)) m + \overline{AF}^2 \right], \\
|\overrightarrow{HI}| &= \frac{\sin F}{\sin(F + 60^\circ)} \sqrt{\left[(\overline{AF}^2 - 2\overline{AF EF} \cos(F + 60^\circ) + \overline{EF}^2) m^2 - 2(\overline{AF}^2 - \overline{AF EF} \cos(F + 60^\circ)) m + \overline{AF}^2 \right]}.
\end{aligned}$$

又根據前面對內接指定形狀三角形之討論，當指定形狀為正三角形時，其重心為

$$\frac{ac}{b^2 \sin 60^\circ + c^2 \sin 60^\circ - ab \sin 60^\circ + ac \cos 60^\circ}$$

$$\left(\frac{c \sin 60^\circ + b \cos 60^\circ + b}{3} + \left(\frac{ab - b^2}{c} - \frac{c}{3} \right) \sin 60^\circ m, \frac{c \cos 60^\circ - b \sin 60^\circ + c}{3} + \left(\frac{a + b}{3} - b \right) \sin 60^\circ m \right)$$

其中 $\frac{ac}{b^2 \sin 60^\circ + c^2 \sin 60^\circ - ab \sin 60^\circ + ac \cos 60^\circ} = \frac{2\Delta ABC \text{面積}}{ACBC \sin(C + 60^\circ)} = \frac{\sin C}{\sin(C + 60^\circ)}$ ，

注意到 $(c \sin 60^\circ + b \cos 60^\circ, c \cos 60^\circ - b \sin 60^\circ)$ 即 (b, c) 轉 -60° 所得之向量，

而 $\left(\frac{ab - b^2}{c} - \frac{c}{3}, \frac{a + b}{3} - b \right)$ 為 $\overrightarrow{G'H'}$ 轉 90° 所得之向量，其中 G' 、 H' 分別為 $\triangle ABC$ 之重心、垂心。

同理，令 \overrightarrow{AF} 沿平面 AEF 轉 -60° 所得之向量為 $\overrightarrow{AF'}$ ， $\triangle AEF$ 之重心、垂心分別為 G_1 、 H_1 ，

$\vec{\omega}$ 表 $\overrightarrow{G_1H_1}$ 沿平面 AEF 轉 90° 所得之向量，則 $\triangle AEF$ 內接正三角形之重心可表示為

$$\frac{\sin F}{\sin(F + 60^\circ)} \left(\frac{\overrightarrow{AF'} + \overrightarrow{AF}}{3} + m \sin 60^\circ \vec{\omega} \right), \text{ 其 } Z \text{ 軸方向之分量即為 } G_z, G_z \text{ 可表示為}$$

$$\frac{\sin F}{\sin(F + 60^\circ)} \left(\frac{\overrightarrow{AF'_z} + \overrightarrow{AF_z}}{3} + m \sin 60^\circ \vec{\omega}_z \right), \text{ 代回 } |\overrightarrow{HI}|q, \text{ 得}$$

$$|\overline{HI}|_q =$$

$$\frac{\sqrt{[(\overline{AF}^2 - 2\overline{AF}\overline{EF}\cos(F+60^\circ) + \overline{EF}^2)m^2 - 2(\overline{AF}^2 - \overline{AF}\overline{EF}\cos(F+60^\circ))m + \overline{AF}^2]}f}{\left\{ \frac{\sin(F+60^\circ)}{\sin F} f - \left(\frac{\overline{AF}'_z + \overline{AF}_z}{3} + m \sin 60^\circ \overline{\omega}_z \right) + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{[(\overline{AF}^2 - 2\overline{AF}\overline{EF}\cos(F+60^\circ) + \overline{EF}^2)m^2 - 2(\overline{AF}^2 - \overline{AF}\overline{EF}\cos(F+60^\circ))m + \overline{AF}^2]} \frac{\overline{n}_z}{|\overline{n}|} \right\}}$$

$$\text{令 } (\overline{AF}^2 - 2\overline{AF}\overline{EF}\cos(F+60^\circ) + \overline{EF}^2) = \alpha, \quad -2(\overline{AF}^2 - \overline{AF}\overline{EF}\cos(F+60^\circ)) = \beta, \quad \overline{AF}^2 = \gamma,$$

$$\frac{\sin(F+60^\circ)}{\sin F} f - \frac{\overline{AF}'_z + \overline{AF}_z}{3} = \chi, \quad -\sin 60^\circ \overline{\omega}_z = \delta, \quad \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\overline{n}_z}{|\overline{n}|} = \sigma,$$

$$\text{則 } |\overline{HI}|_q = \frac{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\chi + \delta m + \sigma \sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}} f, \text{ 其中 } f \text{ 為 } D \text{ 至底面 } ABC \text{ 之距離。}$$

請注意，在上面諸式中，只有 m 為變數，其餘皆為常數。

我們想要求 $\frac{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\chi + \delta m + \sigma \sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}$ 之最小值，可這相當於求

$$\frac{\chi + \delta m + \sigma \sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}} = \frac{\chi + \delta m}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}} + \sigma \text{ 之最大值。}$$

只需看 $\frac{\chi + \delta m}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}$ ，令 $y = \frac{\chi + \delta m}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}$ ，將兩邊同時平方並移項得

$$(\alpha y^2 - \delta^2)m^2 + (\beta y^2 - 2\chi\delta)m + \gamma y^2 - \chi^2 = 0$$

$$\text{若 } (\alpha y^2 - \delta^2) \neq 0 \quad \text{因 } m \in \mathbb{R}, \text{ 故判別式 } \geq 0, \text{ 即 } (\beta y^2 - 2\chi\delta)^2 - 4(\alpha y^2 - \delta^2)(\gamma y^2 - \chi^2) \geq 0$$

化簡可得 $y^2 \leq \frac{4(\alpha\chi^2 + \gamma\delta^2 - \beta\chi\delta)}{4\alpha\gamma - \beta^2}$ ，"=" 成立時，此時代回原方程式化簡得

$$m = \frac{2\gamma\delta - \beta\chi}{2\alpha\chi - \beta\delta} \text{。} (\text{※經過討論，可將 } (\alpha y^2 - \delta^2) = 0 \text{ 之情況排除。})$$

將 α 、 β 、 γ 、 χ 、 δ 、 σ 代回，得

$$m = \frac{-\overline{AF}^2 (\sin 60^\circ \overline{\omega_z}) + (\overline{AF}^2 - \overline{AF} \overline{EF} \cos(F+60^\circ)) \left(\frac{\sin(F+60^\circ)}{\sin F} f - \frac{\overline{AF_z} + \overline{AF_z}}{3} \right)}{(\overline{AF}^2 - 2\overline{AF} \overline{EF} \cos(F+60^\circ) + \overline{EF}^2) \left(\frac{\sin(F+60^\circ)}{\sin F} f - \frac{\overline{AF_z} + \overline{AF_z}}{3} \right) - (\overline{AF}^2 - \overline{AF} \overline{EF} \cos(F+60^\circ)) (\sin 60^\circ \overline{\omega_z})}$$

時， $\frac{\chi + \delta m}{\sqrt{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}}$ 有最大值 $\sqrt{\frac{4(\alpha\chi^2 + \gamma\delta^2 - \beta\chi\delta)}{4\alpha\gamma - \beta^2}}$ ，所以此時固定選取面所作之內接正四面

體邊長有最小值 $\frac{1}{\sqrt{\frac{4(\alpha\chi^2 + \gamma\delta^2 - \beta\chi\delta)}{4\alpha\gamma - \beta^2} + \sigma}} f$ 。

我們注意到，利用上面這個 m 之表達式，可以搭配 立體幾何作圖軟體，將這個產生最小值的點作出。

<情況三> 若選取面不固定時：

由於計算過於繁雜，我們寄望來日得解此問題。

三、三角形及四邊形之內切橢圓

在前面的研討後，我們現在轉而探索三角形的內切橢圓。接下來，請讓我們把圓視為橢圓的特例。

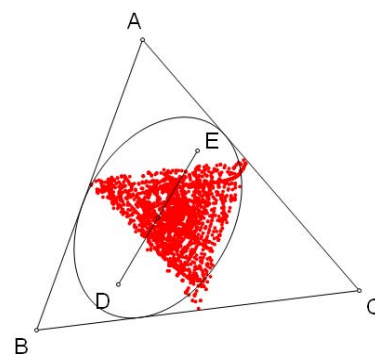
(三---1) 三角形的內切橢圓的 Gergonne 點的軌跡及中心之軌跡

我們知道，若 $\triangle ABC$ 的內切圓分別切三邊 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 於 D, E, F 三點，則 \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} 會共點於所謂的 Gergonne 點，而同樣的結論對 $\triangle ABC$ 的任一內切橢圓也成立。那麼，就讓我們把由內切橢圓所產生的這種特殊點稱為「廣義的 Gergonne 點」而簡稱為「Gergonne 點」吧。

我們問： $\triangle ABC$ 的內切橢圓的中心的軌跡及 Gergonne 點的軌跡為何？

首先，若 D, E, F 分別為 $\triangle ABC$ 的三邊 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 上的點，滿足 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = 1$ ，則由[1]、[2]，我們可作出跟 $\triangle ABC$ 內切於 D, E, F 的橢圓。於是，讓 D, E, F 在符合條件下任意變動，便不難看出 Gergonne 點佈滿於整個 $\triangle ABC$ 的內部區域。如此一來，廣義的 Gergonne 點豈非無聊？其實不然！請看下文。

其次，由實驗(如右圖)我們猜測： $\triangle ABC$ 的內切橢圓的中心軌跡是以此三角形三中點為頂點的三角形(簡稱「中點三角形」)的內部區域。



我們先是想到模仿牛頓使用投影法(見[3])的精神再輔以平面的解析幾何技巧而證實此猜測。不久，卻發現在 1947 年的 AMS 數學月刊(見[5])上已經有相關的討論。雖然如此，我們仍幸運地發現另一種饒富幾何興味的證明方法，請見下面的(三--3)節。

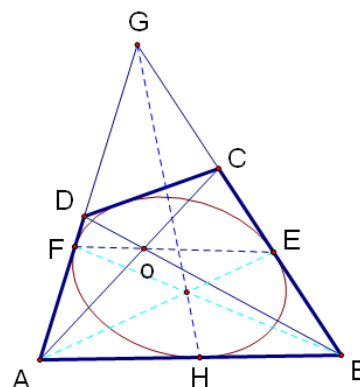
(三--2) 四邊形內切橢圓的 Gergonne 點的軌跡

類似地，我們也考慮「四邊形內切橢圓的中心軌跡」，結果我們在[3]中發現這問題早就被牛頓解決了，答案是「兩條對角線的中點所成的線段(不含這兩中點)」。

我們不禁納悶：那麼，四邊形內切橢圓的 Gergonne 點的軌跡為何呢？

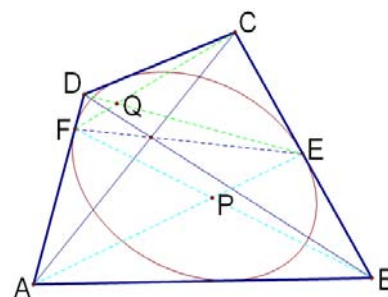
可是，Gergonne 點不是對三角形來講的嗎？

如右圖，設四邊形 $ABCD$ 的對邊 AD, BC 延長線相交於點 G 。那麼，四邊形 $ABCD$ 的任一個內切橢圓 Γ 皆是 $\triangle ABG$ 的內切橢圓。於是，相鄰兩頂點 A, B 與對邊切點 E, F 的連線 $\overline{AE}, \overline{BF}$ 相交於 $\triangle ABG$ 的一個 Gergonne 點。由此引發我們做如下的定義。



定義：

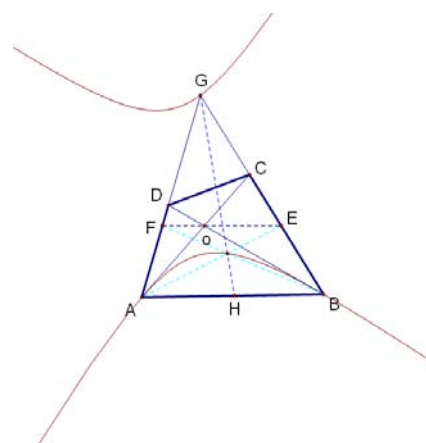
任給四邊形 $ABCD$ (允許對平行) 及其一內切橢圓。考慮對邊 $\overline{AD}, \overline{BC}$ 及切點 E, F 。則稱 $\overline{AE}, \overline{BF}$ 之交點 P 及 $\overline{DE}, \overline{CF}$ 之交點 Q 皆為 $ABCD$ 的 Gergonne 點。同理，考慮對邊 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 時，就產生另兩個 Gergonne 點。



因此，

我們問：固定四邊形 $ABCD$ 的相鄰兩頂點時，所有的 Gergonne 點(如上述定義中 $\overline{AE}, \overline{BF}$ 之交點 P)的軌跡為何？

經實驗後，我們猜測其圖形為雙曲線之一部分(如右圖)，加上在 Cabri 3D 上，軟體直接顯示圖形為雙曲線，激起我們的鬥志於是做了以下計算。



(由於過程繁複，故使用 Mathematica 輔助化簡。)

如右圖，設立直角座標系。

$$\text{由 } \overrightarrow{AD} : ex - dy = 0, \quad \overrightarrow{BC} : cx + (a-b)y = ac,$$

$$\overrightarrow{AC} : cx - by = 0, \quad \overrightarrow{BD} : ex + (a-d)y = ae,$$

$$\text{解 } \begin{cases} cx - by = 0 \\ ex + (a-d)y = ae \end{cases}, \text{ 得 } O\left(\frac{abe}{(a-d)c+be}, \frac{ace}{(a-d)c+be}\right),$$

$$\text{故 } \overrightarrow{FO} : \left(\frac{ace}{(a-d)c+be} - et\right)x - \left(\frac{abe}{(a-d)c+be} - dt\right)y = \frac{(acde - abe^2)t}{(a-d)c+be},$$

於是解得 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FO}$ 交於

$$E\left(\frac{a^2bce + \{ae(a-b)(cd-be) - acd[(a-d)c+be]\}t}{a^2ce + [-e(a-b) - cd][(a-d)c+be]t}, \frac{a^2c^2e - a^2c^2et}{a^2ce + [-e(a-b) - cd][(a-d)c+be]t}\right)。$$

進而知 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}$ 之交點 P 之 x, y 座標分別為

$$x = \frac{a^2bce + [abe(be - cd - ae) - acd(ac - cd + be) + a^2cde]t^2}{(ac)^2 + [-(ac)^2 + ac(be - cd)]t + (be - cd)(be - cd - ae)t^2},$$

$$y = \frac{a^2c^2et + (-a^2c^2e)t^2}{(ac)^2 + [-(ac)^2 + ac(be - cd)]t + (be - cd)(be - cd - ae)t^2}。$$

我們要設法消去參數 t ，由於式子過於繁複，便令

$$x = \frac{\delta t^2 + \sigma t}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}, \quad y = \frac{\mu t^2 + \omega t}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma},$$

其中 $\alpha = (be - cd)(be - cd - ae)$ ， $\beta = [-(ac)^2 + ac(be - cd)]$ ， $\gamma = (ac)^2$

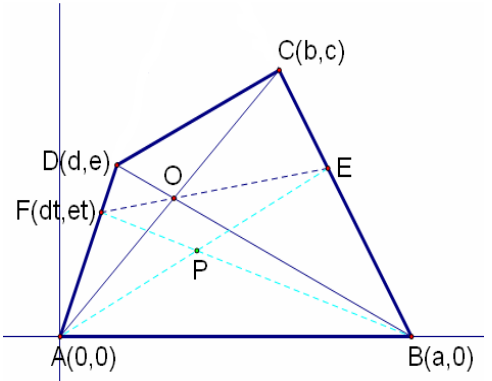
$\delta = abe(be - cd - ae) - acd(ac - cd + be) + a^2cde$ ， $\sigma = a^2bce$ ， $\mu = -a^2c^2e$ ， $\omega = a^2c^2e$ 。

$$x = \frac{\delta t^2 + \sigma t}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} = \frac{\frac{\delta}{\alpha}(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + \left(\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha}\right)t - \frac{\delta\gamma}{\alpha}}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\left(\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha}\right)t - \frac{\delta\gamma}{\alpha}}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} \dots\dots ①$$

$$y = \frac{\mu t^2 + \omega t}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} = \frac{\frac{\mu}{\alpha}(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + \left(\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha}\right)t - \frac{\mu\gamma}{\alpha}}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{\mu}{\alpha} = \frac{\left(\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha}\right)t - \frac{\mu\gamma}{\alpha}}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} \dots\dots ②$$



$$\textcircled{1}/\textcircled{2} \text{ 得 } \frac{x - \frac{\delta}{\alpha}}{y - \frac{\mu}{\alpha}} = \frac{(\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha})t - \frac{\delta\gamma}{\alpha}}{(\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha})t - \frac{\mu\gamma}{\alpha}} \text{ 化簡得 } t = \frac{(\frac{\mu\gamma}{\alpha})(x - \frac{\delta}{\alpha}) - (\frac{\delta\gamma}{\alpha})(y - \frac{\mu}{\alpha})}{(x - \frac{\delta}{\alpha})(\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha}) - (y - \frac{\mu}{\alpha})(\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha})} .$$

$$\text{又 } (x - \frac{\delta}{\alpha})(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = (\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha})t - \frac{\delta\gamma}{\alpha} \dots\dots \textcircled{3}$$

$$(y - \frac{\mu}{\alpha})(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = (\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha})t - \frac{\mu\gamma}{\alpha} \dots\dots \textcircled{4}$$

將 $\textcircled{3} \times (\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha})$ 減 $\textcircled{4} \times (\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha})$ 消去右式之 t ，

$$\text{並將左式之 } t \text{ 以 } \frac{(\frac{\mu\gamma}{\alpha})(x - \frac{\delta}{\alpha}) - (\frac{\delta\gamma}{\alpha})(y - \frac{\mu}{\alpha})}{(x - \frac{\delta}{\alpha})(\omega - \frac{\mu\beta}{\alpha}) - (y - \frac{\mu}{\alpha})(\sigma - \frac{\delta\beta}{\alpha})} \text{ 代入}$$

$$\text{化簡得 } \begin{aligned} & \sigma^2 y(\mu - \alpha y) + \sigma(-\beta\omega x - \delta\omega y - \beta\mu xy + 2\alpha\omega xy + \beta\delta y^2) \\ & = -\delta\omega^2 x + \gamma\mu^2 x^2 - \beta\mu\omega x^2 + \alpha\omega^2 x^2 - 2\gamma\delta\mu xy + \beta\delta\omega xy + \gamma\delta^2 y^2 \end{aligned} .$$

由上式確定軌跡圖形為二次曲線，其中

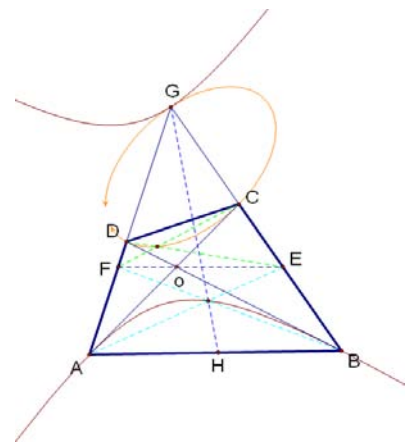
xy 項之係數為 $(-\beta\sigma\mu + 2\alpha\sigma\omega - 2\gamma\delta\mu + \beta\delta\omega)$ ，

x^2 項之係數為 $(-\gamma\mu^2 + \beta\mu\omega - \alpha\omega^2)$ ，

y^2 項之係數為 $(-\alpha\sigma^2 + \beta\delta\sigma - \gamma\delta^2)$ 。

代入判別式 $B^2 - 4AC$ ，化簡得 $(\beta^2 - 4\alpha\gamma)(\sigma\mu - \delta\omega)^2$ 。

經實際代數字驗證，無法確定 $(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ 正負，引起我們
懷疑：難道有負的情況，也就是橢圓的情形嗎？經實驗發現真的
有橢圓的情形，原來是我們忽略了存在於較短邊的C、D兩
角，如右圖，果然橢圓的情況真的存在。



我們想分析判別式 $(\beta^2 - 4\alpha\gamma)(\sigma\mu - \delta\omega)^2$ 之正負。顯然，

只需看 $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ，其中

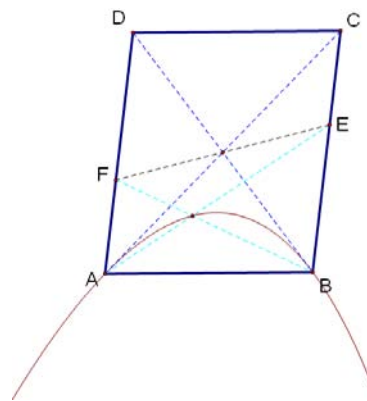
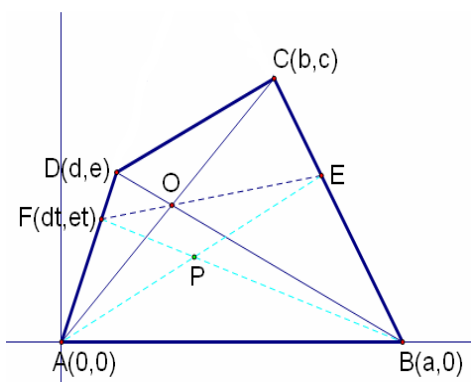
$$\beta = [-(ac)^2 + ac(be - cd)]，\alpha = (be - cd)(be - cd - ae)，\gamma = (ac)^2，\text{代入化簡得}$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = c^2 e^2 [(be - cd)^2 + (ac)^2 - 2ac(be - cd) - 4(be - cd)^2 + 4ae(be - cd)]$$

$$= c^2 e^2 (2\Delta ACD)^2 + (2\Delta ABC)^2 - 2(2\Delta ABC)(2\Delta ACD) - 4(2\Delta ACD)^2 + 4(2\Delta ABD)(2\Delta ACD)$$

$$= (2\Delta ACD - 2\Delta ABC)^2 + 4(2\Delta ACD)(2\Delta ABD - 2\Delta ACD) .$$

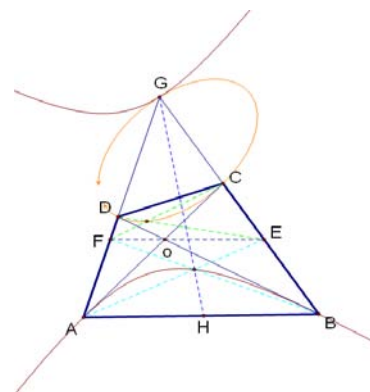
(補充說明： $be - cd > 0$ ，可用極座標觀點解釋。)



因此，當四邊形 ABCD 滿足 $\Delta ACD = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta ACD$ 時，其 Gergonne 點之軌跡為拋物線之一部分，又一個內切橢圓產生 4 個 Gergonne 點，我們不難發現，只要是平行四邊形，4 個 Gergonne 點之軌跡都為拋物線之一部分。

以下，爲了方便，請讓我們將「拋物線之一部分」簡稱爲「拋物線」，餘類推。

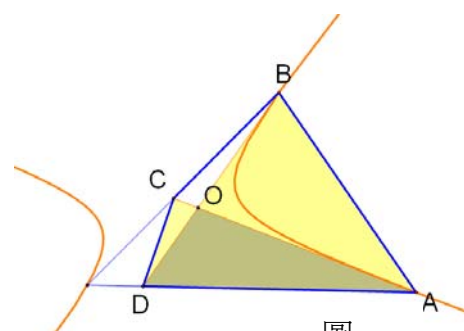
如右圖，以 A、B 所作之 Gergonne 點軌跡爲雙曲線，以 C、D 所作之 Gergonne 點軌跡爲橢圓。



我們猜測：如果一邊上兩頂點所作之 Gergonne 點軌跡爲雙曲線，則對邊上兩頂點所作之 Gergonne 點軌跡是否必爲橢圓？

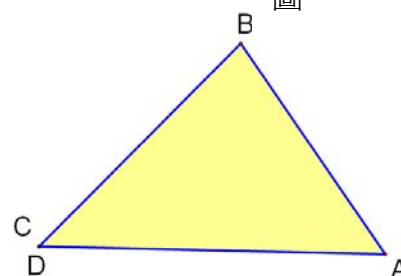
爲此，我們利用平行截線來截三角形而產生一四邊形，當截線平行移動時，即可產生許多各頂角相同的四邊形。藉由改變三角形及截線方向就可產生所有四邊形（平行四邊形除外），因此就可探討所有情況的四邊形內切橢圓 Gergonne 點的軌跡。

首先，若以 $\angle A, \angle B$ 作爲對角（圖一），則在 $(2\Delta ACD - 2\Delta ABC)^2 + 4(2\Delta ACD)(2\Delta ABD - 2\Delta ACD)$ 中，比較 $\Delta ABD, \Delta ACD$ 的共同邊 \overline{AD} 各自所對的高，便可確定 $2\Delta ABD - 2\Delta ACD$ 爲正，故判別式必大於零（對任何三角形及截線方向皆如此），因此 Gergonne 點軌跡爲雙曲線。



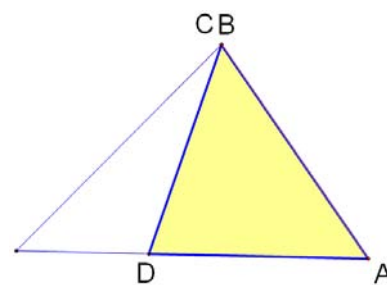
圖一

其次，以 $\angle C, \angle D$ 作爲對角時，經實驗得到有橢圓與雙曲線的情況，並不像我們一開始預期的，對邊上兩頂點所作之 Gergonne 點軌跡爲成對出現之雙曲線、橢圓。我們以判別式 $(2\Delta DBA - 2\Delta DBC)^2 + 4(2\Delta DBA)(2\Delta DCA - 2\Delta DBA)$ 來說明。



圖二

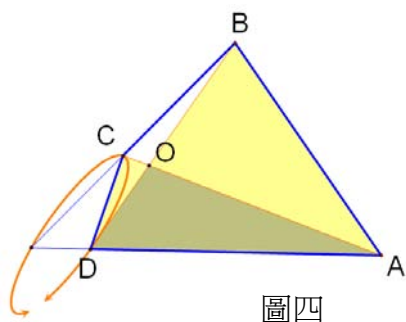
如右圖，將 \overline{DC} 截線平行移至 D, C 近乎與三角形頂角重合（圖二），則此時因 $\triangle DBC$ 與 $\triangle DCA$ 面積趨近於零，則判別式趨近 $(2\triangle DBA)^2 + 4(2\triangle DBA)(-2\triangle DBA)$ 即為負值；反之，若將 \overline{DC} 截線平行移至 C 與 B 近乎重合（圖三），此時除 $\triangle DBC$ 面積趨近於零外， $\triangle DCA$ 面積亦幾乎同於 $\triangle DBA$ 之面積，判別式趨近 $(2\triangle DBA)^2$ 而為正值。



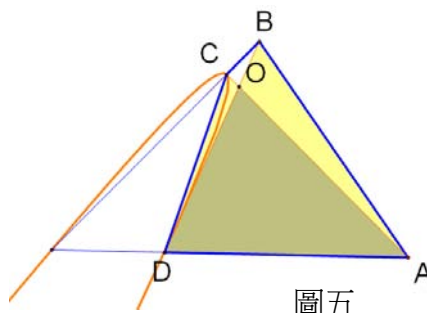
圖三

綜合上述，若使 \overline{DC} 自最端點連續平行跑動到 C 與 B 近乎重合，判別式的值有漸增之勢，

此時Gergonne點軌跡圖形會連續變動逐漸自橢圓轉變為雙曲線（如下圖四、五），這也表示 \overline{DC} 的變動過程中，有一瞬間Gergonne點軌跡為拋物線（因判別式由負變為正過程為連續的），找到這精確點為我們目前努力的方向。



圖四



圖五

$$(2 \cdot ((\text{Area } \triangle DCA) - (\text{Area } \triangle ABC)))^2 + 4 \cdot 2 \cdot (\text{Area } \triangle DCA) \cdot 2 \cdot ((\text{Area } \triangle DBA) - (\text{Area } \triangle DCA)) = 5362.34 \text{ cm}^4$$

$$(2 \cdot ((\text{Area } \triangle DBA) - (\text{Area } \triangle CBD)))^2 + 4 \cdot 2 \cdot (\text{Area } \triangle DBA) \cdot 2 \cdot ((\text{Area } \triangle DCA) - (\text{Area } \triangle DBA)) = -22531.65440 \text{ cm}^4$$

$$(2 \cdot ((\text{Area } \triangle DBA) - (\text{Area } \triangle CBD)))^2 + 4 \cdot 2 \cdot (\text{Area } \triangle DBA) \cdot 2 \cdot ((\text{Area } \triangle DCA) - (\text{Area } \triangle DBA)) = 807.42552 \text{ cm}^4$$

$$(2 \cdot ((\text{Area } \triangle DBA) - (\text{Area } \triangle CBD)))^2 + 4 \cdot 2 \cdot (\text{Area } \triangle DBA) \cdot 2 \cdot ((\text{Area } \triangle DCA) - (\text{Area } \triangle DBA)) = -7306.79108 \text{ cm}^4$$

$$(2 \cdot ((\text{Area } \triangle DBA) - (\text{Area } \triangle CBD)))^2 + 4 \cdot 2 \cdot (\text{Area } \triangle DBA) \cdot 2 \cdot ((\text{Area } \triangle DCA) - (\text{Area } \triangle DBA)) = 2933.94237 \text{ cm}^4$$

（上方依序為圖一到圖五 Gergonne 點之判別式以 GSP 跑出的數據）

最後，我們在作軌跡圖形時，觀察到軌跡所成之圓錐曲線，似乎與四邊形兩條對角線相切於 A 、 B 兩點。為此，我們計算此軌跡之方程式為

$$\begin{aligned} & \sigma^2 y(\mu - \alpha y) + \sigma(-\beta \omega x - \delta \omega y - \beta \mu xy + 2\alpha \omega xy + \beta \delta y^2) \\ & = -\delta \omega^2 x + \gamma \mu^2 x^2 - \beta \mu \omega x^2 + \alpha \omega^2 x^2 - 2\gamma \delta \mu xy + \beta \delta \omega xy + \gamma \delta^2 y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \alpha &= (be - cd)(be - cd - ae), \quad \beta = [-(ac)^2 + ac(be - cd)], \quad \gamma = (ac)^2, \\ \delta &= abe(be - cd - ae) - acd(ac - cd + be) + a^2cde, \quad \sigma = a^2bce, \\ \mu &= -a^2c^2e, \quad \omega = a^2c^2e, \end{aligned}$$

代入化簡得

$$c^2e^2x^2 + (ac^2e - c^2de - bce^2)xy + (-ac^2d + c^2d^2 + acde - bcde - abe^2 + b^2e^2)y^2 - ac^2e^2x + abce^2y = 0$$

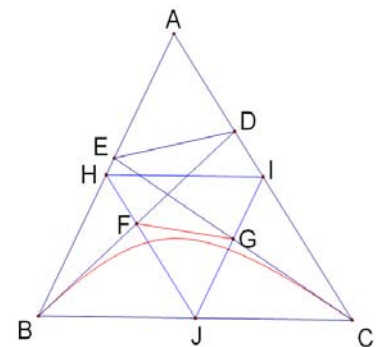
由上式不難算出過 $A(0,0)$ 之切線為 $cx - by = 0$ ，此即對角線 \overline{AC} 之方程式，

又過 $B(a,0)$ 之切線為 $ex + (a-d)y = ae$ ，此即對角線 \overline{BD} 之方程式，證畢。

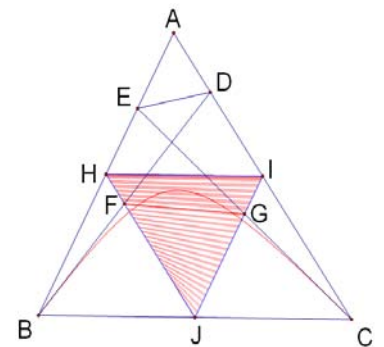
(三---3) 平行截線分解法

從上面的討論過程，我們察覺到，三角形和四邊形的內切橢圓的相關性質其實密切聯繫。

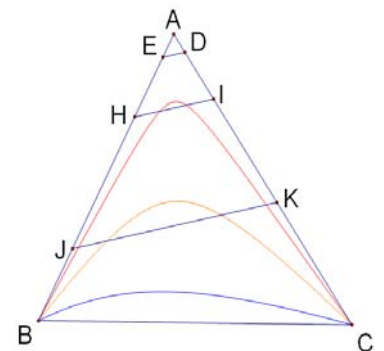
如右圖，三角形 ABC 內部可做出一四邊形 $EBCD$ ， F 、 G 點分別為其對角線 \overline{BD} 、 \overline{EC} 的中點， H 、 I 、 J 分別為三邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 的中點。



我們已知四邊形所有內切橢圓的中心位在其對角線中點連線 \overline{FG} 上，當截線 \overline{ED} 平行跑動，由前述證明配合相似三角形比例性質，我們不難看出 \overline{FG} 會掃出三角形中點三角形內部區域，也就說明了 三角形內切橢圓的中心軌跡形成其中點三角形之內部區域。



至於 **Gergonne** 點，由(三---2)的證明我們知道四邊形的 Gergonne 點軌跡為圓錐曲線，當截線 \overline{ED} 、 \overline{HI} 、 \overline{JK} 平行跑動時產生四邊形 $EBCD$ 、 $HBCI$ 、 $JBCK$ 的 Gergonne 點 (\overline{ED} 平行 \overline{HI} 和 \overline{JK})，即可看出當截線平行移動時 **Gergonne** 點的變動模式，故知 三角形內所有 Gergonne 點可遍滿三角形內部。



頗堪注意者，利用上述之法(簡稱為「平行截線分解法」)，我們不但證明了：

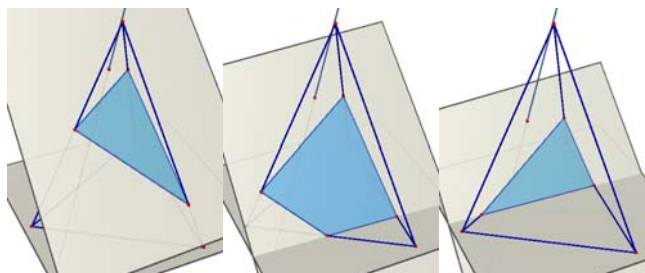
ΔABC 的內切橢圓的中心軌跡為中點三角形之內部區域，
而且還分解出其內部的幾何結構，

等於是對文獻[5]做了補充。

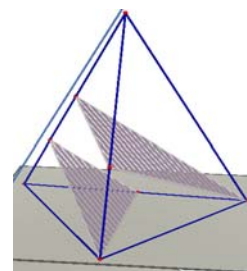
四、四面體的內切橢圓的軌跡問題

(四---1)對平行截面討論變化情形及內切橢圓中心軌跡

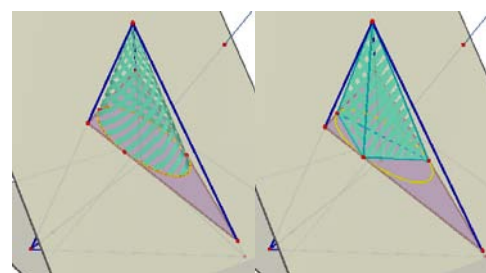
現在我們要把對內切橢圓的討論從平面延伸到立體。我們從四面體的平行截面出發，如右圖，我們要將第(三)章中關於平面的結果應用到「以同一法向量的平面所截出的三角形、四邊形」中，以探討截面連續變動時幾何圖形的變化及特殊點的軌跡。



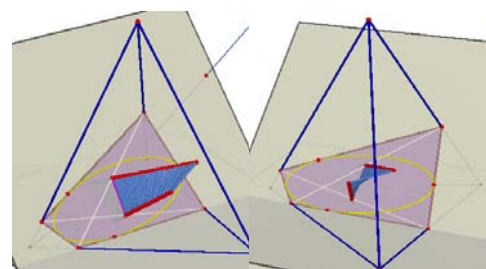
經實驗觀察，如右圖，截出三角形的區域與截出四邊形的區域有兩個分界處，我們分情況討論。



在截出三角形的區域，這些三角形的內切橢圓會與四面體的三面相切，而且任一內切橢圓隨截面連續變動而縮小、放大，進而掃描出一個橢圓錐，而橢圓中心會存在於一三角錐內，Gergonne 點的軌跡則會遍滿可由截面產生三角形的區域內。



而在四邊形區域內，由於四邊形不呈相似放大，故截面變動時橢圓所跑出的圖形不能確定，但在中心軌跡方面，如右圖，我們發現其為兩不平行線段所成的線織面，於是做了下列的證明。



證明：由於此軌跡是由平面所截出四邊形之對角線的中點連線所構成，故只要確定對角線中點軌跡為線段便可解釋，因為對角線是由兩對稜所構成，將兩稜分別用參數 t, s 表示。利用對角線的方向向量與平行截面法向量垂直，我們就可將 t 用 s 表示，於是，對同一個四邊形而言，兩條對角線的中點的座標皆可表為參數 s 的一次式，故可確定內切四面橢圓的中心軌跡為兩不平行線段所成的線織面。

另外，在平面上我們所發現的 Gergonne 點軌跡，經截面平行移動後，由於四邊形不是相似放大，一開始只能確定它會跑出一連續且平滑的曲面。又當四邊形為平行四邊形時，由(三---2)的結果可知此曲面是由拋物線(之一部份)連續地變動而成的。

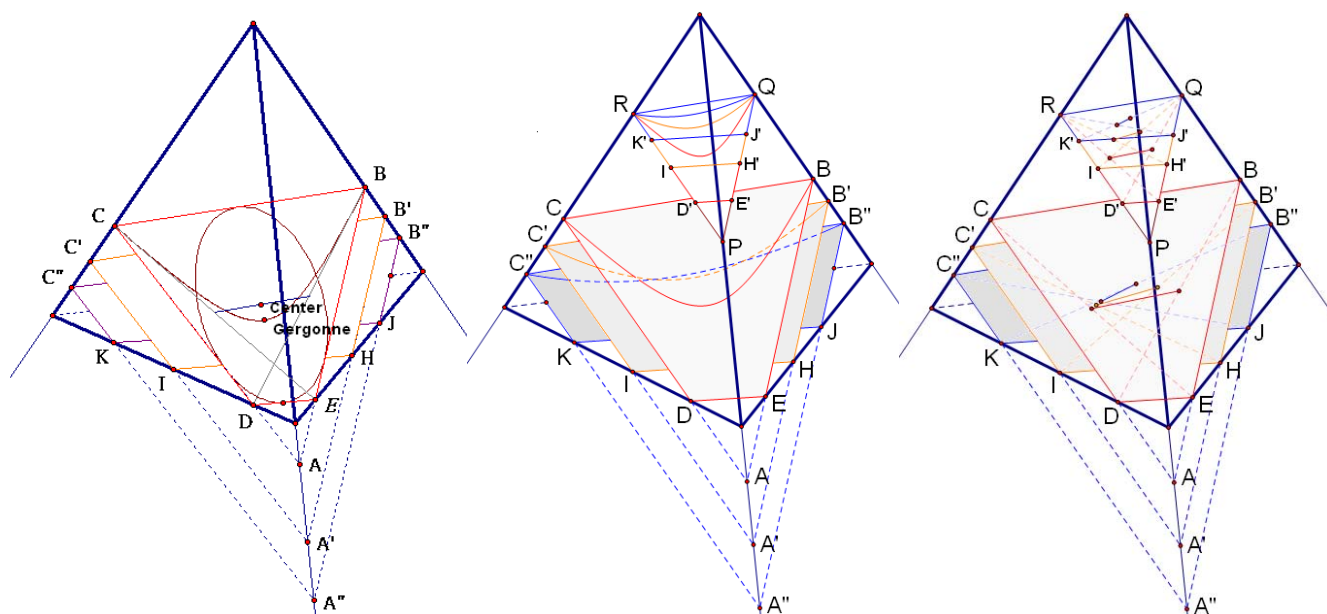
此外，非常值得注意的是，根據(三---2)的結果可知，此曲面會與「平行截面所截四邊形之對角線所跑出的曲面」相切於四邊形頂點所在的稜上。

(四---2)平行截面分解法

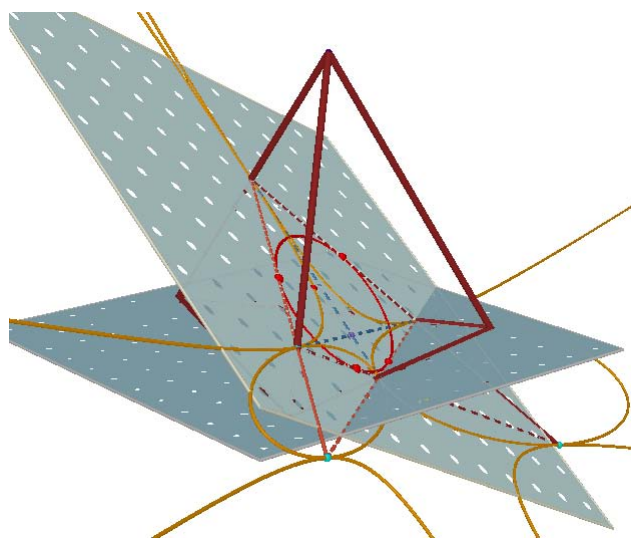
在前面的討論中，不難看出，如果把任何一個內切四面體逐步往第四面移動並相似地放大，那麼，當它剛好碰到第四面的時候，就變成內切四面體了。於是，我們就可以把(三---3)的「平行截線分解法」調整成「平行截面分解法」，而有以下的觀察：

當截面平行而連續地變動時，若設 ΔPQR 是其中一個被截出的三角形 (ΔPQR 平行於下圖中的 $\Delta ABC, \Delta A'B'C', \Delta A''B''C''$)，則

1. ΔPQR 的內部區域變形為「截出四邊形的區域的其中一個 Gergonne 點的軌跡曲面 Ω 」，且 ΔPQR 內由 Gergonne 點所形成的一條條的圓錐曲線皆相應地伸縮、平移而成為躺在 Ω 上的圓錐曲線。(同色相對應)
2. ΔPQR 的中點三角形的內部區域，即 ΔPQR 的內切橢圓的中心軌跡，會以跟上面的 1. 所描述的方式變形成為「截出四邊形區域的內切四面體的內切四面體的中心所形成的線織面」。



實際用 Cabri3D 所做出的----以平行截面截一四面體而截出四邊形時四邊形內切橢圓之四個 Gergonne 點的軌跡。將此截面平行移動即可掃出四個曲面。



伍、結論：

1. 三角形內接指定形狀三角形：

(1)其五心軌跡分別在一條直線上。

(2)當 $m = \frac{\overline{AC}(\overline{AC} - \frac{1}{r}\overline{BC}\cos(\theta + C))}{X^2}$ 時產生最小值，其中 m 為一邊上之參數，我們可以用尺規作圖的方法將此點作出，又，產生最小值時其中一邊長為 $\frac{2\Delta_{ABC}\text{面積}}{rX}$ ，其中

$$X^2 = \overline{AC}^2 - \frac{2}{r}\overline{ACBC}\cos(\theta + C) + \frac{1}{r^2}\overline{BC}^2。$$

2. 四面體內接正四面體：

(1) 當選取面不固定時，其重心軌跡為一立體空間的區域。

(2) 當選取面與四面體某面平行時，其重心軌跡在同一平面上，且為一四次曲線。

(3) 當選取面與四面體某面平行時，欲找出其最小或最大值，只要在該面之三角形內，找出最小或最大之內接正三角形即可。

(4) 當選取面之法向量固定，而不與四面體某面平行，我們算出最小值之產生情況，且能用立體幾何作圖軟體找出最小值之發生點。

3. 作一四邊形之內切橢圓：

- (1) 其 Gergonne 點(有 4 個)之軌跡皆為圓錐曲線的一部分。
- (2) 一般四邊形皆可放入三角形中，作為底的一邊，其 Gergonne 點的軌跡必為雙曲線的一部分，而其對邊的軌跡則可能為各類圓錐曲線，又當四邊形為平行四邊形時，4 個特殊點之軌跡都分別為拋物線之一部份。
- (3) 其 Gergonne 點之軌跡與兩對角線分別相切於四邊形兩頂點上。

4. 以同一法向量的平面截一四面體，

- (1) 在截出三角形的區域內，三角形內切橢圓會隨截面連續變動跑出許多橢圓錐，而橢圓中心會存在於由「中點三角形」所構成的三角錐內，Gergonne 點的軌跡則會遍滿可由截面產生三角形的區域內。
- (2) 在截出四邊形的區域內，四邊形內切橢圓中心軌跡為兩歪斜線段所成的線織面，Gergonne 點的軌跡為圓錐曲線所掃出的曲面的一部分。
- (3) 當截面平行而連續地變動時，固定其中任何一個截出的三角形，它會以巧妙的結構地變形為「截出四邊形之區域」的「所有內切四面橢圓的 Gergonne 點軌跡曲面及中心軌跡線織面」。

陸、討論與未來展望：

1. 三角形內接指定形狀三角形，其五心軌跡之方向有什麼幾何特性？
2. 四面體內接正四面體的邊長最小值與重心軌跡仍盼更加透徹更加完整的了解。
3. 給定一四面體，可作內切三面圓、內切四面圓，希望探討其圓心軌跡與最大最小值。

柒、參考資料

- [1] 笹部貞市郎 著，幾何學辭典，九章出版社
- [2] H.S.M 考克塞特 S.L 格雷特 著，幾何學新探索，凡異出版社
- [3] 海因里希.德里 著，100 個著名初等數學問題歷史和解答，凡異出版社
- [4] 高二數學課本南一版第四冊 及 高三數學甲康熙版上冊
- [5] Elementary problems and solutions—Inscribed ellipses, AMS monthly, April 1947
- [6] 劉璋，任意三角形內接正三角形，中華民國第 40 屆中小學科展
- [7] 賴亮如，三角形五心座標的向量解法，中華民國第 21 屆中小學科展

【評語】 040404

策劃科展作品時，請思考要如何利用圖形來解說。如果實驗數據的確很重要，請盡量以圖表來呈現。如果幾何圖形能夠作有意義的動態變化，請用動態畫面取代靜態畫面。